ALGÈBRE ET

ANALYSE APPROFONDIES II

MT242

B. Maurey

Année 1998-1999

Version remaniée pour MM4 2009-2010

Sommaire

Chapitre 1. Suites et séries de fonctions

Dans ce chapitre nous allons définir des notions de convergence pour des objets autres que des nombres réels ou complexes : dans la première partie du chapitre nous introduirons des notions de convergence pour les suites de fonctions ; la notion centrale de cette partie est la *convergence uniforme* ; dans la seconde partie du chapitre on étudiera les séries de fonctions.

Soient X un ensemble non vide, (f_n) une suite de fonctions définies sur X, à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou dans $\mathbb{C}$; on dit que la suite (f_n) converge *simplement sur* X si pour tout $x \in \mathrm{X}$ la suite numérique $(f_n(x))$ converge. On pose alors, pour tout $x \in \mathrm{X}$,

$$f(x) = \lim_{n \to +\infty} f_n(x).$$

La fonction f ainsi définie s'appelle la *limite simple*, ou bien *limite ponctuelle* de la suite de fonctions (f_n). Considérons par exemple la suite (f_n) de fonctions réelles définies sur $\mathbb{R}$ par

$$f_n(x) = \frac{1}{1 + nx^2}.$$

Pour tout point $x \in \mathbb{R}$ fixé, la suite numérique $(f_n(x))$ converge vers une valeur $f(x)$; on voit que $f(x) = 0$ pour tout $x \neq 0$, et $f(0) = 1$. On obtient ainsi une « fonction limite » f définie sur $\mathbb{R}$, qui n'est pas continue en 0. Cet exemple montre que la limite ponctuelle f d'une suite (f_n) de fonctions continues n'est pas toujours continue. L'un des intérêts de la notion de convergence uniforme est d'éviter ce phénomène désagréable de perte de continuité.

1.1. Convergence simple et uniforme des suites de fonctions

Si f est une fonction réelle ou complexe bornée, définie sur un ensemble non vide X, on appelle *norme uniforme* de f sur X, qui sera notée ici $\|f\|_{u,\mathrm{X}}$, le plus petit nombre réel b tel que

$$\forall x \in \mathrm{X}, \quad |f(x)| \leq b\,;$$

ce nombre $\|f\|_{u,\mathrm{X}}$ est donc la borne supérieure de l'ensemble des modules $|f(x)|$ des valeurs de f, lorsque x varie dans X :

$$\|f\|_{u,\mathrm{X}} = \sup\{|f(x)| : x \in \mathrm{X}\}.$$

Si la fonction $x \to |f(x)|$ atteint son maximum sur l'ensemble X au point x_0, on aura simplement $\|f\|_{u,\mathrm{X}} = |f(x_0)|$. On voit que la norme uniforme de f est $\leq \alpha$ si et seulement si on a

$$\forall x \in \mathrm{X}, \quad |f(x)| \leq \alpha.$$

La norme uniforme donne une façon de mesurer la « taille » d'une fonction. Étant données deux fonctions bornées f et g définies sur X, on utilisera la norme $\|f - g\|_{u,\mathrm{X}}$ de la différence pour mesurer la « distance » entre les deux fonctions, et on appellera *distance de la convergence uniforme* (entre les fonctions f et g) l'expression

$$d_{u,\mathrm{X}}(f, g) = \|f - g\|_{u,\mathrm{X}}.$$

Il est commode de poser $\|f\|_{u,\mathrm{X}} = +\infty$ dans le cas où la fonction f n'est pas bornée sur l'ensemble X. On appelle *écart* de la convergence uniforme la « distance généralisée » obtenue en admettant la valeur $+\infty$. Ces notations $\|f\|_{u,\mathrm{X}}$ et $d_{u,\mathrm{X}}(f,g)$ étant très lourdes, on notera simplement $\|f\| = \|f\|_{u,\mathrm{X}}$ et $d(f,g) = \|f-g\|$ quand il n'y aura pas de confusion à craindre.

Exemples.

1. Considérons la fonction f_a définie sur $\mathrm{X} = [0,+\infty[$ par $f_a(x) = x\,\mathrm{e}^{-ax}$ (avec $a > 0$). La fonction $f = f_a$ est positive ou nulle sur X, donc la norme uniforme de f est simplement le sup des valeurs de f, sans valeur absolue. L'étude de cette fonction montre que f est croissante sur $[0,1/a]$, et décroissante sur $[1/a,+\infty[$, donc elle atteint son maximum au point $1/a$, et

$$\|f_a\|_{u,\mathrm{X}} = a^{-1}\,\mathrm{e}^{-1}\,.$$

2. Sur le même ensemble X, considérons $g : x \to 1 - \mathrm{e}^{-x}$. La fonction g est positive, croissante. Elle n'atteint pas son maximum sur X, mais son sup est la limite quand x tend vers $+\infty$, $\|g\|_{u,\mathrm{X}} = 1$.

3. Sur $\mathrm{X} = \{z \in \mathbb{C} : |z| \le 1/2\}$, le module de la fonction $f : z \to z^n$ atteint son maximum sur le cercle de rayon $1/2$, donc $\|f\|_{u,\mathrm{X}} = 2^{-n}$.

Norme sur un espace vectoriel

On connaît la notion de norme pour un vecteur $x = (a,b,c)$ de $\mathbb{R}^3$,

$$\|x\| = \sqrt{a^2+b^2+c^2}.$$

Cette fonction $x \to \|x\| \in [0,+\infty[$ vérifie trois propriétés essentielles :

1. $\|x+y\| \le \|x\| + \|y\|$ pour tous $x, y \in \mathbb{R}^3$ (*inégalité triangulaire*).
2. $\|\lambda x\| = |\lambda|\,\|x\|$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et tout $x \in \mathbb{R}^3$.
3. $(\|x\| = 0) \Leftrightarrow (x = 0_{\mathbb{R}^3})$.

Nous allons généraliser cette notion à un espace vectoriel quelconque sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Définition 1.1.1. Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ (pas nécessairement de dimension finie) ; on dit que la fonction $x \in \mathrm{E} \to \|x\| \in [0,+\infty[$ est une *norme* sur E si elle vérifie les trois propriétés suivantes :

1. $\|x+y\| \le \|x\| + \|y\|$ pour tous $x, y \in \mathrm{E}$ (inégalité triangulaire).
2. $\|\lambda x\| = |\lambda|\,\|x\|$ pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$ et tout $x \in \mathrm{E}$.
3. Pour tout $x \in \mathrm{E}$, on a l'équivalence $(\|x\| = 0) \Leftrightarrow (x = 0_\mathrm{E})$ (où 0_E désigne le vecteur nul de l'espace vectoriel E).

Il résulte de la propriété (1) l'inégalité importante

$$\big|\|v\| - \|w\|\big| \le \|v-w\|$$

(pour tous vecteurs v, w de E) ; c'est une deuxième forme de l'inégalité triangulaire, dont on voit facilement qu'elle est équivalente à la première (poser par exemple $v = x+y$ et $w = x$). Étant donnée une norme sur E, on utilise la quantité $\|x-y\|$ pour se faire une certaine idée de la *distance* entre deux vecteurs x et y de E. On peut alors définir une notion de convergence pour les suites de vecteurs de E en disant qu'une suite (x_n) de vecteurs de E converge vers $x \in \mathrm{E}$ si $\|x_n - x\| \to 0$ quand n tend vers l'infini. Nous allons voir que la notion de convergence uniforme entre (en gros) dans ce cadre.

Norme sur l'espace vectoriel des fonctions bornées

Soit X un sous-ensemble non vide de $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$; on va vérifier que la « norme uniforme » est effectivement une norme au sens de la définition précédente, définie sur l'espace vectoriel $\mathrm{E} = \mathrm{B}(\mathrm{X})$ des fonctions complexes bornées définies sur X (on peut considérer le cas réel comme un cas particulier du cas complexe).

Proposition 1.1.2. *L'application* $f \to \|f\|_{u,\mathrm{X}}$ *est une norme sur l'espace vectoriel* B(X) *des fonctions complexes bornées sur* X.

Démonstration. Écrivons simplement $\|f\|$ pour désigner la norme uniforme de f, fonction quelconque sur X. Montrons que $\|f + g\| \le \|f\| + \|g\|$ pour toutes fonctions bornées f, g (inégalité triangulaire). Soit x un point quelconque de X ; par définition de la norme uniforme, on a $|f(x)| \le \|f\|$ et $|g(x)| \le \|g\|$, par conséquent $|(f + g)(x)| \le \|f\| + \|g\|$. Ceci montre que $\mathrm{M} = \|f\| + \|g\|$ est un majorant de l'ensemble des modules des valeurs de $f + g$, donc $\|f + g\| \le \mathrm{M} = \|f\| + \|g\|$.

La deuxième propriété, $\|\lambda f\| = |\lambda| \, \|f\|$ pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ est très facile à vérifier. Pour terminer, il est presque évident qu'une fonction f est égale à la fonction nulle 0_{E} (c'est-à-dire que $f(x) = 0$ pour tout $x \in \mathrm{X}$) si et seulement si $\|f\| = 0$.

Définition 1.1.3. Soient X un ensemble non vide, (f_n) une suite de fonctions définies sur X, à valeurs réelles ou complexes ; on dit que la suite de fonctions (f_n) converge *uniformément sur* X vers la fonction f (réelle ou complexe, définie sur X) si

$$\|f_n - f\|_{u,\mathrm{X}} \to 0$$

lorsque $n \to +\infty$.

Rappelons qu'on a admis la valeur $+\infty$ pour $\|f_n - f\|_{u,\mathrm{X}}$. Il est possible que les premiers termes de la suite $(\|f_n - f\|_{u,\mathrm{X}})$ soient infinis, mais dire que la suite des normes tend vers 0 implique que $\|f_n - f\|_{u,\mathrm{X}}$ est fini à partir d'un certain rang. Par ailleurs, il est très important de remarquer que la convergence uniforme de la suite (f_n) vers la fonction f implique la convergence de la suite numérique $(f_n(x))$ vers $f(x)$ en tout point $x \in \mathrm{X}$. En effet, on a pour tout $x \in \mathrm{X}$ l'inégalité

$$|f_n(x) - f(x)| \le \|f_n - f\|_{u,\mathrm{X}}.$$

Notons aussi que l'inégalité triangulaire pour la norme uniforme implique

$$\big| \|f\| - \|f_n\| \big| \le \|f - f_n\|.$$

Si chaque fonction f_n est bornée sur X et si la suite (f_n) converge uniformément sur X vers f, il en résulte que f est bornée, et

$$\lim_{n \to +\infty} \|f_n\| = \|f\|.$$

Exemples.

1. Pour la suite $f_n(x) = 1/(1 + nx^2)$ (exemple de l'introduction), on vérifiera que $\|f_n - f\| = 1$ pour tout n, donc la convergence de la suite (f_n) vers f n'est pas uniforme.

2. La suite $(f_n)_{n \geqslant 0}$ définie par $f_n(x) = x \, \mathrm{e}^{-nx}$ tend uniformément vers la fonction nulle $f = 0$ égale à 0 sur l'ensemble $\mathrm{X} = [0, +\infty[$. En effet, on a vu que pour $n \ge 1$, on a $\|f_n - 0\| = \|f_n\| = n^{-1} \, \mathrm{e}^{-1}$, quantité qui tend vers 0 (on remarquera que $f_0(x) = x$ définit une fonction non bornée, donc ce premier terme $\|f_0 - f\|$ est infini).

3. La suite des fonctions $x \to \sqrt{x^2 + 1/n^2}$ tend uniformément vers $x \to |x|$ sur $\mathbb{R}$.

Interversion des limites

Le théorème suivant s'appelle la propriété d'interversion de limites. On suppose ici que X est un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On cherche un énoncé de la forme

$$\lim_{n\to+\infty} \lim_{\substack{x\to x_0\\ x\in \mathrm{X}}} f_n(x) = \lim_{\substack{x\to x_0\\ x\in \mathrm{X}}} \lim_{n\to+\infty} f_n(x).$$

Cela est faux en général : considérons la suite (f_n) définie sur $\mathrm{X} =]0,+\infty[$ par $f_n(x) = 1/(1+nx^2)$, et posons $x_0 = 0$. On a $\lim_{x\to 0} f_n(x) = 1$ pour tout n, et $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$ pour tout $x \in \mathrm{X}$. On a donc $\lim_n \lim_{x\to 0} f_n(x) = 1$ mais $\lim_{x\to 0} \lim_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$.

On va voir que tout se passe mieux avec la convergence uniforme. Soit $\mathrm{X} \subset \mathbb{C}$ un ensemble non vide ; on dit qu'un point $a \in \mathbb{C}$ est *adhérent* à X si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $x \in \mathrm{X}$ tel que $|a - x| < \varepsilon$. Par exemple, le point $a = \mathrm{i} \in \mathbb{C}$ est adhérent au disque unité ouvert $\mathrm{X} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$, mais $a = \mathrm{i}$ n'est pas dans X. Il est clair en revanche que tous les points de X sont adhérents à X. Dans la plupart de nos applications, X sera un intervalle de $\mathbb{R}$ et a sera un point de X ou une de ses extrémités.

Soit f une fonction réelle ou complexe définie sur X et soit $a \in \mathbb{C}$ un point adhérent à X ; on dit que $f(x)$ tend vers $b \in \mathbb{C}$ quand x tend vers a si

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists\delta > 0,\ \forall x \in \mathrm{X}\ \big(|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon\big).$$

Le lecteur montrera en exercice que l'hypothèse a adhérent à X entraîne l'unicité de la limite (quand la limite existe). Montrons d'abord une proposition préliminaire.

Proposition 1.1.4. *On suppose que la suite* (f_n) *converge uniformément vers* f *sur* X, *et que* x_0 *est un point adhérent à* X *tel que* $\ell_n = \lim_{x\to x_0} f_n(x)$ *existe pour tout* n. *Alors* $\lim_{n\to+\infty} \ell_n$ *existe.*

Démonstration. Montrons que la suite numérique (ℓ_n) est convergente. Pour le faire il suffit de montrer que cette suite est de Cauchy. On a $|f_n(x) - f_m(x)| \le \|f_n - f_m\|$ pour tous n, m entiers fixés et pour tout $x \in \mathrm{X}$, donc par passage à la limite des inégalités larges quand $x \to x_0$, on aura

$$|\ell_n - \ell_m| \le \|f_n - f_m\|.$$

D'autre part, la relation $\|f_n - f_m\| \le \|f_n - f\| + \|f_m - f\|$ montre que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe N tel que $\|f_n - f_m\| < \varepsilon$ pour tous $n, m \ge \mathrm{N}$, donc la suite (ℓ_n) est de Cauchy, donc convergente vers un nombre k.

Théorème 1.1.5 (d'interversion des limites). *On suppose que la suite* (f_n) *converge uniformément vers* f *sur* X, *et que* x_0 *est un point adhérent à* X *tel que* $\lim_{x\to x_0} f_n(x)$ *existe pour tout* n. *Alors*

$$\lim_{n\to+\infty} \lim_{\substack{x\to x_0\\ x\in \mathrm{X}}} f_n(x) = \lim_{\substack{x\to x_0\\ x\in \mathrm{X}}} \lim_{n\to+\infty} f_n(x) \ \Big(= \lim_{\substack{x\to x_0\\ x\in \mathrm{X}}} f(x)\Big).$$

Démonstration. On a déjà vu que $\ell_n = \lim_{x\to x_0} f_n(x)$ converge vers une limite, que nous appelons ℓ. Il reste à voir que $f(x)$ tend vers $\ell = \lim \ell_n$ lorsque x tend vers x_0. Soit $\varepsilon > 0$ donné ; on peut choisir n_0 tel que

$$\|f - f_{n_0}\| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{et} \quad |\ell - \ell_{n_0}| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

On peut alors choisir $\alpha > 0$ tel que

$$\forall x \in \mathrm{X}, \quad \big(|x - x_0| < \alpha \Rightarrow |f_{n_0}(x) - \ell_{n_0}| < \frac{\varepsilon}{3}\big).$$

On a aussi

$$|f(x) - f_{n_0}(x)| \leq \|f - f_{n_0}\| < \frac{\varepsilon}{3}$$

pour tout $x \in \mathrm{X}$. Supposons maintenant que $|x - x_0| < \alpha$; la conjonction des trois inégalités précédentes donne alors $|f(x) - \ell| < \varepsilon$ pour tout $x \in \mathrm{X}$ tel que $|x - x_0| < \alpha$, ce qui montre bien la convergence de $f(x)$ vers ℓ quand x tend vers x_0.

Suites de fonctions continues

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, et (f_n) une suite de fonctions complexes continues définies sur I ; si la suite (f_n) converge simplement vers une fonction f, il n'est pas vrai en général que la fonction f soit continue (voir l'exemple de l'introduction de ce chapitre). En revanche, si la convergence de la suite (f_n) est uniforme, on est sûr que la limite f est continue.

Théorème 1.1.6. *Soit (f_n) une suite de fonctions complexes définies sur* I *et continues en un point $x_0 \in \mathrm{I}$, qui converge uniformément sur* I *vers une fonction f ; alors la fonction f est continue au point x_0. En particulier, si une suite (f_n) de fonctions complexes continues sur* I *converge uniformément sur* I *vers une fonction f, alors la fonction f est continue sur* I.

Démonstration. Ce résultat est une conséquence immédiate du théorème d'interversion 1.1.5, appliqué au point x_0. Puisque chacune des fonctions f_n est continue au point x_0, on peut écrire $\lim_{x \to x_0} f_n(x) = f_n(x_0)$, et le théorème d'interversion donne alors

$$f(x_0) = \lim_n f_n(x_0) = \lim_{x \to x_0} f(x).$$

Exercice. Si (f_n) est une suite de fonctions continues sur $[a, b]$ qui converge uniformément sur $[a, b]$ vers une fonction f, et si (x_n) est une suite de points de $[a, b]$ qui converge vers x, montrer que $\lim f(x_n) = f(x)$.

Suites de fonctions dérivables

Commençons par un exemple. Considérons la suite de fonctions dérivables (f_n) définies sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x) = \sqrt{x^2 + n^{-2}}$. Cette suite converge simplement vers la fonction $x \to |x|$, qui n'est pas dérivable en 0. Pourtant, la convergence de cette suite de fonctions est uniforme : en effet, $n^{-1}(f_n(x) - |x|) \leq (f_n(x) + |x|)(f_n(x) - |x|) = f_n(x)^2 - x^2 = n^{-2}$, donc

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad 0 \leq f_n(x) - |x| \leq \frac{1}{n}\cdot$$

Ainsi, il faut imposer des conditions supplémentaires pour assurer que la limite f soit dérivable. La convergence uniforme de la suite des fonctions dérivées est une telle condition. On remarquera d'abord que :

Proposition 1.1.7. *Soit (f_n) une suite de fonctions réelles dérivables sur un intervalle ouvert* I, *telle que la suite des fonctions dérivées (f_n') converge uniformément sur* I *vers une fonction g. S'il existe $x_0 \in \mathrm{I}$ tel que la suite $(f_n(x_0))$ converge, alors $(f_n(x))$ converge* *pour tout* $x \in \mathrm{I}$. *De plus, si on pose* $f(x) = \lim_n f_n(x)$ *pour tout* $x \in \mathrm{I}$, *la suite* (f_n) *converge uniformément vers* f *sur tout intervalle borné* J *contenu dans l'intervalle* I.

Démonstration. Montrons d'abord que $(f_n(x))$ converge pour tout $x \in \mathrm{I}$. Puisque la suite $(f_n(x_0))$ est supposée convergente, il suffit de montrer que pour tout $x \in \mathrm{I}$, la suite numérique $y_n = (f_n(x) - f_n(x_0))$ est convergente, et pour cela, il suffit de vérifier qu'elle est de Cauchy. En appliquant le théorème des accroissements finis à la fonction dérivable $\varphi = f_m - f_n$, on aura pour un certain point $c_{m,n}$ entre x et x_0 (donc un point $c_{m,n} \in \mathrm{I}$)

$$|y_m - y_n| = \bigl|(f_m(x) - f_m(x_0)) - (f_n(x) - f_n(x_0))\bigr| = |\varphi(x) - \varphi(x_0)| =$$

$$= |x - x_0|\, |\varphi'(c_{m,n})| \leq |x - x_0|\, \|f'_m - f'_n\|_{u,\mathrm{I}}.$$

La convergence uniforme des fonctions dérivées termine la démonstration de la première partie. Si J est un intervalle borné contenu dans I, on peut choisir M tel que $[-\mathrm{M}, \mathrm{M}]$ contienne J et x_0. Pour tout $x \in \mathrm{J}$, on aura d'après ce qui précède, en faisant tendre n vers $+\infty$

$$|(f_m(x) - f_m(x_0)) - (f(x) - f(x_0))| \leq |x - x_0|\, \|f'_m - g\|_{u,\mathrm{I}} \leq 2\mathrm{M}\, \|f'_m - g\|_{u,\mathrm{I}},$$

donc $|f_m(x) - f(x)| \leq 2\mathrm{M}\, \|f'_m - g\|_{u,\mathrm{I}} + |f_m(x_0) - f(x_0)|$ pour tout $x \in \mathrm{J}$ ce qui donne

$$\|f_m - f\|_{u,\mathrm{J}} \leq 2\mathrm{M}\, \|f'_m - g\|_{u,\mathrm{I}} + |f_m(x_0) - f(x_0)|,$$

qui tend vers 0 quand m tend vers l'infini.

Théorème 1.1.8. *Soit* (f_n) *une suite de fonctions complexes dérivables sur un intervalle ouvert* I *; on suppose que la suite des fonctions dérivées* (f'_n) *converge uniformément sur* I *vers une fonction* g, *et qu'il existe un point* $x_0 \in \mathrm{I}$ *tel que la suite* $(f_n(x_0))$ *tende vers une limite. Alors la suite* (f_n) *converge simplement sur* I *vers une fonction* f, *cette fonction* f *est dérivable, de dérivée* g, *et la suite* (f_n) *converge uniformément vers* f *sur tout intervalle borné* J *contenu dans l'intervalle* I.

Démonstration. Il suffit de traiter le cas des valeurs réelles ; le cas complexe se traitera en séparant partie réelle et imaginaire. Les résultats concernant la convergence de (f_n) vers f ont été vus dans la proposition précédente, il reste seulement à démontrer que $f' = g$. Fixons un point quelconque $x_1 \in \mathrm{I}$. Sur l'ensemble $\mathrm{I}^* = \mathrm{I} \setminus \{x_1\}$, on définit les fonctions (f^*_n) et f^* par

$$f^*_n(x) = \frac{f_n(x) - f_n(x_1)}{x - x_1}, \quad f^*(x) = \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1}.$$

Le théorème des accroissements finis montre que $|f^*_n(x) - f^*_m(x)| \leq \|f'_n - f'_m\|_{u,\mathrm{I}}$, et l'hypothèse de convergence uniforme des dérivées donne pour tout $\varepsilon > 0$ un entier $\mathrm{N} = \mathrm{N}(\varepsilon)$ tel que $\|f'_n - f'_m\|_{u,\mathrm{I}} < \varepsilon$ pour $n, m \geq \mathrm{N}$. En passant à la limite quand $m \to +\infty$, on obtient $|f^*_n(x) - f^*(x)| \leq \varepsilon$ pour $n \geq \mathrm{N}$ et pour tout $x \in \mathrm{I}^*$, ce qui montre que la suite (f^*_n) converge uniformément vers f^* sur I^*. On peut alors appliquer le théorème d'interversion, qui nous dit que

$$f'(x_1) = \lim_{x \to x_1} f^*(x) = \lim_n \lim_{x \to x_1} f^*_n(x) = \lim_n f'_n(x_1) = g(x_1).$$

Intégration et suites de fonctions uniformément convergentes sur un intervalle de $\mathbb{R}$

Rappel. Intégrales définies. On dit que $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est *intégrable Riemann* sur $[a,b]$ si elle est bornée sur $[a,b]$ et si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe deux fonctions en escalier h_1, h_2 sur $[a,b]$ telles que

$$h_1 \leq f \leq h_2 \quad \text{et} \quad \int_a^b (h_2 - h_1)(t)\,\mathrm{d}t < \varepsilon.$$

Dans le cas où la fonction f est à valeurs complexes, on dit qu'elle est intégrable Riemann si sa partie réelle et sa partie imaginaire sont toutes les deux intégrables Riemann.

Proposition 1.1.9. *Soit f une fonction bornée sur $[a,b]$ à valeurs réelles ou complexes ; si pour tout $\alpha > 0$ il existe une fonction intégrable Riemann f_α telle que $|f - f_\alpha| < \alpha$ sur $[a,b]$, alors f est intégrable Riemann (en d'autres termes : si f est limite uniforme de fonctions intégrables Riemann, alors f est intégrable Riemann).*

Démonstration. Supposons d'abord f réelle. Donnons nous $\varepsilon > 0$, et posons $\alpha = \varepsilon/(4b-4a)$. On peut par hypothèse trouver une fonction intégrable Riemann g telle que $|f - g| < \alpha$. Il existe h_1, h_2 en escalier telles que

$$h_1 \leq g \leq h_2 \quad \text{et} \quad \int_a^b (h_2 - h_1)(t)\,\mathrm{d}t < \frac{\varepsilon}{2}.$$

En posant $k_1 = h_1 - \alpha$ et $k_2 = h_2 + \alpha$ on obtient deux nouvelles fonctions en escalier sur $[a,b]$ telles que

$$k_1 \leq f \leq k_2 \quad \text{et} \quad \int_a^b (k_2 - k_1)(t)\,\mathrm{d}t \leq \int_a^b (h_2 - h_1)(t)\,\mathrm{d}t + 2\alpha(b-a) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Dans le cas complexe on applique ce qui précède aux parties réelle et imaginaire de f.

Passons maintenant au rapport entre convergence uniforme et valeurs des intégrales. On note d'abord que

$$\Big|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t - \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t\Big| \leq |b-a|\, \|f - g\|_{u,[a,b]}$$

pour toutes fonctions intégrables f, g sur $[a,b]$.

Théorème 1.1.10. *Si la suite de fonctions (f_n) est uniformément convergente sur $[a,b]$ vers f et si chaque fonction f_n est intégrable Riemann sur $[a,b]$, la fonction f est intégrable Riemann sur $[a,b]$ et on a*

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t.$$

Démonstration. Le fait que la fonction limite f soit intégrable Riemann résulte de la proposition précédente. Pour la convergence des intégrales, on a dit que

$$\Big|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t - \int_a^b f_n(t)\,\mathrm{d}t\Big| \leq (b-a)\, \|f - f_n\|_{u,[a,b]},$$

ce qui montre immédiatement la convergence de l'intégrale de f_n vers celle de f.

ATTENTION ! Le résultat précédent est faux pour des intégrales généralisées sur un intervalle non borné. Par exemple, si on définit une suite de fonctions (f_n) sur $\mathrm{X} = [0, +\infty[$

en posant $f_n(x) = 2^{-n}$ si $0 \leq x \leq 2^n$ et $f_n(x) = 0$ si $x > 2^n$, on voit que la suite (f_n) converge uniformément vers 0 (on calcule $\|f_n\|_{u,\mathrm{X}} = 2^{-n}$), mais pour tout $n \geq 0$ on a

$$\int_0^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t = 1$$

ce qui montre que la limite des intégrales (égale à 1) n'est pas égale à l'intégrale de la fonction limite (égale à 0).

Intégrale dépendant d'un paramètre

Théorème 1.1.11. *On suppose que* I *est un intervalle de* $\mathbb{R}$*, et que* f *est une fonction réelle ou complexe définie et continue sur* $[a,b] \times \mathrm{I}$*. La fonction* F *définie sur* I *par*

$$\forall t \in \mathrm{I}, \quad \mathrm{F}(t) = \int_a^b f(x,t)\,\mathrm{d}x$$

est une fonction continue sur I.

Démonstration. Soit τ un point fixé de I ; pour montrer la continuité de F au point τ, il suffit de voir que pour toute suite (t_n) de points de I qui tend vers τ, la suite $\mathrm{F}(t_n)$ tend vers $\mathrm{F}(\tau)$. Cela va provenir de la convergence uniforme sur $[a,b]$ de la suite des fonctions $x \to f(x,t_n)$ vers la fonction $x \to f(x,\tau)$: posons pour tout $n \geq 0$

$$\forall x \in [a,b],\ \varphi_n(x) = f(x,t_n)$$

et posons $\varphi(x) = f(x,\tau)$. Si on montre que la suite (φ_n) converge uniformément vers φ sur $[a,b]$, on pourra écrire

$$\mathrm{F}(\tau) = \int_a^b \varphi(x)\,\mathrm{d}x = \lim_n \int_a^b \varphi_n(x)\,\mathrm{d}x = \lim_n \mathrm{F}(t_n).$$

Démontrons cette convergence uniforme par l'absurde, en utilisant le théorème de Bolzano-Weierstrass. S'il n'y a pas convergence uniforme sur $[a,b]$ de cette suite de fonctions, il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout N, on puisse trouver un entier $k(\mathrm{N}) \geq \mathrm{N}$ tel que $\|\varphi_{k(\mathrm{N})} - \varphi\|_{u,[a,b]} \geq \varepsilon$; on peut alors trouver un point $x_\mathrm{N} \in [a,b]$ tel que

$$|\varphi_{k(\mathrm{N})}(x_\mathrm{N}) - \varphi(x_\mathrm{N})| \geq \varepsilon,$$

ou encore

$$|f(x_\mathrm{N}, t_{k(\mathrm{N})}) - f(x_\mathrm{N},\tau)| \geq \varepsilon. \tag{1}$$

D'après Bolzano-Weierstrass, on peut trouver une sous-suite (x_{N_j}) qui converge vers un point $x \in [a,b]$. Les deux suites de couples $(x_{\mathrm{N}_j}, t_{k(\mathrm{N}_j)})$ et (x_{N_j}, τ) tendent alors vers la même limite (x,τ) lorsque $j \to +\infty$. En passant à la limite dans l'inégalité (1) (en utilisant la continuité de f), on obtient l'inégalité impossible

$$|f(x,\tau) - f(x,\tau)| \geq \varepsilon\,!!$$

1.2. Convergence normale des séries de fonctions à valeurs complexes

On considère un ensemble non vide X (dans la plupart des exemples, X sera un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ ou de $\mathbb{C}$). On suppose définies sur X des fonctions $x \to u_0(x)$, $x \to u_1(x)$, $\ldots$, $x \to u_n(x), \ldots$ à valeurs réelles ou complexes. On va étudier la série $\sum u_n(x)$, qui dépend du paramètre $x \in \mathrm{X}$. On va en fait établir quelques bases pour une théorie des *séries de fonctions*. Il est un peu difficile de mettre au point une notation qui soit à la fois raisonnablement simple et suffisamment correcte pour désigner « la série de fonctions », par opposition à la série numérique $\sum u_n(x)$ dépendant du paramètre $x \in \mathrm{X}$ (nuance subtile !). On pourrait noter simplement $\sum u_n$, où chaque u_n est une fonction, mais on risquerait d'oublier qu'il s'agit de fonctions ; on pourrait noter $\sum\{x \to u_n(x)\}$, mais c'est bien barbare ! Je ferai ici le choix (contestable et personnel) d'écrire $\sum u_n()$ pour désigner l'objet abstrait « série de fonctions ». Les parenthèses ne sont là que pour rappeler qu'il s'agit de fonctions.

On verra à l'usage qu'il est difficile de toujours respecter un système de notations « correctes », et il serait (à mon avis) insupportable de ne pas admettre de temps en temps la phrase un peu incorrecte « la série de fonctions $\sum 2^{-n}\sin(nx)\ldots$ » à la place d'une phrase impitoyablement correcte telle que « définissons pour tout entier $n \ge 0$ la fonction f_n sur $\mathbb{R}$ par la formule $f_n(x) = \sin(nx)$ et considérons la série de fonctions $\sum 2^{-n} f_n()\ldots$ ».

Définition 1.2.1. Soit $\sum u_n()$ une série de fonctions réelles ou complexes définies sur un ensemble non vide X ; on dit que la série de fonctions $\sum u_n()$ est *normalement convergente sur l'ensemble* X si

$$\sum \sup\{|u_n(x)| : x \in \mathrm{X}\} < +\infty$$

c'est-à-dire si

$$\sum \|u_n\|_{u,\mathrm{X}} < +\infty.$$

C'est la définition précédente qui explique le nom *convergence normale* : la série de fonctions converge normalement si la *série des normes uniformes* est convergente.

Définition 1.2.2. On dit que la série numérique $\sum v_n$ est une *série majorante pour la série de fonctions* $\sum u_n()$ *sur l'ensemble* X si

$$\forall n \ge 0,\ \forall x \in \mathrm{X}, \quad |u_n(x)| \le v_n.$$

Par définition, une série majorante est une série numérique à termes positifs. On notera que $\sum \|u_n\|_{u,\mathrm{X}}$ est évidemment une série majorante pour la série de fonctions $\sum u_n()$. Inversement, si $\sum u_n()$ admet sur X la série majorante $\sum v_n$, on aura

$$\|u_n\|_{u,\mathrm{X}} = \sup\{|u_n(x)| : x \in \mathrm{X}\} \le v_n$$

pour tout entier $n \ge 0$, donc $\sum \|u_n\|_{u,\mathrm{X}}$ apparaît comme *la* série majorante canonique, et il pourrait sembler inutile d'introduire cette définition générale de série majorante. Mais dans beaucoup d'exemples, il est assez difficile de calculer exactement le sup de chaque fonction u_n, alors qu'il peut être assez facile de trouver un bon majorant ; c'est ce qui fait l'intérêt de cette notion de série majorante. On obtient donc un critère qui est souvent utilisé dans la pratique :

la série de fonctions $\sum u_n()$ *est normalement convergente sur l'ensemble* X *si (et seulement si) elle admet sur l'ensemble* X *une série majorante* **convergente** $\sum v_n < +\infty$.

Supposons la série de fonctions $\sum u_n()$ normalement convergente sur X ; on sait que $|u_n(x)| \leq \|u_n\|$ pour tout $x \in \mathrm{X}$; on voit donc que pour chaque $x \in \mathrm{X}$ fixé la série numérique $\sum u_n(x)$ est absolument convergente, donc convergente, et on peut définir une fonction $x \to \mathrm{U}(x)$ sur X qui est égale en chaque point $x \in \mathrm{X}$ à la somme de la série numérique $\sum u_n(x)$,

$$\mathrm{U}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x).$$

On dira que U est la *fonction somme de la série de fonctions* $\sum u_n()$. L'objectif de ce chapitre est d'étudier les propriétés des fonctions U définies par ce procédé.

Exemples.

Commençons par des exemples pour lesquels il est facile de calculer explicitement la norme uniforme $\|u_n\|_{u,\mathrm{X}}$.

1. Posons $\mathrm{X} = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq \frac{1}{2}\}$ et posons $u_n(z) = z^n$ pour tout $z \in \mathrm{X}$ et tout $n \geq 0$. On voit que $\|u_n\|_{u,\mathrm{X}} = 2^{-n}$, donc la série proposée est normalement convergente sur X puisque $\sum 2^{-n} < +\infty$. Si on considère le disque ouvert de rayon 1 dans le plan complexe, $\mathrm{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$, la « même » série $\sum u_n()$, où on pose encore $u_n(z) = z^n$, n'est pas normalement convergente sur D puisque $\|u_n\|_{u,\mathrm{D}} = 1$ pour tout entier $n \geq 0$.

2. La série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1} \mathrm{e}^{inx}/n^2$ (premier accroc à nos conventions de notation !) est normalement convergente sur $\mathrm{X} = \mathbb{R}$. En effet, en posant $u_n(x) = \mathrm{e}^{inx}/n^2$, on voit que $|u_n(x)| = 1/n^2$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, donc $\|u_n\|_{u,\mathbb{R}} = 1/n^2$, terme général d'une série de Riemann convergente.

3. Autres exemples à étudier suivant le même principe :

$u_n(x) = \dfrac{1}{1+n^2x}$, avec $\mathrm{X} = [1, +\infty[$, ou bien $u_n(x) = x^n\,\mathrm{e}^{-nx}$, avec $\mathrm{X} = [0, +\infty[$, ou bien $u_n(x) = n^2\,\mathrm{e}^{-nx}$ sur le même ensemble X.

4. Passons maintenant à un exemple où la notion de série majorante est utile. Supposons que u_n soit définie sur $\mathbb{R}$, pour tout $n \geq 0$, par

$$u_n(x) = \frac{\sin(nx)}{1+nx^8+x^{24}+n^2}.$$

On n'a certainement pas envie de calculer exactement la norme de cette fonction u_n, mais on pourra se contenter de remarquer par exemple que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad |u_n(x)| \leq \frac{1}{1+n^2} = v_n,$$

donc la série $\sum u_n()$ admet sur $\mathbb{R}$ la série majorante convergente $\sum v_n$, donc elle est normalement convergente sur $\mathbb{R}$.

Il arrive souvent que les séries de fonctions étudiées ne soient pas normalement convergentes sur la totalité de l'ensemble X où elles sont convergentes, mais seulement sur des parties $\mathrm{Y} \subset \mathrm{X}$. Considérons par exemple, pour $x \in \mathrm{X} =]1, +\infty[$ la série de Riemann

$$\zeta(x) = \sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^x}\,.$$

Cette série de Riemann est convergente pour tout $x \in]1,+\infty[$. Mais elle n'est pas normalement convergente sur $\mathrm{X} =]1,+\infty[$: en effet, en désignant par u_n la fonction $x \to 1/n^x$, on a

$$\|u_n\|_{u,\mathrm{X}} = \sup\{1/n^x : x > 1\} = 1/n,$$

(le sup est obtenu quand $x \to 1$, bien que $1 \notin \mathrm{X}$), donc la série des normes est la série divergente $\sum 1/n$. En revanche, si a est un nombre > 1, on a sur l'intervalle $[a,+\infty[$, puisque u_n est décroissante, $\|u_n\|_{[a,+\infty[} = n^{-a}$ et la série $\sum_{n \geqslant 1} n^{-a}$ est une série de Riemann convergente puisque $a > 1$: ainsi, pour tout $a > 1$, la série donnée est normalement convergente sur le sous-ensemble $\mathrm{Y}_a = [a,+\infty[$ de X.

Donnons un autre exemple du même type. La série

$$\sum_{n \geqslant 0} \frac{1}{(x-n)^2}$$

converge simplement sur le complémentaire X de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$. Mais aucune des fonctions $\dfrac{1}{(x-n)^2}$ n'est bornée sur X, donc la convergence de la série n'est pas normale sur X. En revanche, R étant un nombre réel > 0 donné quelconque, on a sur le sous-ensemble $\mathrm{Y_R} = \{x \in \mathrm{X} : |x| \leq \mathrm{R}\}$ pour $n > \mathrm{R}$

$$0 \leq \frac{1}{(x-n)^2} \leq \frac{1}{(n-\mathrm{R})^2}$$

ce qui prouve la convergence normale sur $\mathrm{Y_R}$ de la série limitée aux indices $> \mathrm{R}$

$$\sum_{n > \mathrm{R}} \frac{1}{(x-n)^2} \,.$$

Proposition 1.2.3. *Soit $\sum u_n()$ une série de fonctions normalement convergente sur un ensemble* X *; la suite* (U_n) *des fonctions sommes partielles converge uniformément sur* X *vers la fonction somme* U.

Démonstration. On a pour tout $x \in \mathrm{X}$ fixé

$$\mathrm{U}(x) - \mathrm{U}_n(x) = u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + \cdots$$

Écrivons simplement $\|u\|$ au lieu de $\|u\|_{u,\mathrm{X}}$. On a l'inégalité $|u_{n+k}(x)| \leq \|u_{n+k}\|$, donc

$$|\mathrm{U}_n(x) - \mathrm{U}(x)| \leq \|u_{n+1}\| + \|u_{n+2}\| + \cdots = \mathrm{R}_n.$$

Puisque cette inégalité est vraie pour tout $x \in \mathrm{X}$, on en déduit que $\|\mathrm{U}_n - \mathrm{U}\|_{u,\mathrm{X}} \leq \mathrm{R}_n$. D'autre part, $\mathrm{R}_n \to 0$ puisque $\sum \|u_n\|$ est une série numérique convergente.

On va obtenir immédiatement une traduction des théorèmes principaux sur la convergence uniforme dans le cas des séries normalement convergentes.

Théorème d'interversion des limites pour les séries

Le théorème cherché est de la forme

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in \mathrm{X}}} u_n(x) = \,??\, = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in \mathrm{X}}} \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x).$$

Comme pour les suites de fonctions, un tel résultat est faux en général. Prenons par exemple $X = [0, 1[$, $u_n(x) = x^n(1-x)$ et $x_0 = 1$. Alors $\lim_{x\to 1} u_n(x) = 0$ pour tout n fixé, donc

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} u_n(x) = 0,$$

mais $U(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x) = (\sum_{n=0}^{+\infty} x^n)(1-x) = 1$ pour tout $x \in X$, donc

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x) = 1.$$

Théorème 1.2.4. *Soit x_0 un point adhérent à X ; si la série de fonctions réelles ou complexes $\sum u_n()$ est normalement convergente sur X et si $u_n(x)$ admet pour tout $n \ge 0$ une limite (dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) quand $x \to x_0$ (avec $x \in X$), on en déduit*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \lim_{\substack{x\to x_0\\ x\in X}} u_n(x) = \lim_{\substack{x\to x_0\\ x\in X}} \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x).$$

Démonstration. Pour chaque entier $n \ge 0$ on a

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ x\in X}} U_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \lim_{\substack{x\to x_0\\ x\in X}} u_k(x),$$

donc d'après la convergence uniforme vers U de la suite (U_n) des fonctions sommes partielles,

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ x\in X}} U(x) = \lim_n \lim_{\substack{x\to x_0\\ x\in X}} U_n(x) = \lim_n \sum_{k=0}^{n} \lim_{\substack{x\to x_0\\ x\in X}} u_k(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lim_{\substack{x\to x_0\\ x\in X}} u_n(x),$$

ce qui donne le résultat voulu.

Le résultat précédent est vrai aussi si $X \subset \mathbb{R}$ est un ensemble non majoré et si le point adhérent (généralisé) considéré est $+\infty$. Pour le voir, il serait facile de modifier la démonstration précédente, mais on peut aussi déduire ce nouveau cas du précédent (c'est peut-être moins naturel, mais les mathématiciens aiment bien ce genre de détour).

Corollaire 1.2.5. *Soit X un sous-ensemble non majoré de $\mathbb{R}$, et soit $\sum u_n()$ une série de fonctions réelles ou complexes définies sur X ; si $\sum u_n()$ est normalement convergente sur X et si pour tout $n \ge 0$ la limite*

$$\lim_{\substack{x\to +\infty\\ x\in X}} u_n(x)$$

existe (dans $\mathbb{R}$ ou dans $\mathbb{C}$) on en déduit

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \lim_{\substack{x\to +\infty\\ x\in X}} u_n(x) = \lim_{\substack{x\to +\infty\\ x\in X}} \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x).$$

Démonstration. La méthode est essentiellement un « changement de variable », le changement $\tilde{x} = 1/x$ qui transforme un problème en $+\infty$ en problème en 0. Posons $\tilde{\mathrm{X}} = \{1/x : x \in \mathrm{X},\, x \neq 0\}$ et pour tout $\tilde{x} \in \tilde{\mathrm{X}}$, posons $\tilde{u}_n(\tilde{x}) = u_n(1/\tilde{x})$. Soit $\sum v_n$ une série majorante pour $\sum u_n()$ sur X ; alors $\sum v_n$ est aussi une série majorante pour la série de fonctions $\sum \tilde{u}_n()$ sur le nouvel ensemble $\tilde{\mathrm{X}}$, et pour tout entier $n \geq 0$ la fonction $\tilde{x} \to \tilde{u}_n(\tilde{x})$ tend vers une limite quand $\tilde{x} \to 0$, donc le résultat découle du théorème précédent appliqué à $\sum \tilde{u}_n(\tilde{x})$ quand $\tilde{x} \to 0$.

