cours 15, le lundi 14 mars 2011

IV.3. Inégalités classiques

Inégalité de Hölder

On donne un couple (p, q) de nombres réels, tel que $1 < p, q < +\infty$ et tel que

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

qu'on appelle un *couple d'exposants conjugués*, par exemple $(2, 2)$ ou $(3, 3/2)$. On peut donner plusieurs formes équivalentes utiles de cette relation de conjugaison,

$$\frac{p+q}{pq} = 1, \quad p + q = pq, \quad \frac{q}{p} = q - 1, \quad q = p(q-1), \quad p = q(p-1).$$

On note que si $a, b \geq 0$, on a

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q},$$

par exemple par la convexité de l'exponentielle : si $ab = 0$ c'est clair, sinon $a, b > 0$ et on peut poser $a^p = \mathrm{e}^u$, $b^q = \mathrm{e}^v$, ce qui donne puisque $1/p + 1/q = 1$

$$ab = \mathrm{e}^{u/p}\,\mathrm{e}^{v/q} = \mathrm{e}^{u/p+v/q} \leq \frac{\mathrm{e}^u}{p} + \frac{\mathrm{e}^v}{q} = \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

On peut aussi écrire cette même inégalité sous la forme suivante : si $0 \leq \alpha \leq 1$ et $\alpha + \beta = 1$, alors

$$\forall u, v \geq 0, \qquad u^\alpha v^\beta \leq \alpha u + \beta v.$$

Si $f \in \mathrm{L}^p$, $g \in \mathrm{L}^q$, on en déduit que fg est intégrable,

$$(*) \qquad \int_{\mathrm{E}} |fg| \,\mathrm{d}\mu \leq \frac{1}{p} \int_{\mathrm{E}} |f|^p \,\mathrm{d}\mu + \frac{1}{q} \int_{\mathrm{E}} |g|^q \,\mathrm{d}\mu < +\infty.$$

On étend la notion d'exposants conjugués aux cas limites $(1, +\infty)$ et $(+\infty, 1)$, pour lesquels on peut encore prétendre que $1/1 + 1/(+\infty) = 1$.

Proposition : inégalité de Hölder. *On suppose que p, q réels vérifient $1 \leq p, q \leq +\infty$ et la relation de conjugaison $1/p + 1/q = 1$. Si $f \in \mathrm{L}^p(\mathrm{E}, \mathcal{F}, \mu)$ et $g \in \mathrm{L}^q(\mathrm{E}, \mathcal{F}, \mu)$, le produit fg est intégrable et*

$$\Bigl| \int_{\mathrm{E}} fg \,\mathrm{d}\mu \Bigr| \leq \|f\|_p \,\|g\|_q.$$

Preuve. — Le résultat est évident pour $(1, +\infty)$ ou $(+\infty, 1)$; si $f \in \mathrm{L}^1$ et $g \in \mathrm{L}^\infty$, on sait que $|g| \leq \|g\|_\infty$ presque partout, donc

$$\Bigl| \int_{\mathrm{E}} fg \,\mathrm{d}\mu \Bigr| \leq \int_{\mathrm{E}} |fg| \,\mathrm{d}\mu = \int_{\{|g| \leq \|g\|_\infty\}} |f|\,|g| \,\mathrm{d}\mu \leq \|g\|_\infty \int_{\mathrm{E}} |f| \,\mathrm{d}\mu = \|f\|_1 \,\|g\|_\infty.$$

On suppose maintenant que $1 < p, q < +\infty$ et $\|f\|_p, \|g\|_q > 0$ (sinon, f ou g est nulle presque partout, $\int_{\mathrm{E}} fg \,\mathrm{d}\mu = 0$ et ce cas est clair). On pose

$$f_1 = \frac{f}{\|f\|_p}, \quad g_1 = \frac{g}{\|g\|_q}.$$

Alors $\|f_1\|_p = \|g_1\|_q = 1$, et

$$\Big|\int_{\mathrm{E}} f_1 g_1 \,\mathrm{d}\mu\Big| \le \int_{\mathrm{E}} |f_1|\,|g_1| \,\mathrm{d}\mu \le \frac{1}{p}\int_{\mathrm{E}} |f_1|^p \,\mathrm{d}\mu + \frac{1}{q}\int_{\mathrm{E}} |g_1|^q \,\mathrm{d}\mu = 1.$$

Par homogénéité, puisque $f = \|f\|_p f_1$ et $g = \|g\|_q g_1$, on obtient que

$$\Big|\int_{\mathrm{E}} fg \,\mathrm{d}\mu\Big| = \|f\|_p \|g\|_q \,\Big|\int_{\mathrm{E}} f_1 g_1 \,\mathrm{d}\mu\Big| \le \|f\|_p \|g\|_q,$$

ce qui termine la démonstration.

