Université de Paris 7 **2009-2010**
L3 Math

Intégration et Probabilités 7, supplément

Exercice I

Soient $P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = 0, y \geq 0\}$ et A un borélien de P. On note $\tilde{A}$ le sous-ensemble de $\mathbb{R}^3$ engendré par la rotation de A autour de l'axe Oz. Montrer que $\tilde{A}$ est borélien et que $\lambda(\tilde{A}) = 2\pi \int_A ydydz$.
Calculer le volume du tore $\tilde{A}$ associé à $A = \{(0, y, z) \mid (y-a)^2 + z^2 \leq r^2\}$ où $a > r > 0$.

Exercice II

Soit $f :]0, \infty[\to \mathbb{R}$ définie par $f(t) = \int_0^\infty \exp(-t(x-1)^2)dx$.

1) On pose $I_n = \iint_{\mathbb{R}^2} \exp(-n(x^2 + y^2 - 1)^2)dxdy$, $(n \in \mathbb{N}^*)$. Calculer I_n au moyen de f et $\lim_{n\to\infty} I_n$.

2) Soit h une fonction continue bornée sur $\mathbb{R}^2$.
Calculer $\lim_{n\to\infty} \sqrt{n} \iint_{\mathbb{R}^2} h(x, y) \exp(-n(x^2 + y^2 - 1)^2)dxdy$.

Exercice III

On pose $\Omega = \{(x, y) \mid x > 0, y > 0, 1 < x^2 + 4y^2 < 4\}, G = \{(x, y) \in \Omega \mid \ y < x\}$,
$\Omega' = \{(x, y) \mid 1 < x < 4, y > 0\}$ et $G' = \{(x, y) \in \Omega' \mid y < 1\}$.

1) Trouver un C^1-difféomorphisme $T : \Omega \to \Omega'$ tel que $T(G) = G'$.

2) Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, f(x, , y) = \dfrac{x^2 - 4y^2}{4x^2}$ si $x \neq 0, f(0, y) = 0$. Montrer que f est borélienne intégrable sur G et calculer l'intégrale. La fonction f est-elle intégrable sur Ω?

Exercice IV

Soit $f :]0, \infty[\to \mathbb{C}$ telle que $x \mapsto \dfrac{f(x)}{1 + x^2}$ soit $\lambda-$intégrable.

1) Montrer que la fonction $g :]0, \infty[\to \mathbb{R}, g(u) = \int_0^\infty f(x) \exp(-ux)dx$ est continue.

2) Pour $0 < a < b$, montrer que, si $I_{a,b} =_{\text{def}} \int_a^b g(u) \sin u \, du$, on a
$I_{a,b} = \int_0^\infty f(x) \int_a^b \sin u \exp(-ux)dudx$.

3) Montrer que $\lim_{a\to 0, b\to\infty} I_{a,b} = \int_0^\infty \dfrac{f(x)}{1 + x^2}dx$.

Exercice V

Soient $(\Omega, \mathcal{T}, \mu)$ un espace mesuré $\sigma-$fini et $f : \Omega \to \mathbb{R}_+$ une fonction mesurable.
On rappelle que le graphe et l'hypographe de f sont $\mathcal{T} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R})$-mesurables. Montrer que, pour $p \geq 1$, on a $\int_\Omega f^p dd\mu = p \int_0^\infty y^{p-1} \mu(\{x \mid 0 \leq y \leq f(x)\}dy$.

Exercice VI

1) Montrer que la mesure image de λ_n par l'application $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+, x \mapsto \|x\|$ est la mesure de densité $t \mapsto a_n t^{n-1}$ (où a_n est une constante) par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}_+$.

2) Montrer que, sur $\mathbb{R}^n$, on a :

$$\int_{\{x \ | \ \|x\| \leq 1\}} \frac{dx}{\|x\|^\alpha} < \infty \text{ si et seulement si } \alpha < n$$

$$\int_{\{x \ | \ \|x\| \geq 1\}} \frac{dx}{\|x\|^\alpha} < \infty \text{ si et seulement si } \alpha > n.$$

Exercice VII

Soient f, g les fonctions définies par :

$$f(x) = \frac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}} \mathbf{1}_{|x|<1}, \quad g(x) = x \exp(-\frac{x^2}{2}) \mathbf{1}_{x>0}.$$

On veut calculer $\iint_{P(a)} f(x)g(y)dxdy$ où $P(a)$ est l'ensemble des couples (x, y) tels que $xy \leq a$. On commencera par faire le changement de variable $(x, y) \mapsto (z, y) = (xy, y)$ puis on posera $u = \sqrt{y^2 - z^2}$.

Exercice VIII

Soient a, b tels que $-1 < a < b$. Montrer que la fonction $f(x, y) = y^x$ est intégrable dans le rectangle $a \leq x \leq b,\ 0 \leq y \leq 1$. Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{y^b - y^a}{\ln y} dy$.

Exercice IX

Calcul du volume de la boule euclidienne unité

Soient $n \geq 1$ et V_n le volume de la boule euclidienne unité B_n définie par

$$B_n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n, x_1^2 + \cdots + x_n^2 \leq 1\}.$$

1) Calculer V_1 et V_2.

2) Soit $n \geq 3$. Etablir que $V_n = \dfrac{2\pi}{n} V_{n-2}$. On remarquera que

$$(x_1^2 + \cdots + x_n^2 \leq 1) \iff (x_{n-1}^2 + x_n^2 \leq 1 \text{ et } x_1^2 + \cdots + x_{n-2}^2 \leq 1 - x_{n-1}^2 - x_n^2).$$

3) En déduire $V_n = \dfrac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)}$.