Intégration et Probabilités 7

Exercice I

Soit $E = [0,1] \times [0,1]$ muni de la tribu borélienne et de la mesure de Lebesgue.

1) Soit $f : E \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = \dfrac{x^2 - y^2}{(x^2+y^2)^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$, $f(0,0) = 0$. En remarquant que $\dfrac{\partial}{\partial x}(\dfrac{-x}{x^2+y^2}) = \dfrac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$, calculer $\int_{[0,1]}(\int_{[0,1]} f(x,y)d\lambda(x))d\lambda(y)$, puis $\int_{[0,1]}(\int_{[0,1]} f(x,y)d\lambda(y))d\lambda(x)$.

2) Même question avec $g : E \to \mathbb{R}$ définie par: $g(x,y) = \begin{cases} (x - \frac{1}{2})^{-3} \text{ si } 0 < y < |x - \frac{1}{2}| \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$

3) On munit maintenant un des intervalles $[0,1]$ de la mesure μ de comptage. Calculer $\int_{[0,1]}(\int_{[0,1]} hd\lambda)d\mu$, et $\int_{[0,1]}(\int_{[0,1]} hd\mu)d\lambda$ où $h(x,y) = 1$ si $x = y$ et $h(x,y) = 0$ sinon.

4) Montrer que f, g, h sont mesurables, et expliquer pourquoi le théorème de Fubini ne s'applique pas.

Exercice II intégration par parties

Soient μ_1 et μ_2 des mesures finies sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$ de densité f et g par rapport à la mesure de Lebesgue. On note $F(x) = \mu_1(]-\infty, x])$, $G(x) = \mu_2(]-\infty, x])$.

Soient $\Delta_1 = \{(x,y) | a \leq y < x \leq b\}$, et $\Delta_2 = \{(x,y) | a \leq x \leq y \leq b\}$. En considérant de deux manières différentes la quantité $(\mu_1 \otimes \mu_2)(\Delta_1 \cup \Delta_2)$, établir la formule "d'integration par parties":

$$F(b)G(b) - F(a)G(a) = \int_{[a,b]} F(x)g(x)d\lambda(x) + \int_{[a,b]} G(x)f(x)d\lambda(x)$$

Exercice III

Soient $(E, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré σ-fini et $f : E \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable.

1) Montrer que l'application $g : E \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ définie par $(x,t) \mapsto g(x,t) = (f(x), t)$ est $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R})$-mesurable. En déduire que le sous-ensemble suivant de $E \times \mathbb{R}$, appelé **graphe** de f, est mesurable:

$$G(f) = \{(x,t) \in E \times \mathbb{R}; f(x) = t\}.$$

2) Soit $(x,t) \in E \times \mathbb{R}$. Vérifier que $\mathbf{1}_{G(f)}(x,t) = \mathbf{1}_{\{f(x)\}}(t)$ et en déduire la valeur de $\mu \otimes \lambda(G(f))$.

3) En réciproque à la question (1), montrer que si f est positive et le sous-ensemble de $E \times \mathbb{R}$ défini par $Hyp(f) = \{(x,t) \in E \times \mathbb{R}; 0 \leq t < f(x)\}$, appelé **hypographe** de f, est dans $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R})$, alors f est $\mathcal{A}$-mesurable.
(*Indication: Montrer que $Hyp(f)_t\{x \in E; (x,t) \in Hyp(f)\}$ est mesurable.*)

Exercice IV

1) Montrer que la fonction $f : [0,1] \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = e^{-y}cos(xy)$ est intégrable pour la mesure de Lebesgue.

2) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\int_0^{+\infty} e^{-y}cos(xy)dy = \dfrac{1}{x^2+1}$.

3) Calculer $\int_0^{+\infty} e^{-y}\dfrac{\sin y}{y}dy$.

Exercice V

1) Pour $x \in \mathbb{R}$, calculer $\int_{\mathbb{R}} \frac{dy}{x^2+y^2}$.

2) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction telle que la fonction $x \mapsto \frac{f(x)}{x}$ soit intégrable. Montrer que pour tout $y \in \mathbb{R}^*$, la fonction $x \mapsto \frac{f(x)}{x^2+y^2}$ est intégrable.

3) Pour $y \in \mathbb{R}^*$, posons $g(y) = \int_{\mathbb{R}} \frac{f(x)}{x^2+y^2}dx$ et $g(0) = 0$. Montrer que g est intégrable et que $\int_{\mathbb{R}} g(y)dy = \pi \int_{\mathbb{R}} \frac{f(x)}{|x|}dx$.

Exercice VI

1) a) Calculer $\int_0^{+\infty} \sin t \cdot e^{-ut} du$ pour $t > 0$. Appliquer le théorème de Fubini pour calculer l'intégrale impropre (de Riemann) $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}dt = \frac{\pi}{2}$.

b) À l'aide d'une intégration par parties, en déduire $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t^2}dt = \frac{\pi}{2}$.

2) a) Soit $t \in]0, +\infty[$. Sachant que $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ montrer que l'application $(x, y) \mapsto \exp(ix - xy^2)$ est Lebesgue intégrable sur $]0, t[\times]0, +\infty[$. Etablir alors les égalités suivantes:

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2} \int_0^t \frac{\cos x}{\sqrt{x}}dx = \int_0^{+\infty} \frac{y^2}{y^4+1}dy - \int_0^{+\infty} \frac{e^{-ty^2}(y^2\cos t - \sin t)}{y^4+1}dy;$$

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2} \int_0^t \frac{\sin x}{\sqrt{x}}dx = \int_0^{+\infty} \frac{1}{y^4+1}dy - \int_0^{+\infty} \frac{e^{-ty^2}(y^2\sin t + \cos t)}{y^4+1}dy.$$

b) Etablir la convergence des intégrales impropres $\int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{\sqrt{x}}dx$ et $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}}dx$ ainsi que les égalités:

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2} \int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{\sqrt{x}}dx = \int_0^{+\infty} \frac{y^2}{y^4+1}dy;$$

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2} \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}}dx = \int_0^{+\infty} \frac{1}{y^4+1}dy.$$

Au moyen du changement de variable $y = e^x$ appliqué à $I+J$ et à $I-J$, calculer les intégrales: $I = \int_0^{+\infty} \frac{y^2}{y^4+1}dy$ et $J = \int_0^{+\infty} \frac{1}{y^4+1}dy$.

c) En déduire les valeurs des intégrales impropres (dites de Fresnel) $\int_0^{+\infty} \cos x^2 dx$ et $\int_0^{+\infty} \sin x^2 dx$.

Exercice VII

Calculer l'intégrale $\int_D (y-x)d\lambda(x, y)$ où $D = \{(x, y) | 1 \leq xy \leq 4, 0 \leq 2x \leq y, x+y \leq 8\}$ (*Indication: Poser* $u = \sqrt{xy}, v = \frac{x+y}{2}$ *et utiliser Fubini*). rep $24 - 7\sqrt{2}$).