Cas particulier. Séries numériques doubles. On considère ici une série numérique dépendant de deux indices,

$$\sum_{n,k} a_{n,k}.$$

Corollaire 1.2.6. *Soit $\sum a_{n,k}$ une série numérique double ; si pour tout n et tout $k \in \mathbb{N}$ on a*

$$|a_{n,0} + \cdots + a_{n,k}| \leq v_n,$$

si $\sum v_n < +\infty$ et si $\sum_k a_{n,k}$ converge pour tout n, alors

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} a_{n,k} = \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} a_{n,k}.$$

La formule ci-dessus sous-entend un certain nombre de choses : par exemple, elle signifie implicitement que pour tout k fixé, la série $\sum_n a_{n,k}$ converge, puis que la série des résultats quand k varie converge aussi.

Démonstration. Pour pouvoir rattacher aux énoncés antérieurs (dans le cas présent, nous aurons $\mathrm{X} = \mathbb{N} \subset \mathbb{R}$) on notera provisoirement x un entier quelconque, pour rappeler les notations précédentes. On posera donc pour tout entier n et pour tout $x \in \mathrm{X} = \mathbb{N}$

$$u_n(x) = a_{n,0} + \cdots + a_{n,x}.$$

L'hypothèse ci-dessus est que la série de fonctions $\sum u_n()$ admet sur X la série majorante convergente $\sum v_n$, et que pour tout n la limite $\lim_{x \to +\infty, x \in \mathrm{X}} u_n(x) = \sum_{x=0}^{+\infty} a_{n,x}$ existe. D'après le corollaire précédent, on obtient donc

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{x=0}^{+\infty} a_{n,x} = \sum_{n=0}^{+\infty} \lim_{x \to +\infty} u_n(x) = \lim_{x \to +\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x) =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{x} a_{n,k} = \lim_{x \to +\infty} \sum_{k=0}^{x} \sum_{n=0}^{+\infty} a_{n,k} = \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} a_{n,k}.$$

Exemple. On retrouve ainsi la sommation par paquets des séries numériques absolument convergentes. Soit en effet $\sum b_n$ une série numérique absolument convergente, soit $(\mathrm{A}_k)_{k=0}^{+\infty}$ une partition de $\mathbb{N}$ en paquets deux à deux disjoints et posons

$$a_{n,k} = \chi_{\mathrm{A}_k}(n)\, b_n$$

pour tous $n, k \geq 0$, où χ_A désigne la fonction indicatrice d'un sous-ensemble A, égale à 1 sur A et à 0 en dehors de A. On voit que pour tous n et k

$$|a_{n,0} + \cdots + a_{n,k}| \leq |b_n|,$$

et d'autre part

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_{n,k} = \sum_{n \in \mathrm{A}_k} b_n, \quad \sum_{k=0}^{+\infty} a_{n,k} = b_n.$$

Corollaire 1.2.7. *On suppose que*

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(\sum_{k=0}^{+\infty}|a_{n,k}|) < +\infty.$$

Il en résulte alors que

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{+\infty}a_{n,k} = \sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty}a_{n,k}.$$

Démonstration. Posons $v_n = \sum_k |a_{n,k}|$. On a alors $|a_{n,0} + \cdots + a_{n,k}| \leq v_n$ et $\sum v_n < +\infty$ par hypothèse ; de plus la série $\sum_k a_{n,k}$ converge pour tout n.

Exemple. Pour $\alpha > 0$, étudier les séries de Riemann doubles

$$\sum_{n,k\geqslant 1}\frac{1}{n^\alpha + k^\alpha}.$$

Étant donné $c > 1$, on pourra estimer $\sum_{k\geqslant 1} 1/(c + k^\alpha)$ en découpant la somme de la série en deux, selon que $k^\alpha \leq c$ ou $k^\alpha > c$.

1.3. Continuité et dérivabilité de la somme d'une série de fonctions

Le premier théorème est une application immédiate de la convergence uniforme des sommes partielles et du théorème de continuité 1.1.6.

Théorème 1.3.1. *Si la série de fonctions réelles ou complexes $\sum u_n()$ est normalement convergente sur X et si chaque fonction u_n est continue au point $x_0 \in \mathrm{X}$, la fonction somme $x \to \mathrm{U}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$, définie pour tout $x \in \mathrm{X}$, est continue au point x_0. En particulier, si $\sum u_n()$ est normalement convergente sur X et si chaque fonction u_n est continue sur X, la fonction somme U est une fonction continue sur X.*

Exemples. Il est souvent nécessaire de travailler sur un sous-ensemble Y de X pour obtenir une convergence normale. Comme on l'a déjà dit, il arrive que les séries de fonctions étudiées ne soient pas normalement convergentes sur la totalité de l'ensemble X où elles sont naturellement définies, mais seulement sur des parties $\mathrm{Y} \subset \mathrm{X}$. Cela suffira souvent, comme on le verra, pour obtenir les résultats attendus, par exemple sur la continuité de la somme sur l'ensemble X tout entier.

1. On a vu que sur $]1, +\infty[$ la série de Riemann

$$\zeta(x) = \sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^x}$$

n'est pas normalement convergente, mais la série est normalement convergente sur tout intervalle $\mathrm{Y}_a = [a, +\infty[$ tel que $a > 1$. Ceci permet de montrer la continuité de la fonction ζ pour tout $x > 1$. En effet, pour montrer la continuité en un point $x > 1$, on peut choisir un nombre a tel que $1 < a < x$, et la continuité de la fonction ζ sur l'intervalle $[a, +\infty[$ implique la continuité au point x.

On peut étendre à une partie du plan complexe la définition et les propriétés de la fonction ζ. En effet, en posant $n^z = \mathrm{e}^{z\ln(n)}$ on voit que

$$\left|\frac{1}{n^z}\right| = \frac{1}{n^{\mathrm{Re}\, z}}$$

ce qui permet de voir que pour tout réel $a > 1$, la série $\sum 1/n^z$ converge normalement sur tout sous-ensemble Z_a de $\mathbb{C}$ de la forme

$$Z_a = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z \geq a\}$$

donc $z \to \zeta(z)$ est continue sur l'ensemble $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 1\}$.

2. La série

$$f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(x-n)^2}$$

converge simplement sur le complémentaire X de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{R}$ (il s'agit en fait de deux séries, l'une pour les $n < 0$ et l'autre pour $n \geq 0$, qu'il est commode ici de regrouper en une écriture unique). Pour démontrer la continuité de la somme de cette série, il est commode de « localiser » le problème. Soit $x_0 \notin \mathbb{Z}$ quelconque ; il existe un entier relatif n_0 unique tel que $n_0 < x_0 < n_0 + 1$. Choisissons a, b de façon que $n_0 < a < x_0 < b < n_0 + 1$. Pour montrer que la fonction f est continue au point x_0, il suffit de savoir qu'elle est continue sur l'intervalle $[a, b]$, et pour le voir, on va utiliser la convergence normale sur $[a, b]$. Coupons notre série en deux séries,

$$\sum_{n=-\infty}^{n_0} \frac{1}{(x-n)^2}, \quad \sum_{n=n_0+1}^{+\infty} \frac{1}{(x-n)^2}.$$

Étudions la seconde série (le raisonnement est analogue pour la première). Si on définit pour tout $n \in \mathbb{Z}$ la fonction u_n sur $[a, b]$ par $u_n(x) = (x-n)^{-2}$, on constate que la fonction u_n est croissante sur $[a, b]$ lorsque $n \geq n_0 + 1 \geq b$, donc $\|u_n\|_{u,[a,b]} = (b-n)^{-2}$ pour $n > n_0$, terme général de la série numérique convergente $\sum_{n>n_0}(b-n)^{-2}$. La somme de la seconde série est donc continue sur $[a, b]$. On procède de même avec la première série et par suite, la somme de la série donnée est continue au point x_0, pour tout $x_0 \in X$, donc f est continue sur X. Montrer en exercice que le résultat de convergence et de continuité s'étend aux valeurs complexes, pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$.

Dérivation des séries de fonctions

Dans ce paragraphe, X sera un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et x_0 un point de X.

Théorème 1.3.2. *On suppose chaque fonction u_n dérivable sur l'intervalle* X. *Si la série des fonctions dérivées $\sum u_n'()$ est normalement convergente sur* X *et si $\sum u_n(x_0)$ converge au point $x_0 \in X$, la série $\sum u_n(x)$ converge pour tout $x \in X$ et sa somme* U(x) *est dérivable sur* X, *avec de plus*

$$\forall x \in X, \quad U'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n'(x).$$

Démonstration. Puisque la série $\sum u_n'()$ converge normalement sur X, la suite des fonctions sommes partielles (qui est la suite (U_n') des dérivées des fonctions sommes partielles (U_n) de la série $\sum u_n()$) converge uniformément sur X. De plus la suite (U_n) converge simplement au point x_0. D'après le théorème 1.1.8, la fonction U est dérivable et sa dérivée est la limite de la suite (U_n'), c'est-à-dire la somme de la série des dérivées.

Exemples.

1. Considérons la fonction de Riemann ζ sur l'intervalle $]1,+\infty[$, donnée par la somme de la série de fonctions
$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^x}=\zeta(x).$$
La série dérivée est donnée par
$$\sum_{n=1}^{+\infty}-\frac{\ln n}{n^x}.$$
Soit a un réel >1 ; on voit que la fonction u_n' est un multiple de u_n, donc
$$\|u_n'\|_{u,[a,+\infty[}=(\ln n)\,\|u_n\|_{u,[a,+\infty[}$$
et $\|u_n\|_{[a,+\infty[}$ a déjà été calculé, donc
$$\sum\|u_n'\|_{[a,+\infty[}=\sum\frac{\ln n}{n^a}$$
qui est une série convergente. Par suite, la série dérivée est normalement convergente sur l'intervalle $[a,+\infty[$. Le théorème 1.3.2 montre que la fonction ζ est dérivable sur chacun des intervalles $]a,+\infty[$; il en résulte qu'elle est aussi dérivable sur $]1,+\infty[$, et de dérivée
$$\zeta'(x)=-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\ln n}{n^x}.$$
Il est très facile de voir que ce calcul se généralise à toutes les dérivées successives, donc ζ est de classe C^∞ sur $]1,+\infty[$. En particulier,
$$\zeta''(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(\ln n)^2}{n^x}$$
montre que la dérivée seconde est ≥ 0, donc la fonction ζ est convexe sur l'intervalle $]1,+\infty[$.

2. Pour tout entier $k\geq 1$, on obtient pour tout $x\in\,]-1,1[$
$$\frac{1}{(1-x)^{k+1}}=\sum_{n=0}^{+\infty}(n+k)(n+k-1)\dots(n+1)\,x^n$$
en dérivant plusieurs fois la série géométrique et en vérifiant à chaque fois que la nouvelle série dérivée est normalement convergente sur tous les intervalles $[-a,a]$, pour $0<a<1$.

1.4. Intégration terme à terme des séries de fonctions

Les résultats sur la convergence uniforme des suites donnent immédiatement :

Proposition 1.4.1. *Si la série de fonctions $\sum u_n()$ est normalement convergente sur $[a,b]$ et si chaque fonction u_n est intégrable Riemann, la fonction somme $x\to\mathrm{U}(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}u_n(x)$ est une fonction intégrable Riemann sur $[a,b]$.*

Théorème 1.4.2. *Si la série de fonctions $\sum u_n()$ est normalement convergente sur $[a, b]$ et si chaque fonction u_n est intégrable Riemann sur $[a, b]$, la série des intégrales est absolument convergente et on a*

$$\int_a^b \Big(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(t)\Big)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b u_n(t)\,\mathrm{d}t.$$

Démonstration. On applique à nouveau le résultat correspondant pour la convergence uniforme des suites. Puisque la suite (U_n) des fonctions sommes partielles converge uniformément vers U, on sait que

$$\int_a^b \mathrm{U}(t)\,\mathrm{d}t = \lim_n \int_a^b \mathrm{U}_n(t)\,\mathrm{d}t,$$

et

$$\int_a^b \mathrm{U}_n(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{n} \int_a^b u_k(t)\,\mathrm{d}t.$$

Corollaire 1.4.3. *Soit* I *un intervalle de* $\mathbb{R}$ *; on suppose que la série de fonctions $\sum u_n()$ est normalement convergente sur* I *et que chaque fonction u_n est continue sur* I. *Soit a un point de* I *et posons*

$$\forall x \in \mathrm{I}, \quad f_n(x) = \int_a^x u_n(t)\,\mathrm{d}t.$$

La fonction f_n est la primitive de u_n nulle au point a ; pour tout intervalle borné J *contenu dans* I *la série des fonctions $\sum f_n()$ converge normalement sur* J, *et la fonction* F *somme de la série $\sum f_n()$, définie par $\mathrm{F}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$, est la primitive nulle en a de la fonction continue* U, *somme de la série de fonctions $\sum u_n()$, définie sur* I.

Démonstration. Soit J un intervalle borné contenu dans I et soit M tel que $\mathrm{J} \subset [-\mathrm{M}, \mathrm{M}]$ et $|a| \le \mathrm{M}$; pour tout $x \in \mathrm{J}$ on aura

$$|f_n(x)| \le |x - a|\,\|u_n\|_{u,\mathrm{I}} \le 2\mathrm{M}\,\|u_n\|_{u,\mathrm{I}},$$

donc la série $\sum 2\mathrm{M}\,\|u_n\|_{u,\mathrm{I}}$ est une série majorante convergente sur J pour la série de fonctions $\sum f_n()$. Comme tout point $x \in \mathrm{I}$ est contenu dans un intervalle borné J, on en déduit que la série $\sum f_n(x)$ converge pour tout $x \in \mathrm{I}$, et on peut donc définir pour tout $x \in \mathrm{I}$

$$\mathrm{F}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x).$$

On va montrer que $\mathrm{F}'(x) = \mathrm{U}(x)$. Supposons d'abord $x > a$. Pour tout $x \in \mathrm{I}$, on peut appliquer le théorème 1.4.2 à l'intervalle fermé borné $[a, x]$, donc

$$\mathrm{F}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^x u_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^x \mathrm{U}(t)\,\mathrm{d}t.$$

Le cas $x < a$ est analogue, ce qui permet de voir que

$$\mathrm{F}(x) = \int_a^x \mathrm{U}(t)\,\mathrm{d}t$$

pour tout $x \in \mathrm{I}$. Cela montre que F est une primitive de la fonction continue U.

Remarque. Pour une série de fonctions $\sum w_n()$ *de classe* C^1 telle que $\sum w_n'()$ converge normalement sur I, le théorème de dérivation 1.3.2 se déduit immédiatement du résultat précédent.

Exemple. Représentation de $-\ln(1-x)$ pour x dans $\mathrm{X}_a = [-a, a]$, $0 \le a < 1$. On sait que pour tout $x \in \mathrm{X}_a$ on a

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$$

et la série des fonctions $u_n(x) = x^n$ converge normalement sur X_a, donc

$$\forall x \in \mathrm{X}_a, \quad -\ln(1-x) = \int_0^x \frac{1}{1-t}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^x t^n\,\mathrm{d}t = \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{x^m}{m},$$

donc cette relation est vraie pour tout x tel que $|x| < 1$ (on a vu qu'elle est vraie aussi pour $x = -1$, mais on ne l'obtient pas par les méthodes précédentes de convergence normale). On peut remarquer que ce résultat peut aussi s'obtenir par le théorème de dérivation lu à l'envers.

De la même façon on obtient pour $|x| < 1$

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{2n}, \quad \text{donc} \quad \mathrm{Arctan}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

Équation de la chaleur. On suppose que $\sum_{n\in\mathbb{Z}} n^2 |a_n| < +\infty$, et que la fonction $g(x)$ est une fonction 2π-périodique donnée par la formule

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}.$$

La fonction définie pour $x \in \mathbb{R}$ et $t \ge 0$ par

$$f(x,t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\,\mathrm{e}^{-n^2 t}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}$$

vérifie *l'équation de la chaleur*

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

avec la *condition initiale*

$$f(x,0) = g(x).$$

On voit que $\lim_{t\to+\infty} f(x,t) = a_0$ pour tout x (on applique le théorème d'interversion des limites à la série normalement convergente qui définit $f(x,t)$).

L'exemple précédent est un cas particulier de la théorie des *séries de Fourier*. Pour toute suite (c_n) de coefficients réels ou complexes telle que $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n| < +\infty$, on peut définir une fonction f sur $\mathbb{R}$ par la formule

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}.$$

La fonction obtenue est continue sur $\mathbb{R}$, et elle est 2π-périodique. D'après le théorème 1.4.2, on peut obtenir les coefficients (c_n) à partir de la fonction f en calculant pour tout $m \in \mathbb{Z}$

$$c_m = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x)\, \mathrm{e}^{-imx}\, \mathrm{d}x,$$

(noter que $\int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{inx}\, \mathrm{e}^{-imx}\, \mathrm{d}x = 0$ pour $n \neq m$). Ce qui fait l'importance de cette théorie, c'est que l'on peut exprimer la plupart des fonctions périodiques sous la forme ci-dessus : on peut montrer par exemple que si f est une fonction 2π-périodique sur $\mathbb{R}$, de classe C^1, alors les coefficients (c_n) calculés par la formule précédente vérifient $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n| < +\infty$ et la fonction f est égale à la somme de la série de Fourier correspondante.

Si on préfère les fonctions réelles, on peut décomposer l'exponentielle complexe en sinus et cosinus pour obtenir des décompositions de la forme

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(nx) + \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin(nx).$$

Séries alternées de fonctions

La méthode des séries normalement convergentes $\sum u_n()$ n'est qu'une façon très particulière d'obtenir la convergence uniforme de la suite des fonctions sommes partielles (U_n). Dans certains cas, d'autres méthodes sont beaucoup plus performantes.

Proposition 1.4.4. *Soit (v_n) une suite de fonctions sur un intervalle X de $\mathbb{R}$ telle que*

– *pour tout $x \in \mathrm{X}$ et tout $n \geq 0$, on a $v_n(x) \geq v_{n+1}(x) \geq 0$ (c'est-à-dire que la suite $(v_n(x))$ est décroissante positive pour tout $x \in \mathrm{X}$)*

– *la suite de fonctions (v_n) tend uniformément vers 0 sur X, c'est-à-dire que*

$$\lim_n \|v_n\|_{u,\mathrm{X}} = 0.$$

Alors les sommes partielles de la série alternée de fonctions $\sum(-1)^n v_n()$ convergent uniformément sur X. Il en résulte que la fonction somme est continue sur X si chaque fonction v_n est continue sur X.

Démonstration. On remarque d'abord que pour chaque $x \in \mathrm{X}$ fixé, on peut en posant $u_n(x) = (-1)^n v_n(x)$ appliquer le théorème des séries alternées pour déduire que la série $\sum u_n(x)$ converge pour chaque x fixé ; on peut donc poser $\mathrm{U}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$. On montre ensuite que

$$\|\mathrm{U}_n - \mathrm{U}\|_{u,\mathrm{X}} \leq \|v_{n+1}\|_{u,\mathrm{X}}$$

pour tout n. En effet, on voit que $(\mathrm{U}_{2n}(x))$ est décroissante et $(\mathrm{U}_{2n+1}(x))$ croissante, donc $\mathrm{U}_{2n+1}(x) \leq \mathrm{U}(x) \leq \mathrm{U}_{2n}(x)$. L'écart entre $\mathrm{U}(x)$ et $\mathrm{U}_{2n}(x)$ est donc au plus égal à $\mathrm{U}_{2n}(x) - \mathrm{U}_{2n+1}(x) = v_{2n+1}(x)$, et on raisonne de la même façon pour U_{2n+1} à partir de l'encadrement $\mathrm{U}_{2n+1}(x) \leq \mathrm{U}(x) \leq \mathrm{U}_{2n+2}(x)$.

Exercice. Montrer que

$$\frac{\pi}{4} = \operatorname{Arctan}(1) = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \cdots$$

en étudiant la série alternée de fonctions

$$\sum_{n \geqslant 0} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

sur l'intervalle $[0, 1]$.

Un exemple avec Abel

La série

$$\sum_{n \geqslant 1} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}}{\sqrt{n}}$$

définit une fonction continue sur $\mathrm{X} = [\alpha, 2\pi - \alpha]$ pour tout α tel que $0 < \alpha < 2\pi - \alpha$. En effet, les fonctions sommes partielles convergent uniformément sur cet intervalle. On pose $\lambda_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}}$. C'est une suite qui décroît vers 0. On pose aussi $w_n(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(n+1)x}$ pour tout $n \geq 0$. On montre que

$$|\mathrm{W}_n(x)| \leq \frac{2}{|1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}|}$$

pour tout $x \in [\alpha, 2\pi - \alpha]$. Ensuite la transformation d'Abel

$$\lambda_0 w_0(x) + \cdots + \lambda_n w_n(x) = (\lambda_0 - \lambda_1)\mathrm{W}_0(x) + \cdots + (\lambda_{n-1} - \lambda_n)\mathrm{W}_{n-1}(x) + \lambda_n \mathrm{W}_n(x)$$

transforme en une série normalement convergente $\sum(\lambda_{n-1} - \lambda_n)\mathrm{W}_{n-1}()$ plus un résidu $\lambda_n \mathrm{W}_n(x)$ qui tend uniformément vers 0 sur X.

Intégrale généralisée dépendant d'un paramètre

Théorème 1.4.5. *On suppose que* I *est un intervalle de* $\mathbb{R}$, *et que* f *est une fonction réelle ou complexe définie et continue sur* $[0, +\infty] \times \mathrm{I}$. *On suppose qu'il existe une fonction* g *sur* $[0, +\infty[$ *telle que*

- *pour tout* $(x, t) \in [0, +\infty[\times \mathrm{I}$, *on a* $|f(x, t)| \leq g(x)$;
- *l'intégrale de* g *est convergente,* $\int_0^{+\infty} g(x)\,\mathrm{d}x < +\infty$.

Dans ce cas, la fonction F *définie sur* I *par*

$$\forall t \in \mathrm{I}, \quad \mathrm{F}(t) = \int_0^{+\infty} f(x, t)\,\mathrm{d}x$$

est une fonction continue sur I.

Démonstration. Pour tout entier $n \geq 0$, posons

$$u_n(t) = \int_n^{n+1} f(x, t)\,\mathrm{d}x.$$

D'après le théorème 1.1.11, cette fonction u_n est continue sur l'intervalle I. De plus, on a pour tout $t \in \mathrm{I}$

$$|u_n(t)| \leq \int_n^{n+1} |f(x, t)|\,\mathrm{d}t \leq \int_n^{n+1} g(x)\,\mathrm{d}x = v_n,$$

et la série numérique $\sum v_n$ est convergente puisque

$$\sum_{n=0}^{+\infty} v_n = \int_0^{+\infty} g(x)\,\mathrm{d}x.$$

La série de fonctions continues $\sum u_n()$ admet donc sur I une série majorante convergente, donc sa somme est une fonction continue. Mais on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(t) = \int_0^{+\infty} f(x,t)\,\mathrm{d}x = \mathrm{F}(t).$$

On a déjà vu plusieurs exemples de séries entières : le développement

$$(1-x)^{-1} = 1 + x + \cdots + x^n + \cdots$$

valable pour $|x| < 1$, est un exemple de série entière. On a vu aussi des développements analogues pour $\ln(1-x)$, $(1+x^2)^{-1}$, $\operatorname{Arctan} x$, e^x, $\sin x$, $\cos x$. Dans le cas de l'exponentielle on a étendu la représentation aux nombres complexes : c'est ce que nous ferons systématiquement dans ce chapitre.

Définition 2.0.1. On appelle *série entière* une série de fonctions de la forme $\sum a_n z^n$, où les (a_n) sont des nombres complexes et où la variable z est complexe. Pour s'exprimer en termes plus corrects, une série entière est une série de fonctions $\sum u_n()$ où chaque fonction u_n est de la forme $u_n(z) = a_n z^n$, $z \in \mathbb{C}$.

Le premier problème que nous allons étudier est de préciser l'ensemble des points $z \in \mathbb{C}$ pour lesquels une telle série est convergente.

2.1. Rayon de convergence

Exemples

1. La série entière $\sum 2^n z^n$ converge pour $|z| < \frac{1}{2}$ et a pour somme $(1-2z)^{-1}$; elle diverge pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| \geq \frac{1}{2}$.

2. La série entière $\sum n!\, z^n$ ne converge que pour $z = 0$. En effet, quand $z \neq 0$, le terme général $n!\, z^n$ ne tend pas vers 0 (en fait son module tend vers $+\infty$).

3. La série entière $\sum z^n/n!$ converge pour tout $z \in \mathbb{C}$. Rappelons que la somme de cette série s'appelle l'exponentielle complexe :

$$\mathrm{e}^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

Lorsque z est réel, on retrouve bien sûr l'exponentielle au sens habituel.

Proposition 2.1.1. *Supposons donnée une série entière $\sum a_n z^n$. On suppose que $r_0 > 0$ est donné et que la suite $(a_n r_0^n)$ est bornée. Pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < r_0$, la série numérique $\sum a_n z^n$ est (absolument) convergente. De plus, pour tout r_1 tel que $0 \leq r_1 < r_0$, la série de fonctions $\sum a_n z^n$ est normalement convergente dans le disque $\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq r_1\}$. Il en résulte que la fonction somme $z \to f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ est une fonction continue dans le disque ouvert $\{z \in \mathbb{C} : |z| < r_0\}$.*

Démonstration. Il suffit de démontrer la deuxième partie de l'énoncé, qui implique en particulier que $\sum a_n z^n$ est absolument convergente pour tout z tel que $|z| < r_0$ (poser simplement $r_1 = |z|$, et appliquer la suite de l'énoncé) ; soit M un majorant de la suite $(|a_n|\, r_0^n)$ et soit r_1 tel que $0 \leq r_1 < r_0$; pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| \leq r_1$ on a la majoration

$$|a_n z^n| = \Big| a_n r_0^n \left(\frac{z}{r_0}\right)^n \Big| \leq \mathrm{M}\Big(\frac{r_1}{r_0}\Big)^n = v_n,$$

et la série majorante $\sum v_n$ est convergente puisque $0 \leq r_1/r_0 < 1$. Le reste de l'énoncé provient des résultats du chapitre 1.

Indiquons une conséquence importante de l'énoncé précédent. Si la série $\sum a_n z_0^n$ converge pour un certain $z_0 \in \mathbb{C}$ non nul, la série $\sum a_n z^n$ converge absolument pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < |z_0|$. En effet, la convergence de la série $\sum a_n z_0^n$ implique que la suite $(|a_n||z_0|^n)$ est bornée, ce qui permet d'appliquer la proposition précédente avec $r_0 = |z_0|$.

Passons maintenant à la notion de *rayon de convergence*. Considérons l'ensemble B des nombres réels $r \geq 0$ tels que la suite $(a_n r^n)$ soit bornée. On a bien sûr $0 \in \mathrm{B}$ (et on a vu dans l'exemple (2) ci-dessus qu'il est possible que $\mathrm{B} = \{0\}$). Si B contient le nombre $r \geq 0$, il est clair qu'il contient aussi tout le segment $[0, r]$, donc B est un intervalle, de la forme $[0, a]$ ou bien $[0, a[$, ou bien $[0, +\infty[$. Dans le cas où l'ensemble B est majoré, désignons par R la borne supérieure de B, et dans le cas où B n'est pas majoré posons $\mathrm{R} = +\infty$.

Le nombre R, peut être égal à $+\infty$, a la propriété que la série $\sum a_n z^n$ converge dans le disque ouvert $\{z \in \mathbb{C} : |z| < \mathrm{R}\}$ et ne converge pour aucun $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| > \mathrm{R}$. En effet, si $|z| < \mathrm{R}$ il existe $r_0 \in \mathrm{B}$ tel que $|z| < r_0$ (parce que R est *le plus petit* majorant de B) et la série $\sum a_n z^n$ est convergente d'après la proposition 2.1.1 (puisque la suite $(a_n r_0^n)$ est bornée et que $|z| < r_0$). Si $|z| > \mathrm{R}$, on en déduit que $|z| \notin \mathrm{B}$ (parce que R est un majorant de B) donc la série ne peut pas converger au point z puisque $|a_n||z|^n$ n'est pas bornée.

Définition 2.1.2. Le nombre R ainsi déterminé (éventuellement égal à $+\infty$) s'appelle le *rayon de convergence* de la série entière $\sum a_n z^n$. Le disque $\{z \in \mathbb{C} : |z| < \mathrm{R}\}$ s'appelle *disque (ouvert) de convergence*. Dans le cas où $\mathrm{R} < +\infty$, le cercle $\{z \in \mathbb{C} : |z| = \mathrm{R}\}$ s'appelle *cercle de convergence* de la série entière.

On ne sait pas en général si la série converge pour les points du cercle de convergence. Elle peut converger pour certains points de ce cercle, ou bien pour tous les points du cercle ou encore pour aucun point du cercle de convergence.

Exemples

1. La série géométrique $\sum z^n$ est une série entière de rayon de convergence $\mathrm{R} = 1$: elle est en effet convergente pour tout nombre complexe z de module < 1, et divergente pour tout nombre complexe z tel que $|z| \geq 1$. C'est un exemple où il y a divergence pour tout point du cercle de convergence.

2. La série entière $\sum_{n \geqslant 1} z^n/n$ converge pour $z = -1$, et elle diverge pour $z = 1$. Par conséquent, son rayon de convergence est $\mathrm{R} = 1$. Sur le cercle $|z| = 1$ il y a en fait convergence pour tout $z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}x} \neq 1$ (où $x \in \mathbb{R}$). On a vu en effet au chapitre sur les séries numériques (en utilisant la transformation d'Abel) que la série

$$\sum_{n \geqslant 1} \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}}{n}$$

est convergente pour tout x réel différent des nombres $2k\pi$.

3. La série entière $\sum_{n \geqslant 1} z^n/n^2$ est de rayon de convergence $\mathrm{R} = 1$, et elle converge pour tout point z du cercle de convergence. La série entière $\sum n z^n$ est de rayon de convergence $\mathrm{R} = 1$, et elle ne converge pour aucun point z du cercle de convergence.

Résumé

Soit $\sum a_n z^n$ *une série entière ; il existe un nombre fini ou infini* $\mathrm{R} \in [0, +\infty]$*, appelé* rayon de convergence *de la série entière, tel que*

– *pour tout* $z \in \mathbb{C}$ *tel que* $|z| > \mathrm{R}$*, la série* $\sum a_n z^n$ *diverge*

– *pour tout* r *tel que* $0 \le r < \mathrm{R}$*, la série numérique* $\sum |a_n| r^n$ *converge, donc la série* $\sum a_n z^n$ *converge normalement dans le disque* $\{z \in \mathbb{C} : |z| \le r\}$*. La somme de la série est une fonction continue dans le disque ouvert de convergence* $\{z \in \mathbb{C} : |z| < \mathrm{R}\}$*.*

Rappelons que le comportement sur le cercle de rayon R dépend de l'exemple considéré. Dans le cas $\mathrm{R} = 0$, la série entière converge pour $z = 0$ et seulement pour $z = 0$.

Calcul du rayon de convergence

Lemme. *Considérons une série entière* $\sum a_n z^n$*, et désignons par* R *son rayon de convergence.*

– *Si on a* $r > \mathrm{R}$*, il existe une infinité d'indices* n *tels que* $r\,|a_n|^{1/n} > 1$*. Autrement dit, si* $r \ge 0$ *et si on a* $r\,|a_n|^{1/n} \le 1$ *pour tout* n *assez grand, alors* $r \le \mathrm{R}$*.*

– *Si on a* $0 \le r < \mathrm{R}$*, on a* $r\,|a_n|^{1/n} < 1$ *pour tout* n *assez grand.*

– *On a* $\mathrm{R} > 0$ *si et seulement si la suite* $(|a_n|^{1/n})$ *(définie pour* $n \ge 1$*) est bornée.*

Démonstration. Supposons $r > \mathrm{R}$; on sait alors que $r \notin \mathrm{B}$, donc la suite $(a_n\, r^n)$ n'est pas bornée ; il existe alors par exemple une infinité d'indices n tels que $|a_n|\, r^n \ge 2$ et pour ces indices on a $r\,|a_n|^{1/n} \ge 2^{1/n} > 1$.

Soit $0 \le r < \mathrm{R}$; on sait que la série $\sum a_n r^n$ est convergente, par conséquent on a $\lim_{n \to +\infty} a_n r^n = 0$. Il existe donc un entier N tel que pour $n \ge \mathrm{N}$ on ait $|a_n r^n| < 1$. Ainsi, pour tout $n \ge \mathrm{N}$, on a

$$|a_n|^{1/n}\, r < 1.$$

On voit en particulier que si $\mathrm{R} > 0$, la suite $(|a_n|^{1/n})$ est bornée (prendre $r = \mathrm{R}/2$ dans l'argument précédent). Inversement, si la suite $(|a_n|^{1/n})$ est bornée par M et si on prend $r = 1/\mathrm{M} > 0$ on aura $r\,|a_n|^{1/n} \le 1$ pour tout n, donc la suite $(a_n\, r^n)$ est bornée par 1, donc $r \in \mathrm{B}$ et $\mathrm{R} \ge r > 0$. On a ainsi montré que le rayon de convergence R est nul si et seulement si la suite $(|a_n|^{1/n})$ n'est pas bornée.

Interprétons le lemme précédent avec la notion de limite supérieure, d'abord dans le cas $0 < \mathrm{R} < +\infty$. Soit $y > 1/\mathrm{R}$; alors $r = 1/y < \mathrm{R}$, donc $r\,|a_n|^{1/n} < 1$ pour n assez grand, donc il n'y a qu'un nombre fini d'indices n tels que $y < |a_n|^{1/n}$. Inversement, soit x tel que $0 < x < 1/\mathrm{R}$; alors $r = 1/x > \mathrm{R}$, donc d'après la première partie du lemme il existe une infinité d'indices n tels que $r\,|a_n|^{1/n} > 1$, ou encore d'indices n tels que $x < |a_n|^{1/n}$. On voit donc que $1/\mathrm{R}$ est le point de coupure qui définit la limite supérieure de la suite $(|a_n|^{1/n})$. On a donc

$$\frac{1}{\mathrm{R}} = \limsup_n |a_n|^{1/n}.$$

Étant donnée une suite (x_n) non majorée de nombres réels, on conviendra de poser $\limsup_n x_n = +\infty$. On a vu que $\mathrm{R} = 0$ si et seulement si la suite $|a_n|^{1/n}$ n'est pas bornée ; si on interprète $1/\mathrm{R} = 1/0 = +\infty$, on aura encore $1/\mathrm{R} = \limsup_n |a_n|^{1/n}$ dans ce cas. Finalement, si $\mathrm{R} = +\infty$ on voit que $\limsup_n |a_n|^{1/n} = 0 = 1/(+\infty)$. On obtient donc :

Proposition 2.1.3. *Le rayon de convergence* R *de la série entière* $\sum a_n z^n$ *est déterminé par la formule*

$$\frac{1}{\mathrm{R}} = \limsup_n |a_n|^{1/n}.$$

Si la limite supérieure ci-dessus est $+\infty$*, le rayon est nul. Si la limite supérieure est nulle, on a* $\mathrm{R} = +\infty$.

Détermination pratique du rayon de convergence

Corollaire 2.1.4. *Si la limite* $\ell = \lim_n |a_n|^{1/n}$ *existe (limite finie ou infinie), le rayon de convergence de la série entière* $\sum a_n z^n$ *est égal à* $1/\ell$ *(avec les conventions naturelles* $1/0 = +\infty$ *et* $1/(+\infty) = 0$*).*

Exemples. Considérons les deux séries $\sum 2^n z^n$, $\sum n z^n$: on trouve $\ell = 2$ pour le premier exemple et $\ell = 1$ pour le second. Les rayons de convergence sont donc $1/2$ pour le premier exemple et 1 pour le second.

Proposition 2.1.5. *Soit* $\sum a_n z^n$ *une série entière ; on suppose qu'il existe deux réels* $\rho_1, \rho_2 > 0$ *tels que l'on ait pour tout* n *assez grand*

$$\rho_1 \le \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \le \rho_2.$$

Alors

$$\frac{1}{\rho_2} \le \mathrm{R} \le \frac{1}{\rho_1}\cdot$$

En particulier, si $\lim_{n\to+\infty} |a_{n+1}/a_n| = \ell$*, le rayon de convergence de la série entière est égal à* $\mathrm{R} = 1/\ell$ *(avec les mêmes conventions que précédemment).*

Démonstration. Supposons que n_0 soit assez grand pour que l'encadrement donné ci-dessus pour $|a_{m+1}/a_m|$ soit vrai pour tout $m \ge n_0$. On aura pour $n > n_0$

$$|a_{n_0}|\, \rho_1^{n-n_0} \le |a_n| = \left| \frac{a_n}{a_{n-1}} \cdots \frac{a_{n_0+1}}{a_{n_0}} \right| |a_{n_0}| \le |a_{n_0}|\, \rho_2^{n-n_0},$$

donc $|a_n|\, \rho_1^{-n} \ge |a_{n_0}|\, \rho_1^{-n_0} > 0$ pour tout $n > n_0$; ainsi la suite $(a_n\, \rho_1^{-n})$ ne tend pas vers 0, donc la série $\sum a_n\, \rho_1^{-n}$ diverge et on en déduit que $\mathrm{R} \le \rho_1^{-1}$. De l'autre côté, la suite $(a_n\, \rho_2^{-n})$ est bornée, donc $\rho_2^{-1} \le \mathrm{R}$.

Exemples.

1. Pour la série exponentielle $\sum z^n/n!$ on voit que $a_{n+1}/a_n \to 0$, ce qui confirme que le rayon de convergence est égal à $+\infty$.
2. La série entière $\sum n z^n$ a pour rayon de convergence 1. En effet, on a

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n+1}{n} = 1.$$

Bien souvent, le rapport a_{n+1}/a_n n'a pas de sens, et il est alors nécessaire de revenir à la définition du rayon de convergence et d'encadrer le terme $|a_n|\, r^n$ par des termes généraux de séries dont on connaît déjà la nature.

Exercice. Si $n^{-1} \le |a_n| \le n$ pour tout entier $n \ge 1$, montrer que la série entière $\sum a_n z^n$ a pour rayon de convergence $\mathrm{R} = 1$.

2.2. Opérations sur les séries entières

Commençons par un rappel. Étant données deux séries numériques $\sum u_n$ et $\sum v_n$, on considère la série produit $\sum w_n$ dont le terme général est $w_n = \sum_{i=0}^n u_i\, v_{n-i}$.

Rappel. *Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries numériques absolument convergentes ; la série produit $\sum w_n$, de terme général $w_n = \sum_{i=0}^n u_i\, v_{n-i}$ est absolument convergente. De plus, si on pose $\mathrm{U} = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ et $\mathrm{V} = \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$ on a*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \mathrm{UV}.$$

On peut appliquer ceci aux séries entières, dont on sait qu'elles sont absolument convergentes à l'intérieur du disque de convergence. On remarque d'abord que la série produit $\sum w_n$ de deux séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ est encore une série entière,

$$w_n = (a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_n b_0)\, z^n.$$

Proposition 2.2.1. *Soient $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières de rayon de convergence R et R' respectivement ; posons $c_n = \sum_{i=0}^n a_i\, b_{n-i}$. Alors les séries entières*

$$\sum (a_n + b_n) z^n, \quad \sum c_n z^n$$

sont de rayon de convergence $\geq \min(\mathrm{R}, \mathrm{R}')$. De plus, si pour tout nombre complexe z de module $|z| < \min(\mathrm{R}, \mathrm{R}')$ on pose $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ et $g(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n$ on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (a_n + b_n) z^n = f(z) + g(z), \quad \sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n = f(z) g(z).$$

Remarque. Il est possible que le rayon de la somme ou celui du produit soit strictement plus grand que $\min(\mathrm{R}, \mathrm{R}')$. Pour donner un exemple dans le cas de la somme il suffit de prendre $a_n = -b_n = 1$ pour tout n ; alors $\mathrm{R} = \mathrm{R}' = 1$, mais la série somme est la série nulle, de rayon de convergence $+\infty$. Pour un exemple avec le produit, prenons encore $a_n = 1$ pour tout n, mais $g(z) = 1 - z$. Alors $\mathrm{R} = 1$, $f(z) = (1-z)^{-1}$ mais la série produit se réduit au premier terme $c_0 = 1$, et son rayon de convergence est $+\infty$.

Dérivation des séries entières

Étant donnée une série entière $\sum a_n z^n$, la *série dérivée* est une nouvelle série entière définie par

$$\sum_{n \geqslant 1} n a_n z^{n-1}.$$

Proposition 2.2.2. *La série entière $\sum a_n z^n$ et sa série dérivée $\sum_{n \geqslant 1} n a_n z^{n-1}$ ont même rayon de convergence.*

Démonstration. Posons $b_n = n a_n$; on rappelle que $n^{1/n}$ tend vers 1 lorsque n tend vers $+\infty$, ce qui implique que les suites $(|a_n|^{1/n})$ et $(|b_n|^{1/n}) = (n^{1/n} |a_n|^{1/n})$ sont équivalentes. Il en résulte que

$$\limsup_n |a_n|^{1/n} = \limsup_n |b_n|^{1/n},$$

ce qui donne l'égalité des rayons de convergence des séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum n a_n z^n$. Le résultat voulu en découle.

Remarque. En utilisant la transformation d'Abel, on montre que si la série $\sum_{n \geqslant 1} n a_n z^{n-1}$ converge au point z, alors la série $\sum a_n z^n$ converge *au même* point z.

Proposition 2.2.3. *Soit* R *le rayon de convergence de la série entière* $\sum a_n z^n$ *; sur l'intervalle* $]-\mathrm{R}, \mathrm{R}[$ *la fonction* f *définie par*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

est dérivable, et de dérivée

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}.$$

Démonstration. Il suffit de constater que sur tout intervalle $]-r, r[$, avec $0 \leq r < \mathrm{R}$ la série dérivée $\sum_{n \geqslant 1} n a_n x^{n-1}$ est normalement convergente, et la série $\sum a_n x^n$ convergente ; d'après le théorème 1.3.2 de dérivation des séries de fonctions, la fonction f sera dérivable sur $]-r, r[$, de dérivée donnée par la somme de la série dérivée. Puisque ces intervalles recouvrent $]-\mathrm{R}, \mathrm{R}[$ la fonction f sera dérivable sur $]-\mathrm{R}, \mathrm{R}[$.

Calcul des dérivées successives

Calculons les dérivées successives de la somme $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ d'une série entière de rayon de convergence $\mathrm{R} > 0$; pour tout entier $k \geq 1$, on aura en itérant l'application de la proposition précédente

$$\forall x \in]-\mathrm{R}, \mathrm{R}[, \quad f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{+\infty} n(n-1)\dots(n-k+1)\, a_n x^{n-k}.$$

On en déduit

Corollaire 2.2.4. *Soit* R *le rayon de convergence de la série entière* $\sum a_n z^n$ *; la fonction* f *définie sur l'intervalle* $]-\mathrm{R}, \mathrm{R}[$ *par* $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ *est indéfiniment dérivable, et on a pour tout entier* $n \geq 0$

$$f^{(n)}(0) = n!\, a_n.$$

Exemple. Si on se donne $r > 0$ et $|x| < r$,

$$g(x) = 1 + \frac{x}{r} + \dots + \frac{x^n}{r^n} + \dots = \frac{r}{r-x},$$

et pour tout $k \geq 0$,

$$g^{(k)}(x) = \frac{r\, k!}{(r-x)^{k+1}} = \sum_{n=k}^{+\infty} n(n-1)\dots(n-k+1) \frac{x^{n-k}}{r^n}.$$

Application : prolongement à $\mathbb{C}$ d'égalités obtenues dans le cas réel. Supposons que $f_1(z)$ et $f_2(z)$ soient deux fonctions sommes de séries entières de rayon de convergence $\geq \mathrm{R} > 0$, et que l'on ait pu démontrer que $f(x) = g(x)$ pour tout $x \in]-\mathrm{R}, \mathrm{R}[$. Il en résulte alors que $f(z) = g(z)$ pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < \mathrm{R}$. En effet, l'égalité de f et g sur l'intervalle $]-\mathrm{R}, \mathrm{R}[$ implique l'égalité de toutes les fonctions dérivées $f_1^{(k)}$ et $f_2^{(k)}$ sur le même intervalle, donc l'égalité de tous les coefficients des deux séries entières, obtenus à partir des valeurs $f_1^{(k)}(0) = f_2^{(k)}(0)$.