Remarque. On peut écrire l'inégalité de Hölder sous la forme

$$\int_{\mathrm{E}} |\mathrm{F}|^\alpha |\mathrm{G}|^\beta \,\mathrm{d}\mu \le \Big(\int_{\mathrm{E}} |\mathrm{F}| \,\mathrm{d}\mu\Big)^\alpha \Big(\int_{\mathrm{E}} |\mathrm{G}| \,\mathrm{d}\mu\Big)^\beta,$$

quand $\alpha \ge 0$ et $\alpha + \beta = 1$.

Cas extrémal de l'inégalité de Hölder

Proposition : cas extrémal de l'inégalité de Hölder. *On suppose que p, q réels vérifient $1 \le p, q \le +\infty$ et la relation de conjugaison $1/p + 1/q = 1$. On donne $f \in \mathrm{L}^p(\mathrm{E}, \mathcal{F}, \mu)$. Pour $p < +\infty$, on a*

$$\|f\|_p = \max\Big\{\Big|\int_{\mathrm{E}} fg \,\mathrm{d}\mu\Big| : \|g\|_q \le 1\Big\};$$

pour $p = +\infty$, et à condition que tout ensemble $\mathrm{A} \in \mathcal{F}$ de mesure infinie contienne un ensemble $\mathrm{B} \in \mathcal{F}$ tel que $0 < \mu(\mathrm{B}) < +\infty$, on a

$$\|f\|_\infty = \sup\Big\{\Big|\int_{\mathrm{E}} fg \,\mathrm{d}\mu\Big| : \|g\|_1 \le 1\Big\}.$$

Dans le cas $p < +\infty$, on peut dire qu'il existe g telle que

$$\|f\|_p = \int_{\mathrm{E}} fg \,\mathrm{d}\mu \quad \text{et} \quad \|g\|_q \le 1.$$

Il suffit de prendre une fonction g_1 qui réalise le max du module de l'intégrale de fg, et de multiplier g_1 par un nombre complexe de module un convenable.

Preuve. — L'inégalité de Hölder montre que $\|f\|_p$ est un majorant pour le terme de droite de l'égalité à prouver. Inversement, si f est dans $\mathrm{L}^p(\mathrm{E}, \mathcal{F}, \mu)$, non nulle, posons comme avant $f_1 = \|f\|_p^{-1} f$, de norme 1 dans L^p, et définissons g en posant

$$g(x) = |f_1(x)|^p / f_1(x)$$

si $f(x) \neq 0$ et $g(x) = 0$ sinon. Alors

$$\int_{\mathrm{E}} |g(x)|^q \,\mathrm{d}\mu(x) = \int_{\mathrm{E}} \mathbf{1}_{\{f\neq 0\}}(x)\,|f_1(x)|^{(p-1)q}\,\mathrm{d}\mu(x)$$

$$= \int_{\mathrm{E}} \mathbf{1}_{\{f\neq 0\}}(x)\,|f_1(x)|^p\,\mathrm{d}\mu(x) = \int_{\mathrm{E}} |f_1(x)|^p\,\mathrm{d}\mu(x) = 1,$$

donc g est dans la boule unité de L^q et

$$\int_{\mathrm{E}} f_1 g\,\mathrm{d}\mu = \int_{\mathrm{E}} \mathbf{1}_{\{f\neq 0\}}|f_1|^p\,\mathrm{d}\mu = 1,$$

par conséquent

$$\int_{\mathrm{E}} fg\,\mathrm{d}\mu = \|f\|_p.$$

On a donc réalisé le maximum possible avec cette fonction g de la boule unité de L^q.

