Exercice 0.1. Soit $\left(\mu_j\right)_{j\in J}$ une famille de mesures sur l'espace mesurable $(X,\mathcal{X})$. On définit pour $A\in\mathcal{X}$

$$\left(\sum_{j\in J}\mu_j\right)[A]=\sum_{j\in J}\mu_j\,[A].$$

Montrer que $\sum_{j\in J}\mu_j$ est une mesure sur $(X,\mathcal{X})$.
Exemple : mesure de comptage (on peut prendre $\mathcal{X}=\mathcal{P}(X)$) :

$$\chi_X=\sum_{x\in X}\delta_x$$

où δ_x est la masse de Dirac en x ($\delta_x[A]=1_A(x)$).
Montrer que pour $f\geq 0$, $\int f\,d\left(\sum_{j\in J}\mu_j\right)=\sum_{j\in J}\int f\,d\mu_j$.
(On le montrera d'abord pour f étagée, puis on reviendra à la définition d'une intégrale).
En particulier $\sum_{x\in X}f(x)=\int f\,d\chi_X$.
On rappelle que,
• pour une famille $(\xi_k)_{k\in K}$ de nombres de $[0,\infty]$,

$$\sum_{k\in K}\xi_k=\sup_{H\subseteq K,\,H\text{ fini}}\sum_{k\in H}\xi_k\,;$$

• pour ν mesure positive sur l'espace mesurable $(Y,\mathcal{Y})$ et g fonction mesurable de $(Y,\mathcal{Y})$ dans $([0,\infty],\mathcal{B}([0,\infty]))$,

$$\int g\,d\nu=\sup\left(\int\gamma\,d\nu\mid\gamma\ \mathcal{Y}\text{–mesurable étagée à valeurs dans }[0,\infty[\text{ majorée par }g\right).$$

Exercice 0.2. Soit $\alpha\in\left]0,\infty\right[$; la série de terme général $\frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ ($n\in\mathbb{N}^*$) est convergente et est absolument convergente si [et seulement si] $\alpha>1$. Soit α, $\beta\in\left]0,\infty\right[$ et pour $n\geq 2$,

$$w_n^{\alpha,\beta}=\sum_{1\leq k\leq n-1}\frac{(-1)^k}{k^\alpha}\frac{(-1)^{n-k}}{(n-k)^\beta}=(-1)^n\sum_{1\leq k\leq n-1}\frac{1}{k^\alpha(n-k)^\beta}.$$

Pour α, $\beta\in\left]1,\infty\right[$,

$$\left(\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right)\left(\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^n}{n^\beta}\right)=\sum_{n\geq 2}w_n^{\alpha,\beta}.$$

Si α, $\beta<1$ et $\alpha+\beta\geq 1$,

$$\left|w_n^{\alpha,\beta}\right|=\sum_{1\leq k\leq n-1}\frac{1}{k^\alpha(n-k)^\beta}=n^{\alpha+\beta-1}\left(\frac{1}{n}\sum_{1\leq k\leq n-1}\frac{1}{\left(\frac{k}{n}\right)^\alpha\left(1-\frac{k}{n}\right)^\beta}\right)$$
$$\approx n^{\alpha+\beta-1}\left(\int_0^1\frac{dx}{x^\alpha(1-x)^\beta}\right)\underset{n\to\infty}{\not\to}0.$$

Exercice 0.3. 1) Soit $s\in\left]1,\infty\right[$. La famille $(n^{-s})_{n\in\mathbb{N}^*}$ est sommable ; sa somme est notée $\zeta(s)$.
2) La famille $(\log(1-n^{-s}))_{n\geq 2}$ est aussi sommable, de même que la famille $(-\log(1-p^{-s}))_{p\in\mathcal{P}}$ où $\mathcal{P}$ désigne l'ensemble des nombres premiers. Soit

$$\varphi(s)=\sum_{p\in\mathcal{P}}p^{-s}$$

Montrer $-\sum_{p\in\mathcal{P}}\log(1-p^{-s}) = \sum_{p\in\mathcal{P},n\geq 1}\frac{1}{n}p^{-ns} = \sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}\varphi(ns)$.

3) Montrer que, si $\mathcal{H}\subset\mathcal{P}$ est fini,

$$\prod_{p\in\mathcal{H}}\frac{1}{1-p^{-s}} = \sum_{m\in\mathbb{N}(\mathcal{H})}m^{-s}$$

où $\mathbb{N}(\mathcal{H})$ est l'ensemble des entiers dont les facteurs premiers appartiennent à $\mathcal{H}$. En déduire

$$\prod_{p\in\mathcal{P}}\frac{1}{1-p^{-s}} = \exp - \sum_{p\in\mathcal{P}}\log\left(1-p^{-s}\right) = \zeta(s).$$

4) Montrer, pour $s>1$, les inégalités

- $(s-1)\varphi(s)\leq(s-1)\sum_{n\geq 2}n^{-s}\leq 2^{-s}(s+1)$;
- $\sum_{n\geq 2}\frac{1}{n}\varphi(ns)\leq\sum_{n\geq 2}\frac{ns+1}{ns-1}2^{-ns}\leq 3$;
- $1\leq(s-1)\zeta(s)\leq 1$.