Pour donner un tout petit exemple, la formule ci-dessus donne le développement de la fonction $x \to (1-x)^{-k}$, obtenu par dérivation. Mais on sait aussi que $(1-z)^{-k}$ se représente par une série entière pour tout $|z| < 1$, en faisant k fois le produit de la série de $(1-z)^{-1}$ par elle-même. Cette deuxième méthode est plus compliquée, mais la remarque précédente nous garantit que les coefficients trouvés seront les mêmes.

Proposition 2.2.5. *Soit $g(z) = \sum b_n z^n$ une série entière à coefficients $b_n \geq 0$, de rayon de convergence $\mathrm{R} > 0$ et soit d'autre part $f(z) = \sum a_n z^n$ une série entière telle que $|a_n| \leq b_n$ pour tout $n \geq 0$; on a alors pour tout $k \geq 0$ et pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < \mathrm{R}$*

$$|f^{(k)}(z)| \leq g^{(k)}(|z|).$$

Démonstration. Prenons d'abord $k = 0$. On aura

$$|f(z)| = \Bigl|\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n\Bigr| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|\,|z|^n \leq \sum_{n=0}^{+\infty} b_n |z|^n = g(|z|).$$

On remarque ensuite que les séries dérivées $f'(z) = \sum n a_n z^{n-1}$ et $g'(z) = \sum n b_n z^{n-1}$ vérifient la même hypothèse de majoration des coefficients, puisqu'on a encore $|na_n| \leq nb_n$ pour tout $n \geq 1$, et ainsi de suite pour toutes les dérivées successives, ce qui donne le résultat.

On va en déduire une majoration des dérivées de la somme d'une série entière $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, de rayon de convergence $\mathrm{R} > 0$. Si on se donne r tel que $0 < r < \mathrm{R}$, on sait que la suite $(a_n r^n)$ est bornée, et il en résulte qu'il existe une constante M telle que pour tout $n \geq 0$ on ait $|a_n| \leq \mathrm{M}/r^n$, donc on pourra appliquer le résultat précédent avec la série entière à coefficients positifs

$$g(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{M}\, r^{-n} z^n = \frac{\mathrm{M}}{1 - z/r} = \frac{\mathrm{M}r}{r - z}\cdot$$

Il en résulte pour tout $x \in]-r, r[$

$$|f^{(k)}(x)| \leq g^{(k)}(|x|) = k!\, \frac{\mathrm{M}r}{(r - |x|)^{k+1}}\cdot$$

On retiendra le résultat sous la forme suivante : si $f(x) = \sum a_n x^n$ pour tout $x \in]-\mathrm{R}, \mathrm{R}[$, alors pour tout r tel que $0 < r < \mathrm{R}$ il existe M' (dépendant de r) tel que pour tout $k \geq 0$ et tout x tel que $|x| < r$ on ait

$$\frac{|f^{(k)}(x)|}{k!} \leq \frac{\mathrm{M}'}{(r - |x|)^{k+1}}\cdot$$

Ces arguments montrent que les dérivées des fonctions définies par une série entière vérifient des inégalités particulières. Les résultats de ce paragraphe doivent servir à expliquer les conditions que nous donnerons plus loin pour garantir qu'une fonction f soit développable en série entière (proposition 2.3.2).

Dérivée complexe

Soit $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ la somme d'une série entière de rayon de convergence $\mathrm{R} > 0$; si $|z| + |h| \leq r < \mathrm{R}$, on a la majoration

$$\left| \frac{(z+h)^n - z^n}{h} - n z^{n-1} \right| \leq \frac{n(n-1)}{2}\, r^{n-2}\, |h|,$$

qui permet de montrer que

$$f'(z) = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h \in \mathbb{C} \setminus \{0\}}} \frac{f(z+h) - f(z)}{h}$$

existe, et est égale à la somme de la série dérivée.

Intégration des séries entières

Proposition 2.2.6. *La série entière* $\sum a_n z^n$ *et la série entière*

$$a_0 z + \frac{a_1}{2} z^2 + \frac{a_2}{3} z^3 + \cdots + \frac{a_n}{n+1}\, z^{n+1} + \cdots$$

ont même rayon de convergence R. *Si* $\mathrm{R} > 0$, *la fonction* f *définie sur l'intervalle* $]-\mathrm{R}, \mathrm{R}\,[$ *par la formule*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

admet pour primitive nulle en zéro la fonction

$$\mathrm{F}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1}\, x^{n+1}.$$

Démonstration. La série donnée $\sum a_n z^n$ est la série dérivée de la deuxième série. Toutes les affirmations découlent donc du théorème sur la dérivation.

Exemples

La série entière $\sum (-1)^n x^n$ a pour rayon de convergence 1 et pour $|x| < 1$ on a

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n.$$

La série entière $\sum (-1)^n\, x^{n+1}/(n+1)$ a aussi 1 pour rayon de convergence, et sa somme est la primitive de la fonction $x \mapsto 1/(1+x)$ qui s'annule pour $x = 0$. Ainsi, sur $]-1, 1\,[$ on a

$$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n\, \frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

De même, on a pour $|x| < 1$

$$\mathrm{Arctan}\, x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n\, \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

Exponentielle complexe : rappels

On a posé pour tout $z \in \mathbb{C}$

$$\mathrm{e}^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

et on a vu que pour tous u et $v \in \mathbb{C}$, on a $\mathrm{e}^{u+v} = \mathrm{e}^u \, \mathrm{e}^v$.

Proposition 2.2.7. *Soit z un nombre complexe quelconque ;*

– le nombre e^z est toujours non nul, et son inverse est e^{-z} ;

– si $z = x + \mathrm{i}y$, avec x et y réels, on a $\mathrm{e}^z = \mathrm{e}^x(\cos y + \mathrm{i} \sin y)$. En particulier, $|\,\mathrm{e}^z\,| = \mathrm{e}^x$.

– Soit Z un nombre complexe non nul, de module ρ, d'argument θ, avec $0 \le \theta < 2\pi$; alors l'équation

$$\mathrm{e}^z = \mathrm{Z}$$

a une infinité de solutions, données par $z = \ln \rho + \mathrm{i}\theta + 2\mathrm{i}k\pi$, avec k entier relatif quelconque.

Démonstration. Les deux premiers points sont des rappels ; pour vérifier le troisième, notons que le nombre complexe Z s'écrit $\mathrm{Z} = \rho(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)$, de sorte que l'équation ci-dessus est équivalente au système d'équations

$$\begin{cases} \mathrm{e}^x = \rho \\ \cos y = \cos\theta \ , \ \sin y = \sin\theta \end{cases}$$

ce qui équivaut à $x = \ln\rho$ et $y = \theta + 2k\pi$. D'où le résultat.

Exercice Montrer que la fonction complexe définie sur $\mathbb{R}$ par $t \to \mathrm{e}^{tz}$ est dérivable, de dérivée égale à $z\,\mathrm{e}^{tz}$.

Logarithme complexe

La série entière

$$z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{z^n}{n} + \cdots$$

a un rayon de convergence égal à 1, et on sait que pour $z = x$ réel, $|x| < 1$, sa somme est égale à $\ln(1+x)$. Posons pour tout nombre complexe z tel que $|z| < 1$

$$\ln(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{z^n}{n} + \cdots$$

Nous allons calculer cette fonction. On suppose donc $|z| < 1$, et on pose $u = 1 + z = r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$. On peut choisir un argument θ tel que $|\theta| < \pi/2$ (faire un petit dessin ou bien noter que $\mathrm{Re}\, u > 0$). Posons $d = |z| = |u - 1| < 1$ et posons $u(t) = r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}t\theta}$ pour tout $t \in [0,1]$. On a $u(0) = r$ et $u(1) = u$, et pour tout $t \in [0,1]$,

$$|u(t) - 1|^2 = r^2 + 1 - 2r\cos(t\theta) \le r^2 + 1 - 2r\cos(\theta) = |u-1|^2 = d^2.$$

Cela montre que $|u(t) - 1| \le d < 1$ pour tout $t \in [0,1]$, ce qui permet de calculer, en posant $z(t) = u(t) - 1$

$$f(t) = \ln(u(t)) = \ln(1 + (u(t) - 1)) = \ln(1 + z(t))$$

au moyen de la série précédente,

$$f(t) = z(t) - \frac{z(t)^2}{2} + \frac{z(t)^3}{3} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{z(t)^n}{n} + \cdots$$

On obtient une série de fonctions $\sum u_n()$, où $u_0 = 0$ et $u_n(t) = (-1)^{n-1} z(t)^n / n$ pour tout $n \ge 1$. Nous allons montrer que la série dérivée de cette série de fonctions de la variable t est normalement convergente sur $[0, 1]$. La série dérivée est donnée par

$$z'(t) - z(t)z'(t) + z(t)^2 z'(t) + \cdots + (-1)^{n-1} z(t)^{n-1} z'(t) + \cdots = \frac{z'(t)}{1 + z(t)}.$$

On remarque que $z'(t) = r\,\mathrm{i}\theta\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}t\theta}$, donc $|z'(t)| = r|\theta|$, et on a pour tout $t \in [0, 1]$

$$|u'_n(t)| = r|\theta|\,|z(t)|^{n-1} \le r|\theta|\,d^{n-1} = v_n,$$

ce qui nous donne une série majorante convergente $\sum v_n$ pour la série de fonctions $\sum u'_n()$ (parce que $d < 1$). Il en résulte que la somme de la série dérivée est bien la dérivée de la fonction f,

$$f'(t) = \frac{z'(t)}{1 + z(t)} = \frac{r\,\mathrm{i}\theta\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}t\theta}}{r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}t\theta}} = \mathrm{i}\theta.$$

On voit donc que la dérivée de f est constante, égale à $\mathrm{i}\theta$. Il en résulte que

$$\ln(r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}) = \ln(u) = f(1) = f(0) + \mathrm{i}\theta = \ln(r) + \mathrm{i}\theta.$$

Cela suggère une extension de la définition de $\ln(z)$ au moyen de la formule ci-dessus,

$$\ln(z) = \ln|z| + \mathrm{i}\,\mathrm{Arg}\,z,$$

où on aura choisi pour $z \notin]-\infty, 0]$ l'argument tel que $-\pi < \mathrm{Arg}\,z < \pi$. À partir de cette formule on voit que $\mathrm{e}^{\ln(z)} = z$ et $\ln(\mathrm{e}^z) = z + 2\mathrm{i}k\pi$ lorsque tous les termes sont définis.

Séries entières et développements limités (en abrégé : DL)

On a vu que pour tout x tel que $|x| < 1$

$$-\ln(1 - x) = x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n} + \cdots$$

Cette information a un sens pour tout x fixé tel que $|x| < 1$, par exemple

$$-\ln(0,9) = \frac{1}{10} + \cdots + \frac{1}{n\,10^n} + \cdots$$

D'un autre côté, l'information DL est par exemple du type suivant

$$-\ln(1 - x) = x + \frac{x^2}{2} + x^2 \varepsilon(x).$$

Cette information de DL n'a pas de sens intéressant pour une valeur fixée de x, par exemple si $x = 0,9$ écrire

$$-\ln(0,9) = \frac{1}{10} + \frac{1}{200} + \frac{1}{100}\,\varepsilon(1/10)$$

n'a aucun intérêt, car sous cette forme on ne sait rien de $\varepsilon(1/10)$. L'information donnée par l'écriture DL est que $\lim_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0$. Une information de DL est donc une information de type « global », ou bien de type « fonction », par opposition à une information ponctuelle. C'est ce qui rend son utilisation un petit peu délicate.

Classes $\mathrm{O}_a(f)$ *(lire « Grand O »)*

Tout d'abord, un peu de vocabulaire : on dit que V est un *voisinage* d'un point $a \in \mathbb{R}$ si $\mathrm{V} \subset \mathbb{R}$ contient un intervalle ouvert de la forme $]a-\eta, a+\eta[$, pour un certain $\eta > 0$. On appelle *voisinage épointé* de ce même point a un ensemble obtenu à partir d'un voisinage de a en enlevant le point a, ce qui donne un ensemble de la forme $\mathrm{V} \setminus \{a\}$. Soit $a \in \mathbb{R}$ fixé ; soit f une fonction définie sur un voisinage épointé du point a ; on dit qu'une fonction g définie sur un voisinage épointé de a appartient à la classe $\mathrm{O}_a(f)$ s'il existe $\varepsilon > 0$ et une constante M tels que

$$\forall x \in]a-\varepsilon, a+\varepsilon[, \ \big(x \neq a \Rightarrow |g(x)| \leq \mathrm{M}|f(x)|\big).$$

Autrement dit, il existe un voisinage épointé plus petit W sur lequel on a la majoration $|g| \leq \mathrm{M}|f|$. En termes un peu trop rapides, cela signifie que g/f est bornée au voisinage de a.

Exemple. Posons $f(x) = 1$ pour tout x ; on écrit alors $\mathrm{O}_a(1)$ plutôt que $\mathrm{O}_a(f)$. Si $g(x) = 1/x$, on aura $g \notin \mathrm{O}_0(1)$, mais $g \in \mathrm{O}_1(1)$ par exemple.

Propriétés.

1. $f \in \mathrm{O}_a(f)$
2. $\mathrm{O}_a(f) + \mathrm{O}_a(f) \subset \mathrm{O}_a(f)$
3. $\mathrm{O}_a(f_1) \,.\, \mathrm{O}_a(f_2) \subset \mathrm{O}_a(f_1 f_2)$
4. $g \in \mathrm{O}_a(f)$ implique que $\mathrm{O}_a(g) \subset \mathrm{O}_a(f)$
5. Si $\lim_{x \to a} f(x)$ existe (dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), alors $f \in \mathrm{O}_a(1)$
6. $f \sim_a g$ entraîne $\mathrm{O}_a(f) = \mathrm{O}_a(g)$.

On peut aussi définir des classes $\mathrm{O}_{+\infty}(f)$ selon le même principe.

On va s'intéresser tout particulièrement pour les DL au cas où $a = 0$, et où les fonctions f sont les fonctions monômes $p_0, p_1, \ldots, p_n, \ldots$ définies sur $\mathbb{R}$ par $p_n(x) = x^n$. On notera en fait en suivant la tradition

$$\mathrm{O}(x^n) := \mathrm{O}_0(p_n).$$

On a les règles suivantes

$$\ldots \subset \mathrm{O}(x^{n+1}) \subset \mathrm{O}(x^n) \subset \ldots \subset \mathrm{O}(x) \subset \mathrm{O}(1)$$

Pour tous entiers $m, n \geq 0$,

$$\mathrm{O}(x^m) \,.\, \mathrm{O}(x^n) \subset \mathrm{O}(x^{m+n}).$$

Un DL avec notations O() est par exemple une expression de la forme

$$x + x^2 + \mathrm{O}(x^3).$$

Il s'agit d'une expression symbolique où le dernier terme $\mathrm{O}(x^3)$ représente un élément indéterminé g de la classe $\mathrm{O}(x^3)$. Il faut savoir simplifier les expressions obtenues après divers calculs, par exemple le carré de l'expression précédente sera

$$x^2 + 2x^3 + x^4 + 2x\mathrm{O}(x^3) + 2x^2\mathrm{O}(x^3) + \mathrm{O}(x^3)\mathrm{O}(x^3)$$

qui se réduit simplement à

$$x^2 + 2x^3 + \mathrm{O}(x^4).$$

Proposition 2.2.8. *Si $r > 0$ et si $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ pour tout $x \in]-r, r[$, on a pour tout $n \geq 0$*

$$f - (a_0 p_0 + \cdots + a_n p_n) \in \mathrm{O}_0(p_{n+1})$$

ce qu'on écrira simplement

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + \mathrm{O}(x^{n+1}).$$

La fonction f admet donc des développements limités en 0 de tous les ordres.

Démonstration. Si on choisit $0 < t < r$ on est sûr que la suite $(a_n t^n)$ est bornée, disons par M. On a alors pour $|x| < t$

$$|f(x) - (a_0 + \cdots + a_n x^n)| \leq \mathrm{M} \sum_{k>n} t^{-k} x^k = x^{n+1} \frac{\mathrm{M} t^{-n}}{t - x},$$

ce qui donne le résultat.

2.3. Séries de Taylor

On a vu qu'une série entière de rayon de convergence R est indéfiniment dérivable sur l'intervalle $]-\mathrm{R}, \mathrm{R}[$. On étudie ici le problème réciproque. Soient $\mathrm{I} =]-r, r[$ un intervalle centré en 0 et de rayon r, et f une fonction indéfiniment dérivable, réelle ou complexe, définie sur I.

Question 1 : existe-t-il une série entière $\sum a_n z^n$, de rayon de convergence $\mathrm{R} \geq r$ telle que pour tout $x \in \mathrm{I}$ on ait

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \,?$$

Question 2 : si cette série entière existe, est-elle unique ?

La réponse à la question 2 est immédiate : si cette série entière existe, on doit avoir d'après le corollaire 2.2.4

$$\forall n \geq 0, \quad a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!},$$

ce qui donne l'unicité. Moyennant une translation, on pourra aussi étudier le problème plus général suivant : soient $\mathrm{I} =]x_0 - r, x_0 + r[$ un intervalle centré en x_0 et de rayon r, et f une fonction indéfiniment dérivable, réelle ou complexe, définie sur I. Existe-t-il une série entière $\sum a_n z^n$, de rayon de convergence $\mathrm{R} \geq r$ telle que pour tout $x \in \mathrm{I}$ on ait

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x - x_0)^n \,?$$

Comme avant, l'unicité d'une telle série est immédiate (par un petit changement de variable pour ramener l'étude en x_0 à une étude en 0, on voit que a_n est nécessairement égal à $f^{(n)}(x_0)/(n!)$ pour tout entier $n \geq 0$).

Définition 2.3.1. Étant donnée une fonction f à valeurs complexes, définie et indéfiniment dérivable sur un intervalle ouvert $\mathrm{J} \subset \mathbb{R}$, et étant donné un point x_0 de J, la série de fonctions de la variable x

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$$

s'appelle la *série de Taylor de f au point x_0* (ou série de Mac-Laurin de f, dans le cas où $x_0 = 0$).

Supposons que f soit une fonction indéfiniment dérivable définie sur l'intervalle $\mathrm{I} =]x_0 - r, x_0 + r[$. Pour répondre à nos questions, il faut déterminer

– si la série de Taylor de f au point x_0 converge pour tout $x \in \mathrm{I}$;

– si la somme de la série de Taylor est égale à $f(x)$ pour tout $x \in \mathrm{I}$.

Si la réponse est *oui* pour ces deux questions, on dit que la fonction f est *développable en série entière sur* I. Le changement de variable $h = x - x_0$ met la série de Taylor de f sous forme de série entière de la variable h. La fonction f est donc développable en série entière sur l'intervalle $\mathrm{I} =]x_0 - r, x_0 + r[$ si on a pour tout h réel tel que $|h| < r$ l'égalité

$$f(x_0 + h) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\, h^n.$$

Il peut sembler peu naturel de ne s'intéresser dans la définition précédente qu'au développement de Taylor par rapport au point central x_0 de l'intervalle de définition $]x_0 - r, x_0 + r[$ de la fonction f. On verra en fait que si f vérifie la définition précédente sur l'intervalle $]x_0 - r, x_0 + r[$, alors elle est aussi développable sur tout intervalle plus petit $]x_1 - \rho, x_1 + \rho[\subset]x_0 - r, x_0 + r[$ (et on s'intéresse donc cette fois-ci au développement de Taylor au point x_1).

En général, le rayon de convergence R de la série de Taylor de f en x_0 d'une fonction f de classe C^∞ définie sur un intervalle $\mathrm{I} =]x_0 - r, x_0 + r[$ n'a aucune raison d'être supérieur ou égal à r. Par exemple, la fonction réelle définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \frac{1}{1 + x^2}$$

est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$. Mais la série de Mac-Laurin de la fonction f à l'origine, égale à $\sum (-1)^n\, x^{2n}$ est de rayon de convergence 1, par conséquent cette série ne peut pas représenter la fonction f pour les points $x > 1$. Il peut même arriver que ce rayon de convergence soit nul. On peut en effet démontrer (un théorème d'Émile Borel) qu'étant donnée une suite arbitraire de nombres réels (a_n), il existe une fonction indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f^n(0) = a_n$ pour tout $n \geq 0$. Si on prend $a_n = (n!)^2$, on obtient pour cette fonction f une série de Mac-Laurin de rayon de convergence nul.

Il peut aussi arriver que le rayon de convergence soit $\geq r$ sans que la somme de la série de Taylor soit égale à f sur l'intervalle I. Considérons par exemple la fonction réelle f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-1/x^2} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0. \end{cases}$$

On vérifie sans difficulté que cette fonction est indéfiniment dérivable, et qu'on a $f^{(n)}(0) = 0$ pour tout entier $n \geq 0$. Ainsi, la série de Mac-Laurin de f est identiquement nulle : pourtant, quel que soit l'intervalle $]-r, r[$ centré à l'origine, la fonction f n'est pas identiquement nulle sur cet intervalle.

Développement en série entière des fonctions usuelles

Un premier moyen simple d'obtenir des développements de certaines fonctions usuelles est de procéder par intégration à partir d'autres développements connus. On a ainsi obtenu par intégration les développements de Taylor suivants sur $]-1, 1[$

$$\ln(1 + x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} \ ; \quad \mathrm{Arctan}\, x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

Le moyen principal pour prouver qu'une fonction est développable en série entière est d'utiliser la formule de Taylor au point x_0, à un ordre arbitraire n :

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\,(x - x_0)^n + \mathrm{R}_n(f, x_0, x),$$

où $\mathrm{R}_n(f, x_0, x)$ s'appelle le *reste de Taylor*. Montrer que $f(x)$ est égal à la somme de la série de Taylor au point x_0 revient exactement à montrer que le reste $\mathrm{R}_n(f, x_0, x)$ tend vers zéro lorsque $n \to +\infty$. Il existe plusieurs façons d'exprimer le reste, qui permettent d'atteindre notre objectif ; l'une d'elles est d'utiliser le *reste de Lagrange* et la majoration qui en résulte. On obtient ainsi par exemple :

Lemme. *Soient* I *un intervalle ouvert et* f *une fonction complexe indéfiniment dérivable sur* I *; on suppose qu'il existe un nombre réel* M *tel que pour tout* $x \in \mathrm{I}$ *et tout entier* $n \geq 0$ *on ait*

$$|f^{(n)}(x)| \leq \mathrm{M}.$$

Pour tous les points $x_0, x \in \mathrm{I}$ *on a alors*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n.$$

Démonstration. D'après la formule de Taylor-Lagrange, on a pour tout $x = x_0 + h \in \mathrm{I}$

$$\Bigl| f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}\, h^k \Bigr| \leq \mathrm{M} \frac{|h|^{n+1}}{(n+1)!} \cdot$$

Le terme de droite tend vers 0 quand $n \to +\infty$. Par suite la fonction f est développable en série entière sur I.

On peut appliquer ce résultat à la fonction e^x sur n'importe quel intervalle borné $\mathrm{I} =]-r, r[$, puisque toutes les dérivées sont égales à la même fonction, et donc majorées sur I par $\mathrm{M} = \mathrm{e}^r$. On peut aussi l'appliquer à $\operatorname{sh} x$ et $\operatorname{ch} x$, pour lesquelles la suite des fonctions dérivées ne comprend que les deux fonctions $\operatorname{sh} x$ et $\operatorname{ch} x$ (on peut aussi obtenir ces deux développements à partir de e^x et e^{-x}). Pour les fonctions $\cos x$, $\sin x$, on obtient le même phénomène, mais on peut prendre tout de suite $\mathrm{I} = \mathbb{R}$ et $\mathrm{M} = 1$. On obtient ainsi que ces fonctions sont développables en séries entières sur $\mathbb{R}$ et que l'on a

$$\mathrm{e}^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}\,; \quad \operatorname{sh} x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\,; \quad \operatorname{ch} x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}\,;$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}\,; \quad \sin x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \cdot$$

Il ne faut pas oublier qu'on peut aussi considérer le développement de Taylor en un point $x_0 \neq 0$, par exemple

$$\sin x = \sin(x_0) + \cos(x_0)(x - x_0) - \sin(x_0)\frac{(x - x_0)^2}{2!} + \cdots$$

Dans le cas de la fonction sin (ou cos) ce développement ne nous apprend en fait rien de bien nouveau : en posant $x = x_0 + h$ on voit en regroupant les termes facteurs de $\sin x_0$ et ceux qui contiennent $\cos x_0$ que la formule ci-dessus revient à la relation trigonométrique $\sin(x_0 + h) = \sin(x_0)\cos h + \cos(x_0)\sin h$, jointe au développement de $\cos h$ et $\sin h$ à l'origine.

On obtient parfois de meilleures estimations du reste de la formule de Taylor en utilisant la formule de Taylor avec *reste intégral*, que nous rappelons.

Lemme. *Soient* I *un intervalle de* $\mathbb{R}$ *contenant* 0 *et* f *une fonction réelle ou complexe indéfiniment dérivable définie sur* I *; pour tout* $x \in \mathrm{I}$,

$$f(x) = f(0) + f'(0)\,x + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}\,x^n + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!}\,f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t.$$

Démonstration. Posons pour x fixé dans I

$$g(t) = f(t) + (x-t)f'(t) + \cdots + \frac{(x-t)^n}{n!}\,f^{(n)}(t).$$

On voit que

$$g'(t) = \frac{(x-t)^n}{n!}\,f^{(n+1)}(t),$$

et on termine en écrivant

$$g(x) = g(0) + \int_0^x g'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Nous allons exploiter cette expression du reste du développement de Taylor au point $x_0 = 0$,

$$\mathrm{R}_n(f, 0, x) = \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!}\,f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t.$$

Proposition 2.3.2. *Soit* f *une fonction de classe* C^∞ *sur l'intervalle* $\mathrm{I} =]-r, r[$, *telle qu'il existe* M *tel que*

$$\forall n \ge 0,\ \forall t \in \mathrm{I}, \quad \Bigl|\frac{f^{(n)}(t)}{n!}\Bigr| \le \frac{\mathrm{M}}{(r - |t|)^{n+1}}.$$

On a alors pour tout $x \in \mathrm{I}$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}\,x^n.$$

Démonstration. Supposons d'abord $x > 0$. Désignons par g la fonction définie sur I par

$$g(t) = \frac{\mathrm{M}}{r - t}.$$

On sait que cette fonction g est développable en série entière sur l'intervalle $]-r, r[$, donc le reste $\mathrm{R}_n(g, 0, x)$ tend vers 0 pour tout x tel que $|x| < r$. On vérifie que pour tout $n \ge 0$ et $t \ge 0$

$$g^{(n)}(t) = n!\,\frac{\mathrm{M}}{(r-t)^{n+1}}$$

qui majore $|f^{(n)}(t)|$ d'après l'hypothèse de la proposition. On écrit alors

$$\Big|f(x)-\Big(\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}\,x^k\Big)\Big| = \Big|\int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!}\,f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t\Big| \leq \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!}\,|f^{(n+1)}(t)|\,\mathrm{d}t \leq$$

$$\leq \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!}\,g^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t = g(x)-\Big(\sum_{k=0}^{n}\frac{g^{(k)}(0)}{k!}\,x^k\Big)$$

qui tend vers zéro lorsque $n\to+\infty$ puisque g est développable en série sur I. Dans le cas $x<0$ on utilise la fonction $g(t)=\mathrm{M}(r+t)^{-1}$.

Exercice. Donner une autre démonstration du résultat précédent en utilisant, toujours pour x fixé, $0<x<r$, la série de fonctions de la variable $t\in[0,x]$

$$\varphi(t)=f(x-t)+f'(x-t)t+\cdots+\frac{f^{(n)}(x-t)}{n!}\,t^n+\cdots$$

En posant $u_n(t)=f^{(n)}(x-t)\,t^n/n!$ on constatera que la série des fonctions dérivées $u_n'(t)$ converge normalement sur $[0,x]$ et que la somme de la série dérivée est nulle. Il en résulte que la fonction φ est constante, donc

$$f(x)=\varphi(0)=\varphi(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}\,x^n.$$

On va voir qu'on peut obtenir des informations supplémentaires sans beaucoup se fatiguer. Gardons les hypothèses de la proposition précédente, et fixons un point $x_1\in\,]-r,r[$. Posons aussi $\rho=r-|x_1|$. On a alors $]x_1-\rho,x_1+\rho[\,\subset\,]-r,r[$. Posons $f_1(h)=f(x_1+h)$ pour $|h|<\rho$. On voit que pour tout entier n

$$\frac{|f_1^{(n)}(h)|}{n!}=\frac{|f^{(n)}(x_1+h)|}{n!}\leq\frac{\mathrm{M}}{(r-|x_1+h|)^{n+1}}\leq\frac{\mathrm{M}}{(\rho-|h|)^{n+1}},$$

(car $r-|x_1+h|\geq r-|x_1|-|h|=\rho-|h|$), ce qui montre que la fonction f_1 vérifie la même hypothèse que f, mais avec r remplacé par ρ. On obtient donc pour $|h|<\rho$

$$f_1(h)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{f_1^{(n)}(0)}{n!}\,h^n$$

ce qui donne par changement de variable, pour tout $x\in\,]x_1-\rho,x_1+\rho[$

$$f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{f^{(n)}(x_1)}{n!}\,(x-x_1)^n.$$

Fonction de fonction

On est très naturellement amené à se demander si une fonction telle que par exemple

$$x\to\frac{1}{1-\sin x}\quad\text{ou bien}\quad x\to\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}$$

est développable en série dans un voisinage de 0. Les méthodes présentées précédemment seraient très peu commodes sur un tel problème. La bonne méthode est d'obtenir un résultat général sur les compositions de fonctions. Le résultat qui suit est important ;

sa démonstration est facile quand on dispose de la théorie des fonctions holomorphes (qui est hors programme), mais assez délicate avec les outils dont nous disposons. Nous l'indiquons pour les amateurs...

Théorème 2.3.3. *Soit* $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ *une série entière de rayon* $\mathrm{R} > 0$ *et soit* $g(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} b_k x^k$ *une série entière de rayon* $\rho > 0$*, telle que*

$$|b_0| = |g(0)| < \mathrm{R}.$$

La fonction $x \to f(g(x))$ *est développable en série entière dans un voisinage de* 0*.*

Démonstration. Posons

$$\mathrm{A}_n = |a_n|, \quad \mathrm{B}_k = |b_k|, \quad \mathrm{F}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{A}_n x^n, \quad \mathrm{G}(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathrm{B}_k x^k.$$

On sait que les séries entières de F et G ont les mêmes rayons de convergence que celles de f et g, à savoir R et ρ. D'autre part, pour tout entier $n \geq 1$ les puissances g^n et G^n sont également développables en série entière de rayon $\geq \rho$ d'après le théorème des séries produit. Écrivons

$$g^n(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} b_{n,k} x^k\,; \quad \mathrm{G}^n(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathrm{B}_{n,k} x^k.$$

On montre par récurrence sur $n \geq 1$ que $|b_{n,k}| \leq \mathrm{B}_{n,k}$ pour tous n, k ; en effet, on a d'abord $|b_{1,k}| = |b_k| = \mathrm{B}_k = \mathrm{B}_{1,k}$, puis

$$|b_{n+1,k}| = \Big|\sum_{j=0}^{k} b_{n,j} b_{1,k-j}\Big| \leq \sum_{j=0}^{k} \mathrm{B}_{n,j} \mathrm{B}_{1,k-j} = \mathrm{B}_{n+1,k}.$$

Puisque G est continue et que $|\mathrm{G}(0)| = |b_0| < \mathrm{R}$, on peut trouver $r > 0$ tel que $\mathrm{G}(r) < \mathrm{R}$, ce qui garantit que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{A}_n \mathrm{G}^n(r) = \mathrm{F}(\mathrm{G}(r)) < +\infty.$$

On écrit pour $|x| < r$

$$f(g(x)) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \Big(\sum_{k=0}^{+\infty} b_{n,k}\, x^k\Big)$$

et on montre que la série double est absolument convergente,

$$\sum_{n,k=0}^{+\infty} |a_n b_{n,k} x^k| \leq \sum_{n,k=0}^{+\infty} \mathrm{A}_n \mathrm{B}_{n,k} |x|^k \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{A}_n \Big(\sum_{k=0}^{+\infty} \mathrm{B}_{n,k} r^k\Big) = \mathrm{F}(\mathrm{G}(r)) < +\infty.$$

On peut donc intervertir l'ordre des sommations d'après le théorème sur la sommation par paquets des séries numériques ou le corollaire 1.2.7 et écrire

$$f(g(x)) = \sum_{k=0}^{+\infty} \Big(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n b_{n,k}\Big) x^k.$$

Complément

Théorème 2.3.4. *Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $\mathrm{R} > 0$ et considérons lorsque $|z| < \mathrm{R}$ sa somme $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$. Lorsque $|z| < \mathrm{R}$, notons aussi $f^{(n)}(z)$ la somme de la n-ième série dérivée, pour tout entier $n \geq 0$ (en convenant que $f^{(0)} = f$). Pour tout z_0 tel que $|z_0| < \mathrm{R}$, la série entière de la variable complexe u*

$$\sum \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}\, u^n$$

a un rayon de convergence $\geq \mathrm{R} - |z_0|$ et de plus pour tout $u \in \mathbb{C}$ tel que $|z_0| + |u| < \mathrm{R}$ on a l'identité

$$f(z_0 + u) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}\, u^n.$$

Embryon de démonstration. Il s'agit essentiellement d'un cas particulier du résultat précédent, si on pose $g(x) = z_0 + x$. Si on suit pas à pas la démonstration précédente, on voit qu'on aura ici $\mathrm{G}(x) = |z_0| + x$, et cette démonstration précédente garantit le résultat dès que $\mathrm{G}(|x|) < \mathrm{R}$, ce qui donne bien la condition $|z_0| + |x| < \mathrm{R}$. On retrouve la notion de dérivée complexe. En effet, la majoration du reste d'ordre 1 de la série de Taylor au point z_0 donne pour $|u| < u_0$ une inégalité de la forme

$$|f(z_0 + u) - f(z_0) - f'(z_0)u| \leq \mathrm{M}|u|^2$$

donc

$$f'(z_0) = \lim_{u \to 0, u \in \mathbb{C}^*} \frac{f(z_0 + u) - f(z_0)}{u}.$$

Solutions d'équations différentielles

Le développement en série entière d'une fonction f peut parfois s'obtenir en montrant que la somme de la série de Mac-Laurin satisfait, sur l'intervalle où elle est convergente, une même équation différentielle que f, avec mêmes conditions initiales en un point ; on utilise alors l'unicité des solutions d'équations différentielles satisfaisant aux mêmes conditions initiales pour conclure que la somme de la série entière est bien égale à la fonction f.

Lemme. *Soit a une fonction réelle continue sur un intervalle $\mathrm{I} \subset \mathbb{R}$ et soient $x_0 \in \mathrm{I}$ et y_0 un nombre réel quelconque ; l'équation différentielle*

$$y' = a(x)y \qquad \text{(E)}$$

a une solution et une seule sur l'intervalle I satisfaisant à la condition initiale $y(x_0) = y_0$; cette solution est donnée par

$$y(x) = y_0 \exp\Big(\int_{x_0}^{x} a(t)\,\mathrm{d}t\Big).$$

Démonstration. Considérons la fonction A définie sur I par la formule $\mathrm{A}(x) = \int_{x_0}^{x} a(t)\,\mathrm{d}t$. Alors A est une fonction dérivable sur I de dérivée a, et on voit que $(y_0\, \mathrm{e}^{\mathrm{A}})' = y_0\, a\, \mathrm{e}^{\mathrm{A}}$, donc la fonction $f : x \to y_0\, \mathrm{e}^{\mathrm{A}(x)}$ satisfait l'équation (E), et de plus $f(x_0) = y_0$. Inversement, si y est solution de (E) vérifiant la condition initiale $y(x_0) = y_0$, considérons la fonction $x \to z(x) = \mathrm{e}^{-\mathrm{A}(x)}\, y(x)$. On vérifie que

$$z'(x) = \mathrm{e}^{-\mathrm{A}(x)}\big(y'(x) - a(x)y(x)\big) = 0$$

ce qui entraîne que z est constante sur l'intervalle I, donc $z(x) = z(x_0) = y_0$ et $y(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{A}(x)}\, z(x) = y_0\, \mathrm{e}^{\mathrm{A}(x)}$.

Développement en série entière de $(1+x)^\alpha$

Soit α un nombre réel ; la fonction $x \to (1+x)^\alpha$ est indéfiniment dérivable sur $]-1,+\infty\,[$. Elle a pour série de Mac-Laurin

$$1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}\,x^n+\cdots$$

Cette série entière a pour rayon de convergence $\mathrm{R}=1$ dans le cas $\alpha \notin \mathbb{N}$ (appliquer le critère a_{n+1}/a_n), et pour $\alpha \in \mathbb{N}$ on remarque que ce développement est fini, et qu'on retrouve simplement dans ce cas la formule du binôme. Il est donc raisonnable d'appeler le cas général la *formule du binôme généralisée*. Posons

$$\binom{\alpha}{n}=\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}.$$

Ce coefficient du binôme généralisé vérifie encore la formule du triangle de Pascal,

$$\binom{\alpha}{n}+\binom{\alpha}{n+1}=\binom{\alpha+1}{n+1}.$$

Désignons par g la somme de cette série entière sur $]-1,1\,[$. Cette fonction est dérivable, et sa dérivée est la somme de la série obtenue en dérivant terme à terme la série ci-dessus :

$$g'(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{(n-1)!}\,x^{n-1}$$

et sur $]-1,1[$ on a $(1+x)g'(x)=\alpha g(x)$ (utiliser la relation du triangle de Pascal généralisée). Puisque $g(0)=1$ on voit que $g(x)=(1+x)^\alpha$ pour tout $x\in\,]-1,1\,[$.

On peut aussi utiliser les résultats des sections précédentes. Le calcul est plus agréable dans le cas $-1<\alpha<0$, qu'on peut écrire

$$f(x)=\frac{1}{(1-x)^\beta}$$

avec $0<\beta<1$. Les dérivées successives de f sont ≥ 0, et pour tout x tel que $|x|<1$ on a

$$f^{(n)}(x)=\beta(\beta+1)\ldots(\beta+n-1)(1-x)^{-\beta-n}\leq$$
$$\leq 1(1+1)\ldots(1+n-1)(1-|x|)^{-1-n}=n!\,\frac{1}{(1-|x|)^{n+1}},$$

ce qui permet d'appliquer la proposition 2.3.2. On récupère les autres valeurs de β par intégration ou dérivation.

Exercice. Déduire de ce qui précède le développement en série entière de $x \to \operatorname{Arcsin} x$.

Recherche de solutions d'équations différentielles développables en série entière

On traitera seulement un exemple. On considère l'équation différentielle linéaire du second ordre

$$\text{(E)} \qquad y''+xy'+y=0$$

Une solution de l'équation différentielle (E) sur un intervalle I est une fonction $x \to y(x)$ deux fois dérivable sur I et telle que pour tout $x \in \mathrm{I}$ on ait

$$y''(x)+xy'(x)+y(x)=0.$$

Une telle solution est obligatoirement indéfiniment dérivable (petit exercice), et les solutions sur l'intervalle I de cette équation différentielle constituent évidemment un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des fonctions deux fois dérivables sur I. Cherchons si parmi ces solutions il y en a qui sont développables en série entière sur un intervalle $]-r,r[$. Une telle solution s'écrirait

$$y(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n.$$

On aurait alors par dérivation

$$y'(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}na_nx^{n-1}\,;\quad y''(x)=\sum_{n=2}^{+\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}$$

de sorte que y est solution de l'équation (E) si et seulement si pour tout $x\in]-r,r[$ on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\left((n+1)(n+2)a_{n+2}+na_n+a_n\right)x^n=0.$$

Ceci équivaut à dire que $(n+2)a_{n+2}+a_n=0$ pour tout entier $n\geq 0$, c'est-à-dire à

$$a_{2p}=\frac{(-1)^p}{2^pp!}a_0\,;\quad a_{2p+1}=\frac{(-1)^p}{1.3.5\ldots(2p+1)}\,a_1.$$

Toute série entière satisfaisant à ces conditions est déterminée par les nombres a_0 et a_1, qu'on peut choisir arbitraires. Une telle série entière est alors de rayon de convergence infini. On a ainsi prouvé que les solutions de (E) qui sont développables en série entière sur $]-r,r[$ constituent un espace vectoriel de dimension 2 engendré par les solutions

$$y_0(x)=\mathrm{e}^{-x^2/2}\,;\quad y_1(x)=\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{(-1)^p}{1.3.5\ldots(2p+1)}\,x^{2p+1}.$$

Ainsi, ces solutions se prolongent à $\mathbb{R}$.

Les solutions que nous venons de trouver sont les seules qui sont développables en série entière sur un intervalle $]-r,r[$ centré à l'origine. On peut naturellement se demander s'il n'en existe pas d'autres, qui ne soient pas développables en série entière sur $]-r,r[$. La proposition qui suit, qui peut s'étendre en fait à toute équation différentielle linéaire du type

$$y''+a(x)y'+b(x)y=0$$

montre que ce n'est pas le cas :

Proposition 2.3.5. *Soient a_0 et a_1 deux nombres réels ; l'équation différentielle (E) n'a qu'une seule solution $y:]-r,r[\to\mathbb{R}$ satisfaisant aux conditions initiales $y(0)=a_0$ et $y'(0)=a_1$. Cette solution est donnée par*

$$y(x)=a_0y_0(x)+a_1y_1(x).$$

Démonstration. Il est clair que la solution $x\to y(x)=a_0y_0(x)+a_1y_1(x)$ satisfait aux conditions demandées. Pour montrer que c'est la seule, nous utilisons la méthode dite traditionnellement *méthode de variation des constantes*, et qui permet de trouver les solutions d'une équation différentielle linéaire du second ordre quand on connaît une de ces solutions.

Toute fonction deux fois dérivable $y:]-r,r[\to\mathbb{R}$ peut s'écrire

$$y(x)=z(x)\,\mathrm{e}^{-x^2/2}$$

où $z:]-r,r[\to\mathbb{R}$ est deux fois dérivable. Dire que y est solution de (E) avec les conditions initiales $y(0)=a_0$, $y'(0)=a_1$ revient à dire que z est solution de l'équation différentielle

$$z''-xz'=0$$

et satisfait aux conditions initiales $z(0) = a_0$, $z'(0) = a_1$. D'après le lemme, ceci est équivalent à

$$z'(x) = a_1 \int_0^x \mathrm{e}^{-t^2/2}\,\mathrm{d}t\,; \quad z(0) = a_0.$$

Ceci détermine z de manière unique, et par suite y. Ceci démontre la proposition.

Exercice. On considère l'équation différentielle

$$y'' + \frac{y'}{x} + y = 0.$$

Chercher une solution série entière qui vérifie la condition $y'(0) = 0$ (qui permet d'espérer qu'on pourra diviser par x et obtenir une limite en 0) et la condition $y(0) = 1$ (la solution obtenue est une fonction classique, la *fonction de Bessel* J_0).

Chapitre 3. Intégrale de Riemann multiple

3.1. Intégrale double

On va s'intéresser à des fonctions définies sur un rectangle contenu dans $\mathbb{R}^2$. En fait, il ne s'agira pas d'un rectangle quelconque, mais d'un rectangle de côtés parallèles aux axes de coordonnées, de la forme $\mathrm{P} = [a, b] \times [c, d]$. Pour ne pas répéter sans cesse cette longue phrase, on conviendra d'appeler *pavé borné* un tel ensemble $\mathrm{P} = [a, b] \times [c, d]$, où a, b, c, d sont réels avec $a \le b$ et $c \le d$.

