Exercice 0.1. Soit $(\Omega,\mathcal{A},\mu)$ un espace mesuré et T une application mesurable de $(\Omega,\mathcal{A})$ dans $(\Omega,\mathcal{A})$ qui conserve la mesure μ, *i.e.* telle que :

$$\forall A\in\mathcal{A},\ \mu\left[T^{-1}(A)\right]=\mu[A].$$

1-i) Montrer que, pour toute f $\mathcal{A}$–mesurable positive, $\displaystyle\int f\circ T\,d\mu=\int f\,d\mu$.

ii) En déduire que l'on définit une isométrie $\widetilde{T}$ de $L^2(\Omega,\mathcal{A},\mu)$ dans lui-même en posant $\widetilde{T}f=f\circ T$.

2) On pose, pour $n\in\mathbb{N}^*$, $A_nf=\frac{1}{n}\sum_{0\le k\le n-1}\widetilde{T}^kf$ ($\widetilde{T}^0$ est l'identité de L^2).

i) Etablir, pour f, g dans L^2 $\in$l'inégalité : $\|A_nf-A_ng\|_2\le\|f-g\|_2$.

ii) Montrer que $\mathcal{M}=\left\{f\in L^2\mid(A_nf)\text{ converge dans }L^2\right\}$ est un sous–espace fermé de L^2.

iii) Montrer que, pour $f\in\mathcal{M}$, $\phi=\lim_nA_nf$ vérifie : $\widetilde{T}\phi=\phi$.

3-i) Montrer que $\mathcal{M}$ contient $\mathcal{I}=\left\{f\in L^2\mid\widetilde{T}f=f\right\}$.

ii) Montrer que $\mathcal{M}$ contient $\mathcal{H}=\left\{f-\widetilde{T}f\mid f\in L^2\right\}$.

iii) Montrer : $\forall g\in L^2$, $\left\|g-\widetilde{T}g\right\|_2^2=2\,\mathrm{Re}\left(\displaystyle\int\overline{g}\left(g-\widetilde{T}g\right)d\mu\right)$;

en déduire $\mathcal{H}^\perp\subseteq\mathcal{I}$.

iv) En déduire $\mathcal{M}=L^2$.

4) Soit λ la mesure de Lebesgue sur $(\mathbb{R},\mathcal{R})$ et $g\in L^2(\mathbb{R},\mathcal{R},\lambda)$. Soit, pour $n\in\mathbb{N}^*$,

$$G_n(.)=\frac{1}{n}\sum\nolimits_{0\le k\le n-1}g(.+k).$$

Etudier la convergence de la suite (G_n) ; identifier une éventuelle limite.

5) On suppose $\mu[\Omega]<\infty$. Montrer que $L^2(\Omega,\mathcal{A},\mu)$ est un sous–espace dense de $L^1(\Omega,\mathcal{A},\mu)$.

Soit $h\in L^1(\Omega,\mathcal{A},\mu)$; montrer que $\left(\frac{1}{n}\sum_{0\le k\le n-1}\widetilde{T}^kh\right)$ converge dans $L^1(\Omega,\mathcal{A},\mu)$ et que sa limite η vérifie $\widetilde{T}\eta=\eta$.

Exercice 0.2. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de $\mathcal{L}^2(E,\mathcal{A},\mu)$. On suppose qu'elle est orthogonale et bornée [dans $L^2(\mu)$].

On définit, pour $n\in\mathbb{N}^*$, $g_n=\frac{1}{n}\sum_{1\le k\le n}f_k$ et $h_n=g_{n^2}$.

1) Montrer que la suite $(g_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0 dans $L^2(\mu)$.

2) Montrer que $\sum_{k\ge1}|h_k|^2$ est fini μ–presque partout. En déduire que la suite $(h_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0 μ–presque partout.

3) Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on désigne par q_n l'entier défini par les inégalités $q_n^2\le n<(q_n+1)^2$; soit

$$\phi_n=\tfrac{1}{n}\sum\nolimits_{q_n^2<k\le n}f_k.$$

Montrer que $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0 dans $L^2(\mu)$ et μ–presque partout. Que peut–on en déduire pour $(g_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Exercice 0.3. $\mathbb{R}^m$ est muni de sa tribu borélienne $\mathcal{R}^m$ et de la mesure de Lebesgue.
1) Soit f intégrable et g borélienne bornée sur $\mathbb{R}^m$.
i) Montrer que la formule

$$(f*g)(x)=\int_{\mathbb{R}^m} f(x-y)\,g(y)\,dy$$

définit une fonction [borélienne] sur $\mathbb{R}^m$ telle que $\|f*g\|_\infty \leq \|f\|_1\,\|g\|_\infty$.
ii) Montrer que $f*g$ est continue
(Indication : on pourra traiter d'abord le cas où f est continue à support compact).
2) Soit A un borélien de $\mathbb{R}^m$ avec $0<\lambda[A]<\infty$; $u_A = 1_A * 1_{-A}$.
Calculer $u_A(0)$; en déduire que $\{x\in\mathbb{R}^m \mid u_A(x)>0\}$ est un ouvert contenant 0.
En déduire que $A-A=\{a-a' \mid a,\ a'\in A\}$ est un voisinage de 0.
3) Soit μ une mesure positive sur $(\mathbb{R}^m,\mathcal{R}^m)$ non nulle, σ–finie et invariante par translation.

i) Montrer qu'il existe $\Gamma\in\mathbb{R}^m$ avec $0<\lambda[\Gamma]<\infty$ et $0<\mu[\Gamma]<\infty$.
ii) Montrer que, pour f borélienne positive sur $\mathbb{R}^m$,

$$\int_{\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}^m} f(x-y)\,1_\Gamma(x)\,1_\Gamma(y)\,d\mu(x)\,d\lambda(x)=\int_{\mathbb{R}^m} u_\Gamma f\,d\mu.$$

iii) En déduire qu'il existe un voisinage borné de 0, soit K, tel que $\mu[K]$ soit fini.
iv) Qu'en conclure pour la mesure μ.