Université de Paris 7 **2009-2010**

Intégration et Probabilités 8, supplément

Exercice I

On pose $K(x) = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{\sin(x/2)}{x/2}\right)^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{+1}(1-|t|)e^{ixt}dt$, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $K_\lambda(x) = \lambda K(\lambda x)$, pour tout $\lambda > 0$.

1. Montrer (par intégration curviligne) que $\int K(x)dx = 1$. Ainsi la convolution par (K_λ) a les propriétés considérées dans l'exercice 8-5 (au remplacement près de h par $1/\lambda$) : on dit que (K_λ) est une approximation de l'unité.
2. Vérifier que, pour $f \in L^1(\mathbb{R})$, on a $\lim\limits_{\lambda\to\infty} \|f - K_\lambda * f\|_1 = 0$.
3. Pour f, $h \in L^1(\mathbb{R})$ telles que $h(x) = \int H(t)e^{2i\pi xt}dt$ avec $H \in L^1(\mathbb{R})$, montrer que
$$(f * h)(x) = \int H(t)\widehat{f}(t)e^{2i\pi xt}dt.$$
où l'on a $\hat{f}(t) = \int f(x)e^{-2i\pi tx}dx$.
4. Montrer que ("théorème de Fejer")
$$f(x) = L^1 - \lim_{\lambda\to+\infty}\left(\int_{-\lambda}^{\lambda}(1-\frac{|t|}{\lambda})\widehat{f}(t)e^{2i\pi tx}dt\right).$$
5. Montrer que si $f \in L^1$ et $\hat{f} \in L^1$, on a $\hat{\hat{f}} = \check{f}$. où l'on a $\check{f}(t) = f(-t)$.

Exercice II

Soit $(E, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré fini et $f \in \mathrm{L}^1(\mu)$ une fonction positive. On pose pour t réel positif ou nul :
$$u(t) = \int_E \frac{f}{1+tf}d\mu.$$

1) Montrer que cela a un sens, que u est continue sur $[0, +\infty[$ et indéfiniment dérivable sur $]0, +\infty[$.

2) Soit $n \geq 1$ un entier. Montrer que u est n fois continûment dérivable sur $[0, +\infty[$ si et seulement si $f \in \bigcap\limits_{1\leq p\leq n+1} \mathrm{L}^p(\mu)$. Calculer dans ces conditions $u^{(n)}(0)$.

Exercice III

Pour $\sigma \in [0, 1]$, on pose $f_\sigma(t) = \int_0^1 \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(t-x)^2}{2\sigma^2}}dx$. On rappelle que $\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{u^2}{2}}du = 1$.

1) Montrer que f_σ est C^∞ pour tout $\sigma \in]0, 1[$.

2) On fixe $p \in [1, +\infty[$. En faisant le changement de variable $u = \frac{t-x}{\sigma}$ dans la définition de f_σ, montrer que:
$$\int_{\mathbb{R}} |f_\sigma - 1_{[0,1]}|^p d\lambda \leq \int_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{u^2}{2}}|1_{[\sigma u,\sigma u+1]}(t) - 1_{[0,1]}(t)|^p d\lambda(u, t).$$

3) En déduire que $1_{[0,1]}$ est limite dans L^p d'une suite de fonctions C^∞. Comparer ce résultat avec celui de l'exercice 1..

Exercice IV

Soit $t \in \mathbb{R}$.

1) Soit $f :]0,+\infty[\to \mathbb{C}$ une application borélienne, λ-intégrable.

a) Etudier la limite : $\displaystyle\lim_{t\to+\infty}\int_{]0,+\infty[} e^{-tx}f(x)d\lambda(x)$.

b) On suppose que f est bornée et que $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} f(x)=\gamma_0\in\mathbb{C}$. Etudier les limites suivantes :

$$\lim_{t\to+\infty} t\int_{]0,+\infty[} e^{-tx}f(x)d\lambda(x); \qquad \lim_{t\to+\infty}\int_{]0,+\infty[}\frac{tf(x)}{1+t^2x^2}d\lambda(x).$$

2) Soit $f :]0,1[\to \mathbb{C}$ une application borélienne, λ-intégrable.

a) Etudier la limite : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_{]0,1[} nx^n f(x^n)d\lambda(x)$.

b) On suppose que $\displaystyle\lim_{x\to 1^-} f(x)=\gamma_1\in\mathbb{C}$. Etudier la limite: $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_{]0,1[} nx^n f(x)d\lambda(x)$.

3) Soit $f :]1,e[\to \mathbb{C}$ une application borélienne, λ-intégrable. Etudier la limite :

$$\lim_{n\to+\infty} n\int_{]1,1+\frac{1}{n}[} f(x^n)d\lambda(x).$$

4) Soit $f :]a,b[\to \mathbb{C}$ une application borélienne, bornée et telle que: $\displaystyle\lim_{x\to a^+} f(x)=\gamma\in\mathbb{C}$. Etudier la limite: $\displaystyle\lim_{t\to a^+}\int_{]a,t[}\frac{f(x)}{\sqrt{(x-a)(t-x)}}d\lambda(x)$.

Exercice V

Soient $f\in L^1(\mathbb{R},\lambda), g\in L^p(\mathbb{R},\lambda)$, $(1\le p<\infty)$. On pose $f*g(x)\displaystyle\int f(y)g(x-y)dy$. Montrer que $f*g(x)$ est défini presque partout et que $f*g\in L^p(\mathbb{R},\lambda)$. (*Indication* : Hölder pour la mesure de densité $|f|$.)

Exercice VI

Soient $f\in L^2(\mathbb{R},\lambda), k\in L^2(\mathbb{R}^2,\lambda_2)$.

1) Montrer que $Kf(x)=\displaystyle\int_{\mathbb{R}} f(y)k(x,y)dy$ est défini pour λ-presque tout x, que l'on a $Kf\in L^2(\mathbb{R},\lambda)$ et $\|Kf\|_2\le\|k\|_2\|f\|_2$.

2) Soit $g\in L^2(\mathbb{R}^2,\lambda_2)$. Montrer que $h(x,y)=\displaystyle\int_{\mathbb{R}} k(x,z)g(z,y)dz$ est défini pour λ_2-presque tout (x,y), que l'on a $h\in L^2(\mathbb{R}^2,\lambda_2)$ et que $\|h\|_2\le\|k\|_2\|g\|_2$.

Exercice VII

On pose, pour $(x,y)\in]-1,1[\times]0,\infty[$, $F(x,y)=\displaystyle\int_0^\infty\frac{t^x}{1+t^2}(\ln(t+1))^y dt$. Montrer que F est bien définie et appartient à $\mathcal{C}^\infty(]-1,1[\times]0,\infty[)$.

Exercice VIII

Comment choisir $p\in\mathbb{R}$ pour que la fonction $f_y(x)=_{\text{def}}\dfrac{1}{|x-y|^p}-\dfrac{1}{|x|^p}$soit λ-intégrable sur $\mathbb{R}$? Si cette condition est remplie, montrer qu'il existe une constante C_p telle que, pour tous $y,y'\in\mathbb{R}$, on ait $\displaystyle\int f_yf_{y'}ds=C_p(|y|^a+|y'|^a-|y-y'|^a)$ où $a=1-2p$. *(Indication : considérer* $\displaystyle\int f_y^2dx$.*)*