Considérons donc un pavé borné fixé $\mathrm{P} = [a, b] \times [c, d]$ dans le plan $\mathbb{R}^2$. On appelle *subdivision* π du pavé P la donnée d'une subdivision $\pi_x = (x_0 = a < \ldots < x_m = b)$ de $[a, b]$ et d'une subdivision $\pi_y = (y_0 = c < \ldots < y_n = d)$ de $[c, d]$. On dira que les mn rectangles $\mathrm{R}_{i,j} =]x_{i-1}, x_i[\times]y_{j-1}, y_j[$, pour $i = 1, \ldots, m$ et $j = 1, \ldots, n$, sont les rectangles (ouverts) de la subdivision. On aura aussi besoin de parler des *segments de bordure* qui limitent ces rectangles : les segments horizontaux sont égaux à $]x_{i-1}, x_i[\times \{y_j\}$, pour $i = 1, \ldots, m$ et $j = 0, \ldots, n$; les segments verticaux sont les $\{x_i\} \times]y_{j-1}, y_j[$, pour $i = 0, \ldots, m$ et $j = 1, \ldots, n$. On notera $|\mathrm{Q}|$ la surface d'un pavé Q, donc on posera $|\mathrm{R}_{i,j}| = (x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})$.

On dit que la subdivision σ du pavé P est *plus fine* que la subdivision π si chaque rectangle $\mathrm{R}_{i,j}$ de la subdivision π est découpé en rectangles plus petits dans la subdivision σ. Cela revient à dire que σ_x est plus fine que π_x **et** σ_y plus fine que π_y. Étant données deux subdivisions π et ρ quelconques du pavé P, on peut toujours trouver une subdivision σ plus fine que π et que ρ en même temps : il suffit de prendre sur chaque coordonnée un ensemble de points de subdivision qui contienne tous les points de subdivision de π **et** de ρ.

Fonctions en escalier et valeur de leur intégrale

Définition 3.1.1. Une fonction réelle φ définie sur le pavé borné $\mathrm{P} = [a, b] \times [c, d]$ est dite *fonction en escalier sur le pavé* P s'il existe une subdivision π du pavé P (avec $\pi_x = (x_0 = a < \ldots < x_m = b)$ et $\pi_y = (y_0 = c < \ldots < y_n = d)$) telle que φ soit constante sur chaque rectangle ouvert $]x_{i-1}, x_i[\times]y_{j-1}, y_j[$, pour $i = 1, \ldots, m$ et $j = 1, \ldots, n$, et constante aussi sur tous les segments de bordure (segments ouverts) de ces rectangles, horizontaux et verticaux (cette dernière condition n'est pas importante pour le calcul des intégrales, elle est plutôt technique, de nature à faciliter le développement de la théorie).

Si cette condition est réalisée, on dira que π est une subdivision de P adaptée à la fonction en escalier φ. On vérifie que toute subdivision σ plus fine que π sera encore adaptée à φ. Si ψ est une deuxième fonction en escalier sur P et ρ une subdivision adaptée à ψ, on peut trouver une subdivision σ plus fine que π et ρ, qui sera donc adaptée à la fois à φ et à ψ. Les deux fonctions φ et ψ seront donc constantes sur les rectangles ouverts et sur les segments de bordure de la subdivision σ, ce qui implique que toute fonction combinaison linéaire $\lambda\varphi + \mu\psi$ de ces deux fonctions en escalier sera elle aussi constante sur les intervalles de σ.

Si I est un sous-intervalle de $[a, b]$ et J un sous-intervalle de $[c, d]$ (sous-intervalles ouverts, ou fermés, ou semi-ouverts, qui peuvent être réduits à un point), on vérifie facilement que la fonction indicatrice χ_{Q} du « rectangle » $\mathrm{Q} = \mathrm{I} \times \mathrm{J}$ produit des deux intervalles, est une fonction en escalier.

Inversement, étant donnée une subdivision π, les rectangles ouverts $\mathrm{R}_{i,j}$ sont de la forme $\mathrm{I}\times\mathrm{J}$ avec $\mathrm{I} =]x_{i-1}, x_i[$ et $\mathrm{J} =]y_{j-1}, y_j[$, et les segments de bordure sont aussi de cette forme, avec par exemple $\mathrm{I} =]x_{i-1}, x_i[$ et $\mathrm{J} = \{y_j\}$ pour les segments horizontaux ; les ensembles réduits aux sommets (x_i, y_j) sont les produits $\{x_i\} \times \{y_j\}$, et toute fonction en escalier φ telle que π soit adaptée à φ est combinaison linéaire des fonctions indicatrices de ces divers ensembles produits $\mathrm{I} \times \mathrm{J}$.

Une fonction φ est donc une fonction en escalier si et seulement si φ est une combinaison linéaire de fonctions indicatrices χ_{Q_k} de sous-rectangles $\mathrm{Q}_k \subset \mathrm{P}$, de la forme $\mathrm{Q}_k = \mathrm{I}_k\times\mathrm{J}_k$, où I_k et J_k sont des sous-intervalles de $[a,b]$ et $[c,d]$ respectivement. On note que pour toute fonction en escalier $\varphi(x_1,x_2)$ sur $[a,b]\times[c,d]$, la fonction $x_2 \to \varphi(x_1,x_2)$ est une fonction en escalier sur l'intervalle $[c,d]$, pour tout x_1 fixé dans $[a,b]$. Pour expliquer cette remarque, on considère d'abord la fonction indicatrice d'un rectangle $\mathrm{Q} = \mathrm{I}\times\mathrm{J}$, où I et J sont deux intervalles, contenus respectivement dans $[a,b]$ et dans $[c,d]$. On remarque que

$$\chi_{\mathrm{Q}}(x_1,x_2) = \chi_{\mathrm{I}}(x_1)\,\chi_{\mathrm{J}}(x_2)$$

par conséquent pour x_1 fixé, la fonction $x_2 \to \chi_{\mathrm{Q}}(x_1,x_2)$ est la fonction en escalier $\chi_{\mathrm{I}}(x_1)\,\chi_{\mathrm{J}}$, multiple scalaire de la fonction χ_{J}. Si $\varphi = \sum_k \lambda_k\chi_{\mathrm{Q}_k}$, où $\mathrm{Q}_k = \mathrm{I}_k\times\mathrm{J}_k$, on en déduit que $x_2 \to \varphi(x_1,x_2)$ est la combinaison linéaire $\sum_k \lambda_k\chi_{\mathrm{I}_k}(x_1)\,\chi_{\mathrm{J}_k}$, qui est une fonction en escalier sur $[c,d]$.

On définit l'intégrale des fonctions en escalier de façon naturelle : désignons par $c_{i,j}$ la valeur constante de φ dans le rectangle ouvert $\mathrm{R}_{i,j} =]x_{i-1}, x_i[\times]y_{j-1}, y_j[$. On pose

$$\iint_{\mathrm{P}} \varphi = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})c_{i,j} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}|\mathrm{R}_{i,j}|\,c_{i,j}.$$

En toute rigueur, il faudrait vérifier, comme dans le cas de l'intégrale simple, que cette quantité ne dépend que de φ et pas de la subdivision adaptée particulière.

Proposition 3.1.2 : linéarité et majoration de l'intégrale des fonctions en escalier. *Si φ et ψ sont deux fonctions réelles en escalier sur le pavé borné* P*, on a*

$$\forall\lambda,\mu\in\mathbb{R},\quad \iint_{\mathrm{P}}(\lambda\varphi+\mu\psi) = \lambda\iint_{\mathrm{P}}\varphi + \mu\iint_{\mathrm{P}}\psi\,;$$

$$\Big(\varphi \le \psi \textit{ sur } \mathrm{P}\Big) \Rightarrow \Big(\iint_{\mathrm{P}}\varphi \le \iint_{\mathrm{P}}\psi\Big)\,;\quad \Big|\iint_{\mathrm{P}}\varphi\Big| \le \iint_{\mathrm{P}}|\varphi|.$$

Démonstration. Il suffit de choisir une subdivision σ qui soit adaptée à la fois à la fonction φ et à ψ.

Intégrabilité par encadrement

Définition 3.1.3. Soit f une fonction réelle définie sur le pavé borné P ; on dit que f est *intégrable au sens de Riemann* (nous écrirons en abrégé : R-intégrable) sur P si pour tout nombre réel $\varepsilon > 0$, il existe deux fonctions en escalier φ_1 et φ_2 sur P telles que $\varphi_1 \le f \le \varphi_2$ sur P et

$$\iint_{\mathrm{P}}\varphi_2 - \iint_{\mathrm{P}}\varphi_1 = \iint_{\mathrm{P}}(\varphi_2 - \varphi_1) < \varepsilon.$$

Comme dans le cas de l'intégrale simple, on pose ensuite

$$\iint_{\mathrm{P}} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \sup\{\iint_{\mathrm{P}} \varphi_1 : \varphi_1 \le f\} = \inf\{\iint_{\mathrm{P}} \varphi_2 : \varphi_2 \ge f\}$$

où les fonctions φ_1 et φ_2 sont bien entendu choisies en escalier. Parfois, on notera simplement $\iint_{\mathrm{P}} f$ pour abréger.

Remarque. Si f est Riemann-intégrable sur le pavé borné P, elle est *par définition* bornée sur ce pavé.

Intégrabilité par approximation

Comme dans le cas de l'intégrale simple, il est commode de transformer un peu la caractérisation de l'intégrabilité par encadrement pour obtenir une caractérisation *par approximation en escalier*. On obtient une définition équivalente de l'intégrabilité d'une fonction réelle f définie sur P en disant : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe deux fonctions en escalier φ et ψ sur P telles que

$$|f - \varphi| \le \psi \quad \text{et} \quad \iint_{\mathrm{P}} \psi < \varepsilon.$$

On passe d'une formulation à l'autre comme dans le cas de l'intégrale simple : si on a $\varphi_1 \le f \le \varphi_2$ on pose par exemple $\varphi = \varphi_1$ et $\psi = \varphi_2 - \varphi_1$; si $|f - \varphi| \le \psi$, il suffit de poser $\varphi_1 = \varphi - \psi$, $\varphi_2 = \varphi + \psi$.

Proposition 3.1.4 : linéarité et majoration. *Si f et g sont deux fonctions* R*-intégrables sur le pavé* P*, la fonction $\lambda f + \mu g$ est* R*-intégrable sur* P *pour tous $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ et on a*

$$\iint_{\mathrm{P}} (\lambda f + \mu g) = \lambda \iint_{\mathrm{P}} f + \mu \iint_{\mathrm{P}} g\,;$$

$$\Big(f \le g \textit{ sur } \mathrm{P}\Big) \Rightarrow \Big(\iint_{\mathrm{P}} f \le \iint_{\mathrm{P}} g\Big).$$

De plus, la fonction $(x,y) \to |f(x,y)|$ est R*-intégrable sur* P *et*

$$\Big|\iint_{\mathrm{P}} f\Big| \le \iint_{\mathrm{P}} |f|.$$

Démonstration : la même que pour l'intégrale simple.

Exemples et exercices.

1. Si f est bornée, et si elle est nulle en dehors d'une droite Δ horizontale ou verticale, alors elle est R-intégrable sur tout pavé borné et son intégrale est nulle.
2. Soit $\mathrm{A} = [0,1] \cap \mathbb{Q}$; montrer que la fonction indicatrice de $\mathrm{A} \times \mathrm{A}$ n'est pas R-intégrable sur le carré $[0,1] \times [0,1]$.
3. Soit g une fonction R-intégrable sur $[a,b]$ et posons $f(x,y) = g(x)$ pour tout point $(x,y) \in [a,b] \times [c,d] = \mathrm{P}$. Montrer que f est R-intégrable sur le pavé P.

Proposition 3.1.5. *Soient f_1, f_2 deux fonctions réelles Riemann-intégrables sur le pavé borné* P *; les fonctions $f_1 f_2$, $\max(f_1, f_2)$, $|f_1|$ sont Riemann-intégrables sur* P.

Démonstration par encadrement ou approximation en escalier.

Théorème 3.1.6. *Si f est continue sur $[a,b]\times[c,d]$, elle est* R*-intégrable sur ce rectangle.*

Démonstration par continuité uniforme et approximation en escalier : si f est continue sur le pavé fermé borné P, elle est uniformément continue sur P ; pour tout $\varepsilon > 0$ donné, il existe donc $\eta > 0$ tel que $|f(x,y) - f(x',y')| < \varepsilon$ dès que la distance des points (x,y) et (x',y') est $< \eta$. On choisit alors une subdivision $\pi = (\mathrm{R}_{i,j})$ de P telle que tous les rectangles de P aient un diamètre $< \eta$ (c'est-à-dire que deux points quelconques de $\mathrm{R}_{i,j}$ ont une distance $< \eta$). On prend ensuite un point $\xi_{i,j}$ quelconque dans $\mathrm{R}_{i,j}$, un point quelconque ξ_α dans chaque segment de bordure S_α, et on définit une fonction en escalier φ sur P, égale à $f(\xi_{i,j})$ sur $\mathrm{R}_{i,j}$, pour chaque rectangle $\mathrm{R}_{i,j}$, à $f(\xi_\alpha)$ sur chaque segment de bordure S_α et à $f(x_i,y_j)$ pour chaque sommet (x_i,y_j) des rectangles de π. On a alors $|f - \varphi| < \varepsilon$ sur P, ce qui permet de conclure.

On définira une *subdivision pointée* (π,ξ) en choisissant un point $\xi_{i,j}$ quelconque dans chaque rectangle $\mathrm{R}_{i,j}$ de la subdivision π, pour $i = 1,\ldots,m$ et $j = 1,\ldots,n$. Étant donnée une subdivision pointée (π,ξ), on associe à chaque fonction f définie sur le pavé P la *somme de Riemann* double

$$\Sigma^{(2)}_{\pi,\xi}(f) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})f(\xi_{i,j}) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}|\mathrm{R}_{i,j}|\,f(\xi_{i,j}).$$

On a encore un théorème de Riemann dans ce cadre. On dira que

$$\delta(\pi) = \max\{\delta(\pi_x), \delta(\pi_y)\}$$

est le *pas*, ou le *module* de la subdivision π.

Théorème 3.1.7. *Soit f une fonction à valeurs réelles définie sur le pavé borné* P *; si la fonction f est Riemann-intégrable sur* P*, alors pour tout nombre réel $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que pour toute subdivision pointée (π,ξ) de* P *telle que $\delta(\pi) < \eta$ on ait*

$$\Bigl|\Sigma^{(2)}_{\pi,\xi}(f) - \iint_{\mathrm{P}} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\Bigr| < \varepsilon.$$

Autrement dit, les sommes de Riemann convergent vers l'intégrale de f lorsque le pas de la subdivision tend vers 0.

Calcul des intégrales doubles

Lemme. *Soit φ une fonction en escalier sur le pavé borné $\mathrm{P} = [a,b]\times[c,d]$, à valeurs réelles ; pour tout x_1 fixé dans $[a,b]$, la fonction $x_2 \to \varphi(x_1,x_2)$ est en escalier sur $[c,d]$, et la fonction $x_1 \to \int_c^d \varphi(x_1,x_2)\,\mathrm{d}x_2$ est en escalier sur $[a,b]$. De plus,*

$$\iint_{\mathrm{P}} \varphi = \int_a^b \left(\int_c^d \varphi(x_1,x_2)\,\mathrm{d}x_2\right)\mathrm{d}x_1.$$

Démonstration. On a déjà noté que pour toute fonction en escalier $\varphi(x_1,x_2)$ sur le pavé $[a,b]\times[c,d]$, la fonction $x_2 \to \varphi(x_1,x_2)$ est une fonction en escalier sur l'intervalle $[c,d]$, pour tout x_1 fixé dans $[a,b]$. Par linéarité de l'intégrale, il suffit de montrer le résultat lorsque $\varphi = \chi_{\mathrm{Q}}$, où Q est un rectangle $\mathrm{I}\times\mathrm{J}$ contenu dans P, avec $\mathrm{I} = |\alpha,\beta|$ et $\mathrm{J} = |\gamma,\delta|$. On a alors $|\alpha,\beta| \subset [a,b]$, $|\gamma,\delta| \subset [c,d]$ et

$$\int_c^d \chi_{\mathrm{Q}}(x_1,x_2)\,\mathrm{d}x_2 = \chi_{\mathrm{I}}(x_1)\int_c^d \chi_{\mathrm{J}}(x_2)\,\mathrm{d}x_2 = (\delta-\gamma)\chi_{\mathrm{I}}(x_1),$$

et en tant que fonction de x_1, l'intégrale en x_2 est bien une fonction en escalier. Ensuite

$$\int_a^b (\delta-\gamma)\chi_{\mathrm{I}}(x_1)\,\mathrm{d}x_1 = (\delta-\gamma)(\beta-\alpha) = |\mathrm{Q}| = \iint_{\mathrm{P}} \chi_{\mathrm{Q}}.$$

Le résultat précédent, généralisé convenablement, est l'outil fondamental pour le calcul des intégrales doubles.

Théorème 3.1.8 (calcul des intégrales doubles). *Soit f une fonction à valeurs réelles Riemann-intégrable sur le pavé borné $\mathrm{P} = [a,b]\times[c,d]$ et telle que pour tout $x_1 \in [a,b]$, la fonction partielle $x_2 \to f(x_1,x_2)$ soit Riemann-intégrable sur $[c,d]$; alors la fonction $x_1 \to \int_c^d f(x_1,x_2)\,\mathrm{d}x_2$ est Riemann-intégrable sur $[a,b]$ et on a*

$$\iint_{\mathrm{P}} f = \int_a^b \left(\int_c^d f(x_1,x_2)\,\mathrm{d}x_2\right)\mathrm{d}x_1.$$

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$ donné ; il existe deux fonctions en escalier φ_1 et φ_2 sur le pavé P telles que $\varphi_1 \le f \le \varphi_2$ sur P et $\iint_{\mathrm{P}}(\varphi_2-\varphi_1) < \varepsilon$. Il résulte de l'encadrement que pour tout $x_1 \in [a,b]$, on a

$$\Phi_1(x_1) = \int_c^d \varphi_1(x_1,x_2)\,\mathrm{d}x_2 \le \mathrm{F}(x_1) = \int_c^d f(x_1,x_2)\,\mathrm{d}x_2 \le \Phi_2(x_1) = \int_c^d \varphi_2(x_1,x_2)\,\mathrm{d}x_2.$$

On sait d'après le lemme précédent que $\int_a^b(\Phi_2-\Phi_1) = \iint_{\mathrm{P}}(\varphi_2-\varphi_1) < \varepsilon$ et que Φ_1, Φ_2 sont en escalier, et on vient de dire que $\Phi_1 \le \mathrm{F} \le \Phi_2$. Comme ε est arbitraire, tout ceci montre que F est intégrable sur $[a,b]$, et

$$\iint_{\mathrm{P}} \varphi_1 = \int_a^b \Phi_1 \le \int_a^b \mathrm{F} \le \int_a^b \Phi_2 = \iint_{\mathrm{P}} \varphi_2,$$

donc puisqu'on a aussi $\iint_{\mathrm{P}} \varphi_1 \le \iint_{\mathrm{P}} f \le \iint_{\mathrm{P}} \varphi_2$,

$$\Big|\iint_{\mathrm{P}} f - \int_a^b \mathrm{F}\Big| < \varepsilon.$$

Puisque ε est arbitraire, il en résulte que $\iint_{\mathrm{P}} f = \int_a^b \mathrm{F}$.

Exemple. Supposons que g, h soient deux fonctions réelles d'une seule variable, Riemann-intégrables respectivement sur $[a,b]$ et $[c,d]$. Définissons une fonction f sur $[a,b]\times[c,d]$ en posant $f(x,y) = g(x)h(y)$. Alors f est intégrable sur P et

$$\iint_{\mathrm{P}} g(x)h(y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \Big(\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x\Big)\Big(\int_c^d h(y)\,\mathrm{d}y\Big).$$

Remarque. Bien entendu, il existe un théorème analogue obtenu en échangeant les rôles de x_1 et x_2 dans l'énoncé précédent. Si la fonction f vérifie les hypothèses dans les deux cas, on en déduit le *théorème d'interversion* des ordres d'intégration,

$$\int_a^b \Big(\int_c^d f(x_1,x_2)\,\mathrm{d}x_2\Big)\mathrm{d}x_1 = \int_c^d \Big(\int_a^b f(x_1,x_2)\,\mathrm{d}x_1\Big)\mathrm{d}x_2.$$

Dans certains exemples, l'une des directions est calculable facilement (par calcul de primitive par exemple) alors que l'autre ne l'est pas.

Un cas particulier d'application du théorème précédent 3.1.8 est celui où la fonction f est continue sur $\mathrm{P} = [a,b] \times [c,d]$. Dans ce cas, on sait que la fonction f est R-intégrable sur P et toutes les fonctions $x_1 \to f(x_1,x_2)$ ou $x_2 \to f(x_1,x_2)$ sont continues, donc R-intégrables, donc la formule du théorème s'applique, dans les deux sens, à toute fonction continue sur P. On a donc toujours dans ce cas la propriété d'interversion des ordres d'intégration :

Corollaire 3.1.9. *Soit f une fonction à valeurs réelles, continue sur le pavé borné $\mathrm{P} = [a,b] \times [c,d]$; la fonction f est Riemann-intégrable sur P et on a*

$$\int_a^b \Big(\int_c^d f(x_1,x_2)\,\mathrm{d}x_2\Big)\,\mathrm{d}x_1 = \iint_{\mathrm{P}} f = \int_c^d \Big(\int_a^b f(x_1,x_2)\,\mathrm{d}x_1\Big)\,\mathrm{d}x_2.$$

Exercices.

1. Calculer le volume de la sphère de rayon r dans $\mathbb{R}^3$, en intégrant $\sqrt{r^2 - x^2 - y^2}$ sur un disque de rayon r dans $\mathbb{R}^2$.

2. Soit f une fonction de classe C^2 sur le rectangle $\mathrm{P} = [a,b] \times [c,d]$; calculer

$$\iint_{\mathrm{P}} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

Inversement, étant donnée g continue, on définit une fonction G par

$$\mathrm{G}(x,y) = \iint_{[a,x]\times[b,y]} g(s,t)\,\mathrm{d}s\mathrm{d}t\,; \quad \text{calculer } \ \frac{\partial^2 \mathrm{G}}{\partial x \partial y}\cdot$$

3. Calculer

$$\iint_{\mathrm{P}} \mathrm{e}^{-xt} \sin x\,\mathrm{d}x\mathrm{d}t$$

sur le rectangle $\mathrm{P} = [0,\mathrm{A}] \times [0,\mathrm{B}]$ et en déduire la valeur de $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$ en faisant tendre A et B vers $+\infty$.

Une application. Dérivée d'intégrales dépendant d'un paramètre

Supposons donnée une fonction réelle f, définie et continue sur $[a,b] \times \mathrm{I}$, où I est un intervalle de $\mathbb{R}$. Posons pour $\lambda \in \mathrm{I}$

$$\mathrm{F}(\lambda) = \int_a^b f(x,\lambda)\,\mathrm{d}x.$$

On a vu au théorème 1.1.11 que la fonction F est continue sur l'intervalle I. On va s'occuper maintenant d'une question plus délicate, la dérivabilité de la fonction F ; on supposera ici que I est un intervalle ouvert.

Proposition 3.1.10. *Supposons que f, définie et continue sur $[a,b] \times \mathrm{I}$, admette une dérivée partielle $\dfrac{\partial f}{\partial \lambda}$ continue sur $[a,b] \times \mathrm{I}$. La fonction F est alors dérivable sur l'intervalle I, et*

$$\frac{\mathrm{dF}}{\mathrm{d}\lambda}(\lambda_0) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial \lambda}(x,\lambda_0)\,\mathrm{d}x$$

pour tout $\lambda_0 \in \mathrm{I}$.

Démonstration. Remarquons d'abord que

$$\mathrm{G}(\lambda) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial \lambda}(x, \lambda)\,\mathrm{d}x$$

est une fonction continue sur I d'après le paragraphe précédent. Considérons comme avant un intervalle fermé $[c, d]$ contenu dans I. Pour tout $\lambda \in [c, d]$, on obtient en calculant l'intégrale double de $\dfrac{\partial f}{\partial \lambda}$ sur le rectangle $[a, b] \times [c, \lambda]$

$$\int_c^\lambda \Big(\int_a^b \frac{\partial f}{\partial \lambda}(x, t)\,\mathrm{d}x\Big)\,\mathrm{d}t = \int_a^b \Big(\int_c^\lambda \frac{\partial f}{\partial \lambda}(x, t)\,\mathrm{d}t\Big)\,\mathrm{d}x =$$

$$\int_a^b \big(f(x, \lambda) - f(x, c)\big)\,\mathrm{d}x = \mathrm{F}(\lambda) - \mathrm{F}(c)$$

d'où le résultat, puisqu'on a montré que

$$\mathrm{F}(\lambda) = \mathrm{F}(c) + \int_c^\lambda \mathrm{G}(t)\,\mathrm{d}t$$

pour tout $\lambda \in \mathrm{I}$ tel que $\lambda > c$.

Remarque. Si I n'est pas ouvert, par exemple si $\mathrm{I} = [c, d]$, on peut voir que F admet $\mathrm{G}(c)$ pour dérivée à droite au point c.

Il existe de nombreuses variations possibles pour des énoncés concernant la dérivabilité des intégrales généralisées dépendant d'un paramètre. On se contentera d'un cas simple qui n'utilise que les résultats sur les séries de fonctions normalement convergentes. On considère des intégrales généralisées, soit sur un intervalle borné semi-ouvert $[a, b[$, soit sur $[a, +\infty[$. Pour unifier la notation, on désignera par c soit un nombre fini $> a$, soit $c = +\infty$.

Proposition 3.1.11. *On suppose donnée une fonction* $g \geq 0$ *sur* $[a, c[$, *telle que son intégrale généralisée soit (absolument) convergente,*

$$\int_a^c g(x)\,\mathrm{d}x < +\infty.$$

On suppose que la fonction f *est définie et continue sur* $[a, c[\times \mathrm{I}$, *admet une dérivée partielle* $\dfrac{\partial f}{\partial \lambda}$ *continue sur* $[a, b] \times \mathrm{I}$ *et telle que pour tout* $(x, \lambda) \in [a, c[\times \mathrm{I}$ *on ait*

$$\Big|\frac{\partial f}{\partial \lambda}(x, \lambda)\Big| \leq g(x).$$

On suppose aussi que l'intégrale $\int_a^c f(x, \lambda)\,\mathrm{d}x$ *converge pour tout* $\lambda \in \mathrm{I}$. *Sous ces conditions la fonction* F *définie sur* I *par*

$$\mathrm{F}(\lambda) = \int_a^c f(x, \lambda)\,\mathrm{d}x$$

est une fonction dérivable sur l'intervalle I, *et*

$$\mathrm{F}'(\lambda) = \int_a^c \frac{\partial f}{\partial \lambda}(x, \lambda)\,\mathrm{d}x.$$

Démonstration. On introduit une suite (a_n) strictement croissante, qui tend vers c, et telle que $a_0 = a$. Pour toute fonction h dont l'intégrale généralisée sur $[a, c[$ est convergente, on peut écrire

$$\int_a^c h(x)\,\mathrm{d}x = \lim_n \int_{a_0}^{a_n} h(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{a_n}^{b_n} h(x)\,\mathrm{d}x,$$

où on a posé $b_n = a_{n+1}$. Posons

$$u_n(\lambda) = \int_{a_n}^{b_n} f(x, \lambda)\,\mathrm{d}x.$$

D'après les résultats précédents, on sait que chacune des fonctions (u_n) est dérivable sur l'intervalle I, avec

$$u_n'(\lambda) = \int_{a_n}^{b_n} \frac{\partial f}{\partial \lambda}(x, \lambda)\,\mathrm{d}x.$$

D'autre part, pour tout $\lambda \in \mathrm{I}$,

$$|u_n'(\lambda)| \le \int_{a_n}^{b_n} \Bigl|\frac{\partial f}{\partial \lambda}\Bigr|(x, \lambda)\,\mathrm{d}x \le \int_{a_n}^{b_n} g(x)\,\mathrm{d}x = v_n,$$

et la série numérique positive $\sum v_n$ converge puisque l'intégrale généralisée de g est finie. La série de fonctions $\sum u_n'()$ est donc normalement convergente sur I. Il en résulte que la fonction somme de la série est dérivable, sa dérivée étant égale à la fonction somme de la série dérivée. Or

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(\lambda) = \int_a^c f(x, \lambda)\,\mathrm{d}x = \mathrm{F}(\lambda)$$

et

$$\mathrm{F}'(\lambda) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n'(\lambda) = \int_a^c \frac{\partial f}{\partial \lambda}(x, \lambda)\,\mathrm{d}x.$$

Un exemple : la fonction Γ. On pose pour tout $s > 0$

$$\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} x^{s-1}\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x.$$

Dans le cas $0 < s < 1$, il s'agit d'une intégrale généralisée avec deux problèmes de convergence, en 0 et en $+\infty$. On voit que $\Gamma(1) = 1$. Une intégration par parties donne la relation fondamentale $\Gamma(t+1) = t\,\Gamma(t)$, d'où il résulte que $\Gamma(2) = 1.\Gamma(1) = 1$, $\Gamma(3) = 2\Gamma(2) = 2$, et de proche en proche on obtient que $\Gamma(n) = (n-1)!$ On voit aussi que $\Gamma(t)$ tend vers $+\infty$ lorsque $t \to 0$; en effet,

$$\Gamma(t) \ge \int_0^1 x^{t-1}\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x \ge \mathrm{e}^{-1} \int_0^1 x^{t-1}\,\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{e}^{-1}}{t}\cdot$$

On va montrer que Γ est dérivable en tout point $s > 0$. Il suffit de trouver un intervalle $\mathrm{I} =]c, d[$ contenant s tel que la proposition précédente soit applicable à $]0, +\infty[\times[c, d]$. Étant donné $s > 0$, on choisit c, d tels que $0 < c < s < d$. On voit que $x^{s-1} \le x^{c-1}$ pour $0 < x < 1$ et $x^{s-1} \le x^{d-1}$ pour $x \ge 1$. Pour tout $s \in]c, d[$ on peut donc majorer la fonction

$$\frac{\partial f}{\partial s}(x, s) = x^{s-1} \ln x \, \mathrm{e}^{-x}$$

par la fonction d'une seule variable g définie par

$$g(x) = |\ln x| \, x^{c-1} \, \mathrm{e}^{-x} \ \text{ si } 0 < x \le 1, \quad g(x) = |\ln x| \, x^{d-1} \, \mathrm{e}^{-x} \ \text{ si } x > 1.$$

On vérifie facilement que cette fonction g est « intégrable » sur $]0, +\infty[$, ce qui achève la vérification. On montrera avec des arguments similaires que Γ est indéfiniment dérivable. Par exemple,

$$\Gamma''(t) = \int_0^{+\infty} (\ln x)^2 x^{t-1} \, \mathrm{e}^{-x} \, \mathrm{d}x,$$

ce qui montre que la dérivée seconde est > 0 sur $]0, +\infty[$. La fonction Γ est donc (strictement) convexe. Puisqu'elle tend vers $+\infty$ en 0 et en $+\infty$, elle admet un minimum unique, qui est situé entre 1 et 2 (puisque $\Gamma(1) = \Gamma(2) = 1$). Les tables numériques donnent ce minimum t_0 un peu au dessous de $3/2$, à savoir $t_0 \simeq 1,46$..

On verra plus loin que

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2/2} \, \mathrm{d}x = \sqrt{\pi/2}.$$

Le changement de variable $u = x^2/2$ donne $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$, et la relation de récurrence de la fonction Γ donne $\Gamma(3/2) = \sqrt{\pi}/2$, valeur proche du minimum.

Ensembles quarrables

Avant de donner la définition, on va introduire une convention de notation commode. Supposons que f soit une fonction définie sur $\mathbb{R}^2$, mais nulle en dehors d'un pavé borné P, et R-intégrable sur ce pavé P. Pour tout pavé borné Q contenant P, on aura alors que f est R-intégrable sur Q et que $\iint_{\mathrm{Q}} f = \iint_{\mathrm{P}} f$. On posera donc simplement $\iint f$ pour représenter l'intégrale sur n'importe quel pavé assez grand pour que f soit identiquement nulle en dehors. On dira que f est R-*intégrable à support borné*.

Définition 3.1.12. On dit qu'un ensemble $\mathrm{A} \subset \mathbb{R}^2$ est *quarrable* si A est un ensemble borné et si la fonction indicatrice χ_{A} est R-intégrable (à support borné) sur $\mathbb{R}^2$. On définit alors *l'aire* ou *surface* de l'ensemble A, qu'on notera $|\mathrm{A}|$, par

$$|\mathrm{A}| = \iint \chi_{\mathrm{A}}(x, y) \, \mathrm{d}x \mathrm{d}y.$$

Exemples simples d'ensembles quarrables.

Proposition. *Soit g une fonction positive sur $[a, b]$ et* R-*intégrable ; l'ensemble*

$$\mathrm{A} = \{(x, y) : a \le x \le b, \ 0 \le y \le g(x)\}$$

est un ensemble quarrable, et

$$|\mathrm{A}| = \int_a^b g(x) \, \mathrm{d}x.$$

Soit en effet $\varphi_1 \le g \le \varphi_2$ un encadrement de g par deux fonctions en escalier sur $[a, b]$ telles que $\int_a^b (\varphi_2 - \varphi_1) < \varepsilon$. On peut supposer que $0 \le \varphi_1$. On a alors un encadrement d'ensembles $\mathrm{B}_1 \subset \mathrm{A} \subset \mathrm{B}_2$ où on a posé $\mathrm{B}_j = \{(x, y) : a \le x \le b,\ 0 \le y \le \varphi_j(x)\}$ pour $j = 1, 2$. Les ensembles B_1 et B_2 sont des unions finies de rectangles, et on vérifie facilement que $\iint \chi_{\mathrm{B}_j} = \int_a^b \varphi_j$. On a obtenu un encadrement de χ_A entre χ_{B_1} et χ_{B_2}, et ces deux fonctions en escalier ont des intégrales aussi voisines que souhaité, donc χ_A est intégrable et

$$\iint \chi_\mathrm{A} = \int_a^b g.$$

On obtient des résultats similaires si la fonction g est négative, ou bien si on déplace ou échange les axes. En appliquant ce principe plusieurs fois à des découpages convenables, on voit que la plupart des ensembles A limités par des courbes d'équations raisonnables sont quarrables (disques, polygones, etc. . .).

Intégrale sur un sous-ensemble

Soit A un ensemble quarrable et soit f une fonction définie sur A ; soit P un pavé borné contenant A ; désignons (de façon un peu incorrecte) par $\chi_\mathrm{A} f$ la fonction égale à f sur A et à 0 en dehors de A. On dira que f est intégrable sur A si $\chi_\mathrm{A} f$ est intégrable sur $\mathbb{R}^2$, et on posera

$$\iint_\mathrm{A} f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint \chi_\mathrm{A} f.$$

3.2. Changement de variable. Coordonnées polaires

Soient U et V deux ouverts quarrables de $\mathbb{R}^2$ et T une application bijective de U sur V, qui soit de classe C^1 ainsi que la bijection inverse (il en résulte en particulier que la différentielle dT_x est inversible en tout point $x \in \mathrm{U}$) ; si f est une fonction réelle R-intégrable sur l'ensemble V, on a la formule de changement de variables

$$\iint_\mathrm{V} f(v)\,\mathrm{d}v_1\mathrm{d}v_2 = \iint_\mathrm{U} f(\mathrm{T}(u))\,|\det(\mathrm{dT}_u)|\,\mathrm{d}u_1\mathrm{d}u_2.$$

On va essayer d'expliquer (très vaguement) le cas où T est une transformation linéaire bijective. Le point crucial est de se rappeler que si Q est un parallélogramme, la surface (orientée) de l'image T(Q) est égale à celle de Q multipliée par le déterminant de T. De plus, si T est linéaire, sa différentielle dT_u en tout point $u \in \mathrm{U}$ est égale à T, donc le déterminant jacobien de la formule ci-dessus est constamment égal à $\det \mathrm{T}$ dans le cas linéaire.

On va découper l'intégrale double en petits bouts et appliquer la remarque précédente à chaque petit bout. Puisque l'ouvert V est quarrable, on peut « l'approcher » par une famille de pavés R_k deux à disjoints ; on choisit ensuite un point ξ_k dans R_k, et on a

$$\iint_\mathrm{V} f \sim \sum_k |\mathrm{R}_k| f(\xi_k)$$

si le découpage est assez fin. On a alors une approximation de U par la famille de parallélogrammes $\mathrm{P}_k = \mathrm{T}^{-1}(\mathrm{R}_k)$, et une approximation de la fonction g définie sur U par $g(u) = f(\mathrm{T}(u))$ par $\sum_k \chi_{\mathrm{P}_k} f(\xi_k) = \sum_k \chi_{\mathrm{P}_k} g(\xi'_k)$, où $\xi'_k = \mathrm{T}^{-1}(\xi_k)$. On en déduit

$$\iint_{\mathrm{U}} f(\mathrm{T}(u)) \sim \sum_k |\mathrm{P}_k| f(\xi_k),$$

et on conclut par le fait que $|\mathrm{R}_k| = |\det \mathrm{T}|\,|\mathrm{P}_k|$ pour tout k.

Un autre cas raisonnablement facile est celui où la transformation est de la forme $\mathrm{T}(u_1, u_2) = (\mathrm{S}(u_1, u_2), u_2)$. Dans ce cas la formule de calcul des intégrales doubles permet de ramener le théorème à un changement de variable dans une intégrale simple. Certains changements complexes peuvent se ramener à une composition de plusieurs changements de ce type plus simple. C'est le cas par exemple pour les coordonnées polaires qui sont examinées au paragraphe suivant : pour obtenir le demi-plan $\mathrm{V} = \{(x,y) : x > 0\}$, on peut commencer par le changement bijectif $(r,\theta) \to (r,y)$, considéré sur le domaine $\mathrm{U} = \{(r,\theta) : r > 0,\ -\pi/2 < \theta < \pi/2\}$ suivi du changement $(r,y) \to (x,y)$.

Coordonnées polaires

On pose

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta,$$

où (x,y) varie dans l'ouvert $\mathrm{V} = \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,0) : x \le 0\}$ et (r,θ) dans l'ensemble ouvert $\mathrm{U} =]0,+\infty[\, \times\,]-\pi,\pi[$. On a ici $\mathrm{T}(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$. Le déterminant jacobien de T au point $(r,\theta) \in \mathrm{U}$ est égal à r, donc $\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ est remplacé par $r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta$.

Développons un exemple hyper-classique, le calcul de l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2/2}\,\mathrm{d}x$ par l'intermédiaire du calcul de l'intégrale double de la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par la formule $f(x,y) = \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)/2}$. On calcule d'abord l'intégrale de la fonction f sur le disque de rayon R

$$\mathrm{D}_\mathrm{R} = \{(x,y) : x^2 + y^2 \le \mathrm{R}^2\}.$$

On obtient par changement de variable polaire

$$\iint_{\mathrm{D}_\mathrm{R}} f = \int_{-\pi}^{\pi} \Bigl(\int_0^{\mathrm{R}} \mathrm{e}^{-r^2/2}\, r\,\mathrm{d}r\Bigr)\mathrm{d}\theta = 2\pi(1 - \mathrm{e}^{-\mathrm{R}^2/2}).$$

On compare cette intégrale à l'intégrale de la fonction f sur les carrés

$$\mathrm{C}_\mathrm{R} = \{(x,y) : |x| \le \mathrm{R}\,;\ |y| \le \mathrm{R}\},$$

qui est égale à $\bigl(\int_{-\mathrm{R}}^{\mathrm{R}} \mathrm{e}^{-x^2/2}\,\mathrm{d}x\bigr)^2$, et en encadrant $\mathrm{D}_\mathrm{R} \subset \mathrm{C}_\mathrm{R} \subset \mathrm{D}_{\mathrm{R}\sqrt{2}}$ puis en passant à la limite quand $\mathrm{R} \to +\infty$, on obtient

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2/2}\ \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{2\pi}} = 1.$$

Cette fonction est appelée *fonction gaussienne* et l'intégrale correspondante *intégrale gaussienne*. Elles jouent un très grand rôle en probabilités et en statistiques.

3.3. Compléments, applications

Intégrale triple

La théorie se développe de façon tout à fait analogue à celle de l'intégrale double. On a en particulier un théorème de calcul des intégrales triples par trois intégrations simples successives. En particulier, si f est une fonction continue sur un cube $\mathrm{C} = [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3]$, on a

$$\iiint_{\mathrm{C}} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_{a_1}^{b_1} \Big(\int_{a_2}^{b_2} \Big(\int_{a_3}^{b_3} f(x,y,z)\,\mathrm{d}z \Big) \mathrm{d}y \Big) \mathrm{d}x.$$

On définit aussi des ensembles « cubables » dans $\mathbb{R}^3$, qui sont les ensembles dont on peut calculer le volume par l'intégrale de Riemann triple de leur fonction indicatrice.

On peut aussi généraliser toute la théorie à $\mathbb{R}^n$.

Longueur d'un arc

Soit $\varphi : [0, \mathrm{T}] \to \mathbb{R}^2$ un arc de courbe paramétré ; si la quantité

$$\mathrm{L}_\mathrm{N} = \sum_{k=1}^{\mathrm{N}} \left\| \varphi\left(k\frac{\mathrm{T}}{\mathrm{N}}\right) - \varphi\left((k-1)\frac{\mathrm{T}}{\mathrm{N}}\right) \right\|$$

tend vers une limite L quand $\mathrm{N} \to \infty$, on dit que L est la longueur de l'arc de courbe (la norme utilisée est la norme usuelle sur $\mathbb{R}^2$). Si φ est de classe C^1, on montre que la limite existe et que

$$\mathrm{L} = \int_0^{\mathrm{T}} \|\varphi'(t)\|\,\mathrm{d}t.$$

Exercice. Calculer la longueur d'une arche de cycloïde, paramétrée par $x = \mathrm{R}(\theta - \sin(\theta))$, $y = \mathrm{R}(1 - \cos(\theta))$, lorsque θ varie de 0 à 2π.

Volumes et aires de révolution

On considère le volume limité par la surface d'équation

$$r = f(z)$$

en coordonnées cylindriques, où $f \geq 0$ est définie pour z entre deux « altitudes » z_0 et z_1, avec $z_0 < z_1$ et par les deux plans horizontaux $z = z_0$ et $z = z_1$. Le volume limité par cette surface et par les deux plans d'altitude $z = z_1$ et $z = z_2$ est donné par la formule

$$\mathrm{V} = \pi \int_{z_0}^{z_1} (f(z))^2\,\mathrm{d}z.$$

Pour comprendre cette formule, il faut imaginer qu'on découpe le volume en petites tranches circulaires découpées par les plans horizontaux d'altitudes z et $z + dz$.

Exemple simple : calculer le volume de la sphère.

Surface de révolution

Dans la même situation que ci-dessus, on peut s'intéresser à la surface de l'objet précédent (sans tenir compte des surfaces des deux « bases », c'est-à-dire des deux sections aux altitudes z_1 et z_2). On obtient la formule

$$\mathrm{A} = 2\pi \int_{z_0}^{z_1} f(z)\sqrt{1 + (f'(z))^2}\,\mathrm{d}z.$$

Exemple : calculer la surface d'une tranche de sphère, entre deux altitudes z_0 et z_1. Qu'observez-vous ?

