Université de Paris 7 **2009-2010**

Intégration et Probabilités 8

Exercice I

Etudier la convergence des suites de fonctions suivantes dans $L^1(\mathbb{R},\lambda)$ et dans $L^2(\mathbb{R},\lambda)$:

1) $f_n(t)=\sqrt{n}.e^{-n^2t^2}$ 2) $g_n(t)=\dfrac{n^2\sin(nt)}{2\pi}1_{[-\frac{\pi}{n},\frac{\pi}{n}]}(t)$ 3) $h_n(t)=\dfrac{2}{\pi n^2}\sqrt{n^2-t^2}1_{[-n,n]}(t)$

Exercice II

1) Soit I un intervalle quelconque borné ou non de $\mathbb{R}$. Si f_n (resp. g_n) tend vers f (resp. g) dans $L^1(I)$, a-t-on: f_n+g_n tend vers $f+g$ dans $L^1(I)$?

2) Même question dans $L^2(I)$.

3) Montrer que si f_n (resp. g_n) tend vers f (resp. g) dans $L^2(I)$, alors f_ng_n tend vers fg dans $L^1(I)$.

Exercice III

Soient $(\Omega,\mathcal{A},m)$ un espace mesuré, et p,q deux réels tels que $1\leq p<q<+\infty$.

1) On suppose m finie. Montrer que $L^q\subset L^p$, et que cette inclusion est continue.

2) On suppose maintenant que m est σ-finie. Soit f une fonction de $L^p\cap L^q$.

a) Montrer qu'il existe deux fonctions h et g positives telles que:

$$h\in L^p, g\in L^q, \forall r\in[p,q],\ |f|^r\leq h^p+g^q.$$

b) Montrer que $\forall r\in[p,q],\ L^p\cap L^q\subset L^r$, et que $r\mapsto ||f||_r$ est continue sur $[p,q]$.

c) Montrer que si $f\in L^p\cap L^q$, pour tout r de $[p,q]$ on a:

$$||f||_r\leq ||f||_p^{\alpha}||f||_q^{1-\alpha},\text{ où } \frac{1}{r}=\alpha\frac{1}{p}+(1-\alpha)\frac{1}{q}.$$

Exercice IV

Soit un entier $d\in\mathbb{N}^*$ et un réel $p\in[1,+\infty[$. Soit $f:\mathbb{R}^d\to\mathbb{C}$ une application p-intégrable (au sens de la mesure de Lebesgue λ_d). Pour tout $h\in\mathbb{R}^d$, on considère l'application $f:\mathbb{R}^d\to\mathbb{C}$ définie par $f_h(x)=f(x+h)$.

1) Montrer que $\parallel f_h\parallel_p=\parallel f\parallel_p$.

2) Etablir le *lemme de continuité* :

$$\lim_{h\to 0}\parallel f_h-f\parallel_p=0.$$

(*Indication: commencer par le cas où f est continue à support compact.*)

3) En déduire que l'application $(h\mapsto f_h)$ est uniformément continue de $\mathbb{R}^d$ dans l'espace L^p.

Exercice V

Soient K et f deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ intégrables. On suppose que $\int_{\mathbb{R}}K(u)d\lambda(u)=1$, et on pose $\forall h>0$: $K_h(f)(u)=\int_{\mathbb{R}}\frac{1}{h}K(\frac{u-y}{h})f(y)d\lambda(y)$

1) Montrer que $K_h(f)$ est λ-pp définie, et intégrable.

2) On définit la fonction ψ_h par $\psi_h(u)=\int_{\mathbb{R}}K(t)\left(f(u-ht)-f(u)\right)d\lambda(t)$. Montrer que $\psi_h=K_h(f)-f$, λ-pp.

3) On suppose maintenant que f est continue bornée. On note $||f||=\sup_{u\in\mathbb{R}}|f(u)|$.

a) Montrer que $K_h(f)$ est définie, continue et bornée sur $\mathbb{R}$.

b) Montrer que $\forall u\in\mathbb{R}, \lim_{h\to 0}\psi_h(u)=0$.