Montrer $(s-1)\left(\sum_{n\geq 2}\frac{1}{n}\varphi(ns)\right)\underset{s\to 1_+}{\to} 0$ et $1=\lim_{s\to 1_+}(s-1)\zeta(s)=\lim_{s\to 1_+}(s-1)\varphi(s)$.

Exercice 0.4. On pose, pour p et q dans $\mathbb{N}^*$, $u_{p,q}=\frac{1}{p}\left(\frac{p-1}{p}\right)^q-\frac{1}{p+1}\left(\frac{p}{p+1}\right)^q$.
Calculer $\sum_{p\geq 1}\left(\sum_{q\geq 1}u_{p,q}\right)$ et $\sum_{q\geq 1}\left(\sum_{p\geq 1}u_{p,q}\right)$. Conclusion ?

Exercice 0.5. Soit $f:[0,1]\times[0,1]\mapsto\mathbb{R}$ telle que :

- $\forall x\in[0,1]$, $y\mapsto f(x,y)$ est continue ;
- $\forall r\in\mathbb{Q}\cap[0,1]$, $x\mapsto f(x,r)$ est borélienne.

Soit $n\in\mathbb{N}^*$ et $f_n(x,y)=f(x,0)+\sum_{0\leq k\leq 2^n-1}1_{\{k2^{-n}<x\leq(k+1)2^{-n}\}}f(x,k2^{-n})$.
Montrer que f_n est borélienne. En déduire que f est borélienne.

Exercice 0.6. 1) Soit, pour $x\in\mathbb{R}_+$, $x=\sum_{n\in\mathbb{Z}}x_n2^{-n}$ le développement [réduit] de x en base 2. Montrer que, pour tout $n\in\mathbb{Z}$, $x\in\mathbb{R}_+\mapsto\xi_n(x)=x_n\in\{0,1\}$ est borélienne. On prolonge ξ_n à $\overline{\mathbb{R}}_+$ par $\xi_n(\infty)=0$ et on définit $\xi_\infty=1_{\{\infty\}}$.
2) Soit $f:(X,\mathcal{X},\mu)$ un espace mesuré et f une fonction $\mathcal{X}$–mesurable à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}_+$. Montrer

$$\int_X f\,d\mu=\sum_{n\in\mathbb{Z}\cup\{\infty\}}2^{-n}\times\mu\left[\xi_n(f)=1\right].$$

Exercice 0.7. Soit μ une mesure sur l'espace mesurable $(X,\mathcal{X})$; une partie M de X est négligeable s'il existe $N\in\mathcal{X}$, avec $M\subseteq N$ et $\mu[N]=0$. On désigne par $\mathcal{N}_\mu(\mathcal{X})$ l'ensemble des parties μ–négligeables de X.
1) On désigne par $\mathcal{X}^\mu$ la tribu $\sigma\left(\mathcal{X},\mathcal{N}_\mu(\mathcal{X})\right)$; montrer que

$$\mathcal{X}^\mu=\left\{A\cup M \mid A\in\mathcal{X},\ M\in\mathcal{N}_\mu(\mathcal{X})\right\}.$$

2) Soit A, $A'\in\mathcal{X}$, M, $M'\in\mathcal{N}_\mu$ $(\mathcal{X})$avec $A\cup M=A'\cup M'$; montrer : $\mu[A]=\mu[A']$.
En déduire que l'on définit une application $\overline{\mu}$ sur $\mathcal{X}^\mu$ par

$$\overline{\mu}[A\cup M]=\mu[A]\ \left(A\in\mathcal{X},\ M\in\mathcal{N}_\mu\right).$$

Montrer que $\overline{\mu}$ est une mesure sur $\mathcal{X}^\mu$ et que $\mathcal{N}_{\overline{\mu}}(\mathcal{X}^\mu)=\mathcal{N}_\mu(\mathcal{X})$.
3) On dit que l'espace mesuré $(E,\mathcal{E},\nu)$ est complet si $\mathcal{N}_\nu(\mathcal{E})$ est contenu dans $\mathcal{E}$.

Montrer que $(X, \mathcal{X}^{\mu}, \overline{\mu})$ est complet.

$\mathcal{X}^{\mu}$ s'appelle la tribu complétée de $\mathcal{X}$ pour μ ; l'usage est de rebaptiser $\overline{\mu}$ en μ.

Soit $f : X \mapsto \overline{\mathbb{R}}_{+}$; montrer que f est $\mathcal{X}^{\mu}$–mesurable si et seulement si il existe $f_0 : X \mapsto \overline{\mathbb{R}}_{+}$ $\mathcal{X}$–mesurable avec $f = f_0$ μ–presque partout.

4) Soit $X = [0,1]$, $\mathcal{X}$ la tribu borélienne de $[0,1]$ et λ–la mesure de Lebesgue sur $[0,1]$. Soit f une fonction une fonction Riemann–intégrable sur $[0,1]$; montrer que f est $\mathcal{X}^{\lambda}$–mesurable et que l'intégrale de Riemann de f coïncide avec l'intégrale (de Lebesgue) $\displaystyle\int_{[0,1]} f\,d\lambda$.

