Exercice 0.1. L'ensemble $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ des applications de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ n'est pas dénombrable.

Exercice 0.2. Soit E et F des ensembles. On suppose qu'il existe une injection de E dans F et une injection de F dans E. Il existe alors une bijection de E sur F (*Cantor-Bernstein*).

Exercice 0.3. Soit $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ définie par

$$f(x,y) = \frac{(x+y)(x+y+1)}{2} + y.$$

f est bijective.

Exercice 0.4. Soit E un ensemble, $F = \mathcal{P}(E)$. Montrer qu'il n'existe pas de bijection entre E et F.

Exercice 0.5. Soit A une partie [au plus] dénombrable de $\mathbb{R}^2$. Montrer que, pour tous points M et N de A^c, il existe un segment brisé joignant M et N et contenu dans A^c.

Exercice 0.6. Soit $f :]a,b[\mapsto \mathbb{R}$ une fonction monotone. Montrer que f est réglée et que l'ensemble de ses discontinuités est au plus dénombrable.

Exercice 0.7. Soit E un ensemble ; on définit l'opération Δ suivante sur $\mathcal{P}(E)$ (*différence symétrique*) :

$$\forall (A,B) \in (\mathcal{P}(E))^2, \ A\Delta B = (A \cup B) - (A \cap B).$$

Montrer :
$\forall (A,B) \in (\mathcal{P}(E))^2, \ A\Delta B = (A \cap B^c) \cup (B \cap A^c) = B\Delta A.$
$\forall (A,B) \in (\mathcal{P}(E))^2, \ (A\Delta B)^c = (A \cap B) \cup (A^c \cap B^c).$
$\forall (A,B,C) \in (\mathcal{P}(E))^3, \ (A\Delta B)\Delta C = A\Delta(B\Delta C).$
$\exists ! X \subseteq E$ avec $\forall A \subseteq E, \ A\Delta X = X\Delta A = A$. $(R : X = \emptyset)$.
$\forall A \subseteq E, \ \exists ! A' \subseteq E, \ A\Delta A' = A'\Delta A = X$. $(R : A' = A^c)$;
$\cap$ est distributive par rapport à Δ.
Caractériser les éléments de $A\Delta B\Delta C$ (Une réponse : $A\Delta B\Delta C = \{1_A + 1_B + 1_C \text{ impair}\}$).

Exercice 0.8. Soit $f : E \to F$. On définit une application $f_* : \mathcal{P}(E) \to \mathcal{P}(F)$ par :

$$si\, A \subseteq E, \ f_*(A) = \{y \in F \mid \exists x \in A, \ y = f(x)\}$$

et une application $f^* : \mathcal{P}(F) \to \mathcal{P}(E)$ par :

$$si\, B \subseteq F, \ f^*(B) = \{x \in E \mid f(x) \in B\}.$$

f^* est aussi notée f^{-1}.
Montrer que f_* est injective (resp. surjective) si et seulement si f est injective (resp. surjective). Quelle(s) condition(s) doit vérifier f pour que f^* soit injective (resp. surjective) ?

Exercice 0.9. Soit pour $n \in \mathbb{N}$,

$$J_n = \int_0^1 \left(1 - x^2\right)^n dx.$$

A l'aide d'une intégration par parties, établir une relation simple entre J_n et J_{n-1}. En déduire la valeur de J_n.

Exercice 0.10. Soit $a,\ b \in \mathbb{N}^*$ et $P_n(X) = \frac{1}{n!}X^n(bX-a)^n$.

1) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $P_n^{(k)}(0) \in \mathbb{N}$ et $P_n^{(k)}\left(\frac{a}{b}\right) \in \mathbb{N}$.

2) Montrer que la suite

$$U_n = \int_0^{\pi} P_n(x)\sin x\,dx$$

tend vers 0 quand n tend vers ∞.

3) On suppose $\pi = \frac{a}{b}$. Montrer que U_n est un entier pour toute valeur de n. Conclusion ?

Exercice 0.11. Soit, pour $f \in C([a,b])$ $\|f\| = \sup_{x\in[a,b]}|f(x)|$. Montrer : pour $\psi \in \mathcal{IR}([a,b])$,

$$\sup_{f\in C([a,b]),\|f\|\leq 1}\int_a^b \psi(x)f(x)\,dx = \int_a^b |\psi(x)|\,dx$$

(*Indication*. Le montrer d'abord pour ψ en escalier).

