Intégration et Probabilités 9, supplément

Exercice I

Soient X, Y des variables aléatoires réelles indépendantes et telles que $P(Y \leq X) = 1$. Montrer qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $P(Y \leq a \leq X) = 1$.

Exercice II

Soit U une v.a.r. de loi symétrique (c'est-à-dire telle que $-U$ ait la même loi que U). On suppose que $P(\{U = 0\}) = 0$. Montrer que $|U|$ et $\mathbf{1}_{U>0}$ sont indépendantes.

Exercice III

1) Montrer que , si X est une v.a.r. indépendante d'elle-même, alors X est p.s. constante. Etendre ce résultat à X à valeurs dans $\mathbb{R}^d$.

2) En déduire que, si X est une v.a. à valeurs dans un espace mesuré $(E, \mathcal{E})$ quelconque et $f : (E, \mathcal{E}) \to (F, \mathcal{F})$ une application mesurable, X et $f(X)$ ne peuvent être indépendantes que si $f(X)$ est p.s. constante.

Exercice IV

Soit (X_n) une suite de v.a. indépendantes et équidisribuées, à valeurs dans le même espace mesuré $(E, \mathcal{E})$.

1) Soit N une v.a. à valeurs dans $\mathbb{N}$ indépendante de la suite (X_n). Montrer que la suite $(N, X_N, X_{N+1}, \ldots, X_{N+n}, \ldots)$ est une suite de v.a. indépendantes.

2) Soit $E \in \mathcal{E}$ tel que $P(\{X_0 \in F\}) > 0$.

a) Montrer que $P(\cup_{n \in \mathbb{N}} \{X_n \in F\}) = 1$.

On peut alors définir p.p. la variable : $N = \text{Min}\{n \in \mathbb{N} \; | X_n \in F\}$.

b) Montrer que $(N, X_N, X_{N+1}, \ldots, X_{N+n}, \ldots)$ est une suite de v.a. indépendantes dont on donnera les lois respectives.

Exercice V

On considère un jeu de pile ou face infini où les lancers sont indépendants et donnent pile avec la probabilité p. Soit, par ailleurs, N une v.a. à valeurs dans $\mathbb{N}$ indépendante de ce jeu de pile ou face et de loi de Poisson de paramètre α.

X et Y étant les nombres respectifs de pile et de face obtenus au cours des N premiers lancers, montrer que X et Y sont des v.a. indépendantes et donner leurs lois respectives.

Exercice VI

Soient X et Y des variables indépendantes, de loi de Poisson de paramètres a et b. Montrer que $X + Y$ suit une loi de Poisson de paramètre $a + b$.

Exercice VII

Soient $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$. On suppose qu'il existe des fonctions $f_1, \ldots, f_n$ définies sur $\mathbb{N}$ et et telles que :$P(X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n) = f_1(x_1) \ldots f_n(x_n)$ pour tout $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{N}^n$.

1) Montrer que les variables $X_1, \ldots, X_n$ sont indépendantes.

2) Montrer qu'il existe des constantes c_i telles que les lois des X_i soient données par $P(X_i = x_i) = c_i f_i(x_i)$.

Exercice VIII

Loi binômiale négative.

Dans une suite de lancers à Pile ou Face, indépendants, où Pile sort avec probabilité $p \in]0,1[$, on note pour $r \in \mathbb{N}^*$, T_r le nombre de lancers effectués jusqu'à obtention du r-ième Pile.

1) Déterminer la loi de T_r par un calcul direct.

2) Montrer que les variables $T_1, T_2 - T_1, \dots, T_r - T_{r-1}$ sont indépendantes, de même loi et donner leur loi.

3) Calculer la fonction génératrice de T_1 et en déduire celle de T_r.

4) Retrouver à l'aide de 3. la loi de T_r.

5) Que valent la moyenne et la variance de T_r?