5) Soit $\mathcal{U}$ une sous–tribu de $\mathcal{X}$; décrire la tribu $\mathcal{U}_0^{(\mu)} = \sigma\left(\mathcal{U}, \mathcal{N}_{\mu}(\mathcal{X})\right)$ engendrée par $\mathcal{U}$ et $\mathcal{N}_{\mu}(\mathcal{X})$; c'est une sous–tribu de $\mathcal{X}^{\mu}$, contenant la complétée de $\mathcal{U}$ pour $\mu|_{\mathcal{U}}$; l'espace mesuré $\left(X, \mathcal{U}_0^{(\mu)}, \overline{\mu}|_{\mathcal{U}_0^{(\mu)}}\right)$ est complet.

Exercice 0.8. Soit $(H, \mathcal{H})$ un espace mesurable, $\mathcal{M}(\mathcal{H})$ l'ensemble des mesures positives sur $\mathcal{H}$; pour $\mu \in \mathcal{M}(\mathcal{H})$, $\mathcal{H}^{\mu}$ est la complétée de $\mathcal{H}$ pour μ et $\mathcal{H}^{*} = \bigcap_{\mu \in \mathcal{M}(\mathcal{H})} \mathcal{H}^{\mu}$. Soit $(E, \mathcal{E})$ et $(F, \mathcal{F})$ deux espaces mesurables et f une application mesurable de $(E, \mathcal{E})$ dans $(F, \mathcal{F})$.

1) Soit μ une mesure positive sur $(E, \mathcal{E})$ et pour $B \in \mathcal{F}$, $f(\mu)[B] = \mu\left[f^{-1}(B)\right]$; montrer que $f(\mu)$ est une mesure positive sur $\mathcal{F}$ (mesure image de μ par f).

2) Montrer : $f^{-1}(\mathcal{F}^{*}) \subseteq \mathcal{E}^{*}$.

Exercice 0.9. Soit E un ensemble dont le cardinal est strictement supérieur au dénombrable.

1) Montrer que la plus petite tribu $\mathcal{A}$ sur E engendrée par les singletons est la classe des ensembles qui sont, soit dénombrables, soit de complémentaire dénombrable. Dans le cas $E = \mathbb{R}$, comparer $\mathcal{A}$ à $\mathcal{B}(\mathbb{R})$.

2) Pour $A \in \mathcal{A}$, on pose $\pi[A] = 0$ si A est dénombrable, $\pi[A] = 1$ si A^c est dénombrable. Montrer que ceci définit une probabilité sur $(E, \mathcal{A})$.

3) Décrire toutes les probabilités sur $(E, \mathcal{A})$.

4) Décrire toutes les applications mesurables de $(E, \mathcal{A})$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$

Indication : on pourra montrer que, pour f mesurable, si

$$\lambda = \sup\{x \mid \{f \leq x\} \text{ est dénombrable}\},$$

$\{f = \lambda\}$ est non dénombrable.

Exercice 0.10. Soit K l'ensemble triadique de Cantor, λ la mesure de Lebesgue sur $[0,1]$ et φ la fonction **continue** de K sur $[0,1]$ définie par :

$$\varphi(x) = \sum\nolimits_{n \geq 1} x_n 2^{-n} \text{ si } x = \sum\nolimits_{n \geq 1} (2x_n)\, 3^{-n} \text{ et } \forall n \geq 1,\, x_n \in \{0,1\}.$$

1) Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de parties de $[0,1]$. Montrer :

$$\varphi\left[K \cap \left(\bigcup\nolimits_{n \in \mathbb{N}} A_n\right)\right] = \bigcup\nolimits_{n \in \mathbb{N}} \varphi[K \cap A_n]$$

et que le complémentaire de $\varphi[K \cap A]$ est la réunion de $\varphi[K \cap A^c]$ et d'un ensemble au plus dénombrable.

2) En déduire que l'ensemble $\mathcal{T}$ des parties A de $[0,1]$ telles que $\varphi[K \cap A]$ soit borélien est

une σ–algèbre qui contient les boréliens de $[0,1]$.
3) On définit sur la tribu $\mathcal{B}$ des boréliens de $[0,1]$ une fonction μ par

$$\mu[A] = \lambda[\varphi[K \cap A]]$$

Montrer que μ est une mesure σ–additive et que $\mu[K] = 1$ tandis que $\lambda[K] = 0$.

