Université de Paris 7 **2009-2010**

Intégration et Probabilités 9

Exercice I

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ de loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$ donnée par $P(X = k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$ pour tout entier naturel k.

1) Calculer $\mathrm{E}(X)$, $\mathrm{Var}(X)$ et $\mathrm{E}(\frac{1}{X+1})$.

2) On pose $Y = (-1)^X$. Trouver la loi de Y. Calculer $\mathrm{E}(Y)$, $\mathrm{Var}(Y)$.

Exercice II

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ de loi de géométrique, de paramètre $0 < a < 1$, donnée par $P(X = k) = (1-a)a^k$ pour tout entier k. Soit m un entier strictement positif. On pose Y =max(X, m) et $Z = \min(X, m)$. Trouver la loi de Y. Montrer que $Y + Z = X + m$. Calculer $\mathrm{E}(Y)$ et en déduire $\mathrm{E}(Z)$.

Exercice III

1) Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}$ de loi $\mathcal{N}(0, 1)$, c'est à dire de densité par rapport à la mesure de Lebesgue donnée par $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$. Quelle est la loi de $|X|$? Calculer $\mathrm{E}(|X|)$ et $\mathrm{Var}(|X|)$.

2) Soit $X = (X_1, X_2)$ une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^2$ de loi $\mathcal{N}_2(0, Id_2)$, c'est à dire de densité par rapport à la mesure de Lebesgue donnée par $f(x) = \frac{1}{2\pi}e^{-\frac{\|x\|^2}{2}}$. On pose $Y = \frac{X_1}{X_2}$ si $X_2 \neq 0$ et $Y = 0$ si $X_2 = 0$. Quelle est la loi de Y ?

Exercice IV

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}$ de loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$, c'est à dire de densité par rapport à la mesure de Lebesgue donnée par $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}1_{[0,+\infty[}(x)$. On note Y la partie entière de X. Calculer la loi de Y.

Exercice V

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ de loi uniforme c'est à dire de densité par rapport à la mesure de Lebesgue donnée par $f(x) = \frac{1}{\pi}1_{[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]}(x)$. On pose $Y = X^2$. Quelle est sa fonction de répartition, sa densité, son espérance et sa variance? Mêmes questions pour $Y = \tan(X)$.

Exercice VI

Soit X une variable aléatoire de loi dont la densité par rapport à la mesure de Lebesgue est donnée par $f(x) = \alpha x^3 1_{[0,1]}(x)$.

1) Calculer α et E(X).

2) Quelle est la fonction de répartition de Y définie par

$$Y = X\mathbf{1}_{[1/4,3/4]}(X) + \mathbf{1}_{]3/4,+\infty[}(X).$$

Cette variable admet-elle une densité par rapport à la mesure de Lebesgue ?

3) Montrer que la loi de Y est $\mu_Y = 4x^3 1_{[1/4,3/4]}(x)dx + (1/4)^4\delta_0 + (1-(3/4)^4)\delta_1$.

Exercice VII Lemme de Borel-Cantelli 2

1) Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'événements indépendants telle que $\sum_{n\geq 0} P(A_n) = \infty$. Prouver que $P(\overline{\lim} A_n) = 1$.

2) Montrer l'égalité des événements

$$\begin{aligned}\{(X_n) \text{ ne converge pas vers } X\} &= \cup_\epsilon \overline{\lim}\{|X_n - X| > \epsilon\}\\ &= \cup_{p\in\mathbb{N}^*} \overline{\lim}\{|X_n - X| > 1/p\}\end{aligned}$$

3) Montrer que $X_n \to X$ p.s. si et seulement si pour tout $\epsilon > 0$ on a $P(\overline{\lim}\{|X_n - X| > \epsilon\}) = 0$.

4) Montrer que, si pour tout $\epsilon > 0$, on a $\sum_{n\geq 0} P(|X_n - X| > \epsilon) < \infty$ alors $X_n \to X$ p.s.

5) Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$. Montrer que $X_n \to 0$ p.s. si et seulement si pour tout $\epsilon > 0$

$$\sum_{n\geq 0} P(X_n > \epsilon) < \infty$$

ou encore si et seulement si

$$\sum_{n\geq 0} P(X_n > 0) < \infty$$

.

Exercice VIII

Soient X et Y deux variables aléatoires admettant une densité, liées par la relation $X+Y = 0$. Quelle relation y a-t'il entre les fonctions de répartition de X et Y et entre les densités de X et Y ?

Exercice IX

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$ de loi géométrique de paramètre $0 < a < 1$. On pose $M = \min(X, Y)$ et $Z = Y - X$.

1) Calculer $P(X \geq k)$.

2) Calculer $P(M \geq k)$ et en déduire $P(M = k)$. Quelle est la loi de M ?

3) Pour tous $k \in \mathbb{N}, r \in \mathbb{Z}$ calculer $P(M = k, Z = r)$. Pour cela on distinguera le cas $r \geq 0$ du cas $r < 0$.

4) En déduire la loi de Z. Que peut-on dire de M et Z ?

Exercice X

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de loi de Bernoulli : $P(X_n = 1) = n^{-\alpha}$ avec $\alpha > 0$. On pose

$$E = \{\omega \in \Omega | X_n \text{ vaut } 1 \text{ pour une infinité de } n\}.$$

Que peut-on dire de $P(E)$?

Exercice XI

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi de Bernoulli définie par $P(X_n = 1) = p$ et $P(X_n = -1) = 1 - p$ avec $p \neq 1/2$. On considère la marche aléatoire $Z_n = X_1 + \cdots + X_n$, $Z_0 = 0$. L'évenement $A_n = \{Z_n = 0\}$ est un retour à zéro. Montrer, en utilisant le lemme de Borel-Cantelli et le critère de D'Alembert pour les séries, que $P(\overline{\lim} A_n) = 0$. Interprétation ?