Le cas L^∞ est spécial. Si la norme L^∞ de f est $\mathrm{M} = \|f\|_\infty > 0$, l'ensemble

$$\mathrm{A} = \{|f| > \mathrm{M} - \varepsilon\} \in \mathcal{F}$$

où on a choisi $0 < \varepsilon < \mathrm{M}$, est de mesure > 0, peut-être infinie. D'après l'hypothèse additionnelle, l'ensemble A contient un ensemble B de mesure > 0 et finie (si A est de mesure finie, on prend $\mathrm{B} = \mathrm{A}$). On pose

$$g = \mathbf{1}_{\mathrm{B}}\,\frac{|f|}{\mu(\mathrm{B})f}$$

qui est de norme un dans L^1. Alors

$$\int_{\mathrm{E}} fg\,\mathrm{d}\mu = \frac{1}{\mu(\mathrm{B})}\int_{\mathrm{B}} |f|\,\mathrm{d}\mu > \mathrm{M} - \varepsilon.$$

Remarques.

— La condition pour $p = +\infty$ est satisfaite quand la mesure μ est σ-finie : on dit que μ est une *mesure σ-finie* sur $(\mathrm{E}, \mathcal{F})$ s'il existe une suite $(\mathrm{C}_n) \subset \mathcal{F}$, qu'on peut supposer croissante, telle que $\mathrm{E} = \bigcup_n \mathrm{C}_n$ et que $\mu(\mathrm{C}_n) < +\infty$ pour tout n. L'exemple typique est la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$, avec par exemple $\mathrm{C}_n = [-n, n]$. La mesure de comptage sur $\mathbb{N}$ est σ-finie ; en revanche, la mesure de comptage sur $\mathbb{R}$ (qu'on n'utilisera guère que pour produire des contre-exemples) n'est pas σ-finie.

Si μ est σ-finie et si $\mathrm{A} \in \mathcal{F}$ est de mesure infinie, les ensembles $\mathrm{B}_n = \mathrm{A} \cap \mathrm{C}_n$ sont de mesure finie mais $\mu(\mathrm{B}_n) \to +\infty = \mu(\mathrm{A})$; il en résulte que pour n assez grand, on a $\mathrm{B}_n \subset \mathrm{A}$ et $0 < \mu(\mathrm{B}_n) < +\infty$.

— Le cas $p = 2$ de l'inégalité de Hölder est un cas particulier de l'inégalité de Cauchy-Schwarz des espaces de Hilbert.

— Si $p = +\infty$, si $f(x) = x$ sur $\mathrm{E} = [0,1]$, on voit que dans le cas $p = +\infty$ le sup en $g \in \mathrm{L}^1([0,1], \lambda)$ n'est pas atteint. On a $\|f\|_\infty = 1$ mais pour toute g telle que $\|g\|_1 \leq 1$, la fonction $(1-x)g(x)$ est ≥ 0 sur $[0,1]$ et n'est pas presque partout nulle, donc

$$0 < \int_0^1 (1-x)g(x)\,\mathrm{d}x \leq 1 - \int_0^1 xg(x)\,\mathrm{d}x,$$

et par conséquent on a toujours $\int_0^1 xg(x)\,\mathrm{d}x < 1$, pour toute g de norme ≤ 1 dans $\mathrm{L}^1([0,1])$. Le sup en g de ces intégrales est égal à 1, mais n'est atteint par aucune g.

Les difficultés du cas extrémal quand $p = +\infty$ proviennent de l'exemple pathologique qu'on va décrire maintenant. La définition des mesures accepte la mesure μ suivante, sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ par exemple : on posera $\mu(\mathrm{A}) = +\infty$ dès que A n'est pas vide, et on sera bien obligé de poser, d'après la définition des mesures, $\mu(\emptyset) = 0$. Alors, l'espace $\mathrm{L}^1(\mathbb{R}, \mathcal{B}, \mu)$ est réduit à $\{0\}$! Mais l'espace $\mathrm{L}^\infty(\mathbb{R}, \mathcal{B}, \mu)$ contient la fonction constante $f = \mathbf{1}$, et on ne peut pas obtenir la norme $1 = \|f\|_\infty$ comme le sup des intégrales contre les fonctions g de L^1.