Exercice 0.11. Soit $\mathbb{P}$ une probabilité sur $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$.
1) Montrer que $\mathcal{I}(\mathbb{P}) = \{\mathbb{P}[A] \mid A \subseteq \mathbb{N}\}$ est un sous-ensemble compact de $[0,1]$.
2) Montrer que $\mathcal{I}(\mathbb{P})$ est soit fini, soit a la puissance du continu (*on admettra qu'un compact métrique sans points isolés a la puissance du continu*)
3) Montrer que si $\mathbb{P}[\{n\}] = 2^{-n-1}$ pour tout n, $\mathcal{I}(\mathbb{P}) = [0,1]$.
4) Montrer que si $\mathbb{P}[\{n\}] \geq \mathbb{P}[\{n+1\}]$ pour tout n, la condition

$$\forall n,\ \mathbb{P}[\{n\}] \leq \mathbb{P}[\,[n+1,\infty[\,]$$

est nécessaire et suffisante pour que $\mathcal{I}(\mathbb{P}) = [0,1]$.
5) Décrire toutes les probabilités telles que $\mathcal{I}(\mathbb{P}) = [0,1]$.

Exercice 0.12. Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré ; un ensemble $A \in \mathcal{A}$ est un μ–atome si $\mu[A] > 0$ et, pour tout $B \in \mathcal{A}$ avec $B \subseteq A$, on a $\mu[A - B] \times \mu[B] = 0$.

On dit que la mesure μ est diffuse (ou non atomique) si elle n'a pas d'atomes.
On dit que la mesure μ est purement atomique si tout $A \in \mathcal{A}$ avec $\mu[A] > 0$ contient un μ–atome.
On suppose dorénavant que μ est une probabilité [ou une mesure bornée]
1) Il existe une famille au plus dénombrable $(A_j)_{j \in J}$ de μ–atomes deux à deux disjoints telle que tout μ–atome soit équivalent (*i.e.* égal μ–presque sûrement) à l'un des A_j.
2) Si $\Omega_0 = \left(\bigcup_{j \in J} A_j\right)^c$, la mesure $1_{\Omega_0} \cdot \mu$ est diffuse, la mesure $1_{\Omega_0^c} \cdot \mu$ est purement atomique.
Toute mesure positive bornée se décompose donc [de façon unique] en somme d'une mesure diffuse et d'une mesure purement atomique (étrangères l'une à l'autre).
3) Avec les notations de l'exercice 0.9, quels sont les atomes de la mesure π ?

Exercice 0.13. Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé *non atomique*(cf. exercice *0.12*) :

$$\forall A \in \mathcal{A},\ \mathbb{P}[A] > 0 \Rightarrow \exists B \in \mathcal{A},\ B \subset A \text{ et } 0 < \mathbb{P}[B] < \mathbb{P}[A].$$

1) Soit $A \in \mathcal{A}$ avec $\mathbb{P}[A] > 0$. Montrer qu'il existe $B \in \mathcal{A}$ tel que $B \subseteq A$ et $0 < \mathbb{P}[B] \leq \varepsilon$.
2) On pose, pour $A \in \mathcal{A}$, $\mu_\varepsilon[A] = \sup\{\mathbb{P}[B] \mid B \in \mathcal{A},\ B \subseteq A,\ \mathbb{P}[B] \leq \varepsilon\}$.
Montrer :
i) $\mathbb{P}[A] > 0 \Leftrightarrow \mu_\varepsilon[A] > 0$;
ii) Prouver qu'il existe une partition de Ω en une famille finie d'éléments de $\mathcal{A}$ de probabilités inférieures à ε.
3) Pour tout $x \in [0,1]$, il existe $B \in \mathcal{A}$ avec $\mathbb{P}[B] = x$.
4) Il existe une fonction $\mathcal{A}$–mesurable f à valeurs dans $]0,1[$, telle que l'image de $\mathbb{P}$ par f soit la mesure de Lebesgue sur $]0,1[$.

Exercice 0.14. 1) Soit $\mathbb{P}$ une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{A})$.

a) Soit $(A_j)_{1 \leq j \leq n}$ des éléments de $\mathcal{A}$. Etablir la *formule de Poincaré* :

$\mathbb{P}\left[\bigcup_{1 \leq i \leq n} A_i\right] = \sum_{1 \leq i \leq n} \mathbb{P}[A_i] - \sum_{1 \leq i < j \leq n} \mathbb{P}\left[A_i \cap A_j\right] + \ldots + (-1)^{n-1} \mathbb{P}\left[\bigcap_{1 \leq i \leq n} A_i\right]$.

b) Soit $(A_j)_{0 \leq j \leq n}$ des éléments de $\mathcal{A}$. Montrer que la probabilité que seul A_0 soit réalisé est : $\mathbb{P}[A_0] - \sum_{1 \leq i \leq n} \mathbb{P}[A_0 \cap A_i] + \sum_{1 \leq i < j \leq n} \mathbb{P}\left[A_0 \cap A_i \cap A_j\right] + \ldots + (-1)^n \mathbb{P}\left[A_0 \cap \bigcap_{1 \leq i \leq n} A_i\right]$.

c) Soit $(A_j)_{1 \leq j \leq n}$ des éléments de $\mathcal{A}$. Montrer que la probabilité qu'un seul des événements A_1, ..., A_n soit réalisé est :

$$\sum_{1 \leq i \leq n} \mathbb{P}[A_i] - 2\sum_{1 \leq i < j \leq n} \mathbb{P}\left[A_i \cap A_j\right]$$
$$+3\sum_{1 \leq i < j < k \leq n} \mathbb{P}\left[A_i \cap A_j \cap A_k\right] + \ldots + (-1)^{n-1} n \mathbb{P}\left[\bigcap_{1 \leq i \leq n} A_i\right].$$

