Université de Paris 7 **2009-2010**
L3 Math

Intégration et Probabilités 6

Exercice 1. Montrer que la fonction : $F :]-\infty, 0[\to \mathbb{R}, x \mapsto \int_0^\infty \exp(xt) \frac{t+1}{\sqrt{t}} dt$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$.

Exercice 2.

1. Déterminer l'intervalle $I \subset \mathbb{R}$ formé des réels x tels que l'on ait $F(x) < \infty$ où $F(x) = \int_0^\infty \frac{t^x}{(1+t)^2} dt$.
2. Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I.

Exercice 3. Domaîne de définition de la fonction $F(x, y) = \int_0^\infty \frac{\exp(-ty)}{t^x} dt$? Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$.

Exercice 4.

1. Soit la fonction $g :]0, 1[\to \overline{\mathbb{R}}, g(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp(ux)}{\exp x+1} dx$. Montrer g est finie et de classe $\mathcal{C}^\infty$.
2. Montrer que, pour tout $t > 0$:

$$\int_t^{+\infty} + \int_{-\infty}^{-t} \frac{\exp(ux)}{\exp x + 1} dx = \frac{\exp(-ut)}{u} + \sum_1^\infty (-1)^n \big(\frac{\exp(-(u+n)t)}{u+n} + \frac{\exp(-(-u+n)t)}{u-n} \big).$$

Exercice 5. Soit la fonction $f :]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\times]-1, +\infty[\to \mathbb{R}, f(u, x) = \int_0^{+\infty} t^x \exp(-t \cos u) dt$.

1. Montrer que f est bien définie et de classe $\mathcal{C}^1$.
2. Calculer $\frac{\partial f}{\partial u}$ au moyen de f.
3. Exprimer f au moyen de la fonction Γ définie sur $]0, +\infty[$ par $\Gamma(x) = \int_0^\infty \exp(-t) t^{x-1} dt$.

Exercice 6.

1. Soit $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ dérivable en 0 et telle que $\phi(0) = 1$. Calculer $\lim_{a\to 0} (\phi(a))^{\frac{1}{a}}$.
2. Soit $f : [0, 1] \to \mathbb{R}_+^*$ continue. On pose $I(a) = \int_0^1 (f(x))^a dx$. Montrer que I est dérivable. Montrer que :

$$\lim_{a\to 0_+} (\int_0^1 (f(x))^a dx)^{\frac{1}{a}} = \exp(\int_0^1 \mathrm{Log} f(x) dx).$$

On peut démontrer que le résultat est vrai sous l'hypothèse plus faible que f soit intégrable sur $[0,1]$.

Exercice 7. Fonction Gamma

1. On pose $\forall x>0$, $\Gamma(x)=\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt$. Montrer que la fonction Γ est continue, puis de classe C^∞ sur $]0,+\infty[$, et calculer ses dérivées.

2. Soit a et s deux réels strictement positifs.

   (a) Calculer $A=\displaystyle\int_0^{+\infty} t^{s-1}e^{-at}dt$.

   (b) Montrer que pour $s>1$ on a $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{t^{s-1}}{e^t-1}dt=\sum_{n\geq 1}\Gamma(s)n^{-s}$.

   (c) Exprimer $A_n=\int_0^{+\infty} t^{2n}e^{-t^2}dt$ en fonction de Γ.

   (d) Montrer que la fonction $t\mapsto e^{-t^2}\cos(at)$ est intégrable sur $[0,+\infty[$. Calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\cos(at)dt$ à partir de $\Gamma(\frac{1}{2})=\sqrt{\pi}$.

Exercice 8. Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^+$ une fonction borélienne telle que $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{|x|}f(x)dx<+\infty$.

1. Montrer que pour tout $y\in\mathbb{R}$, la fonction $x\mapsto\cos(xy)f(x)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$. Pour $y\in\mathbb{R}$, on pose $F(y)=\int_{\mathbb{R}} cos(xy)f(x)dx$. Montrer que F est de classe C^1 et donner une expression de sa dérivée.

2. Pour $n\in\mathbb{N}$, posons $b_n=\int_{\mathbb{R}}|x|^n f(x)dx$.

3. Montrer que $\forall n\in\mathbb{N}, b_n<+\infty$, et que la série de terme général $\frac{b_n}{n!}$ est convergente.

4. Montrer que la série de terme général $\frac{(-1)^n b_{2n}}{(2n)!}$ est convergente, et que l'on a $F(y)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n b_{2n}}{(2n)!}y^{2n}$, $\forall y\in[-1,1]$.

Exercice 9. On pose pour tout $x>0$, $F(x)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}e^{-xt}dt$.

1. Montrer que F est définie sur $\mathbb{R}^{+*}$, dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ telle que $F'(x)=\frac{-1}{x^2+1}$.

2. Calculer $\lim_{x\to+\infty}F(x)$, et en déduire l'expression de $F(x)$.

3. Montrer que la fonction $\frac{\sin t}{t}$ n'est pas Lebesgue intégrable sur $[0,+\infty[$ et donc que F n'est pas définie en 0.

4. Montrer la convergence de l'intégrale impropre (de Riemann) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t}dt$.