Chapitre 4. Formes quadratiques

Dans ce chapitre, on désignera par E un espace vectoriel sur un corps $\mathbb{K}$; pour l'essentiel, le lecteur pourra considérer que $\mathbb{K}$ sera égal à $\mathbb{R}$ ou à $\mathbb{C}$; l'amateur de mathématiques pourra néanmoins observer avec intérêt que la plupart des résultats sont valables pour un corps $\mathbb{K}$ (presque) quelconque ; on se risquera une fois ou deux à des allusions à des cas plus exotiques, en particulier au cas du corps à deux éléments $\mathbb{K} = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, pour lequel justement certaines des méthodes qui seront développées pour les formes quadratiques *ne marchent pas*.

4.1. Formes bilinéaires

Une *application bilinéaire* est une application f définie sur le produit $\mathrm{E} \times \mathrm{F}$ de deux espaces vectoriels, à valeurs dans un troisième espace vectoriel G, et telle que pour tous $x_0 \in \mathrm{E}$ et $y_0 \in \mathrm{F}$ fixés, les applications $x \to f(x, y_0)$ et $y \to f(x_0, y)$ soient linéaires, respectivement de E dans G et de F dans G. On va surtout étudier le cas des *formes bilinéaires*, c'est-à-dire le cas où $\mathrm{G} = \mathbb{K}$.

Définition 4.1.1. Soient E et F deux espaces vectoriels sur le même corps $\mathbb{K}$; on dit qu'une application φ de $\mathrm{E} \times \mathrm{F}$ dans $\mathbb{K}$ est une *forme bilinéaire* sur $\mathrm{E} \times \mathrm{F}$ si

— pour tout $x_0 \in \mathrm{E}$ fixé, l'application $y \to \varphi(x_0, y)$ est linéaire de F dans $\mathbb{K}$,
— pour tout $y_0 \in \mathrm{F}$ fixé, l'application $x \to \varphi(x, y_0)$ est linéaire de E dans $\mathbb{K}$.

Exemples.

1. L'application φ définie par $\varphi(x, y) = xy$ est une forme bilinéaire sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Plus généralement, si ℓ_1 est une forme linéaire sur E et ℓ_2 une forme linéaire sur F, l'application φ définie par $\varphi(x, y) = \ell_1(x)\ell_2(y)$ est une forme bilinéaire sur $\mathrm{E} \times \mathrm{F}$.

2. Si E désigne l'espace des fonctions réelles continues sur $[0, 1]$, on peut définir sur $\mathrm{E} \times \mathrm{E}$ la forme bilinéaire φ

$$\varphi(f, g) = \int_0^1 f(t)g(t)\,\mathrm{d}t.$$

3. Sur $\mathbb{R}^n$, on a la forme bilinéaire usuelle donnée par le produit scalaire,

$$\varphi(x, y) = x \cdot y = x_1y_1 + \cdots + x_ny_n.$$

4. Si $v = (x, y, z, t)$ et $v' = (x', y', z', t')$ sont deux éléments de $\mathbb{R}^4$, posons

$$\varphi(v, v') = xx' + yy' + zz' - tt'.$$

On définit ainsi une forme bilinéaire sur $\mathbb{R}^4$, qu'on qualifie d'*hyperbolique*. Cette forme bilinéaire met en évidence des phénomènes intéressants que nous étudierons plus loin. Elle joue un rôle dans la théorie de la relativité restreinte.

5. Forme bilinéaire canonique sur $\mathrm{E}^* \times \mathrm{E}$: on pose pour tous $x^* \in \mathrm{E}^*$ et $x \in \mathrm{E}$

$$\varphi(x^*, x) = x^*(x).$$

6. Si φ est une forme bilinéaire sur $\mathrm{E} \times \mathrm{F}$, l'application $\widetilde{\varphi}$ définie sur $\mathrm{F} \times \mathrm{E}$ par $\widetilde{\varphi}(y, x) = \varphi(x, y)$ est bilinéaire sur $\mathrm{F} \times \mathrm{E}$.

7. Si u est une application linéaire de F dans E^*, on peut définir une forme bilinéaire sur $\mathrm{E} \times \mathrm{F}$ en posant pour tout couple $(x, y) \in \mathrm{E} \times \mathrm{F}$

$$\varphi(x, y) = u(y)(x).$$

Remarque. Application linéaire $\mathrm{D}_\varphi : \mathrm{F} \to \mathrm{E}^*$ associée à φ (à droite) : l'exemple 7 ci-dessus est tout à fait général. Supposons en effet donnée une forme bilinéaire φ sur $\mathrm{E} \times \mathrm{F}$. À tout vecteur $y \in \mathrm{F}$ fixé, associons une forme linéaire $f(y) \in \mathrm{E}^*$, définie sur E par la formule

$$f(y)(x) = \varphi(x, y),$$

c'est-à-dire que $f(y)$ est l'application linéaire $x \to \varphi(x, y)$ de E dans $\mathbb{K}$. L'application $y \to f(y)$ est alors linéaire de F dans E^*. On posera $f = \mathrm{D}_\varphi$. Sa relation de définition est donc

$$\forall x \in \mathrm{E}, \forall y \in \mathrm{F}, \quad (\mathrm{D}_\varphi(y))(x) = \varphi(x, y).$$

La forme bilinéaire définie à partir de D_φ par la méthode de l'exemple 7 est égale à φ.

En d'autres termes, l'espace vectoriel $\mathrm{B}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$ des formes bilinéaires sur $\mathrm{E} \times \mathrm{F}$ est isomorphe à l'espace $\mathcal{L}(\mathrm{F}, \mathrm{E}^*)$ des applications linéaires de F dans E^*. Si on échange le rôle des variables, on voit que $\mathrm{B}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$ est aussi isomorphe à $\mathrm{B}(\mathrm{F}, \mathrm{E})$, donc à $\mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F}^*)$.

Exemple. Pour la forme bilinéaire canonique sur $\mathrm{E}^* \times \mathrm{E}$ de l'exemple 5, l'application D_φ de E dans $(\mathrm{E}^*)^* = \mathrm{E}^{**}$ est l'application « canonique » j_E de E dans son bidual, qui est injective. Dans cet exemple, si la dimension de E est finie, l'application D_φ est donc un isomorphisme de E sur E^{**}.

Cas de la dimension finie. Matrice d'une forme bilinéaire par rapport à deux bases

On suppose que E et F sont de dimensions finies m et n, que $\mathbf{e}$ est une base de E et $\mathbf{f}$ une base de F. Une forme bilinéaire φ sur $\mathrm{E} \times \mathrm{F}$ est complètement connue si on connaît toutes les valeurs des $\varphi(e_i, f_j)$, pour $i = 1, \ldots, m$ et $j = 1, \ldots, n$. En effet, si $x = \sum_{i=1}^m a_i e_i \in \mathrm{E}$ et $y = \sum_{j=1}^n b_j f_j \in \mathrm{F}$, on obtiendra en développant par bilinéarité

$$\varphi(x, y) = \sum_{i,j} \varphi(e_i, f_j)\, a_i b_j.$$

On introduit la matrice Φ de la forme bilinéaire par rapport aux bases $\mathbf{e}$ et $\mathbf{f}$, en posant

$$\Phi_{i,j} = \varphi(e_i, f_j).$$

On notera $\Phi = \mathrm{Mat}(\varphi, \mathbf{e}, \mathbf{f})$. Si X est le vecteur colonne des coordonnées de x dans la base $\mathbf{e}$ et Y celui des coordonnées de y dans la base $\mathbf{f}$, on a

$$\varphi(x, y) = {}^t\mathrm{X}\, \Phi\, \mathrm{Y}.$$

La matrice Φ est aussi la matrice de l'application linéaire $\mathrm{D}_\varphi : \mathrm{F} \to \mathrm{E}^*$ par rapport à la base $\mathbf{f}$ de F et à la base duale $\mathbf{e}^*$. En effet, si $\mathrm{B} = \mathrm{mat}(\mathrm{D}_\varphi, \mathbf{f}, \mathbf{e}^*)$, l'élément $\mathrm{B}_{i,j}$ est la i-ième coordonnée dans la base duale $\mathbf{e}^*$ du vecteur image $\mathrm{D}_\varphi(f_j)$, c'est-à-dire

$$\mathrm{B}_{i,j} = (\mathrm{D}_\varphi(f_j))(e_i) = \varphi(e_i, f_j) = \Phi_{i,j}.$$

Il est évident que la matrice de $\widetilde{\varphi}$ (exemple 6) par rapport aux bases $\mathbf{f}$ et $\mathbf{e}$ est la transposée de Φ,

$$\mathrm{Mat}(\widetilde{\varphi}, \mathbf{f}, \mathbf{e}) = {}^t\mathrm{Mat}(\varphi, \mathbf{e}, \mathbf{f}),$$

puisque $\widetilde{\varphi}(f_i, e_j) = \varphi(e_j, f_i) = \Phi_{j,i}$.

Changement de base pour une forme bilinéaire

Supposons que $X = PX'$ et $Y = QY'$ expriment des changements de base dans E et dans F respectivement. On aura alors

$$\varphi(x,y) = {}^t(PX')\,\Phi\,QY' = {}^tX'\,{}^tP\,\Phi\,QY' = {}^tX'\,({}^tP\,\Phi\,Q)Y'$$

ce qui montre que la matrice Φ' dans les nouvelles bases est donnée par

$$\Phi' = {}^tP\,\Phi\,Q.$$

Dans le cas où $E = F$, on choisit le plus souvent de prendre la même base pour les deux côtés. Le changement de base s'exprime alors par $\Phi' = {}^tP\,\Phi\,P$.

Orthogonalité pour une forme bilinéaire

Soient A une partie de E et φ une forme bilinéaire sur $E \times F$; on pose

$$A^{\perp d} = \{y \in F : \forall x \in A, \quad \varphi(x,y) = 0\}.$$

L'ensemble $A^{\perp d}$ est un sous-espace vectoriel de F, même si A ne l'est pas. On convient que l'orthogonal de $A = \emptyset$ est F tout entier. On définit de la même façon l'orthogonal d'une partie B de F : c'est le sous-espace vectoriel $B^{\perp g}$ de E formé de tous les vecteurs $x \in E$ tels que $\varphi(x,y) = 0$ pour tout $y \in B$.

Si $E = F$ et si φ n'est pas symétrique, il faut faire attention à distinguer l'orthogonalité à gauche et à droite ; c'est pour cela que nous avons introduit ces notations un peu lourdes (au lieu de noter $A^\perp$ tout simplement). L'orthogonal de A est égal à l'orthogonal de Vect(A). En particulier, si E_1 est un sous-espace de dimension finie de E muni d'une base $(e_1, \ldots, e_k)$, on voit facilement que l'orthogonal $E_1^{\perp d}$ est égal à

$$E_1^{\perp d} = \{y \in F : \varphi(e_i, y) = 0, \ i = 1, \ldots, k\}.$$

Exemple. L'orthogonal $E^{\perp d}$ de $A = E$ est le sous-espace vectoriel de F formé de tous les vecteurs $y \in F$ tels que l'application $x \to \varphi(x,y)$ soit identiquement nulle sur E : c'est donc le noyau de l'application linéaire D_φ.

On peut calculer la dimension de l'orthogonal d'un sous-espace vectoriel E_1 de E, moyennant une hypothèse simple.

Proposition 4.1.2. *On suppose que φ est une forme bilinéaire sur $E \times F$, où E et F sont de dimension finie. Pour tout sous-espace vectoriel E_1 de E, tel qu'aucun vecteur non nul $x \in E_1$ ne puisse être orthogonal à F tout entier, (c'est-à-dire que $E_1 \cap F^{\perp g} = \{0_E\}$) on a*

$$\dim E_1^{\perp d} = \dim F - \dim E_1.$$

Démonstration. Supposons que E_1 soit de dimension k, muni d'une base $(e_1, \ldots, e_k)$. On a dit que

$$E_1^{\perp d} = \{y \in F : \varphi(e_i, y) = 0, \ i = 1, \ldots, k\}.$$

Pour chaque $i = 1, \ldots, k$, soit ℓ_i la forme linéaire sur F définie par $\ell_i(y) = \varphi(e_i, y)$; on a aussi $E_1^{\perp d} = \{y \in F : \ell_i(y) = 0, \ i = 1, \ldots, k\}$. Si nous savons que $\ell_1, \ldots, \ell_k$ sont indépendantes, on en déduira que $\dim \mathrm{E}_1^{\perp d} = \dim \mathrm{F} - k$ d'après la proposition 4.5.4 du poly de MM3. Supposons donc que $\sum_{i=1}^k c_i \ell_i = 0$, et montrons que $c_1 = \cdots = c_k = 0$. L'équation précédente signifie que

$$0 = \big(\sum_{i=1}^k c_i \ell_i\big)(y) = \sum_{i=1}^k c_i \varphi(e_i, y) = \varphi(\sum_{i=1}^k c_i e_i, y)$$

pour tout $y \in \mathrm{F}$. Le vecteur $x = \sum_{i=1}^k c_i e_i$ est donc un vecteur de E_1 tel que $\varphi(x, y) = 0$ pour tout vecteur y de F, c'est-à-dire que $x \in \mathrm{F}^{\perp g}$. D'après notre hypothèse, il en résulte que $x = 0_{\mathrm{E}}$, donc $c_1 = \cdots = c_k = 0$ puisque $\mathbf{e}$ est une base de E_1. Par conséquent, les formes linéaires $(\ell_i)_{i=1}^k$ sont indépendantes et la démonstration est achevée.

Exercice. En général, $\dim \mathrm{E}_1^{\perp d} + \dim \mathrm{E}_1 = \dim \mathrm{F} + \dim(\mathrm{E}_1 \cap \mathrm{F}^{\perp g})$.

On suppose dans ce paragraphe que les espaces E et F sont *de même dimension finie*, $\dim \mathrm{E} = \dim \mathrm{F} = n > 0$, et on suppose donnée une forme bilinéaire φ sur $\mathrm{E} \times \mathrm{F}$ telle que pour tout $y \neq 0_{\mathrm{F}}$, il existe un vecteur $x \in \mathrm{E}$ tel que $\varphi(x, y) \neq 0$. Cette propriété signifie exactement que $\mathrm{E}^{\perp d} = \{0_{\mathrm{F}}\}$, ce qui équivaut encore à dire que l'application D_φ est injective. Puisque $\dim \mathrm{F} = \dim \mathrm{E} = \dim \mathrm{E}^*$, cela équivaut donc à dire que D_φ est un isomorphisme de F sur E^*. La forme bilinéaire φ vérifie donc l'hypothèse $\mathrm{E}^{\perp d} = \{0_{\mathrm{F}}\}$ si et seulement si sa matrice par rapport à une base de E et une base de F est inversible. On voit qu'alors $\widetilde{\varphi}$ vérifie la même hypothèse, puisque sa matrice dans les bases données est la transposée de celle de φ. Lorsque $\dim \mathrm{F} = \dim \mathrm{E}$, on peut donc encore dire que D_φ est inversible si et seulement si pour tout $x \neq 0_{\mathrm{E}}$, il existe un vecteur $y \in \mathrm{F}$ tel que $\varphi(x, y) \neq 0$, c'est-à-dire que $\mathrm{F}^{\perp g} = \{0_{\mathrm{E}}\}$.

Exemple. On a vu que pour la forme bilinéaire canonique φ sur $\mathrm{E}^* \times \mathrm{E}$ définie dans l'exemple 5, l'application linéaire $\mathrm{D}_\varphi = j_{\mathrm{E}} : \mathrm{E} \to \mathrm{E}^{**}$ est un isomorphisme (c'est l'isomorphisme canonique entre E et son bidual).

Dans le cas où D_φ est bijective, on peut calculer la dimension de l'orthogonal d'un sous-espace quelconque, et obtenir un résultat pour le biorthogonal.

Corollaire 4.1.3. *On suppose que* $\dim \mathrm{E} = \dim \mathrm{F} = n$ *et que* φ *est une forme bilinéaire sur* $\mathrm{E} \times \mathrm{F}$ *telle que* D_φ *soit bijective. Pour tout sous-espace vectoriel* E_1 *de* E, *on a*

$$\dim \mathrm{E}_1^{\perp d} = n - \dim \mathrm{E}_1 \,; \quad (\mathrm{E}_1^{\perp d})^{\perp g} = \mathrm{E}_1.$$

Les mêmes résultats sont valables de façon symétrique pour les sous-espaces vectoriels de l'espace F.

Démonstration. Puisque $\mathrm{D}_{\widetilde{\varphi}}$ est bijective, aucun vecteur non nul de E_1 ne peut être orthogonal à F tout entier, ce qui permet d'appliquer la proposition précédente 4.1.2, et d'en déduire que $\dim \mathrm{E}_1^{\perp d} = \dim \mathrm{F} - \dim \mathrm{E}_1 = n - \dim \mathrm{E}_1$. Puisque l'application linéaire D_φ est elle aussi bijective, on peut appliquer le même argument à $\mathrm{E}_1^{\perp d}$, et obtenir ainsi que $\dim(\mathrm{E}_1^{\perp d})^{\perp g} = \dim \mathrm{E} - (n - \dim \mathrm{E}_1) = \dim \mathrm{E}_1$. Pour conclure à l'égalité des deux sous-espaces, il suffit de remarquer que $\mathrm{E}_1 \subset (\mathrm{E}_1^{\perp d})^{\perp g}$, ce que le lecteur fera facilement.

4.2. Formes quadratiques

Avant de donner la définition, on va essayer de montrer sur deux exemples à quoi ressemblent les formes quadratiques. Commençons par un petit exemple sur $\mathbb{R}^3$. La fonction Q définie pour tout $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ par

$$\mathrm{Q}(x) = \mathrm{Q}(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_1x_3 + x_2^2$$

est une forme quadratique. On pourrait dire que c'est un polynôme homogène de degré deux dans l'ensemble des variables, mais cette idée ne couvre pas tous les cas envisageables. Prenons en effet un autre exemple, en dimension infinie cette fois. Soit E l'espace des fonctions réelles de classe C^1 sur l'intervalle $[0,1]$, et posons pour tout élément $f \in E$

$$Q(f) = \int_0^1 \big(f(t)^2 + 2f(t)f'(t)\big)\, dt.$$

Ce sera encore une forme quadratique, que l'on ne peut plus raisonnablement voir comme polynôme de certaines variables. On va donc poser une définition un peu indirecte.

Définition 4.2.1. Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$; on dit qu'une fonction Q de E dans $\mathbb{K}$ est une *forme quadratique* sur E s'il existe une forme bilinéaire φ sur $E \times E$ telle que $Q(x) = \varphi(x,x)$ pour tout $x \in E$.

Exemples.

a. Prenons sur $\mathbb{K}^2$ la fonction Q définie pour tout $x = (x_1, x_2)$ par $Q(x) = x_1 x_2$; si on prend $\varphi(x,y) = x_1 y_2$, il est clair que φ est une forme bilinéaire sur $\mathbb{K}^2 \times \mathbb{K}^2$ et que $Q(x) = \varphi(x,x)$ pour tout $x \in \mathbb{K}^2$. Il est clair qu'il y a au moins une autre solution, en prenant $\varphi(x,y) = x_2 y_1$.

b. Posons $Q(x) = x_1^2 + 3x_1x_2 + 5x_2x_3$ pour tout $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ et montrons que Q vérifie la définition ci-dessus. On trouve facilement deux formes bilinéaires solutions de notre question,

$$\varphi_1(x,y) = x_1y_1 + 3x_1y_2 + 5x_2y_3 \quad \text{et} \quad \varphi_2(x,y) = x_1y_1 + 3x_2y_1 + 5x_3y_2$$

ce qui donne aussi une solution symétrique en prenant la demi-somme des deux,

$$\varphi(x,y) = x_1y_1 + \frac{3}{2}\big(x_1y_2 + x_2y_1\big) + \frac{5}{2}\big(x_2y_3 + x_3y_2\big).$$

Donnons deux propriétés des formes quadratiques qui découlent immédiatement de la définition. Soit Q une forme quadratique sur un espace vectoriel E ; pour tout $x \in E$ et tout scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$, on a

$$Q(\lambda x) = \lambda^2 Q(x).$$

D'autre part, la fonction sur $E \times E$ définie par

$$f(x,y) = Q(x+y) - Q(x) - Q(y)$$

est une forme bilinéaire sur $E \times E$, puisque $f(x,y) = \varphi(x,y) + \varphi(y,x)$.

Exercice. Soit E un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{K}$; si Q est une fonction sur E telle que $Q(\lambda x) = \lambda^2 Q(x)$ pour tous $\lambda \in \mathbb{K}$, $x \in E$ et telle que $f(x,y) = Q(x+y) - Q(x) - Q(y)$ soit bilinéaire sur $E \times E$, montrer que Q est une forme quadratique (on prendra une base $(e_1, \ldots, e_n)$ de E et on cherchera une forme bilinéaire φ telle que $\varphi(x,x) = Q(x)$ pour tout $x \in E$, vérifiant la condition supplémentaire $\varphi(e_i, e_j) = 0$ pour tous $i > j$). On pourrait donc choisir de définir les formes quadratiques par les deux propriétés ci-dessus.

Dans l'exemple b ci-dessus, exemple où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, on a remarqué qu'on pouvait trouver une forme bilinéaire *symétrique* pour définir la forme quadratique étudiée. Si on cherche à faire la même chose avec un corps $\mathbb{K}$ absolument quelconque, on rencontre une difficulté un peu surprenante ; dans un tel corps $\mathbb{K}$, il est naturel de considérer que la notation 2 représente l'élément $1_\mathbb{K} + 1_\mathbb{K}$ du corps $\mathbb{K}$. Si $2 = 1_\mathbb{K} + 1_\mathbb{K} \neq 0_\mathbb{K}$, on peut par définition d'un corps trouver un inverse de 2 pour la multiplication, qu'on notera $1/2 \in \mathbb{K}$. Si $2 \neq 0$, on peut toujours supposer que la forme bilinéaire φ de la définition ci-dessus est symétrique, en la remplaçant par la forme symétrique $\psi = \frac{1}{2}(\varphi + \widetilde{\varphi})$. Puisque $\psi(x, x) = \varphi(x, x)$, la forme bilinéaire symétrique ψ définit la même forme quadratique que φ.

Le lecteur sensé pourra se demander comment $1 + 1$ pourrait être nul ! Cela se produit quand on utilise un corps $\mathbb{K}$ tel que le corps à deux éléments $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, ce qu'heureusement on ne fait pas tous les jours, au moins en deuxième année d'université. On notera que si $2 \neq 0_\mathbb{K}$, on a aussi $4 \neq 0_\mathbb{K}$, ce qui jouera un tout petit rôle un peu plus loin.

Pour les deux exemples introductifs de cette section, on trouvera pour forme bilinéaire symétrique associée :

$$\varphi(x, y) = x_1 y_1 + x_1 y_3 + x_3 y_1 + x_2 y_2$$

pour le premier exemple, et pour le second

$$\varphi(f, g) = \int_0^1 \big(f(t)g(t) + f(t)g'(t) + f'(t)g(t)\big)\,\mathrm{d}t.$$

Remarque. Si $\mathbb{K} = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, la forme quadratique $\mathrm{Q}(x) = x_1 x_2$ sur $\mathbb{K}^2$ de l'exemple *a ne peut pas* être représentée par une forme bilinéaire *symétrique* sur $\mathbb{K}^2 \times \mathbb{K}^2$.

Supposons donc que $2 \neq 0$, et supposons que φ soit une forme bilinéaire symétrique telle que $\varphi(x, x) = \mathrm{Q}(x)$ pour tout $x \in \mathrm{E}$. On a alors pour tous $x, y \in \mathrm{E}$ la relation $\mathrm{Q}(x + y) = \mathrm{Q}(x) + 2\varphi(x, y) + \mathrm{Q}(y)$. Ceci permet de trouver φ à partir de Q,

$$2\varphi(x, y) = \mathrm{Q}(x + y) - \mathrm{Q}(x) - \mathrm{Q}(y)\,; \quad 4\varphi(x, y) = \mathrm{Q}(x + y) - \mathrm{Q}(x - y)$$

Cette relation montre que φ (symétrique) est complètement déterminée par Q. On dira que φ est la forme bilinéaire symétrique associée à la forme quadratique Q, obtenue par *polarisation* de la forme quadratique Q ; on dit que φ est la *forme polaire* de Q.

Résumé. *Si $1_\mathbb{K} + 1_\mathbb{K} \neq 0$, pour toute forme quadratique* Q *sur* E *il existe une forme bilinéaire symétrique unique φ sur* $\mathrm{E} \times \mathrm{E}$ *telle que* $\mathrm{Q}(x) = \varphi(x, x)$ *pour tout* $x \in \mathrm{E}$. *Cette forme bilinéaire φ est définie par*

$$\varphi(x, y) = \frac{1}{4}\big(\mathrm{Q}(x + y) - \mathrm{Q}(x - y)\big) = \frac{1}{2}\big(\mathrm{Q}(x + y) - \mathrm{Q}(x) - \mathrm{Q}(y)\big).$$

Exercice élémentaire : si $2 \neq 0$, trouver la forme polaire des monômes $\mathrm{Q}(x) = x_i x_j$, ou bien $\mathrm{Q}(x) = x_i^2$ (où $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n$, et $i, j = 1, \ldots, n$).

Si E est de dimension finie, on considère en général la matrice de φ (qu'on appellera aussi matrice de Q) en prenant deux fois la même base pour E. Soit $\mathbf{e}$ une base de E ; puisque φ est symétrique, il est clair que la matrice $\Phi = \mathrm{Mat}(\varphi, \mathbf{e}, \mathbf{e})$, dont les coefficients sont $\Phi_{i,j} = \varphi(e_i, e_j)$, est symétrique (${}^t\Phi = \Phi$). Si X désigne le vecteur colonne des coordonnées de $x \in \mathrm{E}$ dans la base $\mathbf{e}$, on a

$$\mathrm{Q}(x) = {}^t\mathrm{X}\,\Phi\,\mathrm{X}.$$

Si on effectue le changement de base $\mathrm{X} = \mathrm{P}\mathrm{X}'$, la matrice devient

$$\Phi' = {}^t\mathrm{P}\,\Phi\,\mathrm{P}.$$

Orthogonalité pour une forme bilinéaire symétrique

Soit φ une forme bilinéaire symétrique sur $\mathrm{E} \times \mathrm{E}$; on dit que deux vecteurs x et y sont orthogonaux *par rapport* à φ, ou bien φ-orthogonaux si $\varphi(x, y) = 0$. On a aussi (et heureusement !) $\varphi(y, x) = 0$ puisque φ est symétrique. Si x et y sont φ-orthogonaux, on a $\mathrm{Q}(x + y) = \mathrm{Q}(x) + \mathrm{Q}(y)$ pour la forme quadratique Q associée à φ, définie par $\mathrm{Q}(x) = \varphi(x, x)$ pour tout $x \in \mathrm{E}$. Soit A une partie de l'espace E ; on pose

$$\mathrm{A}^\perp = \{y \in \mathrm{E} : \forall x \in \mathrm{A}, \quad \varphi(x, y) = 0\}.$$

L'ensemble $\mathrm{A}^\perp$ est un sous-espace vectoriel de E. Si $\mathrm{A}_1 \subset \mathrm{A}_2$, on a $\mathrm{A}_2^\perp \subset \mathrm{A}_1^\perp$. On a toujours $\mathrm{A} \subset \mathrm{A}^{\perp\perp}$.

Noyau d'une forme bilinéaire symétrique

Soit φ une forme bilinéaire symétrique sur E ; l'orthogonal de E est le sous-espace

$$\mathrm{N}_\varphi = \mathrm{E}^\perp = \{y \in \mathrm{E} : \forall x \in \mathrm{E}, \quad \varphi(x, y) = 0\}.$$

On l'appelle le *noyau* de la forme φ (ou de la forme quadratique Q). On voit facilement que c'est aussi le noyau de l'application linéaire D_φ de E dans E^*.

Il est facile de trouver l'expression matricielle du noyau de φ : si $\Phi = \mathrm{Mat}(\varphi, \mathbf{e}, \mathbf{e})$ et si Y est le vecteur colonne des coordonnées de $y \in \mathrm{E}$ dans la base $\mathbf{e}$, on voit que $y \in \mathrm{N}_\varphi$ si et seulement si $\Phi\mathrm{Y} = 0$.

Définition 4.2.2. Soient E un espace vectoriel de dimension finie, φ une forme bilinéaire symétrique sur $\mathrm{E} \times \mathrm{E}$ et Q la forme quadratique sur E associée à φ. On appelle *rang de la forme bilinéaire symétrique* φ, ou bien rang de la forme quadratique Q la quantité $r = \dim \mathrm{E} - \dim \mathrm{N}_\varphi$.

Dans n'importe quelle base $\mathbf{e}$ de E, le rang de φ est égal au rang de la matrice $\Phi = \mathrm{Mat}(\varphi, \mathbf{e}, \mathbf{e})$. En effet, le noyau N_Φ de l'application $\mathrm{Y} \to \Phi\mathrm{Y}$ est en bijection linéaire avec N_φ, et le rang de la matrice Φ est égal à $n - \dim \mathrm{N}_\Phi = \dim \mathrm{E} - \dim \mathrm{N}_\varphi$.

Formes bilinéaires symétriques non dégénérées.

On suppose ici que E est de dimension finie > 0.

Définition 4.2.3. On dit qu'une forme bilinéaire symétrique φ sur $\mathrm{E} \times \mathrm{E}$ est *non dégénérée* si son noyau N_φ est réduit à $\{0_\mathrm{E}\}$.

Cela signifie que pour tout $y \neq 0_\mathrm{E}$, il existe un vecteur $x \in \mathrm{E}$ tel que $\varphi(x, y) \neq 0$. Cela équivaut encore à dire que l'application D_φ est injective de E dans E^*, donc bijective puisque les deux espaces ont la même dimension. La forme bilinéaire φ est donc non dégénérée si et seulement si sa matrice par rapport à une base quelconque de E est inversible. Cela équivaut aussi à dire que $\mathrm{rang}\,\varphi = \dim \mathrm{E}$.

Exemple. La forme hyperbolique de l'exemple 4 est non dégénérée : pour tout vecteur $v = (x, y, z, t)$ non nul, on a $\varphi(v, e_j) \neq 0$ pour au moins un vecteur e_j de la base canonique de $\mathbb{R}^4$. On peut dire aussi que la matrice de φ par rapport à la base canonique est inversible : c'est la matrice diagonale de coefficients diagonaux $1, 1, 1, -1$.

Orthogonalité pour une forme bilinéaire non dégénérée

La proposition 4.1.2 nous donne en particulier

On suppose que φ *est une forme bilinéaire symétrique sur* $\mathrm{E} \times \mathrm{E}$*, où* E *est de dimension finie. Pour tout sous-espace vectoriel* F *de* E*, tel qu'aucun vecteur non nul* $x \in \mathrm{F}$ *ne puisse être orthogonal à* E *tout entier, (c'est-à-dire que* $\mathrm{F} \cap \mathrm{N}_\varphi = \{0_\mathrm{E}\}$*) on a*

$$\dim \mathrm{F}^\perp = \dim \mathrm{E} - \dim \mathrm{F}.$$

Si φ est non dégénérée, l'hypothèse ci-dessus est vérifiée pour tout sous-espace F de l'espace E. On obtient donc :

Corollaire 4.2.4. *On suppose que* $\dim \mathrm{E} < +\infty$ *et que* φ *est une forme bilinéaire symétrique non dégénérée sur* $\mathrm{E} \times \mathrm{E}$*. Pour tout sous-espace vectoriel* F *de* E*, on a*

$$\dim \mathrm{F}^\perp = \dim \mathrm{E} - \dim \mathrm{F}\,; \quad (\mathrm{F}^\perp)^\perp = \mathrm{F}.$$

Supposons maintenant que φ soit une forme bilinéaire symétrique sur $\mathrm{E}\times\mathrm{E}$, et que F soit un sous-espace vectoriel de E. On peut considérer la restriction de φ au produit $\mathrm{F}\times\mathrm{F}$. Dire que cette restriction ψ est non dégénérée sur $\mathrm{F} \times \mathrm{F}$ signifie exactement qu'aucun vecteur non nul de F ne peut être orthogonal à F tout entier, ce qui se traduit par

$$\mathrm{F} \cap \mathrm{F}^\perp = \{0_\mathrm{E}\}.$$

Exemple. Reprenons la forme bilinéaire non dégénérée

$$\varphi(x, y) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 - x_4 y_4$$

sur $\mathbb{R}^4$. Considérons le vecteur non nul $v_0 = (1, 0, 0, 1)$. On a $\varphi(v_0, v_0) = 0$, donc le vecteur non nul v_0 est φ-orthogonal à lui-même ! On dit que v_0 est un vecteur *isotrope*. De plus si on pose $\mathrm{F} = \mathbb{R}v_0$ on voit que la restriction ψ de φ à $\mathrm{F} \times \mathrm{F}$ est nulle, donc ψ est dégénérée.

Il ne faut pas confondre le fait que la forme bilinéaire φ est non dégénérée (ce qui est vrai dans l'exemple présent) et le fait que $\varphi(x, x)$ n'est pas nul si $x \neq 0_\mathrm{E}$ (qui est faux dans ce même exemple). Pour tout compliquer, on verra plus loin que pour les formes bilinéaires *positives*, il y a identité de ces deux propriétés !

Proposition 4.2.5. *Soient* E *un espace vectoriel de dimension finie,* φ *une forme bilinéaire symétrique sur* $\mathrm{E} \times \mathrm{E}$ *et* F *un sous-espace vectoriel de* E *; la restriction* ψ *de* φ *à* $\mathrm{F} \times \mathrm{F}$ *est non dégénérée si et seulement si* $\mathrm{E} = \mathrm{F} \oplus \mathrm{F}^\perp$*.*

Démonstration. Supposons d'abord la restriction ψ non dégénérée. On sait alors que l'on a $\mathrm{F} \cap \mathrm{F}^\perp = \{0\}$. *A fortiori*, aucun vecteur non nul de F ne peut être orthogonal à l'espace E tout entier, donc la proposition 4.1.2 s'applique, et permet de voir que $\dim \mathrm{F}^\perp = \dim \mathrm{E} - \dim \mathrm{F}$. Puisque l'intersection de F et $\mathrm{F}^\perp$ est nulle, on trouve que $\mathrm{E} = \mathrm{F} \oplus \mathrm{F}^\perp$.

Réciproquement, dire que la somme de F et $\mathrm{F}^\perp$ est une somme directe sous-entend que $\mathrm{F} \cap \mathrm{F}^\perp = \{0\}$, ce qui équivaut à dire que ψ est non dégénérée.

Exemples.

1. Posons $\mathrm{Q}(x) = x_1^2$ pour tout $x \in \mathbb{R}^2$. Le noyau est alors $\mathrm{N} = \mathbb{R}e_2$, donc Q est dégénérée. Mais si on prend $\mathrm{F} = \mathbb{R}e_1$, la restriction de Q à F est non dégénérée ; on obtient $\mathrm{F}^\perp = \mathbb{R}e_2$ qui est bien de dimension $2 - 1 = 1$, et de plus $\mathrm{F} \cap \mathrm{N} = \{0\}$, ce qui correspond à $\mathbb{R}^2 = \mathrm{F} \oplus \mathrm{F}^\perp$. En revanche si on part du sous-espace $\mathrm{G} = \mathbb{R}e_2$, l'orthogonal $\mathrm{G}^\perp$ est $\mathbb{R}^2$ tout entier et la somme $\mathrm{G} + \mathrm{G}^\perp$ n'est pas directe.

2. Posons $\mathrm{Q}(x) = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2$. Cette forme est non dégénérée. Posons $v = (1, 0, 1)$. L'orthogonal de $\mathrm{F} = \mathbb{R}v$ est bien de dimension $2 = \dim \mathrm{E} - \dim \mathrm{F} = 3 - 1$ puisque Q est non dégénérée, mais $\mathbb{R}v \subset (\mathbb{R}v)^\perp$ parce que v est isotrope, donc la somme $\mathrm{F} + \mathrm{F}^\perp$ n'est pas directe. Effectivement, la restriction de φ à $\mathrm{F} = \mathbb{R}v$ est dégénérée.

Expression dans une base φ-orthogonale

Soient φ une forme bilinéaire symétrique sur $\mathrm{E} \times \mathrm{E}$ et Q la forme quadratique sur E associée à φ ; si $e_1, \ldots, e_k$ sont deux à deux φ-orthogonaux, on a

$$\mathrm{Q}(c_1 e_1 + \cdots + c_k e_k) = c_1^2\, \mathrm{Q}(e_1) + \cdots + c_k^2\, \mathrm{Q}(e_k).$$

Si $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base de E formée de vecteurs deux à deux φ-orthogonaux (on verra plus loin que si E est de dimension finie et $2 \neq 0$, on peut toujours trouver une telle base φ-orthogonale pour E), la matrice $\Phi = \mathrm{Mat}(\varphi, \mathbf{e}, \mathbf{e})$ est diagonale. Les coefficients diagonaux sont $\mathrm{Q}(e_1), \ldots, \mathrm{Q}(e_n)$.

Supposons que $\mathrm{Q}(e_i) \neq 0$ pour $i = 1, \ldots, s$ et que $\mathrm{Q}(e_i) = 0$ pour $i > s$, où s est un entier tel que $0 \leq s \leq n$ (si $s = 0$, on veut dire que tous les $(\mathrm{Q}(e_i))$ sont nuls, et si $s = n$, tous les $(\mathrm{Q}(e_i))$ sont non nuls). Il est facile de déterminer le noyau de N_φ en utilisant la base $\mathbf{e}$. On voit que

$$\mathrm{N}_\varphi = [e_{s+1}, \ldots, e_n]$$

ce qui montre aussi que le rang de φ est égal à s.

Si des vecteurs $x_1, \ldots, x_p$ de E sont deux à deux orthogonaux pour la forme φ et si on a $x = c_1 x_1 + \cdots + c_p x_p$, on voit que

$$\varphi(x, x_j) = c_j \varphi(x_j, x_j), \quad \varphi(x, x) = \sum_{j=1}^{p} c_j^2\, \varphi(x_j, x_j).$$

Si tous les vecteurs sont non isotropes, $\varphi(x_j, x_j) \neq 0$ pour $j = 1, \ldots, p$ on voit que les coefficients de la combinaison linéaire x sont uniquement déterminés,

$$c_i = \frac{\varphi(x, x_i)}{\varphi(x_i, x_i)}\cdot$$

Lemme. *Si des vecteurs sont deux à deux φ-orthogonaux et non isotropes, ils sont linéairement indépendants.*

Remarque. Le résultat n'est pas vrai pour des vecteurs isotropes : dans l'exemple 4, si $v_0 = (1, 0, 0, 1)$, le système (v_0, v_0) est un système de vecteurs φ-orthogonaux non nuls, mais bien sûr pas indépendants !

Proposition 4.2.6. *On suppose que $2 \neq 0$. Soit φ une forme bilinéaire symétrique sur un espace vectoriel* E *de dimension finie ; il existe une base $e_1, \ldots, e_n$ de* E *formée de vecteurs deux à deux φ-orthogonaux.*

Démonstration. Par récurrence sur la dimension de E. Si E est de dimension 1, on choisit $e_1 \neq 0$ dans E ; ce vecteur constitue une base de E, et puisqu'il est seul, il n'y a pas d'orthogonalité à vérifier. Supposons maintenant $n > 1$, et supposons le résultat établi pour toute forme bilinéaire symétrique ψ sur un espace vectoriel G de dimension $< n$. Soit φ une forme bilinéaire symétrique sur E, avec $\dim \mathrm{E} = n$, et posons $\mathrm{Q}(x) = \varphi(x, x)$ pour tout $x \in \mathrm{E}$; si φ est nulle, il suffit de prendre une base quelconque $(e_1, \ldots, e_n)$ de E : les vecteurs de base seront automatiquement φ-orthogonaux. Sinon, φ est non nulle, et puisque $\varphi(x, y) = \frac{1}{2}\big(\mathrm{Q}(x+y) - \mathrm{Q}(x) - \mathrm{Q}(y)\big)$, la forme quadratique Q ne peut pas être identiquement nulle sur E. Il existe donc un vecteur $v \in \mathrm{E}$ tel que $\varphi(v, v) \neq 0$; posons $e_1 = v$ et

$$\mathrm{G} = \{x \in \mathrm{E} : \varphi(x, e_1) = 0\} = \{e_1\}^\perp.$$

Puisque la forme linéaire $x \to \varphi(x, e_1)$ n'est pas nulle, son noyau G est de dimension $n - 1$, et $e_1 \notin \mathrm{G}$, donc $\mathrm{E} = \mathrm{G} \oplus \mathbb{K}e_1$. Définissons sur G la forme bilinéaire symétrique ψ par $\psi(x, y) = \varphi(x, y)$ pour tous $x, y \in \mathrm{G}$ (c'est la restriction de φ à $\mathrm{G} \times \mathrm{G}$). D'après l'hypothèse de récurrence, il existe une base $(e_2, \ldots, e_n)$ de G formée de vecteurs deux à deux ψ-orthogonaux. Le système $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ est alors une base de E. Par définition de G on a $\varphi(e_i, e_1) = 0$ pour tout $i > 1$, et pour $2 \leq i, j$, $i \neq j$ on a $\varphi(e_i, e_j) = \psi(e_i, e_j) = 0$, donc on a trouvé une base φ-orthogonale pour E.

Remarque. La matrice de φ dans la base φ-orthogonale $(e_1, \ldots, e_n)$ est diagonale, les éléments diagonaux étant $\varphi(e_1, e_1), \ldots, \varphi(e_n, e_n)$.

ATTENTION. Il ne s'agit pas ici d'une diagonalisation de matrice au sens de la théorie des valeurs propres et des vecteurs propres. Si Φ est la matrice de φ dans une première base, et si Φ' est la matrice de φ dans une base φ-orthogonale, la matrice Φ' est diagonale, mais ses valeurs diagonales ne sont pas nécessairement des valeurs propres de Φ (ces deux matrices n'ont pas en général le même polynôme caractéristique ; la formule de changement de base n'est pas celle qui donne l'invariance du polynôme caractéristique, c'est ici la formule $\Phi' = {}^t\mathrm{P}\,\Phi\,\mathrm{P}$. Si par exemple Φ est déjà diagonale et si P est égale à $c\,\mathrm{I}_n$, les coefficients diagonaux seront multipliés par c^2 et n'auront visiblement aucune raison d'être des valeurs propres de Φ).

Le cas réel

Supposons dans ce paragraphe que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. On va simplifier au maximum l'expression que l'on peut trouver pour la matrice de φ dans une base φ-orthogonale. Supposons donc que φ soit bilinéaire symétrique sur un espace vectoriel réel E de dimension finie, et soit $\mathbf{e} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base φ-orthogonale ; on va remplacer cette base par une base de la forme $\mathbf{e}' = (t_1 e_1, \ldots, t_n e_n)$, avec $t_i > 0$. Si $\mathrm{Q}(e_i) \neq 0$, on pose $t_i = |\mathrm{Q}(e_i)|^{-1/2}$, et si $\mathrm{Q}(e_i) = 0$, on pose par exemple $t_i = 1$ (mais ça n'a en fait aucune importance). Dans la nouvelle base $(e'_1, \ldots, e'_n)$, on a encore l'orthogonalité, puisque $\varphi(t_i e_i, t_j e_j) = t_i t_j \varphi(e_i, e_j) = 0$ si $i \neq j$, et d'autre part $\mathrm{Q}(e'_i) = \mathrm{Q}(t_i e_i) = t_i^2 \mathrm{Q}(e_i)$ est nul si $\mathrm{Q}(e_i) = 0$, sinon

$$\mathrm{Q}(e'_i) = \mathrm{Q}(t_i e_i) = \mathrm{Q}(e_i)/|\mathrm{Q}(e_i)| = \pm 1,$$

selon le signe de $\mathrm{Q}(e_i)$. En résumé :

Lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, il existe une base φ-orthogonale dans laquelle la matrice de φ est diagonale, avec des coefficients diagonaux égaux à 1, -1 ou 0.

Dans le cas complexe, on peut toujours trouver $t_i \in \mathbb{C}$ tel que $t_i^2 = \mathrm{Q}(e_i)$. On obtient alors :

Lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, il existe une base φ-orthogonale dans laquelle la matrice de φ est diagonale, avec des coefficients diagonaux égaux à 1 ou 0.

