**Exercice 0.1.** Soit $(E, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré $\sigma$–fini et $f$ une application mesurable de $E$ dans $\mathbb{R}^m$ ; on note $\langle u, v \rangle$ le produit scalaire usuel de $\mathbb{R}^m$.

1) Soit $C$ l'ensemble des éléments $\theta$ de $\mathbb{R}^m$ tels que $x \in E \mapsto e^{\langle \theta, f(x) \rangle}$ soit $\mu$–integrable. Montrer que $C$ est un sous–ensemble convexe de $\mathbb{R}^m$. On posera, pour $\theta \in C$,

$$\phi(\theta) = \log\left(\int_E e^{\langle \theta, f(x) \rangle} d\mu(x)\right).$$

2) Donner des exemples où $C$ est vide, où $C$ est réduit à un point.

3) On suppose que $m = 1$, que $(E, \mathcal{A}) = (\mathbb{R}, \mathcal{R})$ et que $\mu$ est la mesure de densité

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right)$$

par rapport à la mesure de Lebesgue. Trouver $C$ et calculer $\phi$.

4) Dans le cas général, on suppose l'interieur $\Omega$ de $C$ non vide. Montrer que $\phi$ est deux fois continûment différentiable sur $\Omega$ ; calculer ses dérivées partielles premières et secondes.

**Exercice 0.2.** Soit $0 < A < \infty$, $0 < B \leq \infty$, $p$, $r > 1$.

1) Soit $\phi$ une fonction continue positive à support compact dans $]0, A[$ ; $\Phi$ est la primitive de $\phi$ qui est nulle en 0.

i) Montrer que $x \to x^{-r}\Phi^p(x)$ est intégrable par rapport à la mesure de Lebesgue sur $]0, A[$ et que

$$\int_0^A x^{-r}\Phi^p(x)\,dx = \frac{p}{r-1}\int_0^A \left(x^{1-r} - A^{1-r}\right) \phi(x)\,\Phi^{p-1}(x)\,dx.$$

ii) En déduire :

$$\int_0^A x^{-r}\Phi^p(x)\,dx \leq \left(\frac{p}{r-1}\right)^p \int_0^A x^{-r}\phi^p(x)\,dx.$$

2) Montrer (**Inégalité de Hardy**) que pour toute fonction borélienne $f$ positive sur $]0, B[$,

$$\int_0^B x^{-r}\left(\int_0^x f(t)\,dx\right)^p dx \leq \left(\frac{p}{r-1}\right)^p \int_0^B x^{-r} f^p(x)\,dx.$$

**Exercice 0.3.** 1) Soit, pour $\alpha \in ]0, 1[$, $\varphi(\alpha) = \displaystyle\int_0^\infty t^{-\alpha}\frac{1}{1+t}\,dt$.

Montrer que $\varphi$ est de classe $C^1$ sur $]0, 1[$ et vérifie $\varphi(\alpha) = \varphi(1-\alpha)$ ; calculer $\varphi\left(\frac{1}{2}\right)$.

2) Soit $f$ et $g$ des fonctions boréliennes positives sur $(\mathbb{R}_+, \mathcal{R}_+)$, $h$ une fonction borélienne positive sur $\left(\mathbb{R}_+^2, \mathcal{R}_+^2\right)$, $p \in ]1, \infty[$ et $q$ l'exposant conjugué de $p$ $\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\right)$.

Montrer que, pour tout $r \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\int_{\mathbb{R}_+^2} f(x)\,g(y)\,h(x,y)\,dxdy$ est majorée par

$$\left(\int_{\mathbb{R}_+^2} f^p(x)\left(\frac{x}{y}\right)^{pr} h(x,y)\,dxdy\right)^{\frac{1}{p}} \times \left(\int_{\mathbb{R}_+^2} g^q(y)\left(\frac{y}{x}\right)^{qr} h(x,y)\,dxdy\right)^{\frac{1}{q}}.$$

En déduire :

$$\int_{\mathbb{R}_+^2} \frac{f(x)\, g(y)}{x+y}\, dxdy \leq \varphi\left(\tfrac{1}{p}\right) \left(\int_{\mathbb{R}_+} f^p(x)\, dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\mathbb{R}_+} g^q(y)\, dy\right)^{\frac{1}{q}}.$$

3-i) Soit $u \in \mathbb{R}_+$ ; étudier $\inf_{0 \leq t \leq 2} \left(\frac{1}{u+t} + \frac{1}{u+2-t}\right)$.
ii) Montrer que, pour $u \in \mathbb{R}_+$, on a :

$$\int_{[0,1]^2} \frac{1}{u+x+y}\, dxdy = \frac{1}{2}\int_{[0,1]^2} \left(\frac{1}{u+x+y} + \frac{1}{u+2-x-y}\right) dxdy \geq \frac{1}{u+1}.$$