2) On prend $\Omega = \{1, ..., n\}^r$, $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$; $\mathbb{P}$ est la probabilité uniforme sur Ω :

$$\forall \omega \in \Omega, \ \mathbb{P}[\{\omega\}] = n^{-r}.$$

Un point ω de Ω s'identifie à une application de $\{1, ..., r\}$ dans $\{1, ..., n\}$; il correspond aussi placement ["naïvement" au hasard, puisque $\mathbb{P}$ est uniforme] de r boules (distinguables) dans n cases (distinguables) ($r \geq n$).

a) Quelle est la probabilité $p_{r,n}$ pour qu'aucune case ne soit vide ? Plus généralement, soit V le nombre de cases restées vides ; calculer, pour $0 \leq j \leq n$, la probabilité de l'ensemble $\{V = j\}$. uelle est la loi de la variable aléatoire V égale au nombre de cases restées vides ?

b) On suppose $n \to \infty$, $r(n) \to \infty$ et $ne^{-r(n)/n} \to \lambda > 0$. Montrer que $p_{r(n),n}$ tend vers $e^{-\lambda}$.

3) Soit E et F deux ensembles finis ; on suppose : $\mathrm{Card}(E) \geq \mathrm{Card}(F)$. On définit, pour tout $y \in F$, $A_y = \{f : E \mapsto F \mid y \in f(E)\}$. Quel est le nombre d'éléments de $F^E - A_y$. En remarquant que l'ensemble $\mathcal{S}(E, F)$ des surjections de E dans F est $\bigcap_{y \in F} A_y$, utiliser la formule de Poincaré pour dénombrer $\mathcal{S}(E, F)$.

Exercice 0.15. Donner des exemples de mesures bornées μ sur $(\mathbb{R}_+, \mathcal{B}(\mathbb{R}_+))$ avec :

1) $\forall p > 0, \displaystyle\int_{\mathbb{R}_+} x^p \, d\mu(x) = \infty$ et $\displaystyle\int_{\mathbb{R}_+} |\log x| \, d\mu(x) < \infty$;

2) $\forall p > 0, \displaystyle\int_{\mathbb{R}_+} x^p \, d\mu(x) < \infty$ et $\displaystyle\int_{\mathbb{R}_+} |\log x| \, d\mu(x) = \infty$.

Exercice 0.16. Soit (j_n) une suite d'entiers positifs et (z_n) une suite de nombres complexes vérifiant $\lim_{n \to \infty} j_n = \infty$ et $\lim_{n \to \infty} (j_n z_n) = \lambda \in \mathbb{C}$. Montrer : $\lim_{n \to \infty} (1 + z_n)^{j_n} = e^{\lambda}$.

Exercice 0.17. Soit H la fonction définie, pour $x \in \mathbb{R}_+$, par :

$$H(x) = \left(\int_0^x e^{-u^2} du\right)^2 + \int_0^1 e^{-x^2(1+t^2)} \tfrac{dt}{1+t^2}.$$

1) Montrer que H est continue, que $H(0) = \frac{\pi}{4}$ et que $\left(\displaystyle\int_0^\infty e^{-u^2} du\right)^2 = \lim_{x \to \infty} H(x)$.

2) Montrer que H est dérivable et que $H' = 0$. En déduire : $\displaystyle\int_0^\infty e^{-u^2} du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Exercice 0.18. Pour quelles valeurs de $t>0$, l'intégrale $\int_0^\infty \cos\left(x^t\right)\,dx$ est–elle absolument convergente (resp. convergente) ?

Exercice 0.19. On rappelle que $\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{1}{2}x^2}\,dx=\sqrt{2\pi}$.
Montrer que, pour tout $z\in\mathbb{C}$ avec $|z|<1$,

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{e^{x^2}+ze^{-x^2}}\,dx=\sqrt{\pi}\sum_{n\geq 0}(-z)^n\frac{1}{\sqrt{2n+1}}.$$

Montrer $\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{e^{x^2}+e^{-x^2}}\,dx=\sqrt{\pi}\sum_{n\geq 0}(-1)^n\frac{1}{\sqrt{2n+1}}$.