Les résultats précédents se traduisent matriciellement de la façon suivante : désignons par $\mathrm{J}_{p,q,n}$ la matrice diagonale de taille $n \times n$ dont les p premiers coefficients diagonaux sont égaux à 1, les q suivants égaux à -1 et les restants égaux à 0 (on suppose $p, q \geq 0$ et $p + q \leq n$). Pour toute matrice symétrique réelle A de taille $n \times n$, il existe une matrice réelle inversible P telle que ${}^t\mathrm{P}\,\mathrm{A}\,\mathrm{P}$ soit égale à l'une des matrices $\mathrm{J}_{p,q,n}$. Pour toute matrice symétrique complexe A de taille $n \times n$, il existe une matrice complexe inversible P telle que ${}^t\mathrm{P}\,\mathrm{A}\,\mathrm{P}$ soit égale à l'une des matrices $\mathrm{J}_{p,0,n}$.

Expliquons le cas réel. Considérons la forme bilinéaire symétrique définie pour $\mathrm{X}, \mathrm{Y} \in \mathbb{R}^n$ par la formule $\varphi(\mathrm{X}, \mathrm{Y}) = {}^t\mathrm{X}\,\mathrm{A}\,\mathrm{Y}$. On peut trouver une base $\mathbf{f}$ de $\mathbb{R}^n$ qui soit φ-orthogonale, et deux entiers $p, q \geq 0$ tels que $p + q \leq n$ et tels que $\varphi(f_j, f_j) = 1$ pour $1 \leq j \leq p$, $\varphi(f_j, f_j) = -1$ pour $p + 1 \leq j \leq p + q$ et $\varphi(f_j, f_j) = 0$ si $j > p + q$. Dans cette base $\mathbf{f}$ la matrice de φ est égale à $\mathrm{J}_{p,q,n}$. Si P désigne la matrice de passage, P est une matrice réelle inversible et ${}^t\mathrm{P}\,\mathrm{A}\,\mathrm{P} = \mathrm{J}_{p,q,n}$. Le cas complexe s'explique de façon analogue.

Dans le cas réel, le rang de la forme φ est égal à $p + q$, et on verra plus loin dans le paragraphe *signature* que les deux entiers p et q ne dépendent que de A, et pas de la base φ-orthogonale particulière.

Combinaisons linéaires de carrés de formes linéaires

Revenons au cas général. Supposons que $\mathbf{e}$ soit une base φ-orthogonale de l'espace vectoriel E. Si $x = \sum_{i=1}^n c_i e_i$, on aura par orthogonalité $\mathrm{Q}(x) = \sum_{i=1}^n \mathrm{Q}(e_i)\, c_i^2$, ce qui s'écrit encore, en introduisant la base duale $\mathbf{e}^*$ et en utilisant la relation $c_i = e_i^*(x)$

$$\mathrm{Q} = \sum_{i=1}^n \mathrm{Q}(e_i)\, (e_i^*)^2.$$

On a donc exprimé Q comme combinaison linéaire de carrés de formes linéaires. Inversement, soient $\ell_1, \ldots, \ell_k$ des formes linéaires sur E et $a_1, \ldots, a_k$ des coefficients dans $\mathbb{K}$. Posons

$$\mathrm{Q}(x) = \sum_{i=1}^k a_i (\ell_i(x))^2.$$

Cette forme quadratique admet clairement pour forme polaire

$$\varphi(x, y) = \sum_{i=1}^k a_i\, \ell_i(x) \ell_i(y).$$

Si $\ell_1, \ldots, \ell_k$ sont indépendantes, on peut prolonger en une base $(\ell_1, \ldots, \ell_n)$ de E^*, puis trouver une base $\mathbf{e} = (e_1, \ldots, e_n)$ de E telle que $\ell_i(e_j) = \delta_{i,j}$ pour tous $i, j = 1, \ldots, n$ (utiliser le corollaire 4.5.2 du poly MM3). On vérifie alors que

$$\varphi(e_i, e_j) = \sum_{s=1}^k a_i\, \ell_s(e_i) \ell_s(e_j) = 0$$

si $i \neq j$ (on remarque que $\ell_s(e_i)\ell_s(e_j) = \delta_{s,i}\delta_{s,j} = 0$ pour tout s lorsque $i \neq j$), donc $\mathbf{e}$ est une base φ-orthogonale. On a ainsi vu le rapport entre la recherche d'une base φ-orthogonale et l'expression de la forme quadratique Q comme combinaison linéaire de carrés de formes linéaires indépendantes.

Décomposition de Gauss

La méthode de Gauss est une méthode pratique très simple qui permet de trouver une base orthogonale pour une forme bilinéaire symétrique φ. En réalité, il s'agit d'une méthode qui va permettre d'exprimer la forme quadratique Q associée à φ sous forme de combinaison linéaire de carrés de formes linéaires indépendantes. On pourra ensuite en déduire une base φ-orthogonale comme on l'a expliqué dans le paragraphe précédent.

Commençons par un exemple très simple, où la forme quadratique Q est définie sur $\mathbb{R}^2$ par $\mathrm{Q}(x) = x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2$. On écrit le début d'un carré, $(x_1 + \frac{1}{2}x_2)^2 = x_1^2 + x_1x_2 + \frac{1}{4}x_2^2$, donc

$$\mathrm{Q}(x) = \big(x_1 + \frac{1}{2}x_2\big)^2 + \frac{3}{4}\,x_2^2 = \ell_1(x)^2 + \ell_2(x)^2.$$

À partir de cette expression, on peut trouver une base orthogonale de la façon suivante : les deux formes linéaires sont ℓ_1 et ℓ_2, définies par $\ell_1(x) = x_1 + \frac{1}{2}x_2$ et $\ell_2(x) = \frac{\sqrt{3}}{2}x_2$. On cherche la base voulue en résolvant les équations $\ell_i(e_j) = \delta_{i,j}$, $i, j = 1, 2$. On obtient ainsi

$$e_1 = (1, 0)\,; \quad e_2 = (-1/\sqrt{3}, 2/\sqrt{3}).$$

Dans cet exemple, on voit que Q est une *somme* de deux carrés. Il en résulte que l'expression $\mathrm{Q}(x)$ est toujours ≥ 0 (en fait $\mathrm{Q}(x) > 0$ pour tout $x \neq 0$, car les relations $\ell_1(x) = 0$ et $\ell_2(x) = 0$ entraînent ici que $x = 0$). Une des applications de la méthode de Gauss est donc l'étude du signe d'une forme quadratique réelle, une question qu'on étudie en *Calcul Différentiel* à propos de la formule de Taylor à l'ordre deux pour une fonction de plusieurs variables. Mais la méthode de Gauss s'applique aussi à des corps généraux (pour lesquels il n'y a pas de notion de *signe* d'une expression), à condition toutefois que $2 \neq 0$.

Proposition 4.2.7. *Soit $\mathbb{K}$ un corps tel que $2 \neq 0$, et soit Q une forme quadratique sur $\mathbb{K}^n$. Il existe n formes linéaires indépendantes $\ell_1, \ldots, \ell_n$ sur $\mathbb{K}^n$ et des coefficients $c_1, \ldots, c_n$ dans $\mathbb{K}$ tels que pour tout $x \in \mathbb{K}^n$*

$$\mathrm{Q}(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i\,(\ell_i(x))^2.$$

Le rang de Q est égal au nombre des coefficients c_i non nuls.

Démonstration. On démontre l'existence de la décomposition par récurrence sur le nombre de variables. Soit Q une forme quadratique sur $\mathbb{K}^n$, considérée comme fonction $\mathrm{Q}(x_1, \ldots, x_n)$ de n variables $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{K}$. On peut écrire

$$\mathrm{Q}(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i^2 + \sum_{i<j} b_{i,j} x_i x_j$$

Supposons d'abord que l'un des coefficients a_i soit non nul, et pour simplifier l'écriture, supposons que $i = 1$. On écrit alors Q sous la forme

$$\mathrm{Q}(x) = a_1 x_1^2 + \ell(y)\,x_1 + q(y),$$

où $a_1 \neq 0$, $y = (x_2, \dots, x_n)$, ℓ est une forme linéaire qui ne dépend pas de x_1 et q une forme quadratique qui ne dépend pas de x_1. Ensuite,

$$\mathrm{Q}(x) = a_1 \big(x_1 + \frac{1}{2a_1}\,\ell(y)\big)^2 + \big(q(y) - \frac{1}{4a_1}\,\ell(y)^2\big),$$

et on applique l'hypothèse de récurrence à la forme quadratique $\widetilde{\mathrm{Q}}(y) = q(y) - \frac{1}{4a_1}\,\ell(y)^2$, qui ne dépend plus que des $(n-1)$ variables $x_2, \dots, x_n$. Cette forme quadratique est par hypothèse de récurrence combinaison linéaire de carrés de formes linéaires indépendantes $\ell_2, \dots, \ell_n$ qui ne dépendent que des variables $x_2, \dots, x_n$. Ces formes sont alors indépendantes de la forme linéaire $\ell_1(x) = x_1 + \frac{1}{2a_1}\,\ell(y)$ (parce que ℓ_1 dépend explicitement de la variable x_1 ; pour mieux se convaincre, on pourra voir quelle est la forme de la matrice $n \times n$ dont les lignes contiennent les coefficients des formes linéaires $\ell_1, \dots, \ell_n$).

Le deuxième cas est plus embêtant. C'est le cas où tous les coefficients a_i sont nuls, sans que la forme Q soit nulle. Soit alors (i, j) un couple tel que $b_{i,j}$ soit non nul, et supposons pour simplifier l'écriture que $(i, j) = (1, 2)$. On écrit maintenant

$$\mathrm{Q}(x) = b_{1,2}\, x_1 x_2 + \ell(y) x_1 + m(y) x_2 + q(y),$$

où $y = (x_3, \dots, x_n)$, ℓ et m sont des formes linéaires qui ne dépendent pas de x_1, x_2 et q une forme quadratique qui ne dépend pas de x_1, x_2. On pose $u_1 = (x_1 + x_2)/2$, $u_2 = (x_1 - x_2)/2$, et on transforme l'expression précédente en

$$\mathrm{Q}(x) = b_{1,2}\,(u_1^2 - u_2^2) + \ell(y)(u_1 + u_2) + m(y)(u_1 - u_2) + q(y),$$

que l'on traite par la méthode précédente, appliquée aux nouvelles variables

$$(u_1, u_2, x_3, \dots, x_n).$$

On termine en revenant aux variables initiales.

Exercices.

1. Traiter l'exemple $\mathrm{Q}(x) = x^2 + yz + y^2 - 2axz + z^2$.

2. Un exemple sans carré : $xy + yz + czx$. On pose $x = u + v$ et $y = u - v$, on fait le calcul avec les variables u, v, z et on change à la fin. En déduire une base φ-orthogonale de $\mathbb{R}^3$.

Le cas réel

On supposera désormais que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Dans la méthode de Gauss, on pourra simplifier chacun des termes $c\,\ell(x)^2$ (où $c \in \mathbb{R}$) de la proposition précédente de la façon suivante : on pose $m(x) = \sqrt{|c|}\,\ell(x)$; si $c > 0$, on remplace $c\,\ell(x)^2$ par $m(x)^2$, et si $c < 0$, on remplace $c\,\ell(x)^2$ par $-m(x)^2$. Si c est nul, on n'écrit rien du tout (et en fait dans l'application pratique de la méthode de Gauss, on ne calcule en général pas celles des formes linéaires ℓ_j de la proposition précédente pour lesquelles $c_j = 0$).

Si on a une forme quadratique Q qui n'est pas définie sur $\mathbb{R}^n$ mais sur un espace vectoriel réel « abstrait » de dimension n, on choisit une base de E et on effectue les calculs avec les coordonnées $x_1, \dots, x_n$ dans cette base. En résumé :

Étant donnée une forme quadratique Q *définie sur un espace vectoriel réel* E *de dimension finie, il existe des formes linéaires indépendantes* $\ell_1, \dots, \ell_p, \ell_{p+1}, \dots, \ell_{p+q}$ *telles que*

$$\forall x \in \mathrm{E}, \quad \mathrm{Q}(x) = \ell_1(x)^2 + \cdots + \ell_p(x)^2 - \ell_{p+1}(x)^2 - \cdots - \ell_{p+q}(x)^2.$$

Bien entendu, il est possible que $p = 0$ (il n'y a alors pas de signe $+$), ou bien $q = 0$ (il n'y a alors pas de signe $-$), ou bien les deux (si $\mathrm{Q} = 0$). Si on complète ce système de formes linéaires en une base $(\ell_1, \ldots, \ell_n)$ de E^*, on peut trouver une base $(e_1, \ldots, e_n)$ de E telle que $\ell_i(e_j) = \delta_{i,j}$. Dans cette base la matrice $\Phi = \mathrm{Mat}(\varphi, \mathbf{e}, \mathbf{e})$ est diagonale, avec $\Phi_{1,1} = \cdots = \Phi_{p,p} = 1$, $\Phi_{p+1,p+1} = \cdots = \Phi_{p+q,p+q} = -1$ et $\Phi_{i,i} = 0$ si $i > p+q$. Le rang de la forme φ est égal à $p+q$. On voit donc que φ est non-dégénérée si et seulement si $p+q = n$. Exprimé en termes de base φ-orthogonale, le résultat précédent donne :

Il existe une base φ-orthogonale dans laquelle la matrice de φ est diagonale, avec p coefficients diagonaux égaux à 1, et q égaux à -1, les autres étant égaux à 0.

La décomposition de Gauss permet d'étudier le signe de la forme quadratique Q. Si $q = 0$, on a $\mathrm{Q}(x) \geq 0$ pour tout x ; si $p = 0$, on a $\mathrm{Q}(x) \leq 0$ pour tout x. Dans le cas où $p > 0$ **et** $q > 0$, on est sûr que Q change de signe : en effet, $\ell_1(e_1) > 0$ mais $\ell_{p+1}(e_{p+1}) < 0$. Si $p+q < n$, il existe des vecteurs non nuls tels que $\mathrm{Q}(x) = 0$, par exemple $x = e_{p+q+1}$. Si $p = n$, on aura $\mathrm{Q}(x) > 0$ pour tout $x \neq 0$, et si $q = n$, on aura $\mathrm{Q}(x) < 0$ pour tout $x \neq 0$.

Signature d'une forme quadratique réelle

Définition 4.2.8. Soit Q une forme quadratique sur un espace vectoriel réel E et soit φ sa forme polaire ; on dit que φ (ou Q) est *positive* sur E si $\mathrm{Q}(x) \geq 0$ pour tout vecteur $x \in \mathrm{E}$. On dit que φ (ou Q) est *définie positive* sur E si $\mathrm{Q}(x) > 0$ pour tout vecteur $x \in \mathrm{E}$ non nul.

Lemme. *Soit φ une forme bilinéaire symétrique sur un espace vectoriel réel* E *de dimension finie, et soit $(x_1, \ldots, x_n)$ une base φ-orthogonale de* E.

– *Si on a $\varphi(x_i, x_i) \geq 0$ pour tout $i = 1, \ldots, n$, la forme φ est positive sur* E.
– *Si on a $\varphi(x_i, x_i) > 0$ pour tout $i = 1, \ldots, n$, la forme φ est définie positive sur* E.

Démonstration. Elle est très facile ; expliquons uniquement la seconde partie, qui est très légèrement plus délicate. Soit x un vecteur de E, décomposé dans la base $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ sous la forme $x = \sum_{i=1}^n c_i x_i$. Puisque la base $\mathbf{x}$ est φ-orthogonale, on obtient

$$\varphi(x, x) = \sum_{i=1}^n c_i^2 \, \varphi(x_i, x_i)$$

quantité positive puisque les c_i sont réels et $\varphi(x_i, x_i) > 0$ par hypothèse. Si $\varphi(x, x) = 0$, il faut que tous les termes de la somme soient nuls, c'est-à-dire $c_i^2 \varphi(x_i, x_i) = 0$ pour $i = 1, \ldots, n$, ce qui implique $c_i = 0$ puisque $\varphi(x_i, x_i) \neq 0$, donc $x = 0_{\mathrm{E}}$.

On définit de même la notion de forme bilinéaire symétrique *négative*, ou bien *définie négative*, et on a bien sûr le lemme analogue à celui qui précède (il suffit de remplacer φ par $-\varphi$).

Exercices.

1. Soit A la matrice dans la base canonique d'une forme bilinéaire symétrique φ sur $\mathbb{R}^2$. Montrer que φ est définie positive si et seulement si $\mathrm{A}_{1,1} > 0$ et $\det \mathrm{A} > 0$.
2. Si Φ est la matrice d'une forme bilinéaire symétrique définie positive sur $\mathbb{R}^n$, montrer que :

det $\Phi > 0$ (introduire une base orthogonale et changer de base) ;

pour tout $k = 1, \dots, n$, la matrice Φ_k de taille $k \times k$ obtenue en ne gardant que les coefficients $\Phi_{i,j}$ tels que $1 \le i, j \le k$ définit une forme bilinéaire définie positive sur $\mathbb{R}^k$;
il existe une matrice triangulaire supérieure inversible **réelle** U telle que $\Phi = {}^t\mathrm{U}\,\mathrm{U}$. Réciproque ?

On dira que Q est de *signature* (p, q) si la décomposition dans une base orthogonale contient p termes tels que $\mathrm{Q}(e_i) = 1$ (*somme* de carrés) et q termes tels que $\mathrm{Q}(e_i) = -1$ (*différence* de carrés). Cette définition n'a de sens que si on montre que ces deux nombres ne dépendent que de Q, et pas de la décomposition particulière.

Supposons donc que $(e_1, \dots, e_n)$ soit une base φ-orthogonale de E, avec $\varphi(e_i, e_i) > 0$ pour $i = 1, \dots, p$ et $\varphi(e_i, e_i) \le 0$ pour $i > p$. La forme Q est alors définie positive sur le sous-espace F de dimension p engendré par $e_1, \dots, e_p$ et négative sur le sous-espace G de dimension $n - p$ engendré par les vecteurs $e_{p+1}, \dots, e_n$. Soit $\mathbf{e}' = (e'_1, \dots, e'_n)$ une autre base φ-orthogonale, et supposons que maintenant $\varphi(e'_i, e'_i) > 0$ pour $i = 1, \dots, p'$, et $\varphi(e'_i, e'_i) \le 0$ pour $i > p'$. Désignons par F$'$ le sous-espace engendré par $(e'_1, \dots, e'_{p'})$ et par G$'$ le sous-espace engendré par les autres vecteurs de la base $\mathbf{e}'$. La forme φ est alors négative sur G$'$. Il en résulte que $\mathrm{F} \cap \mathrm{G}' = \{0\}$ (en effet, si $x \in \mathrm{F}$ et $x \ne 0$, on a $\mathrm{Q}(x) > 0$, donc $x \notin \mathrm{G}'$). On en déduit que F et G$'$ forment une somme directe, donc $p + (n - p') = \dim(\mathrm{F} + \mathrm{G}') \le \dim \mathrm{E} = n$, ce qui donne $p - p' \le 0$. En raisonnant de même sur F$'$ et G, on obtient aussi $p' - p \le 0$, donc $p = p'$. Le raisonnement est le même pour montrer que $q = q'$.

Définition 4.2.9. On dit que la forme quadratique Q définie sur l'espace vectoriel réel de dimension finie E, et de forme polaire φ, est *de signature* (p, q) si sa matrice dans une base φ-orthogonale contient p coefficients > 0 et q coefficients < 0 sur la diagonale.

Autrement dit, la forme quadratique Q est de signature (p, q) s'il existe une base φ-orthogonale $(e_1, \dots, e_n)$ pour E telle qu'il existe p indices i pour lesquels $\mathrm{Q}(e_i) > 0$ et q indices tels que $\mathrm{Q}(e_i) < 0$. Dans ce cas, on aura la même situation pour toute base φ-orthogonale de E. Si $\dim \mathrm{E} = n$, la forme Q est définie positive si et seulement si elle est de signature $(n, 0)$, et elle est définie négative si et seulement si elle est de signature $(0, n)$.

Exemples. La forme hyperbolique sur $\mathbb{R}^4$ de l'exemple 4 est de signature $(3, 1)$. Le produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}^n$ est de signature $(n, 0)$.

Formes bilinéaires positives. Inégalité de Cauchy-Schwarz

Soit E un espace vectoriel réel et soit φ une forme bilinéaire symétrique positive sur l'espace E ; soient $x, y \in \mathrm{E}$; on a

$$\varphi(tx + y, tx + y) \ge 0,$$

pour tout nombre réel t. On a donc un trinôme réel qui ne change pas de signe quand t décrit $\mathbb{R}$,

$$t^2 \varphi(x, x) + 2t\,\varphi(x, y) + \varphi(y, y),$$

donc son discriminant est ≤ 0, ce qui donne l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\big(\varphi(x, y)\big)^2 \le \varphi(x, x)\,\varphi(y, y).$$

Exemples.

1. Dans le cas du produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}^n$, on a bien une forme bilinéaire positive puisque $\varphi(x,x) = \sum_{i=1}^n x_i^2 \geq 0$. Il en résulte que le produit scalaire de deux vecteurs est majoré par le produit des normes de ces vecteurs.

2. Considérons la forme bilinéaire φ définie sur l'espace des fonctions réelles continues sur $[0,1]$ par la formule

$$\varphi(f,g) = \int_0^1 f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$$

pour toutes fonctions réelles continues f et g. Il est clair que cette forme bilinéaire est positive, donc on peut lui appliquer l'inégalité de Cauchy-Schwarz. On obtient ainsi l'inégalité

$$\Bigl|\int_0^1 f(t)g(t)\,\mathrm{d}t\Bigr| \leq \Bigl(\int_0^1 f(t)^2\,\mathrm{d}t\Bigr)^{1/2}\Bigl(\int_0^1 g(t)^2\,\mathrm{d}t\Bigr)^{1/2}.$$

Lemme. *Supposons que φ soit une forme bilinéaire sur un espace vectoriel réel* E. *Si φ est* **positive** *sur* E, *le noyau de φ coïncide avec l'ensemble des vecteurs isotropes.*

Démonstration. Dans tous les cas, le noyau d'une forme bilinéaire est contenu dans l'ensemble des vecteurs isotropes ; inversement, si φ est positive et si $\varphi(x,x) = 0$, on déduit de l'inégalité de Cauchy-Schwarz $\varphi(x,y)^2 \leq \varphi(x,x)\,\varphi(y,y)$ que $\varphi(x,y) = 0$ pour tout $y \in \mathrm{E}$, donc x appartient au noyau de E.

4.3. Un peu de géométrie. Division harmonique

Supposons donnée une droite affine Δ, et sur cette droite considérons quatre points A, B, C et D. Supposons ces points deux à deux distincts. On dit que le quadruplet $(\mathrm{A},\mathrm{B},\mathrm{C},\mathrm{D})$ forme une division harmonique si

$$\frac{\overline{\mathrm{CA}}}{\overline{\mathrm{CB}}} = -\frac{\overline{\mathrm{DA}}}{\overline{\mathrm{DB}}}.$$

En écrivant cette relation sous la forme

$$\overline{\mathrm{CA}}\;\overline{\mathrm{DB}} = -\overline{\mathrm{DA}}\;\overline{\mathrm{CB}}$$

on peut inclure un certain nombre de cas particuliers. Par exemple, si $\mathrm{C} = \mathrm{B}$, on doit prendre $\mathrm{D} = \mathrm{B}$ aussi, donc $(\mathrm{A},\mathrm{B},\mathrm{B},\mathrm{B})$ est un cas particulier de division harmonique.

Remarque. La situation est réversible : si $(\mathrm{A},\mathrm{B},\mathrm{C},\mathrm{D})$ est une division harmonique, il en est de même pour $(\mathrm{C},\mathrm{D},\mathrm{A},\mathrm{B})$.

Si on prend pour C le milieu de AB, on ne peut pas trouver de point D qui vérifie la relation de division harmonique. Cependant, si on considère un point C' différent du milieu mais qui s'approche du milieu de AB, on voit que le point D' correspondant s'éloigne à l'infini quand C' tend vers le milieu L. On dit alors que $(\mathrm{A},\mathrm{B},\mathrm{L},\infty)$ forme encore une division harmonique. Cette notion de point à l'infini se formalise précisément avec la notion de droite projective. Supposons que Δ soit représentée comme droite affine du plan, droite ne passant pas par 0, d'équation

$$ux_1 + vx_2 = 1.$$

La *droite projective* $\mathbb{P}_1$ est l'ensemble des droites vectorielles du plan. On obtient une visualisation de la droite projective en associant à chaque $\mathrm{D} \in \mathbb{P}_1$ le point d'intersection x_{D} de D avec la droite Δ. En fait ce procédé ne s'applique pas à la droite exceptionnelle D_0 dont l'équation est $ux_1 + vx_2 = 0$, qui est parallèle à Δ et ne coupe donc pas Δ. On considère que cette droite D_0 parallèle à Δ représente le « point à l'infini » sur Δ. Une droite vectorielle D est formée de points de la forme (td, td'), où t varie dans $\mathbb{R}$ et où (d, d') est un vecteur directeur pour D (il s'agit donc d'un vecteur non nul). On dit que (d, d') est un système de *coordonnées homogènes* pour le « point » D de l'espace $\mathbb{P}_1$. Les coordonnées homogènes ne sont pas uniques. Ainsi, $(1,1)$, $(2,2)$ ou $(-1,-1)$ représentent le même « point » de l'espace projectif. La notion de point à l'infini n'a pas de sens intrinsèque : elle dépend de la droite Δ choisie pour représenter $\mathbb{P}_1$.

Si on utilise les coordonnées homogènes, la relation de division harmonique devient

$$(c'a - a'c)(d'b - b'd) = -(d'a - a'd)(c'b - b'c),$$

où chacun des points $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}, \mathrm{D}$ a des coordonnées homogènes, (a, a') pour A, (b, b') pour B, etc…

On suppose maintenant donnée une droite affine Δ dans un espace vectoriel réel E de dimension ≥ 2, et sur cette droite deux points distincts A et B. On considère deux autres points C et D de la droite, qui sont définis par

$$\overrightarrow{\mathrm{AC}} = \lambda \overrightarrow{\mathrm{AB}}, \quad \overrightarrow{\mathrm{AD}} = \mu \overrightarrow{\mathrm{AB}},$$

où λ et μ sont deux nombres réels. Dire que $(\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}, \mathrm{D})$ forme une division harmonique revient alors à dire que $-\lambda(\mu - 1) = \mu(\lambda - 1)$, soit encore

$$\lambda + \mu = 2\lambda\mu.$$

Les conditions suivantes sont équivalentes.

(a) Les points $(\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}, \mathrm{D})$ forment une division harmonique, c'est-à-dire $(\lambda+\mu) - 2\lambda\mu = 0$.

(b) Pour tout point Ω, pour toute forme quadratique Q de forme polaire φ_{Q}, telle que $\mathrm{Q}(\overrightarrow{\Omega\mathrm{A}}) = \mathrm{Q}(\overrightarrow{\Omega\mathrm{B}}) = 0$, on a $\varphi_{\mathrm{Q}}(\overrightarrow{\Omega\mathrm{C}}, \overrightarrow{\Omega\mathrm{D}}) = 0$.

(c) Pour tout point Ω hors de Δ, il existe une forme quadratique Q de forme polaire φ_{Q}, non identiquement nulle sur le plan vectoriel $[\overrightarrow{\Omega\mathrm{A}}, \overrightarrow{\Omega\mathrm{B}}]$ et telle que $\mathrm{Q}(\overrightarrow{\Omega\mathrm{A}}) = \mathrm{Q}(\overrightarrow{\Omega\mathrm{B}}) = 0$, et $\varphi_{\mathrm{Q}}(\overrightarrow{\Omega\mathrm{C}}, \overrightarrow{\Omega\mathrm{D}}) = 0$.

(d) Il existe un point Ω hors de Δ, une forme quadratique Q de forme polaire φ_{Q}, non identiquement nulle sur le plan vectoriel $[\overrightarrow{\Omega\mathrm{A}}, \overrightarrow{\Omega\mathrm{B}}]$ et telle que $\mathrm{Q}(\overrightarrow{\Omega\mathrm{A}}) = \mathrm{Q}(\overrightarrow{\Omega\mathrm{B}}) = 0$, et $\varphi_{\mathrm{Q}}(\overrightarrow{\Omega\mathrm{C}}, \overrightarrow{\Omega\mathrm{D}}) = 0$.

Étant donné un point Ω, posons $x = \overrightarrow{\Omega\mathrm{A}}$ et $y = \overrightarrow{\Omega\mathrm{B}}$. On a alors $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = y - x$. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, définissons le point $\mathrm{M}(t)$ de la droite Δ par la relation $\overrightarrow{\mathrm{AM}(t)} = t(y - x)$, et posons $z(t) = \overrightarrow{\Omega\mathrm{M}(t)}$. On a donc $z(t) = x + t(y - x) = (1 - t)x + ty$. Notons que $\mathrm{C} = \mathrm{M}(\lambda)$, $\overrightarrow{\Omega\mathrm{C}} = z(\lambda)$, $\mathrm{D} = \mathrm{M}(\mu)$, $\overrightarrow{\Omega\mathrm{D}} = z(\mu)$, $x = z(0)$ et $y = z(1)$. Remarquons qu'une forme quadratique Q telle que $\mathrm{Q}(x) = \mathrm{Q}(y) = 0$, de forme polaire φ, est nulle sur le plan $[x, y]$ si on ajoute la condition $\varphi(x, y) = 0$ (en effet, sa matrice dans la base (x, y) du plan est alors nulle).

Partons de la première hypothèse. Supposons que $\lambda + \mu = 2\lambda\mu$, et soit Q une forme quadratique vérifiant les conditions de (b) ; on suppose donc que $\mathrm{Q}(x) = \mathrm{Q}(y) = 0$. On aura

$$\varphi(z(\lambda), z(\mu)) = \varphi((1 - \lambda)x + \lambda y, (1 - \mu)x + \mu y) = ((1 - \lambda)\mu + \lambda(1 - \mu))\varphi(x, y) = 0,$$

ce qui montre (b).

Supposons maintenant que la propriété (b) soit satisfaite. Soit Ω un point hors de Δ ; il faut trouver une forme quadratique Q qui s'annule pour x et y, non identiquement nulle sur le plan vectoriel $[x, y]$. Posons $e_1 = \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AB}}$. Soit L le milieu de AB et définissons e_2 par $\overrightarrow{\Omega\mathrm{L}} = e_2$. Définissons Q égale à $x_1^2 - x_2^2$, où x_1, x_2 sont les deux premières coordonnées dans une base de E commençant par e_1, e_2. On a alors $\mathrm{Q}(\overrightarrow{\Omega\mathrm{A}}) = \mathrm{Q}(e_2 - e_1) = 0$, et de même pour le point B, on a $\mathrm{Q}(\overrightarrow{\Omega\mathrm{B}}) = \mathrm{Q}(e_1 + e_2) = 0$. D'après l'hypothèse ($b$), on en déduit que $\varphi(\overrightarrow{\Omega\mathrm{C}}, \overrightarrow{\Omega\mathrm{D}}) = 0$. Par ailleurs $\mathrm{Q}(\overrightarrow{\Omega\mathrm{L}}) = -1 \neq 0$, donc on a bien montré la propriété (c).

L'implication (c)$\Rightarrow$(d) est évidente. Supposons pour finir que (d) soit satisfaite. On a alors $\varphi(x, y) \neq 0$ puisque Q n'est pas nulle sur le plan $[x, y]$. De plus

$$\varphi_{\mathrm{Q}}(z(s), z(t)) = (s(1 - t) + t(1 - s))\varphi(x, y),$$

et puisque notre dernière hypothèse est $\varphi(z(\lambda), z(\mu)) = 0$, on obtient bien la relation $\lambda(1 - \mu) + \mu(1 - \lambda) = 0$.

Conséquence. Faisceau de droites passant par des points en division harmonique
On suppose que Δ est une droite du plan, et que sur cette droite quatre points $(\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}, \mathrm{D})$ forment une division harmonique. Par un point Ω hors de Δ on trace quatre droites $\Delta_\alpha, \Delta_\beta, \Delta_\gamma, \Delta_\delta$ qui coupent Δ en $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}, \mathrm{D}$ et une autre droite Δ_1 en $\mathrm{A}_1, \mathrm{B}_1, \mathrm{C}_1, \mathrm{D}_1$. Ces quatre nouveaux points forment une division harmonique.

En effet, puisque Ω est hors de Δ il existe une forme quadratique non triviale qui vérifie les conditions de (c) pour les points $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}, \mathrm{D}$. Les vecteurs correspondants $\overrightarrow{\Omega \mathrm{A}_1}$, $\overrightarrow{\Omega \mathrm{B}_1}$, $\overrightarrow{\Omega \mathrm{C}_1}$ et $\overrightarrow{\Omega \mathrm{D}_1}$ étant des multiples des vecteurs $\overrightarrow{\Omega \mathrm{A}}$, $\overrightarrow{\Omega \mathrm{B}}$, $\overrightarrow{\Omega \mathrm{C}}$ et $\overrightarrow{\Omega \mathrm{D}}$, les bonnes propriétés de Q sur $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}, \mathrm{D}$ se transmettent à $\mathrm{A}_1, \mathrm{B}_1, \mathrm{C}_1, \mathrm{D}_1$: on aura donc $\mathrm{Q}(\overrightarrow{\Omega \mathrm{A}_1}) = 0$, $\mathrm{Q}(\overrightarrow{\Omega \mathrm{B}_1}) = 0$, $\varphi(\overrightarrow{\Omega \mathrm{C}_1}, \overrightarrow{\Omega \mathrm{D}_1}) = 0$, ce qui montre que $(\mathrm{A}_1, \mathrm{B}_1, \mathrm{C}_1, \mathrm{D}_1)$ est une division harmonique.

On appelle *faisceau harmonique de droites* un ensemble de quatre droites du plan avec les propriétés de $\Delta_\alpha, \Delta_\beta, \Delta_\gamma, \Delta_\delta$. Pour toute droite affine Δ ne passant pas par le point d'intersection Ω des quatre droites du faisceau, les quatre points d'intersection de Δ avec les droites du faisceau forment une division harmonique.

Coniques
Considérons une ellipse dans le plan, d'équation
$$a x_1^2 + b x_2^2 = 1,$$
avec $a, b > 0$. On place une « copie » de ce plan dans $\mathbb{R}^3$, à l'altitude $x_3 = 1$. Désignons par Π le plan de $\mathbb{R}^3$ d'équation $x_3 = 1$. La conique Γ du plan Π est l'intersection de Π avec l'ensemble (C) de $\mathbb{R}^3$ défini par l'équation
$$a x_1^2 + b x_2^2 - x_3^2 = 0,$$
c'est-à-dire l'ensemble des vecteurs isotropes d'une forme quadratique de signature $(2, 1)$ sur $\mathbb{R}^3$ donnée par
$$\mathrm{Q}(x) = a x_1^2 + b x_2^2 - x_3^2 = 0.$$
La forme polaire est alors égale à
$$\varphi(x, y) = a\, x_1 y_1 + b\, x_2 y_2 - x_3 y_3.$$

Expliquons le point de vue projectif. Le *plan projectif* est l'ensemble des droites vectorielles de $\mathbb{R}^3$. L'ensemble (C) s'identifie à un ensemble de droites passant par 0, c'est-à-dire à un ensemble de points du plan projectif. C'est une *conique du plan projectif.* Si on coupe (C) par d'autres plans que Π (plans affines qui ne passent pas par 0), on obtient des visualisations différentes de la conique du plan projectif. On peut obtenir ainsi une section plane de (C) qui soit une hyperbole ou une parabole. Par exemple, si on coupe (C) par le plan $x_2 = 1$, la section, projetée sur le plan (x_1, x_3) a pour équation
$$a x_1^2 - x_3^2 = -b,$$
qui est une hyperbole (exercice : trouver un plan qui coupe (C) suivant une parabole).

Conjugaison par rapport à Γ et divisions harmoniques. On dit que deux points M et P du plan Π sont conjugués par rapport à (Γ) si les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ sont φ-orthogonaux. Un point A de Γ est conjugué de lui-même. L'ensemble des conjugués d'un point $\mathrm{M} \in \Pi$ est l'intersection de Π avec le plan vectoriel $\overrightarrow{\mathrm{OM}}^\perp$. C'est donc une droite de Π, appelée *droite polaire* du point M. Supposons que M ne soit pas sur (Γ), que Δ soit une droite passant par M qui recoupe la polaire de M en P, et l'ellipse en A et B. Les points $(\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{M}, \mathrm{P})$ forment une division harmonique. En effet, $\mathrm{Q}(\overrightarrow{\mathrm{OA}}) = \mathrm{Q}(\overrightarrow{\mathrm{OB}}) = 0$ puisque A et B sont deux points de (Γ), et $\varphi(\overrightarrow{\mathrm{OM}}, \overrightarrow{\mathrm{OP}}) = 0$ puisque P appartient à la droite polaire de M.

Exercices.

1. Dans le cas où $\mathrm{M} = \mathrm{A}$ est un point de (Γ), montrer que la droite polaire de M passe par A et ne passe par aucun autre point de (Γ). C'est donc la tangente en A à l'ellipse.
2. Si d'un point M hors de (Γ) on peut tracer deux tangentes à l'ellipse qui touchent l'ellipse en A et B, montrer que la polaire de M est la droite qui passe par A et B.
3. Si on trace des cordes parallèles à une droite Δ du plan Π, montrer que l'ensemble des milieux est situé sur une droite, qui est la polaire du point à l'infini correspondant à la droite vectorielle de même direction que Δ.

Chapitre 5. Espaces euclidiens

5.1. Produit scalaire et normes euclidiennes

Définition 5.1.1. Un *espace euclidien* est un espace vectoriel réel E **de dimension finie** muni d'une forme bilinéaire symétrique φ définie positive.

On dit que φ définit le *produit scalaire* de l'espace euclidien E, et on notera ici le produit scalaire de deux vecteurs x et y de E par *un point* entre les deux vecteurs,

$$x \cdot y = \varphi(x, y).$$

En termes précis, un espace euclidien n'est pas seulement un espace vectoriel, mais un couple (E, φ) d'un espace vectoriel E et d'une forme bilinéaire φ donnée sur $\mathrm{E} \times \mathrm{E}$.

Il peut être instructif de remarquer qu'un certain nombre des propriétés qui seront vues dans ce chapitre ne dépend pas du fait que l'espace vectoriel E soit de dimension finie. On appelle *espace préhilbertien* un espace vectoriel réel E muni d'une forme bilinéaire symétrique φ définie positive.

Exemples.

1. Dans la quasi-totalité de nos exemples, l'espace vectoriel E sera de dimension finie, mais on peut garder un œil un peu ouvert sur d'autres cas, par exemple celui de l'espace $\mathrm{E} = \mathrm{C}([0, 1])$ des fonctions *réelles* continues sur $[0, 1]$ muni de la forme bilinéaire φ définie pour tous $f, g \in \mathrm{E}$ par

$$\varphi(f, g) = \int_0^1 f(t)g(t)\,\mathrm{d}t.$$

Le couple (E, φ) est un espace préhilbertien. En effet, il est clair que φ est bilinéaire, symétrique et positive. Le fait qu'elle soit définie positive provient du résultat suivant : si l'intégrale d'une fonction ≥ 0 continue est nulle, la fonction est nulle.

2. L'exemple le plus commun sera $\mathbb{R}^n$ avec son produit scalaire usuel, défini par

$$\varphi(x, y) = x \cdot y = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n$$

pour deux vecteurs quelconques $x = (x_1, \ldots, x_n)$ et $y = (y_1, \ldots, y_n)$ de $\mathbb{R}^n$.

3. Espace ℓ_2 : c'est l'espace vectoriel (de dimension infinie) formé des suites réelles $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ de carré sommable, c'est-à-dire telles que la série numérique $\sum x_n^2$ converge ; on pose alors

$$x \cdot y = \sum_{n=0}^{\infty} x_n\, y_n.$$

C'est encore un espace préhilbertien. C'est l'extension « naturelle » de l'exemple 2 à la dimension infinie.

4. Si E est un espace euclidien et si F est un sous-espace vectoriel de E, la restriction du produit scalaire de E aux couples de vecteurs de F permet de munir F d'une structure d'espace euclidien. Cette remarque évidente sera appliquée à plusieurs reprises dans ce chapitre.

On rappelle l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour les formes bilinéaires symétriques positives,

$$\varphi(x,y)^2 \le \varphi(x,x)\,\varphi(y,y).$$

Pour un espace euclidien ou préhilbertien E fixé, on notera $\|x\| = \sqrt{x \cdot x}$ et l'inégalité de Cauchy-Schwarz devient dans ce cas

$$\bigl|x \cdot y\bigr| \le \|x\|\,\|y\|.$$

En utilisant la bilinéarité du produit scalaire et sa symétrie ($x \cdot y = y \cdot x$), on obtient la relation

$$(x+y)\cdot(x+y) = x \cdot x + x \cdot y + y \cdot x + y \cdot y = x \cdot x + 2\,x \cdot y + y \cdot y,$$

donc

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + 2\,x \cdot y + \|y\|^2 \tag{1}$$

Lemme. *Soit* E *un espace préhilbertien ; l'application* $x \to \|x\|$ *est une norme sur* E.

Démonstration. On voit que $\|x\| = 0$ signifie que $x \cdot x = \varphi(x,x) = 0$, donc $x = 0_{\mathrm{E}}$ puisque φ est définie positive. À partir de l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on voit facilement que

$$\|x+y\| \le \|x\| + \|y\|$$

(inégalité triangulaire) ; en effet,

$$\|x+y\|^2 = x \cdot x + 2\,x \cdot y + y \cdot y \le x \cdot x + 2\sqrt{x \cdot x}\,\sqrt{y \cdot y} + y \cdot y = \bigl(\|x\| + \|y\|\bigr)^2.$$

Enfin, il est clair que $\|\lambda x\| = |\lambda|\,\|x\|$ pour tout vecteur x et tout scalaire réel λ.

Identité du parallélogramme

Pour deux vecteurs quelconques x, y de l'espace E, on a obtenu ci-dessus la relation $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + 2\,x \cdot y + \|y\|^2$. En additionnant avec la relation analogue obtenue pour les vecteurs x et $-y$, on obtient *l'identité du parallélogramme* :

étant donnés deux vecteurs x, y d'un espace euclidien (ou préhilbertien), on a

$$\Bigl\|\frac{x+y}{2}\Bigr\|^2 + \Bigl\|\frac{x-y}{2}\Bigr\|^2 = \frac{\|x\|^2 + \|y\|^2}{2}.$$

Orthogonalité dans un espace euclidien

On dit que deux vecteurs x et y de E sont **orthogonaux** si $x \cdot y = 0$. Cette relation est symétrique, puisque $y \cdot x = x \cdot y$. On note $x \perp y$. On dit que deux sous-espaces vectoriels E_1 et E_2 sont orthogonaux si on a $x_1 \perp x_2$ pour tous $x_1 \in \mathrm{E}_1$, $x_2 \in \mathrm{E}_2$.

Si $x \perp y$, la relation (1) ci-dessus donne

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2,$$

qu'il est plus ou moins raisonnable d'appeler le *théorème de Pythagore*.

Proposition 5.1.2 : relation de Pythagore. *Si $x_1, \ldots, x_k$ sont deux à deux orthogonaux, on a*

$$\|x_1 + \cdots + x_k\|^2 = \sum_{i=1}^{k} \|x_i\|^2.$$

Démonstration. On a vérifié d'abord le cas $k = 2$, et on peut ensuite faire une démonstration par récurrence sur $k \geq 2$. On remarquera que $(x_1 + \cdots + x_{k-1})$ est orthogonal à x_k, ce qui fournit le résultat en utilisant l'hypothèse de récurrence et le cas de deux vecteurs,

$$\|(x_1 + \cdots + x_{k-1}) + x_k\|^2 = \|x_1 + \cdots + x_{k-1}\|^2 + \|x_k\|^2 = \cdots$$

Corollaire 5.1.3. *Si des vecteurs d'un espace euclidien ou préhilbertien sont deux à deux orthogonaux et* **non nuls***, ils sont linéairement indépendants.*

Corollaire 5.1.4. *Soit* E *un espace euclidien ou préhilbertien ; si les sous-espaces vectoriels* $\mathrm{E}_1, \mathrm{E}_2, \ldots, \mathrm{E}_k$ *de* E *sont deux à deux orthogonaux, ils forment une somme directe* $\mathrm{E}_1 \oplus \cdots \oplus \mathrm{E}_k$ *dans* E.