En déduire : $\forall m,\ n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{m+n-1} \leq \displaystyle\int_{[m-1,m]\times[n-1,n]} \frac{1}{x+y}\, dxdy.$
iii) Montrer : pour toutes suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels positifs,

$$\sum_{m,n\in\mathbb{N}} \frac{1}{m+n+1} a_m b_n \leq \varphi\left(\tfrac{1}{p}\right) \left(\sum_{m\in\mathbb{N}} a_m^p\right)^{\frac{1}{p}} \times \left(\sum_{m\in\mathbb{N}} b_m^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

(on utilisera 2) avec $f = \sum_{n\in\mathbb{N}} 1_{]n,n+1]}\, a_n$ et $g = \sum_{n\in\mathbb{N}} 1_{]n,n+1]}\, b_n$).
4) Montrer que, pour toute suite de réels $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$,

$$\int_0^1 \left(\sum_{n\in\mathbb{N}} |u_n|\, x^n\right)^2 dx = \sum_{m,n\in\mathbb{N}} \frac{1}{m+n+1} |u_m u_n|.$$

5) Soit $f$ borélienne positive sur $[0,1]$, de carré intégrable pour la mesure de Lebesgue. Montrer :

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \left(\int_0^1 x^n f(x)\, dx\right)^2 \leq \pi \left(\int_0^1 f^2(x)\, dx\right).$$

**Exercice 0.4.** Soit $0 < a < b$ et $A$ l'ouvert de $\mathbb{R}^2$ :

$$A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0,\ y > 0,\ xy < 1,\ a < \frac{y}{x} < b\right\}.$$

Soit $p \in \mathbb{R}$. Calculer $\displaystyle\int_A (1-xy)^p\, dxdy.$

**Exercice 0.5.** $\lambda_d$ désigne la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$ ; $\|t\|$ est la norme euclidienne de $t \in \mathbb{R}^d$ ; pour $z \in \mathbb{R}^d$ et $r > 0$,

$$B(z,r) = \left\{y \in \mathbb{R}^d \mid \|y-z\| < r\right\}.$$

Soit $F$ un fermé de $\mathbb{R}^d$ et $\delta$ la distance à cet ensemble :

$$\forall x \in \mathbb{R}^d,\ \delta(x) = \inf\{\|x-y\| \mid y \in F\}.$$

1) Montrer que si $z \notin F$, l'intégrale

$$I(z) = \int_{B(z,1)} \frac{\delta(y)}{\|z-y\|^{d+1}}\, dy$$

est infinie. Donner des exemples d'ensembles $F$ et de points $z \in F$ pour lesquels $I(z)$ est également infini. Le but des questions suivantes est de montrer que pour $\lambda_d$-presque tout $z \in F$, $I(z)$ est fini.
2) Montrer qu'il existe une constante $c$ indépendante de $F$ telle que :

$$\forall z \in \mathbb{R}^d, \int_F \frac{1}{\|z-y\|^{d+1}} \, dy \leq \frac{c}{\delta(z)}$$

(*Indication* : comparer $F$ et $\left\{x \in \mathbb{R}^d \mid \|x-z\| \geq \delta(z)\right\}$).
3) Soit pour $x \in \mathbb{R}^d$, $J(x) = \int_{\mathbb{R}^d} \frac{\delta(y+x)}{\|y\|^{d+1}} \, dy$.
Montrer que $J$ est borélienne et que $\int_F J(x) \, dx \leq c \lambda_d [F^c]$.
En déduire que si $\lambda_d [F^c]$ est fini, on a $J(x) < \infty$ pour $\lambda_d$-presque tout $x \in F$.
4) Soit $r > 0$ et $\delta_r$ la distance à $F \cup B(0,r)^c$. Montrer que pour presque tout $x$ de $F$,

$$\int_{B(0,1)} \frac{\delta_r(y+x)}{\|y\|^{d+1}} \, dy < \infty.$$

5) Montrer que si $r > 2$, $\|y\| \leq 1$ et $x \in F \cap B(0, r-2)$, on a :

$$\delta_r(x+y) = \delta(x+y).$$

En déduire que $\int_{B(0,1)} \frac{\delta(y+x)}{\|y\|^{d+1}} \, dy$ est fini pour presque tout $x \in F \cap B(0, r-2)$.
6) Montrer que pour presque tout $z$ de $F$, $\int_{B(z,1)} \frac{\delta(y)}{\|z-y\|^{d+1}} \, dy$ est fini.
(On a donc : presque tout point $z$ de $F$ est “complètement” entouré par les autres points de $F$ ; en effet, la distance de $y$ à $F$ tend vers 0 lorsque $y \to z$, suffisamment vite pour faire converger l'integrale ci-dessus. Si $z$ est isolé dans $F$, par exemple, l'integrale est infinie).