Exercice 0.20. 1) Soit $a\in\mathbb{R}$, $t\in\mathbb{R}_+^*$. Montrer que, pour tout $z\in\mathbb{C}$ avec $\operatorname{Re} z<t$, $x\mapsto e^{zx}e^{-tx}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ et

$$\int_0^\infty e^{zx}e^{-tx}\,dx=\frac{1}{t-z}.$$

En déduire $\int_0^\infty \sin(ax)\,e^{-tx}\,dx=\frac{a}{t^2+a^2}$.
2) Montrer que, pour tout $x\in\,]0,\infty[$, $\frac{1}{\sinh x}=2\sum_{n\geq 0}e^{-(2n+1)x}$.
Montrer que, pour $a\in\mathbb{R}$, $x\mapsto\frac{\sin(ax)}{\sinh x}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ et

$$\int_0^\infty \frac{\sin(ax)}{\sinh x}\,dx=2a\sum_{n\geq 0}\frac{1}{a^2+(2n+1)^2}.$$

Exercice 0.21. Soit λ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$ et, pour $n\in\mathbb{N}$, $f_n=\frac{1}{n}1_{[n,\infty[}$. Montrer que (f_n) est monotone, décroissante, convergeant uniformément vers 0, mais que $\lim_n\int_{\mathbb{R}} f_n\,d\lambda=\infty$. Cela contredit-il le théorème de convergence monotone ? Le lemme de Fatou s'applique-t-il ?

Exercice 0.22. Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}\times\,]0,\infty[$ par

$$h(x,y)=\begin{cases}\exp\left(-\frac{y}{1-x^2}\right) & \text{si } |x|<1,\\ 0 & \text{si } |x|\geq 1.\end{cases}$$

Montrer que $H:y\in\,]0,\infty[\,\mapsto H(y)=\int_{\mathbb{R}} h(x,y)\,dx$ est continue. Etudier son comportement quand y tend vers l'infini et quand y tend vers 0. Montrer qu'il existe un unique $y_0\in\,]0,\infty[$ avec $H(y_0)=1$.

Exercice 0.23. Montrer que, pour $0<x<1$,

$$\frac{1}{1+x}=\sum_{n\geq 0}x^{2n}(1-x).$$

En déduire : pour $p\in\mathbb{C}$ avec $\operatorname{Re} p>0$, $q\in\mathbb{R}_+^*$,

$$\int_0^1 \frac{x^{p-1}}{1+x^q}\,dx=\sum_{n\geq 0}\frac{q}{(p+2nq)(p+(2n+1)q)}.$$

Exercice 0.24. Construire une fonction numérique continue positive sur $\mathbb{R}$, non bornée et cependant dans $\mathcal{L}^p$ pour tout $p \geq 1$.

Exercice 0.25. Soit K un compact de $\mathbb{R}$ et $f : K \mapsto \mathbb{R}$ vérifiant :

$$\forall x \in K,\ \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \underset{y \in K,\, y \to x}{\to} 0.$$

Montrer que $f(K)$ est Lebesgue–négligeable.

Exercice 0.26. Montrer que l'ensemble $\mathbb{A}$ des nombres algébriques est dénombrable ($\mathbb{A}$ est l'ensemble des réels solutions d'une équation polynomiale $P(x) = 0$, avec P à coefficients dans $\mathbb{Z}$). Donner un exemple de compact $K \subseteq [0,1]$, avec $\lambda_1[K] > 0$ et $K \cap \mathbb{A} = \varnothing$.

Exercice 0.27. Soit (a_n) une suite de nombres réels.

1) Montrer que pour α, β réels avec $\alpha \leq \beta$, $\lim_n \int_\alpha^\beta \cos^2(nx + a_n) = \frac{1}{2}(\beta - \alpha)$.

En déduire que, pour toute fonction $f \in \mathcal{L}^1(\lambda_1)$, $\int_{\mathbb{R}} f(x) \cos^2(nx + a_n)\, dx \underset{n \to \infty}{\to} \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} f(x)\, dx$.

En déduire que, pour $f \geq 0$, $\liminf_n \int_{\mathbb{R}} f(x) \left|\cos(nx + a_n)\right| dx > 0$.

Exercice 0.28. Soit $(E, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré, avec $\mu[E] < \infty$.

1) Soit $f : (E, \mathcal{A}) \mapsto (\mathbb{R}, \mathcal{R})$. Montrer que f est μ–intégrable si et seulement si

$$\sum_{k \geq 1} \mu\left[|f| \geq k\right] < \infty.$$

2) Soit (f_n) une suite de fonctions mesurables sur $(E, \mathcal{A})$.

i) Prouver que (f_n) converge μ–presque partout vers 0 si :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \sum_{k \geq 1} \mu\left[|f_k| \geq \varepsilon\right] < \infty.$$

ii) Soit μ_n l'image de μ par f_n. On suppose f_1 μ–intégrable et : $\forall n \geq 1$, $\mu_n = \mu_1$.

Montrer $\frac{1}{n} f_n \overset{\mu\text{–p.p.}}{\underset{n \to \infty}{\to}} 0$.

Exercice 0.29. 1) i) Pour quelles valeurs du nombre complexe z la fonction $t \to \frac{\sin t}{t^z}$ est-elle intégrable par rapport la mesure de Lebesgue sur $(\mathbb{R}_+, \mathcal{R}_+)$?

ii) Pour quelles valeurs du nombre complexe z la fonction $t \to \frac{\sin t}{t^z}$ est-elle *localement* intégrable par rapport la mesure de Lebesgue sur $(\mathbb{R}_+, \mathcal{R}_+)$?

iii) Montrer que l'intégrale généralisée $H(z) = \int_0^\infty \frac{\sin t}{t^z}\, dt$ existe pour tout $z \in \mathbb{C}$ dont la partie réelle x appartient à l'intervalle $]0, 2[$ et que $H(z) = \int_0^\infty \frac{1 - \cos t}{t^{z+1}}\, dt$.