Base orthonormée

Soit E un espace euclidien ; on dit qu'un système $(x_1, \ldots, x_n)$ de vecteurs de E est une **base orthonormée** de E si c'est une base de E et si les vecteurs (x_i) sont deux à deux orthogonaux et de norme 1,

$$\forall i \neq j, \quad x_i \cdot x_j = 0\,; \;\; \forall i = 1, \ldots, n, \;\; \|x_i\| = 1.$$

On peut abréger en utilisant le *symbole de Kronecker*,

$$\forall i = 1, \ldots, n, \quad x_i \cdot x_j = \delta_{i,j}.$$

Théorème 5.1.5. *Tout espace euclidien admet une base orthonormée.*

Démonstration. On a vu dans le chapitre 4 que pour toute forme bilinéaire symétrique φ sur un espace E de dimension finie sur le corps des réels, il existe une base $(e_1, \ldots, e_n)$ de E formée de vecteurs deux à deux φ-orthogonaux telle que pour tout i, $\varphi(e_i, e_i)$ soit égal à 1, -1 ou 0. Ici, puisque φ est définie positive, le seul cas possible est $\varphi(e_i, e_i) = 1$, ce qui termine la démonstration. Mais plutôt que de renvoyer ainsi à la lecture du chapitre 4, il est peut être plus agréable pour le lecteur de montrer directement l'existence d'une base orthonormée pour E en reprenant rapidement la démonstration de la partie du résultat du chapitre 4 dont nous avons besoin ici : le résultat est évident si $\dim \mathrm{E} = 1$. Soit $n > 1$, et supposons le résultat démontré pour tout espace euclidien F de dimension $< n$; soit E un espace euclidien de dimension n ; on choisit un vecteur e_1 de norme 1 dans E. L'ensemble des vecteurs $y \in \mathrm{E}$ tels que $y \perp e_1$ forme un espace euclidien F de dimension $n - 1$, qui admet donc une base orthonormée $(e_2, \ldots, e_n)$ d'après l'hypothèse de récurrence. Alors $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ est une base orthonormée de E.

La méthode de Gram-Schmidt qui est présentée plus loin donnera une variante de démonstration pour le théorème 5.1.5.

Coordonnées dans une base orthonormée

Soit E un espace euclidien, et calculons les coordonnées d'un vecteur x de E dans une base orthonormée $(e_1, \dots, e_n)$. Écrivons $x = \sum_{i=1}^n c_i e_i$. En calculant le produit scalaire $x \cdot e_j$, on obtient $c_j = x \cdot e_j$, puisque

$$x \cdot e_j = \Big(\sum_{i=1}^n c_i e_i\Big) \cdot e_j = \sum_{i=1}^n c_i \, e_i \cdot e_j = \sum_{i=1}^n c_i \, \delta_{i,j} = c_j.$$

On voit donc que :

$$x = \sum_{i=1}^n (x \,.\, e_i) \, e_i.$$

D'après Pythagore on aura $\|x\|^2 = \sum_{i=1}^n \|c_i e_i\|^2 = \sum_{i=1}^n c_i^2$. On en déduit le calcul de la norme du vecteur x à partir des coordonnées dans une base orthonormée,

$$\|x\|^2 = \sum_{i=1}^n (x \,.\, e_i)^2.$$

Ces calculs de coordonnées s'appliquent au calcul de la matrice d'un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ dans une base orthonormée $(e_1, \dots, e_n)$ de E : la matrice $\mathrm{A} = (a_{i,j})$ admet pour coefficients de la colonne j les coordonnées du vecteur image $u(e_j)$, par conséquent

$$a_{i,j} = u(e_j) \cdot e_i.$$

5.2. Projection orthogonale

Soit E un espace euclidien (ou préhilbertien) ; si x est un vecteur de E et F un sous-espace vectoriel de E, on dit qu'un vecteur y est la *projection orthogonale* de x sur F si

$$y \in \mathrm{F} \quad \text{et} \quad x - y \perp \mathrm{F}.$$

Le vecteur y est uniquement déterminé par ces deux conditions : si y_1 et y_2 vérifient ces conditions, alors $x - y_1$ et $x - y_2$ sont orthogonaux à F, donc la différence $y_1 - y_2$ est orthogonale à F. Mais puisque $y_1 - y_2 \in \mathrm{F}$, on peut écrire $(y_1 - y_2) \cdot (y_1 - y_2) = 0$, ce qui implique que $y_1 = y_2$.

Lorsque y existe, on note $y = \mathrm{P_F}(x)$. Si le sous-espace F est de dimension finie, la projection $\mathrm{P_F}(x)$ existe toujours : si on choisit une base orthonormée $(e_1, \dots, e_k)$ de F, on peut décrire l'application $\mathrm{P_F}$ de projection orthogonale de E sur F en posant pour tout $x \in \mathrm{E}$

$$\mathrm{P_F}(x) = \sum_{i=1}^k (x \cdot e_i) \, e_i \in \mathrm{F}.$$

On voit de plus par cette formule que $\mathrm{P_F}$ est une application linéaire ; il est clair que pour tout vecteur $y \in \mathrm{F}$ on a $\mathrm{P_F}(y) = y$, ce qui entraîne que $\mathrm{P_F}(\mathrm{P_F}(x)) = \mathrm{P_F}(x)$ pour tout $x \in \mathrm{E}$, c'est-à-dire que $(\mathrm{P_F})^2 = \mathrm{P_F}$ (l'application linéaire $\mathrm{P_F}$ est un *projecteur*).

Si z est un vecteur quelconque de F, on pourra écrire $x - z = (x - \mathrm{P_F}(x)) + (\mathrm{P_F}(x) - z)$ et puisque $\mathrm{P_F}(x) - z \in \mathrm{F}$ on a par Pythagore

$$\|x - z\|^2 = \|x - \mathrm{P_F}(x)\|^2 + \|\mathrm{P_F}(x) - z\|^2.$$

Cette relation montre que $\|x-z\| \geq \|x-\mathrm{P_F}(x)\|$ pour tout $z \in \mathrm{F}$, donc $\mathrm{P_F}(x)$ est le point de F qui est le plus proche de x.

Exercice. Montrer que cette propriété de plus courte distance caractérise $\mathrm{P_F}(x)$.

Si F est un espace préhilbertien de dimension infinie, il est possible que la projection de $x \in \mathrm{E}$ sur F n'existe pas, mais elle existe toujours lorsque F est *complet* pour la distance $d(x,y) = \|x-y\|$.

En prenant $z = 0_\mathrm{E}$ dans la relation précédente, on obtient aussi $\|x\|^2 \geq \|\mathrm{P_F}(x)\|^2$, ce qui donne par linéarité $\|\mathrm{P_F}(x_1) - \mathrm{P_F}(x_2)\| \leq \|x_1 - x_2\|$ pour tous vecteurs $x_1, x_2 \in \mathrm{E}$: l'application $\mathrm{P_F}$ diminue les distances.

On définit l'orthogonal $\mathrm{F}^\perp$ d'un sous-espace vectoriel F de E par

$$\mathrm{F}^\perp = \{x \in \mathrm{E} : x \perp \mathrm{F}\}.$$

On voit que $\mathrm{F}^\perp$ est un sous-espace vectoriel de E.

Proposition 5.2.1. *Soit* E *un espace euclidien (ou préhilbertien) et soit* F *un sous-espace vectoriel de dimension finie de* E *; on a*

$$\mathrm{E} = \mathrm{F} \oplus \mathrm{F}^\perp \quad \textit{et} \quad (\mathrm{F}^\perp)^\perp = \mathrm{F}.$$

Démonstration. Tout vecteur $x \in \mathrm{E}$ peut s'écrire $x = \mathrm{P_F}(x) + (x - \mathrm{P_F}x)$, avec $\mathrm{P_F}(x) \in \mathrm{F}$ et $x - \mathrm{P_F}(x) \in \mathrm{F}^\perp$, ce qui montre que $\mathrm{E} = \mathrm{F} + \mathrm{F}^\perp$; de plus, on voit que $\mathrm{F} \cap \mathrm{F}^\perp = \{0\}$, donc la somme est directe (un vecteur commun à F et à $\mathrm{F}^\perp$ est orthogonal à lui-même, donc il est nul). Montrons la deuxième propriété de l'énoncé. On a toujours $\mathrm{F} \subset \mathrm{F}^{\perp\perp}$: si $x \in \mathrm{F}$, il est orthogonal à tous les vecteurs $y \in \mathrm{F}^\perp$. Inversement, si $x \in \mathrm{F}^{\perp\perp}$, on écrit $x = f + g$, avec $f \in \mathrm{F}$ et $g \perp \mathrm{F}$. Puisque x est orthogonal à $\mathrm{F}^\perp$, on aura $0 = x \cdot g = f \cdot g + g \cdot g = g \cdot g$, donc $g = 0_\mathrm{E}$ et $x = f \in \mathrm{F}$.

Ce résultat n'est pas vrai en toute généralité dans le cas préhilbertien de dimension infinie. Sous certaines conditions topologiques qui sont largement hors programme, on peut étendre la proposition 5.2.1 : si E est préhilbertien *complet* (on dit alors que E est un *espace de Hilbert*) et si F est un sous-espace vectoriel *fermé* de E, la décomposition $\mathrm{E} = \mathrm{F} \oplus \mathrm{F}^\perp$ reste valable.

Si E est un espace euclidien et si F est un sous-espace différent de E, son orthogonal $\mathrm{F}^\perp$ est donc $\neq \{0\}$.

Corollaire 5.2.2. *Soient* E *un espace euclidien et* F *un sous-espace vectoriel de* E *; on a*

$$\mathrm{E} = \mathrm{F} \oplus \mathrm{F}^\perp \quad \textit{et} \quad (\mathrm{F}^\perp)^\perp = \mathrm{F}.$$

Procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt

Donnons d'abord le principe général : soient E un espace euclidien, F un sous-espace vectoriel de E dont on connaît une base orthonormée $(e_1, \ldots, e_k)$, et soit $x \notin \mathrm{F}$; alors le vecteur $y = x - \mathrm{P_F}(x)$ est non nul, orthogonal à F et $e_{k+1} = y/\|y\|$ permet d'allonger notre système orthonormé.

On peut utiliser ce principe dans le cas où une base de E est déjà donnée (mais pas orthogonale), pour construire une nouvelle base de E qui soit orthonormée. On suppose donc donnée une base quelconque $(f_1, f_2, \ldots, f_n)$ de E, et on va construire à partir de cette base une base orthonormée $(e_1, \ldots, e_n)$; la construction se fera de façon que pour chaque $k = 1, \ldots, n$ on ait

$$\mathrm{F}_k = [f_1, \ldots, f_k] = [e_1, \ldots, e_k].$$

On commence en posant $e_1 = f_1/\|f_1\|$. Si les vecteurs $e_1, \ldots, e_{k-1}$ sont déjà déterminés, avec $\mathrm{F}_{k-1} = [e_1, \ldots, e_{k-1}]$, on considère $u_k = f_k - \mathrm{P}_{\mathrm{F}_{k-1}}(f_k)$. Puisque $\mathbf{f}$ est une base, on sait que $f_k \notin \mathrm{F}_{k-1}$, donc $u_k \neq 0_\mathrm{E}$, et on peut poser $e_k = u_k/\|u_k\|$. On vérifie facilement que $[e_1, \ldots, e_k] = [f_1, \ldots, f_k]$. Quand on arrive à $k = n$ on a $[e_1, \ldots, e_n] = [f_1, \ldots, f_n]$, ce qui montre que $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base de E. Elle est orthonormée par construction.

Si on part d'une base orthonormée $(e_1, \ldots, e_k)$ d'un sous-espace F, complétée par une famille $(f_{k+1}, \ldots, f_n)$ pour former une base de E, on peut appliquer la méthode à partir de l'étape qui définit e_{k+1} pour trouver une famille $(e_{k+1}, \ldots, e_n)$ qui complète le système $(e_1, \ldots, e_k)$ en une base orthonormée de E.

Le procédé peut aussi s'appliquer en dimension infinie, quand on dispose au départ d'une suite infinie (f_n) de vecteurs d'un espace préhilbertien E, telle que $(f_1, \ldots, f_n)$ soit libre pour tout entier n : on produira dans ce cas une suite orthonormée infinie (e_n) dans l'espace préhilbertien.

Exemple : polynômes orthogonaux sur $[-1, 1]$.

Considérons l'espace préhilbertien $\mathrm{E} = \mathrm{C}([-1, 1])$ des fonctions continues sur $[-1, 1]$, muni du produit scalaire $f \cdot g = \int_{-1}^{1} f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$; on part de la suite (f_n) des fonctions polynomiales $1, x, \ldots, x^n, \ldots$ Les termes successifs produits par le procédé de Gram-Schmidt fournissent des polynômes, dont les premiers sont

$$\frac{1}{\sqrt{2}},\ \sqrt{\frac{3}{2}}\,\mathrm{X},\ \sqrt{\frac{5}{8}}\,\bigl(3\mathrm{X}^2 - 1\bigr),\ \sqrt{\frac{7}{8}}\,(5\mathrm{X}^3 - 3\mathrm{X}), \ldots$$

et les calculs de la méthode de Gram-Schmidt deviennent très vite terrrifiants.

Il est plus facile de trouver ces polynômes orthogonaux en faisant un peu plus de mathématiques… On montre à cet effet que les polynômes

$$\mathrm{P}_n = \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\,(\mathrm{X}^2 - 1)^n$$

sont deux à deux orthogonaux, et on vérifie que $\deg \mathrm{P}_n = n$ pour tout entier $n \geq 0$. Les polynômes cherchés sont alors simplement des multiples convenables des P_n.

Pour montrer que les (P_n) sont orthogonaux, on remarquera que les dérivées d'ordre $k < n$ de $(\mathrm{X}^2 - 1)^n$ s'annulent aux points -1 et 1. On utilisera cette remarque, jointe à des intégrations par parties convenables, pour montrer que P_n est orthogonal à P_m lorsque $n < m$ (on dérive P_n jusqu'à ce que la dérivée $(n+1)$-ième s'annule, et on intègre P_m sous la forme $\frac{\mathrm{d}^{m-k}}{\mathrm{d}x^{m-k}}\,(\mathrm{X}^2 - 1)^m$, avec k variant de 1 à $n < m$).

Exercice : polynômes d'Hermite. Montrer que la formule

$$\mathrm{e}^{tx-t^2/2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{n!}\,\mathrm{H}_n(x)$$

pour tous x, t réels, définit une suite (H_n) de polynômes ; vérifier que $\deg \mathrm{H}_n = n$ pour tout $n \geq 0$, et déterminer H_n pour $n \leq 3$. Montrer que les fonctions $f_n(x) = \mathrm{H}_n(x)\,\mathrm{e}^{-x^2/4}$ sont deux à deux orthogonales pour le produit scalaire $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$.

Dual d'un espace euclidien

Théorème 5.2.3. *Soit* E *un espace euclidien ; pour toute forme linéaire* ℓ *sur* E *il existe un vecteur* $y \in \mathrm{E}$ *(unique) tel que*

$$\forall x \in \mathrm{E}, \quad \ell(x) = x \cdot y.$$

Démonstration. Si $\ell = 0$ il suffit de prendre $y = 0$. Sinon soit $x_0 \in \mathrm{E}$ tel que $\ell(x_0) = 1$ et soit $\mathrm{F} = \ker \ell$; posons $y_0 = \mathrm{P}_\mathrm{F}(x_0)$ et $z_0 = x_0 - y_0$; on a $\ell(z_0) = \ell(x_0) = 1$, et de plus $z_0 \perp \mathrm{F}$. Soit $x \in \mathrm{E}$; on peut écrire $x = (x - \ell(x)z_0) + \ell(x)z_0$. On vérifie que $x - \ell(x)z_0 \in \mathrm{F}$, donc $z_0 \perp (x - \ell(x)z_0)$ et $x \cdot z_0 = \ell(x)(z_0 \cdot z_0)$ pour tout $x \in \mathrm{E}$, donc en posant $y = z_0/(z_0 \cdot z_0)$ on obtient bien

$$\forall x \in \mathrm{E}, \quad \ell(x) = x \cdot y.$$

Autre démonstration. On définit une application linéaire i_E de E dans E^* en posant pour tout $y \in \mathrm{E}$,

$$i_\mathrm{E}(y)(x) = x \cdot y \ \text{ pour tout } x \in \mathrm{E}.$$

Si $i_\mathrm{E}(y) = 0_{\mathrm{E}^*}$, on a en particulier $0 = i_\mathrm{E}(y)(y) = y \cdot y$, donc $y = 0_\mathrm{E}$. L'application i_E est donc injective, donc surjective puisque $\dim \mathrm{E} = \dim \mathrm{E}^*$.

On notera que si $\ell = i_\mathrm{E}(y)$, alors

$$\forall x \in \mathrm{E}, \quad x \cdot i_\mathrm{E}^{-1}(\ell) = \ell(x).$$

5.3. Endomorphismes des espaces euclidiens

Adjointe d'une application linéaire

Proposition 5.3.1. *Soient* E *et* F *deux espaces euclidiens ; pour toute application linéaire* $u \in \mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$, *il existe une application linéaire unique* $u^* \in \mathcal{L}(\mathrm{F}, \mathrm{E})$ *telle que*

$$u(x) \cdot y = x \cdot u^*(y) \ \textit{ pour tous } x \in \mathrm{E},\ y \in \mathrm{F}.$$

Démonstration. Montrons d'abord l'unicité de u^*. Choisissons une base orthonormée $\mathbf{e} = (e_1, \ldots, e_n)$ de l'espace E, soit $\mathbf{f} = (f_1, \ldots, f_m)$ une base orthonormée de F et soit $\mathrm{A} = (a_{i,j}) = \mathrm{mat}(u, \mathbf{e}, \mathbf{f})$; supposons que v soit une application linéaire de F dans E telle que $u(x) \cdot y = x \cdot v(y)$ pour tous $x \in \mathrm{E}$ et $y \in \mathrm{F}$. On aura pour la matrice $\mathrm{B} = \mathrm{mat}(v, \mathbf{f}, \mathbf{e})$ de l'application linéaire v

$$b_{i,j} = v(f_j) \cdot e_i = e_i \cdot v(f_j) = u(e_i) \cdot f_j = a_{j,i},$$

donc la matrice B est complètement déterminée, et l'endomorphisme v aussi. Inversement, posons $a^*_{i,j} = a_{j,i}$ pour tous $i = 1, \ldots, n$ et $j = 1, \ldots, m$. On définit ainsi une matrice A^*. Si on définit u^* par

$$\forall j = 1, \ldots, m, \quad u^*(f_j) = \sum_{i=1}^{n} a^*_{i,j} e_i$$

on vérifie que u^* convient.

Autre démonstration. On utilise la transposée ${}^t u : \mathrm{F}^* \to \mathrm{E}^*$ et l'identification du dual donnée par le théorème 5.2.3, qui donne deux isomorphismes $i_{\mathrm{E}} : \mathrm{E} \to \mathrm{E}^*$ et $i_{\mathrm{F}} : \mathrm{F} \to \mathrm{F}^*$. On pose alors $u^* = (i_{\mathrm{E}})^{-1} \circ {}^t u \circ i_{\mathrm{F}}$. En effet, avec cette définition

$$x \cdot u^*(y) = x \cdot i_{\mathrm{E}}^{-1}({}^t u(i_{\mathrm{F}}(y))) = {}^t u(i_{\mathrm{F}}(y))(x) = i_{\mathrm{F}}(y)(u(x)) = u(x) \cdot y$$

pour tous $x \in \mathrm{E}$ et $y \in \mathrm{F}$.

Matrice de l'adjoint par rapport à deux bases orthonormées

Supposons donnée une base orthonormée $\mathbf{e}$ de E et une base orthonormée $\mathbf{f}$ de F. Soit $\mathrm{A} = (a_{i,j}) = \mathrm{mat}(u, \mathbf{e}, \mathbf{f})$; on vient de voir dans la démonstration précédente que la matrice $\mathrm{B} = \mathrm{mat}(u^*, \mathbf{f}, \mathbf{e})$ de u^* est égale à la matrice transposée de A, c'est-à-dire que pour tous $i = 1, \ldots, n$ et $j = 1, \ldots, m$ on a

$$b_{i,j} = a_{j,i}.$$

Ce qui a été dit s'applique en particulier aux *endomorphismes* d'un espace euclidien E (lorsque $\mathrm{F} = \mathrm{E}$). Dans ce cas, pour tout endomorphisme $u \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$, l'application u^* est aussi un endomorphisme de E. Quand $\mathrm{E} = \mathrm{F}$, on choisit en général de calculer la matrice de u (et celle de u^*) en prenant deux fois la même base pour E.

Opérations sur l'adjoint

Donnons quelques propriétés faciles à vérifier. Il est clair que $u^{**} = u$ et $(\lambda u)^* = \lambda u^*$ (pour tout réel λ). Pour tous $u, v \in \mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$, on a $(u + v)^* = u^* + v^*$. Si w est une application linéaire de F dans un troisième espace euclidien G, $(wu)^* = u^* w^*$. Dans le cas particulier des endomorphismes, on peut ajouter que $\mathrm{Id}_{\mathrm{E}}^* = \mathrm{Id}_{\mathrm{E}}$.

Endomorphismes symétriques (ou autoadjoints)

Définition 5.3.2. Soient E un espace euclidien et u un endomorphisme de E ; on dit que u est un *endomorphisme symétrique* si $u^* = u$, ce qui équivaut à dire que

$$\forall x, y \in \mathrm{E},\ u(x) \cdot y = x \cdot u(y).$$

La matrice de u dans toute base orthonormée de E est alors symétrique, c'est-à-dire qu'on a $\mathrm{A} = {}^t\mathrm{A}$. Inversement, si la matrice de u dans *une* base orthonormée est symétrique, l'endomorphisme u est symétrique.

Une somme d'endomorphismes symétriques est un endomorphisme symétrique. Si λ est réel et u symétrique, λu est symétrique. Si u est symétrique, ses puissances sont symétriques. Si P est un polynôme à coefficients réels, $\mathrm{P}(u)$ est donc symétrique.

Soit E un espace euclidien ; on dit que $u \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ est *anti-symétrique* si $u^* = -u$, c'est-à-dire si

$$u(x) \cdot y = -\, x \cdot u(y) \;\text{ pour tous } x, y \in \mathrm{E}.$$

On note qu'alors $u(x) \cdot x = 0$ pour tout $x \in \mathrm{E}$. On voit que u est anti-symétrique si et seulement si la matrice de u dans une base orthonormée est anti-symétrique.

Lemme. *Si $u \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ est symétrique, et si $u(\mathrm{F}) \subset \mathrm{F}$, la restriction v de u à F est un endomorphisme symétrique de F. De même, si $u \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ est anti-symétrique, et si $u(\mathrm{F}) \subset \mathrm{F}$, la restriction v de u à F est un endomorphisme anti-symétrique de F.*

Démonstration. Vérifions le premier cas. Supposons u symétrique et posons $v = u_{|\mathrm{F}}$. On aura alors

$$\forall x, y \in \mathrm{F},\; v(x) \cdot y = u(x) \cdot y = x \cdot u(y) = x \cdot v(y),$$

ce qui montre que v est symétrique. La démonstration du cas anti-symétrique est analogue.

Proposition 5.3.3. *Si $u \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ est symétrique ou bien anti-symétrique, et si $u(\mathrm{F}) \subset \mathrm{F}$, l'orthogonal $\mathrm{F}^\perp$ de F est stable par u.*

Démonstration. Supposons que $y \in \mathrm{F}^\perp$ et montrons que $u(y) \in \mathrm{F}^\perp$. Soit $x \in \mathrm{F}$; on a $u(x) \in \mathrm{F}$, donc $u(x) \cdot y = 0$, ce qui entraîne

$$0 = u(x) \cdot y = \pm\, x \cdot u(y),$$

donc $u(y)$ est orthogonal à tout vecteur $x \in \mathrm{F}$.

Diagonalisation des endomorphismes symétriques

Pour parler de diagonalisation, il est plus agréable d'admettre les valeurs complexes.

Définition 5.3.4. Soit A une matrice carrée à coefficients complexes ; on dit que A est une *matrice hermitienne* si ${}^t\overline{\mathrm{A}} = \mathrm{A}$, c'est-à-dire si

$$a_{i,j} = \overline{a_{j,i}}$$

pour tout couple (i, j) d'indices.

Exemples.

1. La matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}$$

est hermitienne.

2. On remarque que les matrices symétriques réelles sont un cas particulier des matrices hermitiennes.

Pour travailler dans le cas complexe, il est plus commode d'utiliser le *produit scalaire complexe* sur $\mathbb{C}^n$, défini par

$$\langle \mathrm{X}, \mathrm{Y} \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y}_i = {}^t\mathrm{X}\overline{\mathrm{Y}} = {}^t\overline{\mathrm{Y}}\mathrm{X},$$

si $X, Y \in \mathbb{C}^n$ ont pour coordonnées respectives $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{C}$ et $y_1, \ldots, y_n \in \mathbb{C}$. On note que $\langle X, X \rangle = \sum_{i=1}^n |x_i|^2$ est un réel ≥ 0, qui est nul si et seulement si $X = 0$. On remarque aussi les propriétés importantes suivantes

$$\langle Y, X \rangle = \overline{\langle X, Y \rangle}; \quad \langle \lambda X, Y \rangle = \lambda \langle X, Y \rangle; \quad \langle X, \lambda Y \rangle = \overline{\lambda} \langle X, Y \rangle$$

pour tous $X, Y \in \mathbb{C}^n$ et $\lambda \in \mathbb{C}$. On dit que $X, Y \in \mathbb{C}^n$ sont $\mathbb{C}$-orthogonaux si $\langle X, Y \rangle = 0$. Cette relation d'orthogonalité est symétrique (bien que le produit scalaire complexe ne soit pas symétrique !).

Lemme. *Soit* A *une matrice carrée hermitienne ; les valeurs propres de* A *sont réelles. En particulier, si* A *est réelle symétrique, toutes ses valeurs propres sont réelles.*

Démonstration. Si A est une matrice hermitienne, on voit que pour tous les vecteurs colonne X et $Y \in \mathbb{C}^n$, on a

$$\langle AX, Y \rangle = \langle X, AY \rangle.$$

En effet, $\langle AX, Y \rangle = {}^t\overline{Y} AX = {}^t\overline{Y}\, {}^t\overline{A} X = {}^t\overline{(AY)}\, X = \langle X, AY \rangle$. Il en résulte que $\langle AX, X \rangle$ est un nombre réel pour tout $X \in \mathbb{C}^n$, puisque $\langle AX, X \rangle = \langle X, AX \rangle = \overline{\langle AX, X \rangle}$. Supposons que λ soit une valeur propre de A. Il existe alors un vecteur colonne $Z \in \mathbb{C}^n$ non nul tel que $AZ = \lambda Z$. On a alors

$$\langle AZ, Z \rangle = \lambda \langle Z, Z \rangle,$$

ce qui entraîne que λ est réel puisque $\langle AZ, Z \rangle$ est réel et $\langle Z, Z \rangle$ réel > 0.

Exercice. Diagonaliser la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}.$$

Pour toute matrice complexe A, on définit la matrice A^* qui est la transposée de la conjuguée de A,

$$A^* = {}^t\overline{A}$$

et qu'on appelle la *matrice adjointe* de la matrice A. C'est la notion correcte d'adjoint dans le cas complexe, qui vérifie $\langle AX, Y \rangle = \langle X, A^*Y \rangle$ pour tous $X, Y \in \mathbb{C}^n$. Une matrice carrée complexe A est donc hermitienne si et seulement si $A^* = A$.

Revenons à la diagonalisation des endomorphismes symétriques.

Théorème 5.3.5 : diagonalisation des endomorphismes symétriques. *Soit* E *un espace euclidien ; si $u \in \mathcal{L}(E)$ est symétrique, u est diagonalisable (en particulier, les racines du polynôme caractéristique de u sont réelles) et les sous-espaces propres de u sont deux à deux orthogonaux. Il en résulte qu'on peut trouver une base orthonormée de* E *formée de vecteurs propres de u.*

Démonstration. On montre d'abord que les racines du polynôme caractéristique de u sont réelles. On choisit une base orthonormée de E. Soit A la matrice de u dans cette base ; la matrice A est réelle et symétrique, donc ses valeurs propres sont réelles, ce qui donne notre premier point. On montre ensuite que les sous-espaces propres sont deux à deux orthogonaux. Si λ et μ sont deux valeurs propres distinctes, si $u(x) = \lambda x$ et $u(y) = \mu y$, on a

$$\lambda\,(x \cdot y) = u(x) \cdot y = x \cdot u(y) = \mu\,(x \cdot y),$$

donc $x \cdot y = 0$ puisque $\lambda \neq \mu$.

On montre maintenant que u est diagonalisable. On applique la proposition 5.3.3 à la somme des espaces propres, $F = E_1 \oplus \cdots \oplus E_k$. Il est clair que $u(F) \subset F$, donc l'orthogonal

$G = F^{\perp}$ de F est stable par u, et la restriction de u à G est un endomorphisme symétrique, qui aura un vecteur propre si $G \neq \{0\}$ (d'après la première partie de la démonstration). Mais ceci est impossible puisque tous les vecteurs propres de u sont dans F. On a donc $F = E$ et u est diagonalisable.

Indiquons une autre démonstration de la diagonalisabilité de u : puisque toutes les racines μ du polynôme caractéristique sont réelles, il reste à montrer que pour chaque racine μ on a $\ker(u - \mu \, \mathrm{Id}_E) = \ker(u - \mu \, \mathrm{Id}_E)^2$: l'endomorphisme $v = u - \mu \, \mathrm{Id}_E$ est symétrique ; si $v^2(x) = 0$, on aura $v(x) \cdot v(x) = v^2(x) \cdot x = 0$, donc $v(x) = 0$.

Il existe encore une autre preuve, qui n'utilise pas l'existence de valeur propre pour une matrice complexe (existence qui résulte du théorème de d'Alembert, théorème qui est en général admis, au niveau d'un cours de deuxième année).

Désignons par E un espace euclidien et par S la sphère unité de E ; soit u un endomorphisme symétrique de E ; considérons la fonction f réelle définie sur S par

$$\forall x \in S, \quad f(x) = u(x) \cdot x.$$

Cette fonction continue f atteint son maximum sur le fermé borné S de l'espace de dimension finie E (utiliser Bolzano-Weierstrass), en un point x_0. Soit v un vecteur de norme un, orthogonal à x_0 ; pour tout θ réel, le vecteur

$$x_\theta = \cos(\theta) x_0 + \sin(\theta) v$$

est dans S, donc la fonction (dérivable)

$$\theta \to f(x_\theta) = u(x_\theta) \cdot x_\theta = \cos^2(\theta) u(x_0) \cdot x_0 + 2\cos(\theta)\sin(\theta) u(x_0) \cdot v + \sin^2(\theta) u(v) \cdot v$$

(on a utilisé $u(x_0) \cdot v = u(v) \cdot x_0$) atteint son maximum pour $\theta = 0$. Par conséquent,

$$0 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta} f(x_\theta) \Big|_{\theta=0} = 2u(x_0) \cdot v.$$

Il en résulte que $u(x_0)$ est orthogonal à tout vecteur y orthogonal à x_0 (y est un multiple scalaire d'un vecteur tel que v). Si $F = \mathbb{R}x_0$, cela signifie que $u(x_0) \in F^{\perp\perp} = F$, donc $u(x_0)$ est proportionnel à x_0 : on a prouvé l'existence d'un vecteur propre pour u. Pour conclure, on utilise le fait que l'orthogonal E_1 de ce vecteur propre est stable par u, et une récurrence sur la dimension.

Si A est une matrice hermitienne, elle permet de définir un endomorphisme $a = A^{\mathbb{C}}$ de $\mathbb{C}^n$ en posant $a(x) = AX$ pour tout élément x de $\mathbb{C}^n$, représenté par la matrice colonne X. Cet endomorphisme vérifie alors

$$\langle a(x), y \rangle = \langle x, a(y) \rangle$$

pour tous $x, y \in \mathbb{C}^n$. Il est utile d'énoncer le résultat de diagonalisation pour un endomorphisme d'un sous-espace de $\mathbb{C}^n$, plutôt que de se restreindre au seul langage matriciel. Si E est un $\mathbb{C}$-sous-espace vectoriel de $\mathbb{C}^n$, on dira qu'un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ est un *endomorphisme hermitien* si $\langle u(x), y \rangle = \langle x, u(y) \rangle$ pour tous $x, y \in E$.

Théorème 5.3.6 : diagonalisation des endomorphismes hermitiens. *Soient* E *un* $\mathbb{C}$*-sous-espace vectoriel de* $\mathbb{C}^n$ *et* u *un endomorphisme hermitien de* E *; alors*

– *les valeurs propres de u sont réelles*

– *les sous-espaces propres de u sont deux à deux $\mathbb{C}$-orthogonaux ;*

– *de plus u est diagonalisable, et on peut trouver une base $\mathbb{C}$-orthonormée de* E *formée de vecteurs propres de u.*

Démonstration. On peut donner une démonstration presque identique à celle du théorème 5.3.5. Rappelons que les valeurs propres de u sont réelles : si $u(x) = \lambda x$, on aura en supposant $\langle x, x\rangle = 1$ que $\lambda = \langle \lambda x, x\rangle = \langle u(x), x\rangle = \langle x, u(x)\rangle = \overline{\lambda}$. On montre ensuite que les sous-espaces propres de u sont deux à deux $\mathbb{C}$-orthogonaux. Si λ et μ sont deux valeurs propres distinctes, si $u(x) = \lambda x$ et $u(y) = \mu y$, on a

$$\lambda \langle x, y\rangle = \langle u(x), y\rangle = \langle x, u(y)\rangle = \overline{\mu} \langle x, y\rangle = \mu \langle x, y\rangle,$$

(parce que μ est réel) donc $\langle x, y\rangle = 0$. Pour finir on montre que u est diagonalisable par récurrence sur la dimension k de E. C'est évident si $k = 1$. Supposons $k > 1$ et supposons le résultat vrai lorsque $v \in \mathcal{L}(\mathrm{F})$ est hermitien, pour tout sous-espace $\mathrm{F} \subset \mathbb{C}^n$ tel que $\dim \mathrm{F} < k$. Soit maintenant E un sous-espace de dimension k de $\mathbb{C}^n$ et soit u un endomorphisme hermitien de E ; puisqu'on travaille sur $\mathbb{C}$, on peut toujours trouver un vecteur propre x de u, qui vérifie donc que $x \neq 0_{\mathrm{E}}$ et $u(x) = \lambda x$ (avec λ réel d'après ce qui précède). On peut supposer $\|x\| = 1$. Alors

$$\mathrm{F} = \{y \in \mathrm{E} : y \perp x\}$$

est un sous-espace de dimension $k - 1$, qui est stable par u (en effet, pour tout $y \in \mathrm{F}$, on a $\langle u(y), x\rangle = \langle y, u(x)\rangle = \lambda\langle y, x\rangle = 0$, donc $u(y) \in \mathrm{F}$). On applique alors l'hypothèse de récurrence à la restriction v de u à F : on trouve une base $\mathbb{C}$-orthonormée $(e_2, \ldots, e_k)$ de F formée de vecteurs propres de v, donc de u ; pour finir, $(x, e_2, \ldots, e_k)$ est une base $\mathbb{C}$-orthonormée de E formée de vecteurs propres de u.

Cas de deux endomorphismes symétriques qui commutent

Proposition 5.3.7. *Si u et v sont deux endomorphismes symétriques d'un espace euclidien* E *tels que $uv = vu$, il existe une base orthonormée de* E *dont les vecteurs sont à la fois vecteurs propres de u et de v (avec des valeurs propres qui peuvent bien sûr être différentes).*

Démonstration. Soient u et v ces deux endomorphismes symétriques ; on décompose d'abord $\mathrm{E} = \mathrm{E}_1 \oplus \cdots \oplus \mathrm{E}_k$ en somme directe de sous-espaces propres de u. Considérons par exemple le sous-espace propre $\mathrm{E}_1 = \{x \in \mathrm{E} : ux = \mu_1 x\}$. Puisque u et v commutent, on sait que E_1 est stable par v. On peut donc considérer la restriction $v_1 \in \mathcal{L}(\mathrm{E}_1)$ de v à E_1. C'est un endomorphisme symétrique de l'espace euclidien E_1, donc on peut trouver une base orthonormée de E_1 formée de vecteurs propres de v (qui sont aussi des vecteurs propres pour u), et on forme une base orthonormée de E tout entier en rassemblant de telles bases pour chaque E_i, $i = 1, \ldots, k$.

La démonstration s'adapte immédiatement au cas de deux matrices hermitiennes A et B qui commutent, ou plus généralement au cas de deux endomorphismes hermitiens a et b d'un sous-espace E de $\mathbb{C}^n$, tels que $ab = ba$. On trouve une base $\mathbb{C}$-orthogonale de $\mathbb{C}^n$ formée de vecteurs propres communs aux deux matrices, ou bien une base $\mathbb{C}$-orthogonale de E formée de vecteurs propres communs aux deux endomorphismes.

Proposition 5.3.8. *Si a et b sont deux endomorphismes hermitiens d'un $\mathbb{C}$-sous-espace vectoriel* E *de $\mathbb{C}^n$ et si $ab = ba$, il existe un vecteur $z \neq 0_{\mathrm{E}}$ dans* E *tel que $a(z) = \lambda z$ et $b(z) = \mu z$, avec λ, μ réels.*

Vérification. Si a et b commutent, les sous-espaces propres de a sont stables par b, donc il suffit de prendre pour z un vecteur propre de la restriction de b à un sous-espace propre de a. Les valeurs propres seront réelles par les théorèmes précédents.

On peut poursuivre cette ligne de raisonnement pour trouver une diagonalisation commune des endomorphismes a et b.

Endomorphismes symétriques positifs

Soit u un endomorphisme symétrique d'un espace euclidien E ; on dit que u est un endomorphisme *positif* si

$$u(x) \cdot x \geq 0 \ \text{ pour tout } x \in \mathrm{E}.$$

Cela équivaut évidemment à dire que la forme quadratique Q définie sur E par la formule $\mathrm{Q}(x) = u(x) \cdot x$ est positive.

Il est aussi équivalent de dire que toutes les valeurs propres de u sont ≥ 0 (mais ceci est un petit exercice : si on suppose que toutes les valeurs propres de u sont positives ou nulles, on exprimera $u(x) \cdot x$ en utilisant une base orthonormée formée de vecteurs propres de u ; l'autre direction est très facile).

Dans le même ordre d'idées, on pourra vérifier que $\mathrm{Q}(x) = u(x) \cdot x$ est définie positive sur l'espace E si et seulement si toutes les valeurs propres de u sont > 0.

Théorème 5.3.9 : racine carrée d'un endomorphisme symétrique positif. *Si* E *est un espace euclidien et si* $u \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ *est symétrique positif, il existe un unique endomorphisme symétrique positif* $v \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ *tel que* $v^2 = u$*.*

Démonstration. Pour trouver une solution, diagonalisons l'endomorphisme u dans une base orthonormée $(e_1, \ldots, e_n)$ de E ; on a alors $u(e_i) = \lambda_i e_i$, avec $\lambda_i \geq 0$ pour $i = 1, \ldots, n$. Il suffit de définir v en posant $v(e_i) = \sqrt{\lambda_i}\, e_i$ pour $i = 1, \ldots, n$.

Montrons l'unicité de la solution. Si w est une autre solution, c'est-à-dire si w est symétrique positif et $w^2 = u$, on aura $wu = w^3 = uw$ donc les sous-espaces propres de u sont invariants par w. Si $\mathrm{F} = \mathrm{E}_\mu = \ker(u - \mu \,\mathrm{Id}_\mathrm{E})$ est l'un quelconque des sous-espaces propres de u, nous allons montrer que la restriction w_1 de w à F est égale à $\sqrt{\mu}\,\mathrm{Id}_\mathrm{F}$, donc uniquement déterminée, ce qui entraîne que w est uniquement déterminé puisque E est la somme des sous-espaces propres de u ; on voit d'abord que w_1^2 est la restriction de $w^2 = u$ à F, donc $w_1^2 = \mu \,\mathrm{Id}_\mathrm{F}$. Si $\mu = 0$ on obtient que $w_1^2 = 0$, donc pour tout $x \in \mathrm{F}$

$$\|w_1(x)\|^2 = w_1(x) \cdot w_1(x) = w_1^2(x) \cdot x = 0$$

puisque w_1 est symétrique, donc $w_1 = 0 = \sqrt{\mu}\,\mathrm{Id}_\mathrm{F}$ dans ce cas. Si $\mu > 0$ on écrit en posant $\rho = \sqrt{\mu}$

$$0 = w_1^2 - \mu \,\mathrm{Id}_\mathrm{F} = (w_1 + \rho \,\mathrm{Id}_\mathrm{F})(w_1 - \rho \,\mathrm{Id}_\mathrm{F})$$

et $w_1 + \rho \,\mathrm{Id}_\mathrm{F}$ est inversible (ses valeurs propres sont > 0, donc non nulles, parce que w_1 est positif et $\rho > 0$), donc $w_1 - \rho \,\mathrm{Id}_\mathrm{F} = 0$, ce qu'il fallait démontrer.

Remarque. Bien entendu la solution v de l'équation $v^2 = u$ n'est pas unique si on n'impose pas que v soit un endomorphisme positif : $-v$ a le même carré que v !

Réduction des endomorphismes anti-symétriques

Théorème 5.3.10 : réduction des endomorphismes anti-symétriques. *Soit* E *un espace euclidien ; si* $u \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ *est anti-symétrique, les racines du polynôme caractéristique sont de la forme* $\mu = \mathrm{i}c$*, avec* c *réel. Pour chaque racine* $\mu = \mathrm{i}c$ *du polynôme caractéristique de* u*, l'opposé* $-\mathrm{i}c$ *est aussi racine. On peut trouver une base orthonormée de* E *formée d'une famille* $(e_1, \ldots, e_{2k})$ *suivie d'une base orthonormée* $(e_{2k+1}, \ldots, e_n)$ *du noyau de* u*, telle que la partie de la matrice de* u *correspondant aux vecteurs* $(e_1, \ldots, e_{2k})$ *soit diagonale par blocs* 2×2 *de la forme*

$$\begin{pmatrix} 0 & -c \\ c & 0 \end{pmatrix}$$

où c est réel non nul.

Si u n'est pas injective, on sait que 0 est valeur propre, et c'est alors la seule valeur propre de u, puisque toutes les racines non nulles du polynôme caractéristique sont complexes non réelles. Si u est un isomorphisme, u n'a aucune valeur propre (c'est le cas par exemple pour $u = r_{\pi/2}$, la rotation d'angle $\pi/2$ dans le plan $\mathbb{R}^2$).