**Exercice 0.6.** Soit $\mu$ une mesure bornée sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ et $F$ un fermé de $\mathbb{R}$ avec $\mu[F^c] = 0$.
1) Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C} - F$, $t \to \dfrac{1}{t-z}$ est $\mu$-intégrable et que

$$z \to \Phi_\mu(z) = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{t-z} \, d\mu(t)$$

est continue, dérivable sur $\mathbb{C} - F$.
2) Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ ; on suppose qu'il existe $\eta > 0$ et $g$ continue sur $[x_0 - \eta, x_0 + \eta]$ tels que, pour tout borélien $A$ inclus dans $[x_0 - \eta, x_0 + \eta]$,

$$\mu[A] = \int_A g(u) \, du.$$

i) Montrer : $\lim_{\substack{y \to 0 \\ y > 0}} \int_{\mathbb{R} - [x_0 - \eta, x_0 + \eta]} \frac{y}{(t-x_0)^2 + y^2} \, d\mu(t) = 0$.
ii) Montrer : $\lim_{\substack{y \to 0 \\ y > 0}} \int_{[x_0 - \eta, x_0 + \eta]} \frac{y}{(t-x_0)^2 + y^2} \, g(t) \, dt = \pi g(x_0)$.
iii) En déduire : $\lim_{\substack{y \to 0 \\ y > 0}} \operatorname{Im}\left(\Phi_\mu(x_0 + iy)\right) = \pi g(x_0)$.

**Exercice 0.7.** Soit $\lambda$ la mesure de Lebesgue sur $(\mathbb{R},\mathcal{R})$, $p \geq 1$, $\varepsilon > 0$. On définit pour $x \in \mathbb{R}$, $f \in L^p(\lambda)$

$$H_\varepsilon f(x) = \int_{\mathbb{R}} \frac{f(t)}{x-t} 1_{\{|x-t|>\varepsilon\}}\, dt.$$

1) Montrer : $H_\varepsilon f(x) = \int_\varepsilon^\infty \frac{f(x-t)-f(x+t)}{t}\, dt$ et

$$H_\varepsilon f(x) = H_A f(x) + \int_{\mathbb{R}} \frac{f(t)-f(x)}{x-t} 1_{\{\varepsilon|x-t|\leq A\}}\, dt \text{ si } A > \varepsilon.$$

2) Montrer qu'il existe une constante $\gamma_p$ telle que

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |H_\varepsilon f(x)| \leq \gamma_p \varepsilon^{-\frac{1}{p}} \|f\|_p.$$

3) Montrer que $H_\varepsilon f$ est continue sur $\mathbb{R}$ et que $H_\varepsilon f(x) \underset{|x|\to\infty}{\to} 0$.

4) Montrer que si $f$ est de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}$, $H_\varepsilon f$ converge quand $\varepsilon$ tend vers 0 vers une fonction $Hf$ que l'on précisera.

5) Soit $\eta > \varepsilon$. Montrer que $H_\varepsilon f - H_\eta f$ est intégrable ; expliciter

$$\int_{\mathbb{R}} e^{ixy} (H_\varepsilon f - H_\eta f)(y)\, dy.$$

Que se passe-t-il quand $(\varepsilon, \eta)$ tend vers $(0, \infty)$ ?

**Exercice 0.8.** Soit $\alpha \in \left[\frac{1}{2}, 1\right[$.

1-i) Calculer pour $x \in [0,1]$ $\int_0^1 \frac{1}{|x-y|^\alpha}\, dx$.

ii) Soit $\phi \in L^1([0,1])$ ; montrer que $\int_{[0,1]^2} \frac{|\phi(y)|}{|x-y|^\alpha}\, dxdy$ est fini.

En déduire que

$$T(f)(x) = \int_0^1 \frac{1}{|x-y|^\alpha} f(y)\, dy$$

est défini pour presque tout $x$ de $[0,1]$.

2) Montrer qu'il existe une constante $C(\alpha)$ telle que pour $g,\ h \in L^2([0,1])$,

$$\int_{[0,1]^2} \frac{|g(x)||h(y)|}{|x-y|^\alpha}\, dxdy \leq C(\alpha) \left(\int_0^1 |g(x)|^2\, dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^1 |h(y)|^2\, dy\right)^{\frac{1}{2}}.$$

3) *On rappelle* : soit $p,\ q > 1$ avec $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} < 1$, et $\varphi$ une fonction borélienne avec :

$$\forall \psi \in L^q,\ \int_{[0,1]} |\varphi(x)| |\psi(x)|\, dx \leq C \|\psi\|_q\ ;$$

on a alors $\varphi \in L^p$ et $\|\varphi\|_p \leq C$.