2) Montrer que H est de classe C^∞ sur $]0, 2[$.

Exercice 0.30. 1) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto e^{-\left(t^2 + itx\right)}$ est [Lebesgue-]intégrable sur $\mathbb{R}$ et que $x \mapsto F(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{-\left(t^2 + itx\right)}\, dt$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

2) Montrer que F est solution d'une équation différentielle du premier ordre ; calculer F.

3) Retrouver le résultat précédent en développant e^{-itx} en série entière (on montrera auparavant que pour $n \in \mathbb{N}$, $\int_{\mathbb{R}} t^{2n} e^{-t^2}\, dt = \frac{(2n)!}{(n!)2^{2n}} \sqrt{\pi}$).

Exercice 0.31. 1) Soit, pour $a > 0$, $H(a) = \int_0^\infty |\sin x|\, e^{-ax}\, dx$.
i) Montrer :

$$H(a) = \frac{1}{1-e^{-a\pi}} \int_0^\pi |\sin x|\, e^{-ax}\, dx\,;$$

calculer explicitement $H(a)$.
ii) Montrer : $a^2 H(a) \underset{a\to\infty}{\to} 1$.

2) Calculer pour $b > 0$, t réel, $\int_0^\infty e^{-bx} \sin(tx)\, dx$.

3) Montrer que pour $t \in \mathbb{R}$, $a > -1$

$$K(a,t) = \int_0^\infty e^{-ax} \frac{\sin(tx)}{e^x - 1}\, dx = \sum_{n\geq 1} \frac{t}{t^2 + (n+a)^2}.$$

4) Montrer que K est de classe C^∞ sur $]-1,\infty[\times \mathbb{R}$ et $\frac{\partial^2 K}{\partial a^2} + \frac{\partial^2 K}{\partial t^2} = 0$**.**

Exercice 0.32. Soit, pour $x \geq 0$,

$$H(x) = \int_{\mathbb{R}_+} \frac{e^{-xt^2}}{1+t^2}\, dt.$$

1) Montrer que H est continue, décroissante et $\lim_{x\to\infty} H(x) = 0$.
2) Montrer que H est de classe C^∞ sur $]0,\infty[$ et

$$\frac{\partial^n H}{\partial x^n}(x) = (-1)^n \int_{\mathbb{R}_+} \frac{t^{2n}}{1+t^2} e^{-xt^2}\, dt.$$

En particulier, $H(x) - H'(x) = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-xt^2}\, dt = \frac{c}{\sqrt{x}}$, si $c = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-t^2}\, dt$.
Résoudre l'équation différentielle ; en déduire c et H.

Exercice 0.33. Soit S la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$S(x) = \int_{\mathbb{R}} \frac{\sin tx}{t(t^2+1)}\, dt$$

1) Montrer que S est continue ; montrer que, pour $x > 0$,

$$S(x) = \int_{\mathbb{R}} \frac{\sin t}{t} \frac{x^2}{t^2 + x^2}\, dt = \int_{\mathbb{R}} \frac{1 - \cos t}{t^2} \frac{x^2\left(x^2 + 3t^2\right)}{\left(t^2 + x^2\right)^2}\, dt.$$

En déduire : $S(x) \underset{x\to\infty}{\to} \int_{\mathbb{R}} \frac{1-\cos t}{t^2}\, dt = \int_{\mathbb{R}} \frac{\sin t}{t}\, dt$
cette dernière intégrale étant définie comme $\lim_{x\to\infty, y\to-\infty} \int_y^x \frac{\sin t}{t}\, dt$.

2) S est dérivable sur $\mathbb{R}$, de dérivée $S'(x) = \int_{\mathbb{R}} \frac{\cos tx}{t^2+1}\, dt$; S' est borné par $S'(0)$ qui vaut π et pour $x \neq 0$,

$$S'(x) = x \int_{\mathbb{R}} \frac{\cos v}{v^2 + x^2}\, dv.$$

Montrer que $T = S'$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^*$ et que $T'' - T = 0$. .
En déduire T, S et $\int_{\mathbb{R}} \frac{\sin t}{t}\, dt$.

Exercice 0.34. Soit f et g des fonctions continues sur $]0,1[$, intégrables.
1) Montrer que les fonctions $\sin f$ et $g\cos f$ sont intégrables.
2) Montrer que, pour tous $x,\ y \in \mathbb{R}$,

$$|\sin(x+y) - \sin x - y\cos x| \leq \left| e^{i(x+y)} - e^{ix} - iye^{ix} \right|$$
$$|y| + \left| e^{iy} - 1 \right| \leq 2|y|.$$

3) En déduire : $\lim_{n\to\infty} n \left(\sin\left(\left(f+\frac{1}{n}g\right)(t)\right) dt - \int_0^1 \sin(f(t))\, dt \right)$
$$= \int_0^1 g(t)\cos(f(t))\, dt.$$