Démonstration. Considérons le noyau $\mathrm{F} = \ker u$; c'est un sous-espace stable pour u, donc son orthogonal $\mathrm{G} = \mathrm{F}^\perp$ est lui aussi stable par u d'après la proposition 5.3.3. On travaille maintenant sur la restriction v de u à G. C'est un endomorphisme anti-symétrique de G, et v est inversible puisqu'il est injectif : si $y \in \mathrm{G}$, l'hypothèse $v(y) = 0$ implique $u(y) = v(y) = 0$, donc $y \in \ker u \cap \mathrm{G} = \{0_\mathrm{E}\}$, c'est-à-dire $y = 0_\mathrm{E}$. Choisissons une base orthonormée $\mathbf{g} = (g_1, \ldots, g_m)$ de G et soit B la matrice de v dans cette base ; c'est une matrice réelle anti-symétrique, donc la matrice complexe $\mathrm{A} = \mathrm{i}\mathrm{B}$ est hermitienne, elle a par conséquent des valeurs propres réelles d'après le théorème 5.3.6, qui sont non nulles puisque B est inversible. Il en résulte que les valeurs propres de la matrice B sont toutes de la forme $\mathrm{i}c$, avec c réel non nul. Soit $\mathrm{Z} = \mathrm{X} + \mathrm{i}\mathrm{Y} \in \mathbb{C}^m$ un vecteur complexe non nul tel que $\mathrm{BZ} = \mathrm{i}c\mathrm{Z}$, avec X, Y vecteurs réels ; on a alors $\mathrm{AZ} = -c\mathrm{Z}$, donc

$$\mathrm{A}\overline{\mathrm{Z}} = \overline{\overline{\mathrm{A}}\,\mathrm{Z}} = -\overline{\mathrm{AZ}} = c\overline{\mathrm{Z}},$$

(noter que $\overline{\mathrm{A}} = -\mathrm{A}$) donc $\overline{\mathrm{Z}}$ est vecteur propre de A pour la valeur propre $c \neq -c$. Il en résulte que

$$0 = \langle \mathrm{Z}, \overline{\mathrm{Z}} \rangle = {}^t\mathrm{Z}\mathrm{Z} = ({}^t\mathrm{X}\mathrm{X} - {}^t\mathrm{Y}\mathrm{Y}) + 2\mathrm{i}\,{}^t\mathrm{X}\mathrm{Y}.$$

On voit donc que X et Y sont orthogonaux et $\|\mathrm{X}\| = \|\mathrm{Y}\| \neq 0$ (sinon Z serait nul) ; on peut alors supposer que $\|\mathrm{X}\| = \|\mathrm{Y}\| = 1$. D'autre part $\mathrm{B}(\mathrm{X} + \mathrm{i}\mathrm{Y}) = \mathrm{BX} + \mathrm{i}\mathrm{BY} = -c\mathrm{Y} + \mathrm{i}c\mathrm{X}$. En séparant parties réelles et imaginaires, on obtient

$$\mathrm{BX} = -c\mathrm{Y}, \quad \mathrm{BY} = c\mathrm{X}.$$

Revenons à l'espace G. À partir de X et Y, de coordonnées $(x_1, \ldots, x_m)$ et $(y_1, \ldots, y_m)$, on trouve deux vecteurs $x, y \in \mathrm{G}$ tels que $v(x) = -cy$ et $v(y) = cx$, en posant

$$x = \sum_{i=1}^m x_i g_i, \quad y = \sum_{i=1}^m y_i g_i.$$

On a alors

$$x \cdot y = {}^t\mathrm{X}\mathrm{Y} = 0\,; \quad \|x\| = \|\mathrm{X}\| = \|\mathrm{Y}\| = \|y\| = 1.$$

Posons $e_1 = y$ et $e_2 = x$; ces deux vecteurs sont de norme 1 et orthogonaux. Le sous espace $\mathrm{G}_1 = [e_1, e_2]$ est stable par v, et la matrice de la restriction de v à ce sous-espace est de la forme annoncée. De plus, l'orthogonal de G_1 est stable par v et on peut continuer la décomposition jusqu'à épuisement de l'espace G.

Remarque. La dimension de G est paire.

Endomorphismes normaux

Définition 5.3.11. Soit E un espace euclidien et soit $u \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$; on dit que u est **normal** si $uu^* = u^*u$.

Exemple. Rotations dans $\mathbb{R}^2$. Si $u = r_\theta$ désigne la rotation d'angle θ dans $\mathbb{R}^2$, on constate que $u^* = r_{-\theta}$, donc $u^*u = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^2} = uu^*$.

Théorème 5.3.12. *Supposons que u soit un endomorphisme normal d'un espace euclidien E. Il existe une base orthonormée de E dans laquelle la matrice de u est diagonale par blocs, avec des blocs diagonaux de taille un ou deux, de façon que les blocs de taille 1×1 correspondent à des valeurs propres réelles de u et que les blocs de taille 2×2 soient de la forme*

$$\begin{pmatrix} \lambda & -b \\ b & \lambda \end{pmatrix}.$$

avec λ réel et b réel non nul.

On remarque que ces matrices 2×2 sont des multiples de matrices de rotation. En effet, si on pose $r = \sqrt{\lambda^2 + b^2} > 0$, et si on écrit $\lambda = r\mu$ et $b = rc$, on aura $\mu^2 + c^2 = 1$, donc on peut trouver un angle θ tel que $\mu = \cos\theta$ et $c = \sin\theta$, et alors

$$\begin{pmatrix} \lambda & -b \\ b & \lambda \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

Démonstration. Supposons que u soit un endomorphisme normal de l'espace E. On voit que $v = (u+u^*)/2$ est un endomorphisme symétrique et $w = (u-u^*)/2$ est anti-symétrique. On a $u = v+w$, et ce qui est très important est que $vw = wv$ dans le cas où $uu^* = u^*u$. On sait que l'endomorphisme symétrique v est diagonalisable. Soit F un sous-espace propre de v, pour la valeur propre λ (on sait que $\lambda \in \mathbb{R}$). Alors $w(\mathrm{F}) \subset \mathrm{F}$ parce que v et w commutent. La restriction w' de w à F est un endomorphisme anti-symétrique de F, on peut donc lui appliquer la réduction déjà vue. On trouve alors une base orthonormée de F, avec certains blocs de taille 1 (correspondant au noyau de w') et les autres de taille 2×2. En ajoutant v pour reformer u, on trouve des blocs 2×2 de la forme

$$\begin{pmatrix} \lambda & -b \\ b & \lambda \end{pmatrix}.$$

Le cas complexe

Si A est une matrice carrée complexe, on dira que A est normale si $\mathrm{A}^*\mathrm{A} = \mathrm{A}\mathrm{A}^*$.

Exemple. Si A est une matrice diagonale complexe, elle est normale.

Théorème 5.3.13 : diagonalisation des matrices normales complexes. *Si* N *est une matrice normale, il existe une base* $\mathbb{C}$*-orthonormée de* $\mathbb{C}^n$ *formée de vecteurs propres de* N.

Démonstration. On peut décomposer N sous la forme $\mathrm{N} = \mathrm{A} + i\mathrm{B}$, où A et B sont hermitiennes et commutent. Il suffit de poser $\mathrm{A} = (\mathrm{N} + \mathrm{N}^*)/2$ et $\mathrm{B} = i(\mathrm{N}^* - \mathrm{N})/2$. Il existe alors une base $\mathbb{C}$-orthonormée de $\mathbb{C}^n$ formée de vecteurs propres communs à A et B. On peut donc diagonaliser N dans cette base $\mathbb{C}$-orthonormée.

Attention. Il s'agit d'un théorème sur $\mathbb{C}$. Comme on l'a vu, un endomorphisme normal d'un espace réel n'est pas nécessairement diagonalisable. Par ailleurs, les valeurs propres d'une matrice normale sont en général complexes (ne pas confondre avec le cas des matrices hermitiennes dont les valeurs propres sont réelles).

Remarque. Soit u un endomorphisme qui est diagonal dans une base $\mathbf{e}$,

$$u(\sum_{i=1}^{n} c_i e_i) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i c_i e_i.$$

Alors l'ensemble des valeurs propres est l'ensemble $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$ (qui n'a pas nécessairement n éléments distincts !), et pour chaque λ de cet ensemble,

$$\mathrm{E}_\lambda = [e_i : \lambda_i = \lambda]$$

(sous-espace vectoriel engendré par les vecteurs e_i tels que $\lambda_i = \lambda$). En effet, si $x = \sum_i c_i e_i \in \mathrm{E}_\lambda$, on a $(u - \lambda\,\mathrm{Id}_\mathrm{E})(x) = 0_\mathrm{E}$, donc $\sum_{i=1}^n (\lambda_i - \lambda) c_i e_i = 0_\mathrm{E}$. Puisque (e_i) est une base, cela implique que $(\lambda_i - \lambda)c_i = 0$ pour tout $i = 1, \ldots, n$. Puisque $x \neq 0_\mathrm{E}$, il existe des $c_i \neq 0$, et pour chacun d'entre eux, on aura nécessairement $\lambda_i = \lambda$.

Conséquence.

Les sous espaces propres d'une matrice normale sont $\mathbb{C}$*-orthogonaux.*

5.4. Isométries d'un espace euclidien

Soit T une application (qu'on ne suppose pas linéaire *a priori*) d'un espace euclidien ou préhilbertien E dans un autre espace euclidien ou préhilbertien F ; on dit que T *conserve les distances* si

$$d(\mathrm{T}(\mathrm{A}), \mathrm{T}(\mathrm{B})) = d(\mathrm{A}, \mathrm{B})$$

pour tous « points » A, B de E (les éléments de E sont aussi des vecteurs, et on peut écrire la conservation de la distance sous la forme $\|\mathrm{T}(\mathrm{B}) - \mathrm{T}(\mathrm{A})\| = \|\mathrm{B} - \mathrm{A}\|$ pour tous les « vecteurs » $\mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathrm{E}$).

Proposition 5.4.1. *Si* T *conserve les distances et si* $\mathrm{T}(0) = 0$, *l'application* T *est linéaire de* E *dans* F.

Idée de démonstration (le lecteur ne se laissera pas troubler par le mélange pas très joli entre le point de vue des « points » et celui des vecteurs). En utilisant la relation du parallélogramme, on vérifie que l'image du milieu de deux points doit être le milieu des images. En considérant les deux points 0 et A, on en déduit que $\mathrm{T}(\frac{1}{2}\mathrm{A}) = \frac{1}{2}\mathrm{A}$, ce qui donne aussi $\mathrm{T}(2\mathrm{A}) = 2\,\mathrm{T}(\mathrm{A})$; on voit aussi que $\mathrm{T}(-\mathrm{A}) = -\mathrm{T}(\mathrm{A})$, en raisonnant sur A et $-\mathrm{A}$, dont le milieu est 0. On itère ces remarques pour montrer que

$$\mathrm{T}\Big(\frac{k}{2^n}\mathrm{A}\Big) = \frac{k}{2^n}\mathrm{A}$$

pour tout entier $n \geq 0$ et pour tout $k \in \mathbb{Z}$. On passe ensuite à la limite pour voir que $\mathrm{T}(\lambda\mathrm{A}) = \lambda\mathrm{A}$ pour tout λ réel, et on vérifie que $\mathrm{T}(\mathrm{A}+\mathrm{B}) = \mathrm{T}(\mathrm{A})+\mathrm{T}(\mathrm{B})$ avec la propriété des milieux et l'homogénéité.

Supposons donc que T conserve les distances et que $\mathrm{T}(0) = 0$. On vient de voir que T est linéaire. De plus il est clair qu'une application qui préserve les distances est injective. Si $\mathrm{E} = \mathrm{F}$ est de dimension finie, il en résulte que T est surjective.

Corollaire 5.4.2. *Toute application* T *d'un espace euclidien* E *dans lui-même qui conserve les distances est affine et bijective. Si de plus* $\mathrm{T}(0) = 0$, *l'application* T *est un isomorphisme linéaire de* E *sur lui-même.*

Démonstration. Posons $\mathrm{S}(x) = \mathrm{T}(x) - \mathrm{T}(0)$. L'application S conserve les distances et $\mathrm{S}(0) = 0$, donc S est un isomorphisme linéaire. L'application T est obtenue en composant S avec la translation de vecteur $-\mathrm{T}(0)$, donc T est affine et bijective.

Remarque. Cette propriété de surjectivité n'est pas vraie en dimension infinie. Considérons sur l'espace ℓ_2 des suites infinies $x = (x_0, \ldots, x_n, \ldots)$ telles que $\sum x_n^2 < +\infty$, muni de la norme $\|x\| = (\sum_{n=0}^{+\infty} x_n^2)^{1/2}$, l'application linéaire S définie par

$$\mathrm{S}(x_0, x_1, \ldots) = (0, x_0, x_1, \ldots).$$

On voit facilement que S est isométrique, mais pas surjective. En effet, le vecteur

$$(1, 0, 0, \ldots)$$

n'est pas dans l'image de S.

Étude linéaire

Soient E un espace euclidien ou préhilbertien, et u un endomorphisme de E ; on dit que u est une *isométrie* si $\|u(x)\| = \|x\|$ pour tout $x \in$ E. Puisque u est linéaire, il en résulte que pour tous $x, y \in$ E,

$$d(u(x), u(y)) = \|u(x) - u(y)\| = \|u(x - y)\| = \|x - y\| = d(x, y),$$

donc u conserve les distances. La relation $\|u(x)\| = \|x\|$ pour tout $x \in$ E signifie que $x \cdot x = u(x) \cdot u(x)$ pour tout $x \in$ E. On obtient alors par polarisation

$$y \cdot x = u(y) \cdot u(x)$$

pour tous $x, y \in$ E, ce qui montre la propriété importante suivante : toute application isométrique conserve le produit scalaire. En particulier, des vecteurs orthogonaux ont des images orthogonales. Si $u(x) = \pm x$, il en résulte que l'orthogonal de x est stable par l'isométrie u.

Supposons maintenant E euclidien et soit u une isométrie de E dans E ; on a vu que u est un isomorphisme. Il est clair que l'application u^{-1} est aussi une isométrie. Si v est une autre isométrie, il est immédiat que la composition $v \circ u$ est une isométrie. Il résulte de ces remarques que l'ensemble des isométries de E, muni de l'opération de composition des applications, est un groupe. On le note O(E), et on l'appelle le *groupe orthogonal* de l'espace euclidien E.

On peut traduire la relation précédente $y \cdot x = u(y) \cdot u(x)$ par

$$y \cdot x = y \cdot u^* u(x)$$

pour tout $x, y \in$ E, ce qui implique que $u^* u = \mathrm{Id}_{\mathrm{E}}$. Comme E est de dimension finie on a aussi $uu^* = \mathrm{Id}_{\mathrm{E}}$, donc $u^{-1} = u^*$. Réciproquement, si u^* est l'inverse de u, on aura pour tout $x \in$ E

$$\|u(x)\|^2 = u(x) \cdot u(x) = u^* u(x) \cdot x = x \cdot x = \|x\|^2.$$

Définition 5.4.3. Soit u un endomorphisme d'un espace euclidien E ; on dit que u est un *endomorphisme orthogonal* si $uu^* = u^* u = \mathrm{Id}_{\mathrm{E}}$. On dit qu'une matrice carrée réelle U est orthogonale si ${}^t\mathrm{U}$ est l'inverse de U, c'est-à-dire si ${}^t\mathrm{U}\,\mathrm{U} = \mathrm{U}\,{}^t\mathrm{U} = \mathrm{I}_n$, où n est la taille de U.

Puisque E est de dimension finie, il suffit de savoir que $uu^* = \mathrm{Id}_{\mathrm{E}}$, ou bien que $u^* u = \mathrm{Id}_{\mathrm{E}}$, pour en déduire que $u^* = u^{-1}$. La même remarque s'applique aux matrices orthogonales. La matrice $\mathrm{U} = \mathrm{mat}_{\mathbf{e}}(u)$ d'un endomorphisme orthogonal u dans une base orthonormée **e** quelconque de E est une matrice orthogonale. Si U est une matrice orthogonale, on aura aussi

$$\langle \mathrm{UZ}, \mathrm{UZ} \rangle = \langle \mathrm{Z}, \mathrm{Z} \rangle$$

pour tout $\mathrm{Z} \in \mathbb{C}^n$, puisque $\langle \mathrm{UZ}, \mathrm{UZ} \rangle = {}^t(\overline{\mathrm{UZ}})\,\mathrm{UZ} = {}^t\overline{\mathrm{Z}}{}^t\overline{\mathrm{U}}\mathrm{UZ} = {}^t\overline{\mathrm{Z}}\,({}^t\mathrm{U}\,\mathrm{U})\,\mathrm{Z}$. Il en résulte que les racines du polynôme caractéristique de U sont toutes de module 1 (si un vecteur complexe Z non nul vérifie $\mathrm{UZ} = \lambda \mathrm{Z}$, on voit que $\lambda\overline{\lambda}\,\langle \mathrm{Z}, \mathrm{Z} \rangle = \langle \mathrm{UZ}, \mathrm{UZ} \rangle = \langle \mathrm{Z}, \mathrm{Z} \rangle$ ce qui donne $\lambda\overline{\lambda} = 1$). En particulier, les seules possibilités pour les valeurs propres d'un endomorphisme orthogonal u sont ± 1.

Exemple. Pour une matrice de rotation d'angle θ, les racines du polynômes caractéristique sont les complexes de module un $\lambda = \mathrm{e}^{\pm \mathrm{i}\theta}$.

Matrices orthogonales et changement de base orthonormée

Soient $\mathbf{e}$ et $\mathbf{f}$ deux bases orthonormées du même espace euclidien E ; la matrice de passage P est une matrice orthogonale. En effet, la colonne j de cette matrice est formée des coordonnées dans la base $\mathbf{e}$ du j-ième vecteur f_j de la base $\mathbf{f}$; si on considère l'endomorphisme u de E défini par $u(f_j) = e_j$ pour $j = 1, \ldots, n$, on vérifie facilement que u est une isométrie puisque pour tout $x = \sum_{j=1}^n c_j f_j \in \mathrm{E}$,

$$\|u(x)\|^2 = \Big\|\sum_{j=1}^n c_j e_j\Big\|^2 = \sum_{j=1}^n c_j^2 = \|x\|^2.$$

La matrice de u dans la base $\mathbf{f}$ est donc orthogonale. Mais on voit que $\mathrm{P} = \mathrm{mat}_{\mathbf{f}}(u)$, donc la matrice de passage P est une matrice orthogonale.

On peut voir directement par le calcul que U est une matrice orthogonale si et seulement si

– les colonnes de la matrice U forment une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$

ou bien si et seulement si

– les lignes de la matrice U forment une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$.

En effet, si les colonnes $\mathrm{X}_1, \ldots, \mathrm{X}_n$ d'une matrice U forment une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$, on voit que les coefficients de la matrice produit ${}^t\mathrm{U}\,\mathrm{U}$ sont égaux aux produits scalaires $\mathrm{X}_i \cdot \mathrm{X}_j = {}^t\mathrm{X}_i\mathrm{X}_j = \delta_{i,j}$, donc ${}^t\mathrm{U}\,\mathrm{U} = \mathrm{I}_n$ (et réciproquement, ...). Si les lignes de la matrice U forment une base orthonormée, on utilise la relation $\mathrm{U}\,{}^t\mathrm{U} = \mathrm{I}_n$.

Les matrices orthogonales de taille $n \times n$ forment un groupe pour la multiplication des matrices. On le note $\mathrm{O}(n)$, et on l'appelle le *groupe orthogonal*. Si U est orthogonale, on a $(\det \mathrm{U})^2 = \det {}^t\mathrm{U} \det \mathrm{U} = \det \mathrm{I}_n = 1$, et puisque U est réelle, ceci entraîne que $\det \mathrm{U} = \pm 1$. Le déterminant d'un endomorphisme orthogonal, ou bien d'une matrice orthogonale, est donc égal à ± 1. Les matrices $\mathrm{U} \in \mathrm{O}(n)$ telles que $\det \mathrm{U} = 1$ forment un sous-groupe de $\mathrm{O}(n)$, appelé le *groupe spécial orthogonal*, et noté $\mathrm{SO}(n)$.

Exemples.

1. Rotations de $\mathbb{R}^2$.

2. Matrice de Walsh. On part de la matrice

$$\mathrm{W}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

et on définit par récurrence des matrices de taille $2^n \times 2^n$ dont l'écriture par blocs est donnée par

$$\mathrm{W}_n = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} \mathrm{W}_{n-1} & -\mathrm{W}_{n-1} \\ \mathrm{W}_{n-1} & \mathrm{W}_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Pour tout entier $n \geq 1$, la matrice W_n est une matrice orthogonale de taille $2^n \times 2^n$, dont tous les coefficients ont le même module $2^{-n/2}$.

Exercice. Si B est une matrice réelle anti-symétrique, montrer que la matrice $\mathrm{e}^{-t\mathrm{B}}$ est une isométrie pour tout $t \in \mathbb{R}$. Examiner le cas de la matrice

$$\mathrm{B} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Matrices complexes unitaires

Soit A une matrice carrée complexe ; on dit que A est *unitaire* si $\mathrm{A}^* = \mathrm{A}^{-1}$. Les matrices unitaires de taille $n \times n$ forment un groupe $\mathrm{U}(n)$, le *groupe unitaire*.

Exercices.

1. Si A est une matrice hermitienne, montrer que $\mathrm{U} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}t\mathrm{A}}$ est une matrice unitaire pour tout $t \in \mathbb{R}$.

2. Pour tout entier $n \geq 1$ on définit une matrice $\mathrm{F} = \mathrm{F}_n = (f_{j,k})$ par

$$f_{j,k} = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi(j-1)(k-1)/n} = \xi^{(j-1)(k-1)}$$

pour $j, k = 1, \ldots, n$, et $\xi = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi/n}$. Montrer que la matrice F est unitaire.

Soit T une isométrie (linéaire) d'un espace euclidien E ; désignons par $\mathrm{E}_1(\mathrm{T})$ le sous-espace (qui peut-être réduit à $\{0\}$) formé des vecteurs fixes par T, c'est-à-dire tels que $\mathrm{T}(x) = x$. Désignons de même par $\mathrm{E}_{-1}(\mathrm{T})$ le sous-espace formé des vecteurs x tels que $\mathrm{T}(x) = -x$. On vérifie que

– les sous-espaces $\mathrm{E}_1(\mathrm{T})$ et $\mathrm{E}_{-1}(\mathrm{T})$ sont orthogonaux.

– pour tout sous-espace F de $\mathrm{E}_1(\mathrm{T})$, l'orthogonal $\mathrm{F}^\perp$ est stable par T.

Réduction d'une isométrie

Lemme. *Soit u une isométrie d'un espace euclidien* E *; si un sous-espace* F *de* E *est stable par u^*, son orthogonal $\mathrm{F}^\perp$ est stable par u.*

Démonstration. Supposons que y soit orthogonal à F, et montrons que $u(y)$ reste orthogonal à F ; prenons un vecteur quelconque $x \in \mathrm{F}$, et calculons $x \cdot u(y)$. D'après l'hypothèse, on a $u^*(x) \in \mathrm{F}$, donc

$$x \cdot u(y) = u^*(x) \cdot y = 0.$$

Bien entendu, si F est à la fois stable par u et par u^*, son orthogonal $\mathrm{F}^\perp$ est stable par u^* et u, ce qui donne une situation plus symétrique.

Lemme. *Soit* A *une matrice carrée réelle, et soit $\mathrm{Z} \in \mathbb{C}^n$ un vecteur complexe non nul tel que $\mathrm{AZ} = \alpha\mathrm{Z}$, avec $\alpha = \lambda + \mathrm{i}\mu$, λ, μ réels et $\mu \neq 0$; si on pose $\mathrm{Z} = \mathrm{X} + \mathrm{i}\mathrm{Y} \neq 0$, $\mathrm{X}, \mathrm{Y} \in \mathbb{R}^n$, alors* X *et* Y *sont indépendants et le plan* $[\mathrm{X}, \mathrm{Y}]$ *est stable par* A.

Démonstration. Si on avait $\mathrm{Y} = \beta\mathrm{X}$, on aurait $\mathrm{Z} = (1 + \mathrm{i}\beta)\mathrm{X} \neq 0$, d'où $\mathrm{AX} = \alpha\mathrm{X}$ ce qui est impossible puisque A et X sont réels et $\alpha\mathrm{X}$ non réel. En identifiant parties réelles et imaginaires dans AZ et $\alpha\mathrm{Z}$, on trouve $\mathrm{AX} = \lambda\mathrm{X} - \mu\mathrm{Y}$ et $\mathrm{AY} = \mu\mathrm{X} + \lambda\mathrm{Y}$, ce qui montre bien que le plan $[\mathrm{X}, \mathrm{Y}]$ est stable par A.

Théorème 5.4.4. *Soit u une isométrie d'un espace euclidien* E *; il existe une décomposition de* E *en somme directe orthogonale de sous-espaces de dimension* 1 *ou* 2 *stables par l'endomorphisme u.*

On voit que l'endomorphisme u est normal, donc on peut décomposer E en sous-espaces stables de dimension 1 et 2, deux à deux orthogonaux. Les blocs 2×2 de la décomposition des normaux sont nécessairement ici des rotations, et les seules valeurs propres possibles pour un endomorphisme orthogonal sont 1 et -1.

Démonstration. La démonstration se fait par récurrence sur $n = \dim \mathrm{E}$. Le résultat est évident pour $n = 1$. Prenons maintenant $n > 1$, et supposons le résultat démontré pour toute isométrie d'un espace euclidien de dimension $< n$. Soit u une isométrie d'un espace euclidien E de dimension n ; si u a une valeur propre λ (forcément ± 1) on prend un vecteur propre $x \in \mathrm{E}$, on remarque que $u^*(x) = \lambda^{-1}x$, donc $\mathbb{R}x$ est stable par u et par u^*, ce qui implique que $\mathrm{F} = (\mathbb{R}x)^\perp$ est stable par u, et on peut appliquer l'hypothèse de récurrence : la restriction v de u à F est une isométrie de l'espace euclidien F, et $\dim \mathrm{F} < n$, donc F se décompose en somme directe orthogonale $\mathrm{F}_1 \oplus \cdots \oplus \mathrm{F}_k$ de sous-espaces de dimension 1 ou 2 stables par v, donc par u, et $\mathrm{E} = \mathbb{R}x \oplus \mathrm{F}_1 \oplus \cdots \oplus \mathrm{F}_k$ donne la décomposition voulue en sous-espaces stables par u deux à deux orthogonaux.

Sinon, toutes les racines du polynôme caractéristique de u sont imaginaires non réelles ; on se ramène alors à $\mathbb{R}^n$ et à une matrice orthogonale U en prenant une base orthonormée $\mathbf{e}$ de E et $\mathrm{U} = \mathrm{mat}_{\mathbf{e}}(u)$. On pose $\mathrm{A} = (\mathrm{U} + {}^t\mathrm{U})/2$ et $\mathrm{B} = -\mathrm{i}(\mathrm{U} - {}^t\mathrm{U})/2$; on remarque que A et B sont hermitiennes et commutent (parce que $\mathrm{U}{}^t\mathrm{U} = {}^t\mathrm{U}\mathrm{U} = \mathrm{I}_n$), et que $\mathrm{U} = \mathrm{A} + \mathrm{iB}$, ${}^t\mathrm{U} = \mathrm{A} - \mathrm{iB}$. D'après la proposition 5.3.8, il existe un vecteur non nul $\mathrm{Z} \in \mathbb{C}^n$ tel que $\mathrm{AZ} = \lambda\mathrm{Z}$ et $\mathrm{BZ} = \mu\mathrm{Z}$, avec λ, μ réels. On en déduit que $\mathrm{UZ} = (\lambda + \mathrm{i}\mu)\mathrm{Z}$; si on pose $\alpha = \lambda + \mathrm{i}\mu$, on voit que α est racine du polynôme caractéristique de U (c'est-à-dire de u). D'après notre division en cas, α n'est pas réelle, donc on a ici $\mu \neq 0$; on a ${}^t\mathrm{UZ} = \mathrm{AZ} - \mathrm{iBZ} = (\lambda - \mathrm{i}\mu)\mathrm{Z}$. Posons $\mathrm{Z} = \mathrm{X} + \mathrm{iY}$, avec $\mathrm{X}, \mathrm{Y} \in \mathbb{R}^n$; d'après le lemme précédent $[\mathrm{X}, \mathrm{Y}]$ est stable par ${}^t\mathrm{U}$ (et par U). Ceci entraîne que $\mathrm{F} = [\mathrm{X}, \mathrm{Y}]^\perp$ est stable par U, donc on peut lui appliquer l'hypothèse de récurrence et terminer comme dans le premier cas.

Réflexions, symétries orthogonales

Soit E un espace euclidien ; supposons que $\mathrm{E} = \mathrm{F} \oplus \mathrm{G}$, avec F et G orthogonaux (c'est-à-dire que $\mathrm{G} = \mathrm{F}^\perp$). Tout vecteur $x \in \mathrm{E}$ admet une décomposition unique $x = f + g$, avec $f \in \mathrm{F}$ et $g \in \mathrm{G}$. On note que $f = \mathrm{P}_\mathrm{F}(x)$ et $g = \mathrm{P}_\mathrm{G}(x)$. La *symétrie orthogonale* autour de F est l'application linéaire définie par $\mathrm{S}_\mathrm{F}(x) = f - g$ lorsque $x = f + g$, ou encore

$$\mathrm{S}_\mathrm{F} = \mathrm{P}_\mathrm{F} - \mathrm{P}_\mathrm{G} = 2\mathrm{P}_\mathrm{F} - \mathrm{Id}_\mathrm{E} = \mathrm{Id}_\mathrm{E} - 2\mathrm{P}_\mathrm{G}.$$

On voit que si $x = f + g$, on a à cause de l'orthogonalité de f et g

$$\|\mathrm{S}_\mathrm{F}(x)\|^2 = \|f\|^2 + \|g\|^2 = \|f + g\|^2 = \|x\|^2,$$

donc S_F est une isométrie. On voit que $\mathrm{S}_\mathrm{F}(f) = f$ pour tout $f \in \mathrm{F}$ et $\mathrm{S}_\mathrm{F}(g) = -g$ pour tout vecteur $g \in \mathrm{G}$. Dans une base orthogonale de E formée d'une base $(f_1, \ldots, f_k)$ de F suivie d'une base $(g_{k+1}, \ldots, g_n)$ de G, la matrice de S_F est diagonale, avec des 1 pour la partie F et des -1 pour la partie G. Le déterminant est donc égal à $(-1)^{\dim \mathrm{G}}$. On note que $\mathrm{S}_\mathrm{F}^2 = \mathrm{Id}_\mathrm{E}$.

On appelle *réflexion* toute symétrie orthogonale par rapport à un hyperplan F d'un espace euclidien E (la symétrie S_F est donc appelée réflexion dans le cas où $\mathrm{G} = \mathrm{F}^\perp$ est de dimension un). Désignons par w un vecteur non nul orthogonal à F ; on a alors $\mathrm{G} = \mathbb{R}w$. La projection orthogonale P_G sur la droite G est donnée par

$$\mathrm{P}_\mathrm{G}(x) = \frac{x \cdot w}{w \cdot w}\, w$$

pour tout $x \in \mathrm{E}$. On obtient la symétrie orthogonale S_F par rapport à l'hyperplan F en prenant $\mathrm{S}_\mathrm{F} = \mathrm{Id}_\mathrm{E} - 2\mathrm{P}_\mathrm{G}$. On appellera R_w la réflexion ainsi obtenue, autour de l'hyperplan $\mathrm{F} = [w]^\perp$ orthogonal au vecteur w ; elle est donc définie par la formule

$$\forall x \in \mathrm{E}, \quad \mathrm{R}_w(x) = x - 2\,\frac{x \cdot w}{w \cdot w}\, w$$

qui nous donne une isométrie, pour laquelle $\mathrm{R}_w(w) = -w$, et $\mathrm{R}_w(x) = x$ pour tout vecteur x orthogonal à w (les vérifications directes de ces affirmations, indépendamment de la discussion précédente, sont faciles ou immédiates). On montrera plus loin que toute isométrie est produit de réflexions.

Posons $z = w/\|w\|$; la matrice P de P_G dans une base orthonormée de E est donnée par $\mathrm{P}_{i,j} = z_i z_j$, où $z_1, \ldots, z_n$ sont les coordonnées de z dans ladite base. On obtient la matrice de S_F en prenant $\mathrm{I}_n - 2\mathrm{P}$. Les coefficients de la matrice de R_w dans la base précédente sont donc $(\delta_{i,j} - 2\, z_i z_j)$.

Isométries de $\mathbb{R}^2$ et de $\mathbb{R}^3$

Prenons d'abord un espace euclidien E de dimension 2 et u une isométrie de E. On sait que le déterminant de u est égal à 1 ou à -1. Étudions d'abord le cas où $\det u = -1$. Le polynôme caractéristique de u est réel de degré deux. Si le produit des racines est -1, il y a deux racines réelles. Les racines réelles sont des valeurs propres, nécessairement égales à 1 ou à -1. Si le produit est égal à -1, il y a une racine 1 et une racine -1, donc u est diagonalisable. Il existe donc une base de vecteurs propres (e_1, e_2) de E telle que

$$u(e_1) = e_1, \quad u(e_2) = -e_2.$$

On voit que les vecteurs e_1 et e_2 sont orthogonaux puisque $-e_1 \cdot e_2 = u(e_1) \cdot u(e_2) = e_1 \cdot e_2$. On voit aussi que $u^2 = \mathrm{Id}_\mathrm{E}$. L'application u est la symétrie orthogonale par rapport à la droite $[e_1]$, c'est-à-dire la réflexion R_{e_2}.

Dans la base canonique, écrivons une réflexion de $\mathbb{R}^2$. Soit $v = (a, b)$ un vecteur fixe pour u de norme 1 ; la projection orthogonale sur $[v]$ est donnée par

$$\mathrm{P}(x) = (x \cdot v)\, v,$$

de matrice

$$\begin{pmatrix} a^2 & ab \\ ab & b^2 \end{pmatrix}$$

et la symétrie est $\mathrm{S} = 2\mathrm{P} - \mathrm{Id}$ de matrice

$$\begin{pmatrix} 2a^2 - 1 & 2ab \\ 2ab & 2b^2 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(2\theta) & \sin(2\theta) \\ \sin(2\theta) & -\cos(2\theta) \end{pmatrix}$$

si on a posé $a = \cos\theta$ et $b = \sin\theta$.

Supposons maintenant que $\det u = 1$. L'image du vecteur $(1, 0)$ est un vecteur de norme 1, qu'on peut écrire $(\cos\theta, \sin\theta)$. L'image de $(0, 1)$ est un vecteur de norme 1 orthogonal au précédent, donc égal à $\pm(-\sin\theta, \cos\theta)$. Puisque le déterminant est égal à 1, on a nécessairement ici la matrice de la rotation d'angle θ.

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

Le groupe SO(2) est donc le groupe des rotations de $\mathbb{R}^2$. Il est isomorphe (en tant que groupe bien sûr) au groupe des nombres complexes de module 1, muni de la multiplication. Passons maintenant à la question de la décomposition des isométries en composition d'opérations simples ; en dimension deux, nous avons :

soit ρ une rotation de E *; il existe deux réflexions* R_1 *et* R_2 *telles que* $\rho = R_1R_2$.

C'est un cas particulier du résultat général qui sera démontré plus loin. Cela revient à dire que $\rho R_2 = R_1$. Si on prend n'importe quelle réflexion R_2, le produit ρR_2 est une isométrie de déterminant -1, donc c'est une réflexion R_1, ce qui démontre l'affirmation ci-dessus. Mais on aimerait avoir une construction plus explicite. Soient x un vecteur de norme 1, et $y = \rho(x)$; déterminons une réflexion R_2 telle que $R_2(y) = x$. Puisque x et y ont la même norme, la droite Δ passant par 0 et par le milieu $m = (x + y)/2$ de x et y est orthogonale au segment $[x, y]$: c'est la médiatrice du segment $[x, y]$. Soit R_2 la réflexion autour de Δ ; on voit que $R_2(y) = x$, donc $\rho R_2(y) = y$ et ρR_2 est une isométrie de déterminant -1, donc c'est une réflexion R_1. Puisque y reste fixe, R_1 est la réflexion autour de la droite $[y]$.

Le cas de $\mathbb{R}^3$. Soit S une isométrie de $\mathbb{R}^3$; supposons encore que $\det S = 1$. On vérifie qu'alors 1 est nécessairement racine du polynôme caractéristique de S : s'il y a une racine λ non réelle (qui est de module un), les racines seront $\mu \in \mathbb{R}$, λ et $\overline{\lambda}$, donc $1 = \det S = \mu\,|\lambda|^2 = \mu$; d'un autre côté, si les trois racines sont réelles, elles valent ± 1 et le produit 1, il y a donc au moins un 1 dans la liste. Il existe donc un vecteur e_3 (de norme un si on veut) tel que $S(e_3) = e_3$. Alors l'orthogonal F de $\mathbb{R}e_3$ est un plan stable par S, et la restriction S' de S à F est une isométrie en dimension 2, dont on vérifie que le déterminant est encore égal à 1 (écrire la matrice de S dans une base de $\mathbb{R}^3$ formée d'une base de F et du vecteur e_3), donc S' est une rotation du plan F. Finalement, S est une rotation de $\mathbb{R}^3$ autour de l'axe $\mathbb{R}e_3$.

Si $\det S = -1$, on peut considérer $-S$ pour déduire qu'il existe maintenant e_3 tel que $S(e_3) = -e_3$. Si T désigne la symétrie autour de $F = e_3^\perp$, on voit d'après ce qui précède que $R = ST = TS$ est une rotation autour de la droite $\mathbb{R}e_3$, et $S = RT = TR$. En résumé, une isométrie S de $\mathbb{R}^3$ est

– ou bien une rotation autour d'un axe (si la rotation est d'angle nul, on obtient simplement l'application identique) ; ce cas se produit lorsque $\det S = 1$.

– ou bien une rotation autour d'un axe de vecteur directeur z suivie (ou précédée) de la symétrie autour du plan $z^\perp$ orthogonal à l'axe de rotation ; ce cas se produit lorsque $\det S = -1$.

Il résulte de l'étude que les éléments de SO(3) sont exactement les rotations autour d'un axe.

Théorème 5.4.5. *Tout endomorphisme orthogonal d'un espace euclidien est produit de réflexions.*

Démonstration. On pose $n = \dim E > 0$ et on travaille, pour n fixé, par récurrence descendante sur la dimension $k = \dim E_1(T)$, avec $k = n, n-1, \ldots, 0$, du sous-espace des vecteurs fixes de l'isométrie T. Si $k = n$, T est l'identité, que l'on peut considérer comme produit de 0 réflexions (ou produit de deux réflexions si on préfère, en écrivant $\mathrm{Id}_E = R^2$ pour une réflexion R quelconque). Supposons $0 \le k < n$ et supposons le résultat établi pour toute isométrie S de E telle que $\dim E_1(S) > k$; soit T une isométrie de E telle que $\dim E_1(T) = k$, et posons $F = E_1(T)^\perp$; on vérifie que F est stable par T ; on a $\dim F = n - k > 0$, donc on peut sélectionner un vecteur non nul $y \in F$. Puisque $y \notin E_1(T)$ on a $y \neq T(y)$; posons $z = T(y)$ et $w = z - y$. On a $w \neq 0$, $z \in F$ (car F est stable) donc $w \in F$, et d'autre part

$$(z + y) \cdot w = (z + y) \cdot (z - y) = z \cdot z - y \cdot y = 0$$

($\|z\|^2 = z \cdot z = y \cdot y$ puisque z est l'image de y par une isométrie T). Considérons la réflexion R_w. Pour cette réflexion on a $\mathrm{R}_w(w) = -w$ c'est-à-dire $\mathrm{R}_w(z-y) = y-z$ et $\mathrm{R}_w(z+y) = z+y$ puisque $z+y$ est orthogonal à w ; on a donc $\mathrm{R}_w(z) = y$ en additionnant ; d'autre part $\mathrm{R}_w(x) = x$ pour tout $x \in \mathrm{E}_1(\mathrm{T})$, parce que $x \perp w$. Il en résulte que $\mathrm{R}_w(\mathrm{T}(y)) = y$ et $\mathrm{R}_w(\mathrm{T}(x)) = \mathrm{R}_w(x) = x$ pour tout $x \in \mathrm{E}_1(\mathrm{T})$; le sous-espace $\mathrm{E}_1(\mathrm{R}_w\mathrm{T})$ des vecteurs fixes du produit $\mathrm{R}_w\mathrm{T}$, qui contient à la fois $\mathrm{E}_1(\mathrm{T})$ et y, est donc de dimension $> k$; par l'hypothèse de récurrence, il en résulte que $\mathrm{S} = \mathrm{R}_w\mathrm{T}$ est produit de réflexions. Il en résulte que T aussi est produit de réflexions, puisque $\mathrm{T} = \mathrm{R}_w\mathrm{S}$.

Exercices. Les groupes $\mathrm{O}(1,1)$ et $\mathrm{O}(2,1)$

1. Montrer que les matrices

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} \operatorname{ch}\theta & \operatorname{sh}\theta \\ \operatorname{sh}\theta & \operatorname{ch}\theta \end{pmatrix}$$

où θ varie dans $\mathbb{R}$, forment un groupe pour la multiplication des matrices, et qu'elles préservent la forme quadratique Q_2 sur $\mathbb{R}^2$ égale à $\mathrm{Q}_2(x,y) = x^2 - y^2$, c'est-à-dire que $\mathrm{Q}_2(\mathrm{AX},\mathrm{AX}) = \mathrm{Q}_2(\mathrm{X},\mathrm{X})$ pour tout $\mathrm{X} \in \mathbb{R}^2$. Déterminer toutes les matrices qui préservent Q_2 (elles forment le groupe $\mathrm{O}(1,1)$, le groupe orthogonal de la forme quadratique Q_2).

2. On considère sur $\mathbb{R}^3$ la forme quadratique $\mathrm{Q}_3(x,y,z) = x^2 + y^2 - z^2$, on désigne par φ la forme polaire et on considère la matrice

$$\mathrm{J} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

– 2a. Montrer qu'une matrice A de taille 3×3 préserve la forme quadratique Q_3 si et seulement si ${}^t\mathrm{AJA} = \mathrm{J}$. Montrer que le déterminant de A est alors égal à ± 1. Montrer que ces matrices forment un groupe (le groupe $\mathrm{O}(2,1)$).

– 2b. Essayer de généraliser le théorème 5.4.5 au cas actuel.

– 2c. Vérifier qu'il n'existe pas de sous-espace de dimension deux de $\mathbb{R}^3$ formé de vecteurs isotropes de Q_3. Si $\mathrm{A} \in \mathrm{O}(2,1)$ et si λ est une valeur propre réelle de A telle que $\lambda^2 \neq 1$, montrer que l'espace propre est de dimension 1 et engendré par un vecteur isotrope.

– 2d. Si A admet un vecteur propre $x \in \mathbb{R}^3$ qui est isotrope, montrer que l'orthogonal de x (par rapport à φ : ici et dans la suite) est stable, et montrer que toutes les valeurs propres de A sont alors réelles. Si $\mathrm{A}x = \lambda x$ avec $\lambda^2 \neq 1$, montrer qu'il existe y isotrope non nul tel que $\mathrm{A}y = \lambda^{-1}y$ et un troisième vecteur z non nul, non isotrope, tel que $\mathrm{A}z = \pm z$.

– 2e. Si $\mathrm{A}x = \pm x$ pour un vecteur non nul, non isotrope, vérifier que $\mathrm{V} = [x]^\perp$ est stable par A. Montrer que l'étude de la restriction de A à V ramène à $\mathrm{O}(2)$ ou à $\mathrm{O}(1,1)$.

– 2f. Si $\mathrm{A}x = x$ pour un vecteur x non nul et isotrope, l'espace $\mathrm{V} = [x]^\perp$ est toujours stable mais il contient x ; si la deuxième valeur propre de $\mathrm{A}_{|\mathrm{V}}$ est $\neq 1$, montrer que A est diagonalisable.

– 2g. Étudier la matrice

$$\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & 2\sqrt{2} & 1 \\ -2\sqrt{2} & 4 & 2\sqrt{2} \\ -1 & 2\sqrt{2} & 5 \end{pmatrix}.$$

Donner une condition qui garantisse qu'une matrice $\mathrm{A} \in \mathrm{O}(2,1)$ soit diagonalisable sur $\mathbb{C}$.

Index

Index des notations