Montrer que $T$ est une application linéaire continue de $L^2([0,1])$ dans lui-même.

4-i) Montrer qu'il existe une fonction $N$ mesurable sur $[0,1]^2$ telle que :

$$\forall f \in L^2([0,1]),\ T^2 f(x) = \int_{[0,1]} N(x,y)\, f(y)\, dy \text{ pour presque tout } x.$$

ii) Montrer qu'il existe des constantes $C$ et $D$ telles que

$$\forall x,\ y \in [0,1]\,,\ \int_{[0,1]} \frac{1}{|x-u|^{\alpha}\,|y-u|^{\alpha}}\,du \leq C + D\,|x-y|^{1-2\alpha}\,.$$

iii) Montrer que, pour $\alpha < \frac{3}{4}$, $N$ est dans $L^2\left([0,1]^2\right)$.

**Exercice 0.9.** Soit $f$ une fonction mesurable sur $\mathbb{R}^2$. On suppose que pour presque tout $y$

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x,y)|\,dx \leq 1.$$

1) Si $\varphi$ est intégrable sur $\mathbb{R}$, montrer que l'on peut définir pour presque tout $x$

$$(T\varphi)(x) = \int_{\mathbb{R}} f(x,y)\,\varphi(y)\,dy.$$

Montrer que $T\varphi$ est une fonction intégrable et que $T$ définit une application linéaire continue de $L^1(\mathbb{R})$ dans lui-même, de norme inférieure à 1.
2) On veut prouver par l'absurde que $T$ n'est pas l'application identité de $L^1(\mathbb{R})$. On suppose pour cela que, pour tout $\varphi$ dans $L^1(\mathbb{R})$, $T\varphi = \varphi$.
a) Montrer que pour tout ensemble intégrable $A$, on a :

$$\int_{A\times A^c} \frac{f(x,y)}{1+y^2}\,dx\,dy = 0$$

(*Indication* : *utiliser* $\varphi(y) = 1_{A^c}(y)\,\frac{1}{1+y^2}$)
b) Soit pour $p \in \mathbb{N}^*$, $n \in \mathbb{Z}$, $A_{n,p} = \left[\frac{n}{p}, \frac{n+1}{p}\right[$ et $g_p$ la fonction indicatrice de l'ensemble $\bigcup_{n\in\mathbb{Z}} A_{n,p} \times A_{n,p}^c$. Montrer :

$$\int_{\mathbb{R}^2} \tfrac{f(x,y)g_p(x,y)}{1+y^2}\,dxdy = 0.$$

c) Montrer que $g_p$ tend presque partout vers 1 quand $p \to \infty$. Conclure.

**Exercice 0.10.** 1) $(E,\mathcal{E},\mu)$ et $(F,\mathcal{F},\nu)$ sont deux espaces mesurés avec $\mu[E]+\nu[F]<\infty$.

Soit $p \in \,]1,\infty[$ et $K$ une fonction $\mathcal{E}\otimes\mathcal{F}$-mesurable positive bornée. Montrer

$$(\natural)\qquad \left(\int_E \left(\int_F K(x,y)\,d\nu(y)\right)^p d\mu(x)\right)^{\frac{1}{p}} \leq \int_F \left(\int_E K^p(x,y)\,d\mu(x)\right)^{\frac{1}{p}} d\nu(y)$$

(*Indication* : on pourra écrire $K(x,y) = H(x,y)\left(\varepsilon + \int_E K^p(z,y)\,d\mu(z)\right)^{\frac{1}{pq}}$ où $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, $\varepsilon > 0$ et appliquer l'inégalité de Hölder).
2) Etendre l'inégalité $(\natural)$ à toute fonction $G$ $\mathcal{E}\otimes\mathcal{F}$-mesurable positive (on pourra remplacer $G$ par $\inf(n,G)$ où $n\in\mathbb{N}$).