Exercice 0.35. Soit μ une mesure positive *bornée* sur $(\mathbb{R},\mathcal{R})$ et Φ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par
$$\Phi(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{itx}\, d\mu(x).$$

1) Montrer que Φ est continue.
2) Soit $n \in \mathbb{N}^*$; montrer que si $\int_{\mathbb{R}} |x|^n\, d\mu(x)$ est fini, Φ est de classe C^n.
3) On suppose Φ deux fois dérivable en 0 ; on rappelle que l'on a alors

$$\Phi\text{''}(0) = \lim_{h\to 0} \frac{\Phi(h)+\Phi(-h)-2\Phi(0)}{h^2} ;$$

montrer que $\int_{\mathbb{R}} x^2\, d\mu(x)$ est fini.
4-i) Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

$$(\alpha)\ \lim_{a\to\infty} a\mu\, []-\infty,a] \cup [a,\infty[] = 0 ;$$
$$(\beta)\ \lim_{a\to\infty} \tfrac{1}{a} \int_{[-a,a]} x^2\, d\mu(x) = 0 ;$$
$$(\gamma)\ \lim_{a\to\infty} \textstyle\int \sin^2 \frac{x}{a}\, d\mu(x) = 0.$$

ii) Montrer que si (α) est vérifiée,

$$\lim_{a\to\infty} \left(a \int \sin\tfrac{x}{a}\, d\mu(x) - \int_{[-a,a]} x\, d\mu(x) \right) = 0.$$

iii) En déduire que $\Phi'(0)$ existe si et seulement si :

$$\lim_{a\to\infty} a\mu\, []-\infty,a] \cup [a,\infty[] = 0 \text{ et } \ell = \lim_{a\to\infty} \int_{[-a,a]} x\, d\mu(x) \text{ existe} ;$$

on a alors $\Phi'(0) = i\ell$.

Exercice 0.36. Soit g continue bornée sur $\mathbb{R}$; on pose, pour $x \in \mathbb{R}$ et $y > 0$,

$$G(x,y) = \frac{1}{2\sqrt{\pi y}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{(x-t)^2}{4y}}\, g(t)\, dt.$$

1) Montrer que G est continue sur $\mathbb{R}\times]0,\infty[$. Montrer :

$$G(x,y)=\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_{\mathbb{R}}e^{-\frac{v^2}{4}}\,g\left(x+v\sqrt{y}\right)\,dv.$$

On prolonge G sur $\mathbb{R}\times\{0\}$ par $\widetilde{G}(x,0)=g(x)$; montrer que $\widetilde{G}$ est continue sur $\mathbb{R}\times[0,\infty[$.
2) Montrer que $\frac{\partial G}{\partial x}$ et $\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}$ existent ; les exprimer.
3) Montrer que $\frac{\partial G}{\partial y}$ existe et que $\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}-\frac{\partial G}{\partial y}=0$.

Exercice 0.37. Soit $a\in]0,1[$ et, pour $x\in]0,\infty[$, $x\neq 1$,

$$U(x)=\frac{x^{a-1}}{1-x},\ V(x)=\frac{x^{-a}-1}{1-x}.$$

1-i) Montrer que V est Lebesgue–intégrable sur $]0,1[$.
ii) U est-elle Lebesgue–intégrable sur $]0,\infty[$?
2) Montrer que $\displaystyle\int_0^1 V(x)\,dx=\sum\nolimits_{n\geq 0}\int_0^1\left(x^{-a}-1\right)x^n\,dx=\sum\nolimits_{n\geq 0}\frac{a}{(n-a+1)(n+1)}$.
3) Soit $r\in]0,1[$ et $s=\frac{1}{1+r}$. Montrer que $\displaystyle\int_{1+r}^{\infty}\frac{x^{a-1}}{1-x}\,dx=-\int_0^s\frac{x^{-a}}{1-x}\,dx$.
Montrer que $\displaystyle\int_{]0,1-r[\cup]1+r,\infty[}^{1}U(x)\,dx\underset{r\to 0_+}{\to}\int_0^1\frac{x^{a-1}-x^{-a}}{1-x}\,dx=\sum\nolimits_{n\geq 0}\frac{1-2a}{(n-a+1)(n+a)}$.

Exercice 0.38. On pose, pour $n,\ p\in\mathbb{N}$, $I_{n,p}=\displaystyle\int_0^{2\pi}\cos^{2p}(nt)\,dt$.
1) Montrer : $I_{n,p}=\frac{2p-1}{2p}I_{n,p-1}$ $(p\in\mathbb{N}^*)$; en déduire que la suite $\left(\sqrt{2p+1}\,I_{n,p}\right)_{p\in\mathbb{N}}$ est décroissante. Montrer $I_{n,p}\leq\frac{2\pi}{\sqrt{2p+1}}$.
2) Soit $G(t)=\sum_{p\in\mathbb{N}^*}\frac{1}{p}\cos^{2p}(pt)$. Montrer que G est finie λ_1–presque partout. Que vaut $G(t)$ si $\frac{t}{\pi}\in\mathbb{Q}$?