Exercice 0.12. (**Polynômes de Laguerre**)

1) Montrer la convergence, pour tout $n \in \mathbb{N}$ de $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-t}t^n\,dt$.

2) Soit $j \in \mathbb{N}$; montrer que l'ensemble E_j des polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ vérifiant

$$\int_0^{\infty} e^{-t}t^jP(t)\,dt = 0$$

est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$.

3) Soit L_n un polynôme de degré n tel que : $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-t}L_n(t)\,dt = 1$ et

$$\forall 1 \leq j \leq n,\ \int_0^{\infty} e^{-t}t^jL_n(t)\,dt = 0.$$

a) Calculer L_1 et L_2.

b) Soit R_n un polynôme de degré n tel que :

$$\forall 0 \leq j \leq n,\ \int_0^{\infty} e^{-t}t^jR_n(t)\,dt = 0.$$

Montrer : $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-t}R_n^2(t)\,dt$; en déduire : $R_n = 0$. En déduire l'existence et l'unicité de L_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

b$\prime$) Montrer : $L_n(t) = e^t\frac{d^n}{dt^n}\left(e^{-t}t^n\right)$.

c) Montrer que $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-t}t^{n+1}L_n(t)\,dt \neq 0$

Indication. On pourra montrer que l'on aurait sinon : $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-t}\,t\,L_n^2(t)\,dt = 0$ ...

4) Montrer :

$$\forall 2 \leq j \leq n,\ \int_0^{\infty} e^{-t}L_n'(t)\,t^j\,dt = 0.$$

Calculer $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-t}L_n'(t)\,t\,dt$ et $\displaystyle\int_0^{\infty} e^{-t}L_n'(t)\,dt$ en fonction de $P_n(0)$.

5) Soit $S_{n-1} = L_n' - L_{n-1}' + L_{n-1}$. Vérifier :

$$\forall 1 \leq j \leq n,\ \int_0^{\infty} e^{-t}S_{n-1}(t)\,t^j\,dt = 0.$$

En déduire : $\int_0^{\infty} e^{-t} S_{n-1}^2(t) t^j \, dt = 0$ et $S_{n-1} = 0$. Démontrer alors que :

$$L_n' = -1 - \sum_{1 \leq j \leq n-1} L_j.$$

Calculer $L_n(0)$. Retrouver l'expression de L_2. Calculer L_3 et L_4 et le terme de plus haut degré de L_n.

6) Les polynômes $\{XL_{n-1}, L_{n-1}, ..., L_1, 1\}$ forment une base de l'espace des polynômes de degré au plus n. Montrer qu'il existe des scalaires α_n, β_n et γ_n (que l'on calculera) tels que :

$$L_n = \alpha_n X L_{n-1} + \beta_n L_{n-1} + \gamma_n L_{n-2}.$$

(R : $L_{n+1} = (2n+1-x) L_n - n^2 L_{n-1}$).

En déduire les expressions de

$$\kappa_n = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{n+1} L_n(t) \, dt \text{ et } \lambda_n = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{n+2} L_n(t) \, dt.$$

7) Montrer :

$$\int_0^{\infty} e^{-t} L_n(t) L_m(t) \, dt = \begin{cases} 0 & \text{si } m \neq n \\ (n!)^2 & \text{si } m = n \end{cases}.$$

8) Montrer : pour tout $z \in \mathbb{C}$ avec $|z| < 1$, $\sum_{n \geq 0} \frac{z^n}{n!} L_n(x) = \frac{1}{1-z} \exp\left(-\frac{xz}{1-z}\right)$.

9) Montrer : $XL_n' = n L_n - n^2 L_{n-1}$ et $XL_n'' + (1-X) L_n' + nL_n = 0$.

10) Soit pour $m,\ n \in \mathbb{N}$, $m \leq n$,

$$L_{n,m} = \frac{d^m}{dx^m}(L_n)$$

Montrer que $L_{n,m}$ vérifie l'équation différentielle :

$$x^2 y'' + (m+1-x) y' + (n-m) y = 0.$$

Montrer :

$$\int_0^{\infty} e^{-t} t^m L_{n,m}(t) L_{n',m}(t) \, dt = \begin{cases} 0 & \text{si } n' \neq n, \\ \frac{(n!)^3}{(n-m)!} & \text{si } n' = n. \end{cases}$$

Exercice 0.13. Soit $f : \mathbb{R}_+ \mapsto \mathbb{R}$ continue et telle que $I = \int_0^{\infty} f(t) \, dt$ converge. Soit $a > 0$; montrer que

$$J = \int_0^{\infty} f\left(\left|x - \frac{a^2}{x}\right|\right) dx$$

existe et que $J = I$.