3) Soit $f$ une fonction localement intégrable par rapport la mesure de Lebesgue $\lambda$ sur $]0,\infty[$ et pour $x > 0$,

$$F(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\, dt.$$

i) Montrer : $F(x) = \displaystyle\int_0^1 f(xt)\, dt$.

ii) A l'aide de $(\natural)$ montrer : $\forall r \in\, ]1,\infty[,\ \forall s < r-1$,

$$\int_0^1 x^{s-r}\left|\int_0^x f(t)\, dt\right|^r dx \leq \left(\frac{r}{r-s-1}\right)^r \int_0^1 t^s\, |f|^r(t)\, dt.$$

**Exercice 0.11.** 1) Soit $\mu$ une mesure bornée sur $(\mathbb{R}_+,\mathcal{R}_+)$ et $\mathcal{H}$ l'ensemble des fonctions $h$ localement intégrables par rapport à la mesure de Lebesgue $\lambda$ sur $(\mathbb{R}_+,\mathcal{R}_+)$, telles que

$$\sup_{x\in\mathbb{R}_+}\left|\int_{[0,x]} h\, d\lambda\right| = 1 < \infty.$$

Montrer

$$\sup_{h\in\mathcal{H}}\left|\int_0^a h(t)\, \mu(]t,\infty[)\, dt - \int_{]0,\infty[}\left(\int_{[0,x]} h\, d\lambda\right) d\mu(x)\right| \underset{a\to\infty}{\rightarrow} 0.$$

2) Soit $\tau \in \mathbb{R}_+$, on définit pour $(a,b) \in \mathbb{R}^2$,

$$I_\tau(a,b) = \int_0^\tau \frac{\sin at \sin bt}{t^2}\, dt,\ I(a,b) = \int_0^\infty \frac{\sin at \sin bt}{t^2}\, dt.$$

i) Montrer que $I_\tau$ est de classe $C^1$ sur continue sur $\mathbb{R}^2$ et

$$\frac{\partial I_\tau}{\partial b}(a,b) = \int_0^\tau \frac{\sin(at+bt)+\sin(at-bt)}{t}\, dt.$$

ii) Montrer que $I$ est de classe $C^1$ sur l'ouvert $U = \left\{(a,b) \in \mathbb{R}^2,\ 0 < a < b\right\}$ ; que vaut $\frac{\partial I}{\partial b}$ sur $U$ ?

iii) Calculer les intégrales : $\displaystyle\int_0^\infty \cos(\lambda t)\, e^{-rt}\, dt \qquad (\lambda \in \mathbb{R},\ r > 0)$,

$$\int_{\mathbb{R}_+^2} (1-\cos(\lambda t))\, re^{-rt}\, dt\, dr \quad (\lambda \in \mathbb{R}).$$

iv) Montrer : $\forall (a,b) \in \mathbb{R}_+^2,\ I(a,b) = \frac{\pi}{2}\inf(a,b)$.

**Exercice 0.12.** Soit $\lambda$ la mesure de Lebesgue sur $(\mathbb{R},\mathcal{R})$. Pour $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ et $x \in \mathbb{R}$, $f_x$ est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f_x(y) = f(y-x)$.

1) Soit $p \in [1,\infty[$, $x \in \mathbb{R}$ et $f$ une fonction borélienne sur $(\mathbb{R},\mathcal{R})$. Montrer que $f_x$ est borélienne et que l'on a : $\|f_x\|_p = \|f\|_p$.

2) Soit $p \in [1,\infty[$, $x \in \mathbb{R}$ et $f \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R},\mathcal{R},\lambda)$ ; montrer que $x \to f_x$ est uniformément continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathcal{L}^p$ (*on traitera d'abord le cas où $f$ est continue à support compact*).

3) Ce résultat reste-t-il vrai pour $\mathcal{L}^\infty$ ?

4) Soit $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R},\mathcal{R},\lambda)$. Montrer que pour $t \in \mathbb{R}$,

$$\int_{\mathbb{R}} \exp(itx)\, f(x)\, dx = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} \exp(itx)\, \left(f(x) - f\left(x+\frac{\pi}{t}\right)\right)\, dx.$$

Soit $\widehat{f} : t \in \mathbb{R} \to \widehat{f}(t) = \int_{\mathbb{R}} \exp(itx)\, f(x)\, dx$ ; montrer : $\widehat{f} \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R})$.

5) Pour $\sigma \in ]0,\infty[$ et $m, x \in \mathbb{R}$, $g_{\sigma,m}(x) = (2\pi\sigma)^{-1/2} \exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma}\right)$.

a) Montrer $g_{\sigma,m} \in \mathcal{L}^1$ et montrer : $\widehat{g_{\sigma,m}}(t) = \exp\left(itm - \frac{\sigma t^2}{2}\right)$.

b) Soit $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R},\mathcal{R},\lambda)$, $m \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$. Montrer :

$f\,\widehat{g_{\sigma,m}} \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R},\mathcal{R},\lambda)$, $\widehat{f}\,g_{\sigma,m} \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R},\mathcal{R},\lambda)$ et $\int_{\mathbb{R}} f\,\widehat{g_{\sigma,m}}\, d\lambda = \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}\, g_{\sigma,m}\, d\lambda$.

c) Soit $f,\ h \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R},\mathcal{R},\lambda)$, avec $\widehat{f} = \widehat{h}$. Montrer :

$$\forall \gamma \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}),\ \int_{\mathbb{R}} f\gamma\, d\lambda = \int_{\mathbb{R}} h\gamma\, d\lambda\,;$$

en déduire : $f = h$ $\lambda$-presque partout.