Conséquence : inclusion des espaces en mesure finie. Lorsque la mesure μ est finie, les espaces L^p sont décroissants avec p : on a $\mathrm{L}^p(\mu) \subset \mathrm{L}^1(\mu)$ pour tout $p \ge 1$,

$$\int_\mathrm{E} |f|\,\mathrm{d}\mu = \int_\mathrm{E} |f|.1\,\mathrm{d}\mu \le \|f\|_p \Bigl(\int_\mathrm{E} 1^q\,\mathrm{d}\mu\Bigr)^{1/q} = \mu(\mathrm{E})^{1/q}\|f\|_p.$$

En appliquant cette inégalité à $|f|^s$ et $p = r/s$ on voit que $\mathrm{L}^r(\mu) \subset \mathrm{L}^s(\mu)$ pour tous $r \ge s \ge 1$. En résumé, on a quand $1 \le s \le r \le +\infty$, et quand la mesure μ est finie

$$\mathrm{L}^\infty(\mathrm{E}, \mathcal{F}, \mu) \subset \mathrm{L}^r(\mathrm{E}, \mathcal{F}, \mu) \subset \mathrm{L}^s(\mathrm{E}, \mathcal{F}, \mu) \subset \mathrm{L}^1(\mathrm{E}, \mathcal{F}, \mu).$$

Dans le cas où μ est une probabilité, on a que pour toute fonction $f \in \mathrm{L}^r(\mathrm{E}, \mathcal{F}, \mu)$, la fonction $p \in [1, r] \to \|f\|_p$ est croissante.

Dualité

Pour toute fonction $f \in \mathrm{L}^p$, définissons une forme linéaire ℓ_f sur L^q en posant

$$\forall g \in \mathrm{L}^q, \qquad \ell_f(g) = \int_\mathrm{E} fg\,\mathrm{d}\mu.$$

L'inégalité de Hölder montre que ℓ_f est continue sur L^q, avec $\|\ell_f\| \le \|f\|_p$. L'étude du cas extrémal montre que les deux normes sont égales (sous une condition si $p = +\infty$, par exemple à condition que μ soit σ-finie).

Proposition : injection isométrique dans le dual de L^q. *Si $(\mathrm{E}, \mathcal{F}, \mu)$ est un espace mesuré quelconque et $1 < p < +\infty$, $1/p + 1/q = 1$, l'application j_p de $\mathrm{L}^p(\mathrm{E}, \mathcal{F}, \mu)$ dans le dual (topologique) de $\mathrm{L}^q(\mathrm{E}, \mathcal{F}, \mu)$ est une isométrie linéaire ; si μ est σ-finie, l'application j_∞ est une isométrie linéaire de $\mathrm{L}^\infty(\mathrm{E}, \mathcal{F}, \mu)$ dans le dual (topologique) de $\mathrm{L}^1(\mathrm{E}, \mathcal{F}, \mu)$.*

Remarque. Le théorème de représentation vu dans le cours sur les espaces de Hilbert permet de dire que toute forme linéaire continue sur L^2 peut être obtenue de la façon précédente, c'est à dire que j_2 est une bijection linéaire de L^2 sur le dual topologique de L^2. Il faut faire attention à un petit détail dans le cas complexe. Il n'y avait aucune raison de placer une barre de conjugaison dans la définition de ℓ_f, ce qui fait que j_2 est $\mathbb{C}$-*linéaire* dans le cas complexe. Au contraire, on doit mettre une barre de conjugaison dans le produit scalaire hilbertien, qui fait que l'identification hilbertienne i_H générale entre un Hilbert H et son dual topologique H′ est *antilinéaire*, $i_\mathrm{H}(\alpha x) = \overline{\alpha}\, i_\mathrm{H}(x)$ pour tout scalaire α et tout $x \in \mathrm{H}$.

Si ℓ est une forme linéaire continue sur l'espace de Hilbert L^2, il existe un vecteur $\mathrm{F} \in \mathrm{L}^2$ qui représente par produit scalaire cette forme linéaire,

$$\forall g \in \mathrm{L}^2, \qquad \ell(g) = \langle g, \mathrm{F}\rangle = \int_\mathrm{E} g(x)\overline{\mathrm{F}(x)}\,\mathrm{d}\mu(x).$$

On voit donc que ℓ est l'image par j_2 de la fonction $f = \overline{\mathrm{F}} \in \mathrm{L}^2$, complexe conjuguée de la fonction F.