Application : Calculer $\int_0^{\infty} e^{-\left(x^2 + \frac{a^2}{x^2}\right)} dx$ sachant $\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$.

Exercice 0.14. 1) Soit α et β des paramètres réels. Montrer que la fonction g définie sur $]-2\pi, 2\pi[$ par

$$\begin{cases} g(0) = \alpha \\ g(x) = \frac{\alpha x + \beta x^2}{2 \sin \frac{x}{2}} \text{ si } x \neq 0, \end{cases}$$

est de classe C^1. Que vaut $g'(0)$?

2) Soit f de classe C^1 sur $]-2\pi,2\pi[$. Montrer qu'il existe un réel C tel que :

$$\forall\lambda\in\mathbb{R},\ \left|\lambda\int_0^{\pi} f(u)\sin\lambda u\,du\right|\leq C$$

(on pourra intégrer par parties). En déduire

$$\lim_{\lambda\to\infty}\int_0^{\pi} f(u)\sin\lambda u\,du=0.$$

3) Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ et tout $x\in\,]0,2\pi[$,

$$\tfrac{1}{2}+\sum_{1\leq k\leq n}\cos kx=\frac{\sin\frac{(2n+1)x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}}.$$

4) a) Donner une primitive de $x\mapsto\left(\alpha x+\beta x^2\right)\cos\lambda x$ ($\alpha,\ \beta,\ \lambda\in\mathbb{R},\ \lambda\neq 0$).
b) Montrer qu'il existe des réels a et b tels que

$$\forall k\in\mathbb{N}^*,\ \int_0^{\pi}\left(ax+bx^2\right)\cos kx=\frac{1}{k^2}.$$

c) Montrer que $\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\left(ax+bx^2\right)dx+\sum_{1\leq k\leq n}\frac{1}{k^2}=\int_0^{\pi}\left(ax+bx^2\right)\frac{\sin\frac{(2n+1)x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}}dx.$
d) En déduire : $\lim_{n\to\infty}\sum_{1\leq k\leq n}\frac{1}{k^2}=\frac{\pi^2}{6}.$

Exercice 0.15. Après en avoir justifié l'existence, calculer pour $n\in\mathbb{N}$, $T_n=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin nx}{\sin x}\,dx.$

Exercice 0.16. 1) Soit $\varphi: t\to\varphi(t)$ une fonction numérique strictement positive, définie sur $]-1,1[$, dérivable en 0. Montrer

$$\lim_{t\to 0}\left(\frac{\varphi(t)}{\varphi(0)}\right)^{1/t}=\exp\left(\frac{\varphi'(0)}{\varphi(0)}\right).$$

2) Soit f une fonction numérique continue sur $[0,1]$, strictement positive.
i) Montrer que

$$t\in\mathbb{R}\to J(t)=\int_0^1 (f(x))^t\,dx$$

est une fonction de classe C^1.
ii) En déduire : $\lim_{t\to 0}\left(\displaystyle\int_0^1 (f(x))^t\,dx\right)^{1/t}=\exp\left(\displaystyle\int_0^1\log f(x)\,dx\right).$

Exercice 0.17. 1–i) Montrer : $\forall(t,x)\in\,]0,1[\,\times[-1,1]$,

$$\frac{1-t}{1+t}\leq\frac{1+tx}{1-tx}\leq\frac{1+t}{1-t}$$

ii) En déduire que l'intégrale

$$F(x)=\int_0^1\log\left(\frac{1+tx}{1-tx}\right)\frac{dt}{t\sqrt{1-t^2}}$$

est convergente pour tout réel $x\in[-1,1]$.
2) Montrer que F est continue sur $[-1,1]$.
3) Montrer que F est dérivable sur $]-1,1[$.
4) Soit $x\in\,]-1,1[$; calculer $F'(x)$. En déduire l'expression de F.