4) Montrer que K_hf converge vers f dans $L^1(\mathbb{R},\mathcal{B}_{\mathbb{R}},\lambda_{\mathbb{R}})$. (Commencer par le cas où f est continue à support compact, en utilisant l'exercice précédent.)

Exercice VI

Soient f et g deux fonctions continues sur $\mathbb{R}$ et nulles sur $\mathbb{R}^-$. On pose, pour tout x, $(f*g)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x-t)g(t)d\lambda(t) = \int_{[0,x]} f(x-t)g(t)d\lambda(t)$. Montrer que $f*g$ est bien définie sur $\mathbb{R}$ et nulle sur $\mathbb{R}^-$.

Exercice VII

Soit $f(x) = (1-|x|)1_{[-1,1]}(x)$.

1) Montrer par un calcul direct que

$$\hat{f}(t) = 2\frac{1-\cos(t)}{t^2} \quad (*) \quad .$$

Calculer la transformée de Fourier de la fonction $\mathbf{1}_{[-a,a]}(x)$ avec $a>0$. Retrouver le résultat (*) en remarquant que $f(x) = \mathbf{1}_{[-1/2,1/2]}(x) * \mathbf{1}_{[-1/2,1/2]}(x)$.

2) En déduire que

$$(1-|x|)1_{[-1,1]}(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx}\frac{1-\cos(t)}{t^2}dt.$$

Exercice VIII

Soit $a>0$ et $b>0$. On considère les fonctions $f_a(t) = e^{-at}\mathbf{1}_{]0,+\infty[}(t)$, $g_a(t) = f_a(t) + f_a(-t)$, $h_a(t) = f_a(t) - f_a(-t)$.

1) Graphes et transformées de Fourier de $f_a(t)$, $g_a(t)$ et $h_a(t)$?

2) En déduire les transformées de Fourier de $\dfrac{1}{1+t^2}$ et $\dfrac{1}{2-2t+t^2}$.

3) Montrer que si $f \in L^1$ est dérivable et si $f' \in L^1$ alors $\widehat{f'}(t) = -it\hat{f}(t)$. En déduire la transformée de Fourier de $\dfrac{t}{(1+t^2)^2}$.

4) En déduire la valeur des intégrales

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos(\omega x)}{1+x^2}dx \quad , \quad \int_0^{\infty} \frac{x\sin(\omega x)}{(1+x^2)^2}dx$$

5) Calculer $\dfrac{1}{a+t^2} * \dfrac{1}{b+t^2}$.

Exercice IX

Soit m un entier ≥ 1. On note $\langle .,. \rangle$ le produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}^m$. Soit A une matrice réelle $m \times m$, symétrique et définie positive (i.e. $\langle Ax, x\rangle > 0$ pour $x \neq 0$).

1) Montrer que la fonction $e^{-\alpha\|x\|^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^m$ pour $\alpha > 0$. En utilisant ce résultat montrer que la fonction f définie par $f(x) = \exp(-\langle Ax, x\rangle)$ est dans $\mathrm{L}^1(\mathbb{R}^m)$.

2) Montrer que

$$\int_{\mathbb{R}^m} \exp(-\langle Ax, x\rangle)dx = \pi^{m/2}(\det A)^{-1/2}.$$

(*On pourra utiliser une base de vecteurs propres de A pour faire un changement de variables; on rappelle que* $\int_{\mathbb{R}} e^{-t^2}dt = \pi^{1/2}$.)

3) Soit F la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ définie par $F(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{itx}e^{-x^2}dx$. Montrer que F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et qu'elle vérifie $2F'(t) + tF(t) = 0$. En déduire F.

4) Pour $y \in \mathbb{R}^m$, calculer $\int_{\mathbb{R}^m} \exp(i\langle y, x\rangle - \langle Ax, x\rangle)dx$.