On admettra la généralisation suivante : *pour tout* p *tel que* $1 < p < +\infty$ *et tout espace mesuré* $(\mathrm{E}, \mathcal{F}, \mu)$, *l'application* j_p *est une bijection linéaire isométrique de* $\mathrm{L}^p(\mathrm{E}, \mathcal{F}, \mu)$ *sur le dual topologique de* $\mathrm{L}^q(\mathrm{E}, \mathcal{F}, \mu)$, *où* $1/p + 1/q = 1$. *Si la mesure* μ *est* σ*-finie, l'application* j_∞ *est une bijection linéaire isométrique de* $\mathrm{L}^\infty(\mathrm{E}, \mathcal{F}, \mu)$ *sur le dual topologique de* $\mathrm{L}^1(\mathrm{E}, \mathcal{F}, \mu)$.

On peut démontrer le cas $1 \le p < 2$ à partir du théorème hilbertien qui permet de régler le cas $p = 2$. Les autres cas peuvent se traiter par le théorème de Radon-Nikodym, qui peut être vu en fait comme une autre conséquence du cas hilbertien.

Inégalité de Jensen

Quand φ est une fonction convexe définie sur un intervalle I, on montre facilement par récurrence, à partir de la définition de la convexité, que

$$(*) \qquad \varphi\Big(\sum_{j=1}^{n} c_j x_j\Big) \le \sum_{j=1}^{n} c_j \varphi(x_j)$$

lorsque les x_j sont des points de I et les (c_j) des coefficients ≥ 0 tels que $\sum_{j=1}^n c_j = 1$. La combinaison convexe $\sum_{j=1}^n c_j x_j$ est une « moyenne » des valeurs x_j, et l'inégalité dit que la valeur de φ à la moyenne des nombres x_j est inférieure ou égale à la moyenne des valeurs $\varphi(x_j)$.

Quand on a une probabilité μ, on peut considérer que

$$\int_{\mathrm{E}} f(x)\,\mathrm{d}\mu(x)$$

est la moyenne des valeurs de la fonction f définie sur E, et qui sont pondérées par les masses infinitésimales $\mathrm{d}\mu(x)$. L'inégalité de Jensen généralise l'inégalité $(*)$ au cas de ces « moyennes continues ».

Proposition. *Si* φ *est convexe sur l'intervalle* I, *si* f *est réelle intégrable à valeurs dans* I *et si* μ *est une probabilité sur* $(\mathrm{E}, \mathcal{F})$, *on a*

$$\varphi\Big(\int_{\mathrm{E}} f(x)\,\mathrm{d}\mu(x)\Big) \le \int_{\mathrm{E}} \varphi(f(x))\,\mathrm{d}\mu(x).$$

Il est possible que l'intégrale de droite soit égale à $+\infty$.

La fonction convexe φ admet des minorantes affines, de la forme $t \in \mathbb{R} \to at + b$; la fonction $\varphi(f)$ est donc minorée par la fonction intégrable $af + b$: la partie négative de $\varphi(f)$ a une intégrale finie, ce qui permet de donner un sens généralisé, fini ou égal à $+\infty$, à l'intégrale de $\varphi(f)$. En effet, on voit que $\varphi(f)^- = \max(-\varphi(f), 0) \le \max(-af - b, 0)$, donc $\varphi(f)^- \le |a|\,|f| + |b|$ qui est intégrable.

Preuve. — On pose $m = \int_{\mathrm{E}} f\,\mathrm{d}\mu$; si m minore l'intervalle I, la fonction $f - m$ est ≥ 0 d'intégrale nulle,

$$\int_{\mathrm{E}} (f - m)\,\mathrm{d}\mu = \int_{\mathrm{E}} f\,\mathrm{d}\mu - m\,\mu(\mathrm{E}) = m - m = 0,$$

donc $f - m$ est presque partout nulle ; il en résulte que $f(x) = m$ μ-presque partout, en particulier m est une valeur de f, donc $m \in \mathrm{I}$ est le minimum de I ; puisque $f = m$ μ-presque partout et que $m \in \mathrm{I}$, on a $\varphi(f(x)) = \varphi(m)$ pour presque tout x, donc

$$\int_{\mathrm{E}} \varphi(f(x))\,\mathrm{d}\mu(x) = \varphi(m) = \varphi\Big(\int_{\mathrm{E}} f(x)\,\mathrm{d}\mu(x)\Big)\,;$$

on procède de même si m est un majorant de I.