Exercice 0.18. Soit $f:[a,b]\to[0,1]$ continue.
1) On suppose que $\sup_{x\in[a,b]} f(x)=1$ et que $\{x\in[a,b]\mid f(x)=1\}$ est fini.
Alors, $\displaystyle\int_a^b f^n(x)\,dx \to 0$.
2) On suppose que $\{x\in[a,b]\mid f(x)=1\}=a$ et qu'au voisinage de a, avec $\lambda>0$,

$$f(x)=1-\lambda(x-a)^2+o(x-a)^2.$$

Montrer : $\displaystyle\sqrt{n}\int_a^b f^n(x)\,dx \underset{n\to\infty}{\to} \frac{\ell}{\sqrt{\lambda}}$ où $\displaystyle\ell=\int_0^\infty \exp -x^2\,dx\ \left(=\tfrac{1}{2}\sqrt{\pi}\right)$
(pour le calcul de ℓ, on pourra se reporter à l'exercice *0.19*).

Exercice 0.19. (**Intégrales de Wallis**) Soit, pour $n\in\mathbb{N}$, $\displaystyle I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,dx$; montrer que l'on a aussi $\displaystyle I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x\,dx$.
1) En faisant une intégration par parties, montrer :

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\, I_{n+2}=\frac{n+1}{n+2}I_n.$$

2) En déduire les valeurs de I_n. En particulier, $(2n+1)\,I_{2n+1}I_{2n}=\frac{\pi}{2}$.
3) Montrer : $\frac{I_{n+2}}{I_n}=\frac{n+1}{n+2}\,\frac{I_{n+1}}{I_n}\underset{n\to\infty}{\to}1$.
4) En déduire : $\sqrt{n}I_{2n}=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$. Compléter l'exercice 0.18.

Exercice 0.20. (**Formule de Stirling**) 1) Montrer que, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$,

$$n\log n-n<\int_0^n \log x\,dx<\log n!<\int_1^{n+1}\log x\,dx=(n+1)\log(n+1)-n.$$

2) Montrer que, pour $0<x<1$,

$$\frac{1}{2x}\log\frac{1+x}{1-x}-1=\frac{1}{x}\int_0^x\frac{dt}{1-t^2}-1\in\left]\frac{1}{3}x^2,\frac{1}{3}\frac{x^2}{1-x^2}\right[.$$

3) Soit, pour $n\in\mathbb{N}^*$, $\delta_n=\log(n!)-\left(n+\frac{1}{2}\right)\log n+n$.
Calculer $\delta_n-\delta_{n+1}$ $(n\in\mathbb{N}^*)$ en fonction de $\frac{1}{2n+1}$.
Utiliser 2) pour montrer que la suite $\left(\delta_n-\frac{1}{12n}\right)_{n\geq 1}$ (resp. $\left(\delta_n-\frac{1}{12n+1}\right)$) est croissante (resp. décroissante).
4) En déduire qu'il existe une constante κ avec,

$$n!=\kappa n^{n+\frac{1}{2}}\exp\left(-n+\frac{\theta(n)}{12n}\right),$$

où $1-\frac{1}{12n+1}<\theta(n)<1$ et $\displaystyle\kappa=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{1}{2}w^2}dw=\sqrt{2\pi}$.
5) En utilisant (par exemple) l'exercice 0.19, montrer : $\displaystyle\kappa=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{1}{2}w^2}dw=\sqrt{2\pi}$.

Exercice 0.21. Calculer les limites des suites définies par
$u_n = \sum_{1\leq k\leq n} \frac{1}{n+k}$, $v_n = \sum_{1\leq k\leq n} \frac{1}{\sqrt{4n^2-k^2}}$ et $w_n = \frac{1}{n}\sqrt[n]{(n+1)(n+2)\dots(n+n)}$.

Exercice 0.22. Soit $I_n = \displaystyle\int_0^1 t^n \log\left(1+t^2\right) dt$. Montrer : $I_n \underset{n\to\infty}{\to} 0$.

Soit $c \in \left]0,1\right[$, $A_n = \displaystyle\int_0^c t^n \log\left(1+t^2\right) dt$, $B_n = \displaystyle\int_c^1 t^n \log\left(1+t^2\right) dt$

Montrer : $\frac{A_n}{B_n} \underset{n\to\infty}{\to} 0$.