6) Soit $\mathbb{A}(\mathbb{R}) = \left\{\widehat{f} \mid f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R},\mathcal{R},\lambda)\right\}$.

a) Montrer que $\mathbb{A}(\mathbb{R})$ est une algèbre pour l'addition et la multiplication des fonctions.

b) Montrer que l'on définit une norme sur $\mathbb{A}(\mathbb{R})$ par : $\|\varphi\|_{\mathbb{A}} = \|f\|_1$ si $\varphi = \widehat{f}$.

Etablir : $\forall \varphi_1,\ \varphi_2 \in \mathbb{A}(\mathbb{R})$, $\|\varphi_1\varphi_2\|_{\mathbb{A}} \leq \|\varphi_1\|_{\mathbb{A}} \times \|\varphi_2\|_{\mathbb{A}}$.

c) Montrer que la norme $\|.\|_{\mathbb{A}}$ n'est pas équivalente à la norme de la convergence uniforme. En déduire que $\mathbb{A}(\mathbb{R})$ est différent de $\mathcal{C}_0(\mathbb{R})$.

**Exercice 0.13.** Soit $\mathbb{P}$ l'ensemble des nombres complexes de partie réelle strictement positive.

1) Soit pour $a \in \mathbb{P}$, $f_a$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f_a(x) = 1_{\{x>0\}}\, x^{a-1} e^{-x}.$$

Montrer que $f_a$ est intégrable et que la fonction $\Gamma$ définie sur $\mathbb{P}$ par

$$\Gamma(a) = \int_{\mathbb{R}} f_a(x)\, dx$$

vérifie :

$$\Gamma(a+1) = a\Gamma(a).$$

Montrer que $\widehat{f_a}$ n'est pas intégrable si $\mathrm{Re}\, a \in ]0,1[$.

2) Montrer que $\phi = \widehat{f_a}$ est de classe $C^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et vérifie l'équation différentielle :

$$\phi'(t) = -\frac{ai}{1+it}\,\phi(t).$$

En déduire :

$$\widehat{f_a}(t) = \Gamma(a) \exp -a\left(\tfrac{1}{2}\log\left(1+t^2\right) - i\mathrm{Arctg} t\right)$$

3) Montrer que $\Gamma$ ne s'annule pas sur $\mathbb{P}$ et que pour tous $a,\ b \in \mathbb{P}$,

$$\left(\frac{f_a}{\Gamma(a)}\right) * \left(\frac{f_b}{\Gamma(b)}\right) = \left(\frac{f_{a+b}}{\Gamma(a+b)}\right).$$

4-i) Montrer que $f_a$ est de carré intégrable si et seulement si $\mathrm{Re}\left(a-\frac{1}{2}\right)$ est positif et que pour $\mathrm{Re}\, a > \frac{1}{2}$ et $\mathrm{Re}\, b > \frac{1}{2}$,

$$\begin{aligned}\pi\frac{\Gamma(a+b-1)}{2^{a+b-1}} &= \Gamma(a)\,\Gamma(b)\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{a+b}{2}\log\left(1+t^2\right)} e^{i(a-b)\mathrm{Arctg}t}\,dt \\ &= \Gamma(a)\,\Gamma(b)\int_{\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[} e^{\left(1-\frac{a+b}{2}\right)\log\left(1+tg^2 s\right)} e^{i(a-b)s}\,ds\end{aligned}$$

(Indication : on pourra utiliser le théorème de Plancherel).
ii) En déduire que pour $\mathrm{Re}\, a \in \left]0,1\right[$,

$$\Gamma(a)\times\Gamma(1-a) = \frac{\pi}{\sin \pi a}.$$

**Exercice 0.14.** Soit $\mathbb{P} = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}\, z > 0\}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, $z \in \mathbb{P}$ et $x \in \mathbb{R}$,

$$g_n(x,z) = 1_{\{0<x<n\}}\left(1-\frac{x}{n}\right)^n x^{z-1}.$$

1) Montrer que pour tout $z \in \mathbb{P}$, $\displaystyle\int_0^\infty |g_n(x,z)|\,dx$ est fini et que