On suppose donc maintenant que m est un point *intérieur* à I ; alors $\varphi'_g(m)$, $\varphi'_d(m)$ existent ; si α est la dérivée (à droite, à gauche) de φ au point m, on a

$$\forall t \in \mathrm{I}, \qquad \varphi(t) - \varphi(m) \geq \alpha\,(t - m)$$

donc

$$\int_{\mathrm{E}} \big(\varphi(f(x)) - \varphi(m)\big)\,\mathrm{d}\mu(x) \geq \alpha \int_{\mathrm{E}} \big(f(x) - m\big)\,\mathrm{d}\mu(x) = 0.$$

Jensen pour $\varphi(t) = |t|^p$ et une mesure finie

On suppose que μ est une mesure finie sur $(\mathrm{E}, \mathcal{F})$. On considère la probabilité ν sur $(\mathrm{E}, \mathcal{F})$ définie par $\nu = (\mu(\mathrm{E}))^{-1}\mu$; si f est $\mathcal{F}$-mesurable ≥ 0, d'intégrale finie pour commencer, on peut appliquer directement le résultat précédent à la fonction convexe $t \in \mathbb{R} \to |t|^p$,

$$\Big(\int_{\mathrm{E}} f \mathrm{d}\nu\Big)^p \leq \int_{\mathrm{E}} f^p\,\mathrm{d}\nu.$$

Si l'intégrale de droite est $+\infty$, l'inégalité est vraie ; sinon on trouve des fonctions étagées intégrables qui croissent vers f et on généralise l'inégalité précédente à toutes les fonctions mesurables à valeurs dans $[0, +\infty]$. En revenant à μ, on obtient que pour toute fonction mesurable à valeurs dans $[0, +\infty]$, on a

$$\Big(\int_{\mathrm{E}} f \mathrm{d}\mu\Big)^p \leq \mu(\mathrm{E})^{p-1} \int_{\mathrm{E}} f^p\,\mathrm{d}\mu$$

valeur $+\infty$ admise, et avec la convention $(+\infty)^p = +\infty$.

Retrouver Hölder avec Jensen

On suppose $f, g \geq 0$, non nulles, $g \in \mathrm{L}^q$, on pose $\mathrm{B} = \{g > 0\}$ et pour la mesure finie $\mathrm{d}\nu = g^q\,\mathrm{d}\mu$, on va appliquer la version de Jensen pour $t \to |t|^p$; là où $g > 0$, on peut écrire $g = g^{1-q} g^q$: cette décomposition aura donc un sens sur l'ensemble B. On obtient

$$\Big(\int_{\mathrm{E}} f g\,\mathrm{d}\mu\Big)^p = \Big(\int_{\mathrm{E}} f \mathbf{1}_{\mathrm{B}} g\,\mathrm{d}\mu\Big)^p = \Big(\int_{\mathrm{B}} f g\,\mathrm{d}\mu\Big)^p = \Big(\int_{\mathrm{B}} f g^{1-q} g^q\,\mathrm{d}\mu\Big)^p = \Big(\int_{\mathrm{B}} f g^{1-q}\,\mathrm{d}\nu\Big)^p$$

$$\leq (\nu(\mathrm{E}))^{p-1}\Big(\int_{\mathrm{B}} f^p g^{p(1-q)}\,\mathrm{d}\nu\Big) = (\nu(\mathrm{E}))^{p-1}\Big(\int_{\mathrm{B}} f^p g^{-q}\,\mathrm{d}\nu\Big)$$

$$= (\int_{\mathrm{E}} g^q\,\mathrm{d}\mu\Big)^{p-1}\Big(\int_{\mathrm{B}} f^p g^{-q} g^q\,\mathrm{d}\mu\Big) = \|g\|_q^{q(p-1)}\Big(\int_{\mathrm{E}} f^p \mathbf{1}_{\mathrm{B}}\,\mathrm{d}\mu\Big) \leq \|g\|_q^p\,\|f\|_p^p.$$

On a ainsi retrouvé l'inégalité de Hölder.