Exercice 0.23. Soit g deux fois dérivable sur $[0,1]$. Soit, pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\gamma_n = \frac{1}{n}\sum_{1\leq k\leq n} g\left(\frac{k}{n}\right) - \int_0^1 g(t)\,dt$$

Montrer que $n\gamma_n \to \frac{1}{2}(g(1)-g(0))$. Que se passe-t-il si on remplace l'hypothèse deux fois dérivable par dérivable et concave ?

Exercice 0.24. (**Intégrale de Poisson**) a) Décomposer $X^{2n}-1$ en facteurs premiers dans $\mathbb{R}[X]$.

b) Soit $a \in \mathbb{R} - \{-1,1\}$ et

$$P(a) = \int_0^\pi \log\left(1 - 2a\cos\theta + a^2\right) d\theta.$$

Montrer que $P(a)$ est bien définie et calculer $P(a)$.

Exercice 0.25. A l'aide de sommes de Riemann, montrer que les suites ci-après convergent ; en déterminer leur limite :
$\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{1\leq k\leq n} \frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{n+k}}$; $f\left(\frac{\pi}{n}\right)\sum_{1\leq k\leq n} \frac{1}{2+\cos\frac{k\pi}{n}}$ où f est dérivable en 0 et $f(0)=0$.

Exercice 0.26. Soit f continue et strictement positive sur $[a,b]$. On pose $I = \displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$.

a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe une subdivision $\{x_i\}_{0\leq i\leq n}$ de $[a,b]$ telle que :

$$\forall i = 1,\dots,\, n,\ \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\, dx = \frac{1}{n} I$$

b) Soit $u_n = \frac{1}{n}\sum_{1\leq k\leq n} f(x_k)$. Déterminer $\lim_n u_n$.

Exercice 0.27. Soit f continue sur $[a,b]$ et pour $n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq k \leq n$, $x_k = a + k\frac{b-a}{n}$. On pose :

$$u_n = \int_a^b f(x)\,dx - \frac{b-a}{n}\sum_{1\leq k\leq n} f(x_k).$$

a) Encadrer (u_n) lorsque f est croissante sur $[a,b]$.

b) On suppose f lipschitzienne sur $[a,b]$. Majorer $|u_n|$.

c) On suppose f de classe C^1 sur $[a,b]$. Donner un équivalent de u_n.

Exercice 0.28. Soit $x \in \left]-1,0\right[\cup \left]0,1\right[$. On pose : $I_n(x) = \displaystyle\int_0^\pi \frac{\cos nt}{1-x\cos t}dt$.

a) Soit $a \in \left]0,\pi\right[$. Calculer $\displaystyle\int_0^a \frac{1}{1-x\cos t}\,dt$ puis $I_0(x)$. En déduire $I_1(x)$.

b) Exprimer $I_{n+2}(x) + I_n(x)$ en fonction de $I_{n+1}(x)$.

c) Déterminer une expression simple de $I_n(x)$.

Exercice 0.29. Soit f positive, décroissante sur $[1,\infty[$, avec $\int_1^\infty f(t)\,dt = \infty$. On pose : $I_n = \int_1^n f(t)\,dt$, $S_n = \sum_{1\le j\le n} f(j)$.
Montrer que la suite $(S_n - I_n)$ est décroissante et convergente. En déduire : $\lim_n \frac{I_n}{S_n} = 1$.
Exemple : $\sum_{1\le j\le n} \frac{1}{j} - \log n \underset{n\to\infty}{\to} c$ (*constante d'Euler*).

Exercice 0.30. Soit f continue sur $[0,1]$ et strictement positive. Montrer que $\frac{1}{f}$ est intégrable sur $[0,1]$ et que

$$\left(\int_0^1 f(x)\,dx\right)\left(\int_0^1 \tfrac{1}{f}(x)\,dx\right) \ge 1.$$

Exercice 0.31. Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ de classe C^1 et $\tau \in]0,1[$. Etudier le comportement de

$$n\left(\int_0^1 f(t)\;dt - \frac{1}{n}\sum_{0\le k\le n-1} f\left(\frac{k+\tau}{n}\right)\right)$$

quand $n \to \infty$.