$$G_n(z) = \int_0^\infty \gamma_n(x,z)\,dx$$

converge quand $n \to \infty$ vers

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-x}x^{z-1}\,dx,$$

uniformément sur toute bande $a \leq \mathrm{Re}\, z \leq b$ où $0 < a \leq b < \infty$.
2) Montrer que $z \to \Gamma(z) = \displaystyle\int_0^\infty e^{-x}x^{z-1}\,dx$ est analytique sur $\mathbb{P}$ et que

$$\Gamma'(z) = \int_0^\infty e^{-x}x^{z-1}\log x\,dx.$$

Montrer : $\forall z \in \mathbb{P}$, $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$.
En déduire que $\Gamma$ se prolonge en une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}\setminus(-\mathbb{N})$.
3-i) Montrer que pour $z \in \mathbb{P}$, $n^{-z}G_n(z) = \frac{n!}{z(z+1)\ldots(z+n)}$.
ii) Calculer explicitement $G_n'(z)$. Montrer que

$$\log n - \sum\nolimits_{0\leq j\leq n}\frac{1}{j+1} \underset{n\to\infty}{\to} \int_0^\infty e^{-x}\log x\,dx = -\gamma.$$

iii) Montrer que pour $|v| \leq \frac{1}{2}$, $|(1+v)e^{-v}-1| \leq |v|^2$ et $|\log(1+v)-v| \leq |v|^2$.
Soit pour $n \in \mathbb{N}$, $z \in \mathbb{C}$, $U_n(z) = \prod_{1\leq j\leq n}\left(1+\frac{z}{j}\right)e^{-\frac{z}{j}}$.

Montrer que pour $|z| < \frac{1}{2}m_0$, $\prod_{m_0 \leq j \leq n}\left(1+\frac{z}{j}\right)e^{-\frac{z}{j}}$ converge uniformément vers une limite non nulle. En déduire que $(U_n)$ converge uniformément sur les compacts de $\mathbb{C}$ vers $U_\infty$ où

$$U_\infty(z) = \prod_{j\geq 1}\left(\left(1+\frac{z}{j}\right)e^{-\frac{z}{j}}\right).$$

Quels sont les zéros de $U_\infty$ ?

iv) En déduire que $\dfrac{1}{\Gamma}$ se prolonge en une fonction entière donnée par :

$$\frac{1}{\Gamma}(z) = ze^{\gamma z}\prod_{j\geq 1}\left(\left(1+\frac{z}{j}\right)e^{-\frac{z}{j}}\right)$$

et que si $z \notin -\mathbb{N}$,

$$\frac{\Gamma'}{\Gamma}(z) = -\gamma - \frac{1}{z} + \sum_{n\geq 1}\frac{z}{n(z+n)}.$$

Quelle est la nature de la singularité 0 pour $\Gamma$ ?

4) On rappelle que, que pour tout $z \notin \mathbb{Z}$,

$$\operatorname{cotg} z = \frac{1}{z} + 2z\sum_{1\leq j}\frac{1}{z^2 - j^2\pi^2}.$$

i) Montrer que pour $z \notin \mathbb{Z}$,

$$\frac{1}{\Gamma}(z) \times \frac{1}{\Gamma}(1-z) = z\prod_{1\leq j}\left(1-\frac{z^2}{j^2}\right).$$

ii) Montrer que

$$z \mapsto \frac{\pi z}{\sin \pi z}\prod_{j\geq 1}\left(1-\frac{z^2}{j^2}\right)$$

se prolonge en une fonction entière $h$, ne s'annulant pas et valant 1 en 0. En déduire :

$$\frac{1}{\Gamma}(z) \times \frac{1}{\Gamma}(1-z) = \frac{\sin \pi z}{\pi}.$$

5) Soit, pour $u,\ v \in \mathbb{P}$, $B(u,v) = \displaystyle\int_0^\infty t^{u-1}(1-t)^{v-1}\,dt$.

i) Montrer : $\Gamma(u) \times \Gamma(v) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}_+^2} x^{u-1}y^{v-1}e^{-(x+y)}\,dxdy = B(u,v) \times \Gamma(u+v)$.

*ii*) Soit $a \in ]0,1[$ ; montrer que $B(a,1-a) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{ax}\frac{1}{1+e^x}\,dx$

(*Indication* : faire le changement de variable : $t = \frac{e^x}{1+e^x}$). En intégrant sur le rectangle de sommets $-R, R, R+2i\pi$ et $-R+2i\pi$, montrer

$$B(a,1-a) = \frac{\pi}{\sin \pi a}.$$

Retrouver la relation des *compléments d'Euler* établie en 4-ii).