Dual de L^2

On se place dans le cas réel. On suppose donnée une forme linéaire continue ℓ sur $\mathrm{H} = \mathrm{L}^2(\mathrm{E}, \mathcal{F}, \mu)$, et on définit une fonction Φ sur H en posant

$$\Phi(f) = \|f\|^2 - 2\,\ell(f).$$

Cette fonction $\Phi : \mathrm{H} \to \mathbb{R}$ est minorée sur H, car

$$\Phi(f) + \|\ell\|^2 = \|f\|^2 - 2\ell(f) + \|\ell\|^2 \ge \|f\|^2 - 2\,\|\ell\|\,\|f\| + \|\ell\|^2 = (\|f\| - \|\ell\|)^2 \ge 0.$$

On pose $m = \inf \Phi(\mathrm{H})$. On note que

$$\|f+h\|^2 + \|f-h\|^2 = \int_{\mathrm{E}} \bigl(|f+h|^2 + |f-h|^2\bigr)\,\mathrm{d}\mu$$

$$= \int_{\mathrm{E}} \bigl(f^2 + 2fh + h^2 + f^2 - 2fh + h^2\bigr)\,\mathrm{d}\mu = 2\int_{\mathrm{E}} \bigl(f^2 + h^2\bigr)\,\mathrm{d}\mu.$$

Comme ℓ est linéaire, $\ell(f+h) + \ell(f-h) = 2\ell(f)$, donc

$$\Phi(f+h) + \Phi(f-h) = 2\,\|f\|^2 + 2\,\|h\|^2 + 4\ell(f) = 2\,\Phi(f) + 2\,\|h\|^2.$$

Supposons que $\varepsilon > 0$ soit donné, et que g_1, g_2 soient dans l'ensemble

$$\mathrm{C}_\varepsilon = \{g \in \mathrm{H} : \Phi(g) \le m + \varepsilon^2\}.$$

Posons $f = (g_1 + g_2)/2$ et $h = (g_1 - g_2)/2$, de sorte que $f + h = g_1$, $f - h = g_2$. On a $\Phi(f \pm h) \le m + \varepsilon^2$, donc

$$2m + 2\,\|h\|^2 \le 2\,\Phi(f) + 2\,\|h\|^2 = \Phi(f+h) + \Phi(f-h) \le 2(m + \varepsilon^2),$$

ce qui prouve que $\|h\|^2 \le \varepsilon^2$. Le demi-diamètre de C_ε est donc $\le \varepsilon$. Dans l'espace complet H, l'intersection de la suite décroissante de fermés $\mathrm{C}_{2^{-n}}$, non vides et de diamètre tendant vers 0, est non vide. En un point f_0 de l'intersection, la fonction Φ atteint son minimum. Pour toute fonction $h \in \mathrm{H}$ et tout réel t, on a

$$\Phi(f_0 + th) \ge \Phi(f_0)$$

d'où

$$\int_{\mathrm{E}} \bigl(2tf_0h + t^2h^2\bigr)\,\mathrm{d}\mu - 2t\,\ell(h) \ge 0.$$

En dérivant en $t = 0$,

$$\int_{\mathrm{E}} f_0\,h\,\mathrm{d}\mu - \ell(h) = 0.$$

Cela signifie que la forme linéaire continue ℓ est *représentée* par le produit scalaire avec le vecteur $f_0 \in \mathrm{H}$,

$$\forall h \in \mathrm{H}, \qquad \ell(h) = \langle h, f_0\rangle = \int_{\mathrm{E}} h(x) f_0(x)\,\mathrm{d}\mu(x).$$

« *Petit* » *théorème de Radon-Nikodym*

Si g est une fonction $\mathcal{F}$-mesurable sur E, telle que $0 \le g \le 1$, si μ est une mesure sur l'espace mesurable $(\mathrm{E}, \mathcal{F})$ et si on pose $\mathrm{d}\nu(x) = g(x)\,\mathrm{d}\mu(x)$, on voit que

$$\forall \mathrm{A} \in \mathcal{F}, \qquad \nu(\mathrm{A}) \le \mu(\mathrm{A}).$$

En effet, $\nu(\mathrm{A}) = \int_{\mathrm{A}} g\,\mathrm{d}\mu \le \int_{\mathrm{A}} \mathrm{d}\mu = \mu(\mathrm{A})$. Le théorème de Radon-Nikodym donne la réciproque.

Théorème. *On suppose que μ est une mesure finie sur $(\mathrm{E}, \mathcal{F})$ et que ν est une autre mesure sur $(\mathrm{E}, \mathcal{F})$, plus petite que μ en ce sens que $\nu(\mathrm{A}) \le \mu(\mathrm{A})$ pour tout $\mathrm{A} \in \mathcal{F}$. Il existe alors une fonction $\mathcal{F}$-mesurable g, telle que $0 \le g \le 1$ et que $\mathrm{d}\nu(x) = g(x)\,\mathrm{d}\mu(x)$.*

Preuve. — On va travailler avec les espaces de fonctions réelles, et on va démontrer que l'application

$$\ell : f \in \mathrm{L}^2(\mu) \to \int_{\mathrm{E}} f\,\mathrm{d}\nu$$

(bien noter le changement de mesure) est une forme linéaire continue sur $\mathrm{L}^2(\mu)$. Elle est donc représentée par le produit scalaire avec une fonction g : c'est la densité cherchée.