Exercice 0.32. Soit $f,g \in \mathcal{IR}([a,b])$. Si ξ et θ sont des marques de la subdivision

$$\mathcal{S} = \{a = s_0 \le s_1 \le .... \le s_n \le s_{n+1} = b\},$$

$$\sum_{0\le j\le n} f(\xi_j)\,g(\theta_j)\,(s_{j+1} - s_j) \to \int_a^b f(t)\,g(t)\;dt.$$

Exercice 0.33. Soit f, g des fonctions réglées sur $[a,b]$, à valeurs réelles, avec f décroissante et $0 \le g \le 1$.
Soit $\lambda = \int_a^b g(t)\;dt$. Montrer l'inégalité de Steffensen :

$$\int_{b-\lambda}^b f(t)\;dt < \int_a^b f(t)\,g(t)\;dt < \int_a^{a+\lambda} f(t)\;dt$$

sauf lorsque $g = 0$ (ou $g = 1$) en tous les points où elle est continue, auquel cas les trois nombres sont égaux.
Indication. Dans l'intégrale $\int_x^y f(t)\;dt$, faire varier les bornes d'intégration.

Exercice 0.34. Soit $x \in [0,1]$. On écrit $x = \frac{a}{10} + \frac{b}{100} + c$ avec a, $b \in \{0,...,9\}$ et $c \in \left[0, \frac{1}{100}\right[$.
On définit $f : [0,1] \mapsto [0,1]$ par

$$f(x) = \frac{b}{10} + \frac{a}{100} + c.$$

Montrer que f est intégrable. Calculer $\int_0^1 f(x)\,dx$.

Exercice 0.35. (voir aussi l'exercice *0.28*) Soit $z \in \mathbb{C}$ avec $|z| > 1$.
a) Calculer à l'aide de sommes de Riemann $I_0(z) = \int_0^\pi \frac{1}{z-\cos x}dx$.
b) En déduire par récurrence $I_n(z) = \int_0^\pi \frac{\cos nx}{z-\cos x}dx$.

Exercice 0.36. Etudier la suite $n \in \mathbb{N}^* \mapsto Z_n = \sum_{1 \leq k \leq n} \frac{1}{\sqrt{4n^2+(-1)^k k^2}}$.

Exercice 0.37. Soit $a,\ \alpha > 0$ et $\Phi_n(x) = \frac{a}{x} + \frac{1}{x-1} + .. + \frac{1}{x-n}$ $(x \in \mathbb{R} - [0,n])$.
a) Montrer que l'équation $\Phi_n(x) = \alpha$ a dans $]n, \infty[$ une unique racine α_n.
b) Montrer $\alpha_n \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{n}{1-e^{-\alpha}}$.
Indication. Pour $\lambda \in]0,1[$, on pourra chercher $\lim_n \Phi_n\left(\frac{n}{\lambda}\right)$ en utilisant des sommes de Riemann associée à $\frac{1}{1-\lambda x}$.
c) Montrer : $\alpha_n - \frac{n}{1-e^{-\alpha}} \to \frac{1}{2}\left(\frac{(2a-1)e^{-\alpha}+1}{1-e^{-\alpha}}\right)$.

Exercice 0.38. Soit $\gamma \in \mathbb{R}$. Déterminer la limite de $\frac{1^{i\gamma}+2^{i\gamma}+\ldots+n^{i\gamma}}{n^{i\gamma+1}}$.

Exercice 0.39. Soit $0 < a < b$ et intégrable sur $[0,b]$, continue en 0. Montrer que

$$\int_{ax}^{bx} \frac{f(t)}{t}\,dt \underset{x\to 0_+}{\to} f(0) \times \log\frac{b}{a}.$$

Exercice 0.40. Soit f et g réglées sur $]a,b[$, strictement positives. Montrer que les intégrales $\int_a^b \left(\frac{f}{1+fg}\right)(x)\,dx$ et $\int_a^b \inf\left(f, \frac{1}{g}\right)(x)\,dx$ sont de même nature.

Exercice 0.41. Soit $\alpha > 0$ et $f \geq 0$, décroissante sur $]0,\infty[$. On suppose

$$\int_0^\infty t^\alpha f(t)\,dt < \infty.$$

Montrer que, pour tout $x > 0$,

$$\int_x^\infty f(t)\,dt \leq \left(\frac{\alpha}{(\alpha+1)x}\right)^\alpha \int_0^\infty t^\alpha f(t)\,dt$$

Indication. Le démontrer d'abord pour $f = 1_{]0,a]}$ $(a \geq 0)$, puis pour une combinaison linéaire à coefficients positifs de telles fonctions, puis passer à la limite.