**Exercice 0.15.** 1) Montrer que, pour $x \in [0,1]$,

$$0 \leq x - \log(1+x) \leq \tfrac{1}{2}x^2.$$

En déduire que la suite $(c_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $c_n = \sum_{1\leq k\leq n}\frac{1}{k} - \log(n+1)$ converge vers une limite $\gamma \in ]0,1[$.
2) Soit, pour $z \in \mathbb{C}$, $u(z) = (1-z)e^z$.
i) Montrer que, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $u(z) - 1 = -\frac{1}{2}z^2\left(\sum_{n\geq 0}\frac{2(n+1)}{(n+2)!}z^n\right)$
et que $|(1-z)e^z - 1| \leq \frac{1}{2}|z|^2 e^{|z|}$.
ii) Montrer que, pour tout $|z| \leq A$, $\left(u\left(\frac{z}{j}\right)\right)_{j\geq A+1}$ est multipliable.
iii) Soit, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $z \in \mathbb{C}$, $G_n(z) = \prod_{1\leq j\leq n} u\left(-\frac{z}{j}\right)$. Montrer que la suite $(G_n)$ converge unformément sur les compacts de $\mathbb{C}$. Soit $G(z) = \lim_n G_n(z)$. Quels sont les zéros de $G$ ?
3) Montrer que, pour $|z| < 1$, la famille $\left(\frac{1}{nj^n}z^n\right)_{n\geq 2,\, j\geq 1}$ est sommable et que sa somme $\Phi(z)$ vérifie $|\Phi(z)| \leq |z|^2$ et $G(z) = e^{\Phi(z)}$. Montrer que $\Phi$ est dérivable et que

$$\Phi'(z) = \sum_{k\geq 1}\zeta(k+1)(-z)^k$$

où $\zeta(s) = \sum_{n\geq 1} n^{-s}$.
4) Soit, pour $n \in \mathbb{N}$, $z \in \mathbb{C}$ avec $\operatorname{Re} z > 0$, $B_n(z) = \displaystyle\int_0^1 t^{z-1}(1-t)^n\, dt$.
i) Montrer $zB_{n+1}(z) = (n+1)B_n(z)$. En déduire : $B_n(z) = \frac{n!}{z(z+1)\dots(z+n)}$.
ii) Montrer que, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $z \in \mathbb{C}$ avec $\operatorname{Re} z > 0$,

$$\frac{1}{n^z B_n(z)} = ze^{z\left(\sum_{1\leq k\leq n}\frac{1}{k} - \log n\right)}\prod_{1\leq j\leq n}\left(1+\frac{z}{j}\right)e^{-\frac{z}{j}}.$$

En déduire : $\frac{1}{n^z B_n(z)} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} ze^{\gamma z}G(z)$, uniformément sur les compacts de $\operatorname{Re} z > 0$.
5) Montrer que les fonctions $t \mapsto t^{z-1}e^{-t}$ et $t \mapsto t^{-z-1}e^{-\frac{1}{t}}$ sont [absolument] intégrables sur $[0,1]$ et que les fonctions

$$z \mapsto \Gamma_0(z) = \int_0^1 t^{z-1}e^{-t}\, dt \text{ et } z \mapsto \Gamma_1(z) = \int_0^1 t^{-z-1}e^{-\frac{1}{t}}\, dt$$

sont holomorphes sur $\operatorname{Re} z > 0$.
6-i) Montrer que, pour $t \in \mathbb{R}_+$, la suite $\left(\left(1-\frac{t}{n}\right)^n\right)$ est croissante, de limite $e^{-t}$.
ii) Montrer que $(n^z B_n(z))$ converge vers $\Gamma_0(z) + \Gamma_1(z) = \Gamma(z)$.
Etablir la relation : $\operatorname{Re} z > 0 \Rightarrow \Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$.
7) Soit $z \in \mathbb{C}$, avec $|z| < 1$ et $\operatorname{Re} z > 0$ ; montrer :

$$-\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} = \frac{1}{z} + \gamma + \sum_{k\geq 1}\zeta(k+1)(-z)^k.$$

8) Montrer : $\gamma = -\displaystyle\int_0^\infty e^{-t} \times \log t\, dt$.

**Exercice 0.16.** On pose, pour $x,\ y \geq 0$, $f(x,y) = \frac{x^2-y^2}{\left(1+x^2+y^2\right)^2}$.

Montrer que, pour tout $x \geq 0$ (resp. tout $y \geq 0$), l'application $y \mapsto f(x,y)$ (resp. $x \mapsto f(x,y)$) est [Lebesgue-]intégrable sur $\mathbb{R}^+$. Calculer

$$g_1(x) = \int_0^\infty f(x,y)\, dy \text{ et } g_2(y) = \int_0^\infty f(x,y)\, dx.$$

Montrer que $g_1$ et $g_2$ sont [Lebesgue-]intégrables sur $\mathbb{R}^+$ et calculer leurs intégrales. Expliquer.