On commence par voir que pour toute fonction f positive et $\mathcal{F}$-mesurable, on a

$$\int_{\mathrm{E}} f\,\mathrm{d}\nu \le \int_{\mathrm{E}} f\,\mathrm{d}\mu\,;$$

on vérifie cette affirmation pour f étagée positive pour commencer : si $f = \sum a_k \mathbf{1}_{\mathrm{A}_k}$, avec $a_k \ge 0$, alors $\int_{\mathrm{E}} f\,\mathrm{d}\nu = \sum a_k \nu(\mathrm{A}_k) \le \sum a_k \mu(\mathrm{A}_k) = \int_{\mathrm{E}} f\,\mathrm{d}\mu$. Ensuite, on passe à la limite sur les suites croissantes de fonctions étagées.

Si $f \in \mathrm{L}^2(\mu)$, alors $f \in \mathrm{L}^1(\mu)$ puisque μ est finie, donc

$$\int_{\mathrm{E}} |f|\,\mathrm{d}\nu \le \int_{\mathrm{E}} |f|\,\mathrm{d}\mu,$$

ce qui montre que $\mathrm{L}^2(\mu) \subset \mathrm{L}^1(\nu)$. L'application ℓ ci-dessus est donc bien définie. Elle est linéaire et continue sur $\mathrm{L}^2(\mu)$,

$$|\ell(f)| = \Big|\int_{\mathrm{E}} f\,\mathrm{d}\nu\Big| \le \int_{\mathrm{E}} |f|\,\mathrm{d}\nu \le \int_{\mathrm{E}} |f|\,\mathrm{d}\mu \le \sqrt{\mu(\mathrm{E})}\,\|f\|_{\mathrm{L}^2(\mu)}.$$

Il existe donc une fonction réelle $g \in \mathrm{L}^2(\mu)$ telle que

$$\forall f \in \mathrm{L}^2(\mu), \qquad \ell(f) = \int_{\mathrm{E}} fg\,\mathrm{d}\mu.$$

Si $\mathrm{A} \in \mathcal{F}$ et si on considère $f = \mathbf{1}_{\mathrm{A}}$, alors $f \in \mathrm{L}^2(\mu)$ (la mesure étant finie),

$$\ell(\mathbf{1}_{\mathrm{A}}) = \int_{\mathrm{E}} \mathbf{1}_{\mathrm{A}}\,\mathrm{d}\nu = \nu(\mathrm{A}), \qquad \text{et} \qquad \ell(\mathbf{1}_{\mathrm{A}}) = \int_{\mathrm{E}} \mathbf{1}_{\mathrm{A}}\,g\,\mathrm{d}\mu,$$

donc ν est la mesure de densité g par rapport à μ,

$$\forall \mathrm{A} \in \mathcal{F}, \qquad \nu(\mathrm{A}) = \int_{\mathrm{A}} g\,\mathrm{d}\mu.$$

Il reste à prouver que $0 \le g \le 1$. Posons

$$\mathrm{B} = \{x \in \mathrm{E} : g(x) > 1\}\,;$$

la fonction $\mathbf{1}_\mathrm{B}\big(g-1\big)$ est ≥ 0, mais

$$\int_\mathrm{E} \mathbf{1}_\mathrm{B}\big(g-1\big)\,\mathrm{d}\mu = \nu(\mathrm{B}) - \mu(\mathrm{B}) \le 0,$$

donc l'intégrale est nulle, la fonction $\mathbf{1}_\mathrm{B}\big(g-1\big)$ est nulle μ-presque partout ; mais par définition, elle est > 0 sur B, donc B est de mesure nulle pour μ. On peut corriger la densité g en posant $g = 1$ sur B, sans changer la valeur des intégrales. De la même façon, on voit que $g \ge 0$ presque partout, et on effectue une deuxième correction pour obtenir finalement $0 \le g \le 1$.