ALGÈBRE ET

ANALYSE APPROFONDIES I

MT241

Année 2002-2003

Chapitre 0. Nombres réels. Suites numériques

Ce chapitre est consacré à des rappels de première année et à quelques compléments sur les nombres réels, les suites réelles et complexes. Les ensembles de nombres seront désignés par les notations classiques : $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$.

0.1. Nombres réels

Axiomes pour les nombres réels

Il y a de nombreuses façons de présenter les nombres réels en donnant un ensemble restreint de propriétés qui soit suffisant pour reconstruire toutes les autres propriétés des nombres réels. Certaines présentations insistent plutôt sur les opérations algébriques d'addition et de multiplication, et placent l'ordre au second plan. Nous choisirons ici de privilégier la notion d'ordre, et de nous appuyer sur la connaissance des propriétés de l'ensemble $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels.

On suppose donc connu l'ensemble $\mathbb{Q}$, avec son addition, sa multiplication, son ordre et les relations entre l'ordre et les opérations. L'ensemble $\mathbb{R}$ des *nombres réels* peut alors être caractérisé à partir d'un petit nombre de propriétés "axiomatiques". Ces propriétés seront classées ici en quatre points : (O) pour *ordre*, (E) pour *extension* des rationnels, (D) pour *densité* (des rationnels dans les réels) et (C) pour *coupures*.

(O) L'ensemble $\mathbb{R}$ est totalement ordonné (c'est à dire qu'étant donnés $x, y \in \mathbb{R}$, on a $x \leq y$ ou bien $y \leq x$). L'ensemble $\mathbb{R}$ n'a pas de plus grand élément et pas de plus petit élément.

(E) L'ensemble $\mathbb{R}$ contient l'ensemble $\mathbb{Q}$ des rationnels, et l'ordre sur $\mathbb{R}$ prolonge l'ordre des rationnels : si q_1 et q_2 sont deux nombres rationnels, on a $q_1 \leq q_2$ pour l'ordre de $\mathbb{R}$ si et seulement si on a $q_1 \leq q_2$ dans $\mathbb{Q}$.

(D) Etant donné deux nombres réels x, y tels que $x < y$, il existe un nombre rationnel q tel que $x < q < y$.

(C) Pour toute partition de $\mathbb{Q}$ en deux classes *non vides* I et J telles que

$$\forall q \in \mathrm{I},\ \forall r \in \mathrm{J}, \quad q < r$$

(c'est à dire que tous les éléments de I sont plus petits que les éléments de J), il existe un nombre réel z tel que

$$\forall q \in \mathrm{I},\ \forall r \in \mathrm{J}, \quad q \leq z \leq r.$$

La dernière propriété (C) s'appelle la *propriété des coupures*, parce qu'on appelle *coupure dans* $\mathbb{Q}$ toute partition (I, J) de $\mathbb{Q}$ vérifiant les propriétés énoncées dans (C). Le nombre z introduit dans la propriété (C) est unique (exercice) ; on dira que z est défini par la coupure (I, J). C'est l'unique nombre réel qui se trouve "coincé" entre les ensembles I et J. Si q, r sont deux nombres rationnels et si on a $q < z < r$, alors $q \in \mathrm{I}$ et $r \in \mathrm{J}$. Si z n'est pas rationnel, on peut dire que I est l'ensemble de tous les nombres rationnels q tels que $q < z$ et J l'ensemble de tous les nombres rationnels r tels que $r > z$; si z est lui-même rationnel, il y a deux cas possibles, selon que $z \in \mathrm{I}$ ou $z \in \mathrm{J}$.

Exemple. Désignons par J l'ensemble de tous les nombres rationnels $r > 0$ tels que $r^2 > 2$ et par I l'ensemble $\mathbb{Q} \setminus \mathrm{J}$ complémentaire de J dans $\mathbb{Q}$. Le couple (I, J) est une coupure qui définit le nombre réel $\sqrt{2}$ (si A et B sont deux sous-ensembles d'un ensemble X, on note $\mathrm{A} \setminus \mathrm{B}$ l'ensemble des points de A qui ne sont pas dans B).

Proposition 0.1.1. Propriété des coupures. *Pour toute partition de* $\mathbb{R}$ *en deux classes non vides* I *et* J *telles que*

$$\forall x \in \mathrm{I},\ \forall y \in \mathrm{J}, \quad x < y,$$

il existe un nombre réel z unique *tel que*

$$\forall x \in \mathrm{I},\ \forall y \in \mathrm{J}, \quad x \leq z \leq y.$$

Esquisse de démonstration. C'est presque la même chose que la propriété (C), sauf qu'on s'est donné maintenant une partition de $\mathbb{R}$ au lieu d'une partition de $\mathbb{Q}$. On désigne alors par I' l'ensemble des *rationnels* qui sont dans I et par J' l'ensemble des rationnels qui sont dans J. On vérifie que $(\mathrm{I}', \mathrm{J}')$ est une coupure de $\mathbb{Q}$ (micro-exercice), qui définit un nombre réel z : c'est le nombre cherché.

Exercice. (A traiter à partir des propriétés $(\mathrm{O}, \mathrm{E}, \mathrm{D}, \mathrm{C})$ seulement, en oubliant momentanément ce qu'on a pu apprendre avant sur l'ensemble $\mathbb{R}$)

– Montrer que pour tout nombre réel x il existe deux nombres rationnels p, q tels que $p < x < q$.

– Si x, y sont deux nombres réels, montrer que l'on a $x \leq y$ si et seulement si tout nombre rationnel q plus petit que x est plus petit que y.

– Montrer qu'un nombre réel x est égal à 0 si et seulement si pour tout rationnel $r > 0$, on a $-r \leq x \leq r$.

– Soit f une fonction croissante de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, qui change de signe mais ne s'annule jamais. Montrer qu'il existe un nombre $z \in \mathbb{R}$ unique tel que $f(x) < 0$ pour tout $x < z$ et $f(y) > 0$ pour tout $y > z$.

Remarque. Approximation d'un nombre réel par des nombres rationnels. Si x est un nombre réel et si r est un nombre rationnel > 0 (qu'on peut imaginer *petit*), il existe deux nombres rationnels p et q tels que $p < x < q$ et $q - p < r$.

Justifions cette affirmation. Prenons un premier rationnel q_1 tel que $x < q_1$, et un autre rationnel u tel que $0 < u < r/2$. Il existe un entier $n > 0$ tel que $q_1 < nu$, donc $x < nu$, et de la même façon on peut trouver un entier relatif m tel que $mu < x$. L'ensemble des entiers relatifs $k \geq m$ tels que $ku \leq x$ est fini, puisqu'il est majoré par n et minoré par m. Soit k_0 son plus grand élément ; on aura alors $(k_0 + 1)u > x$, donc

$$p = k_0 u - u < k_0 u \leq x < (k_0 + 1)u = q$$

et on a bien obtenu $q - p = 2u < r$.

Majorant. Borne supérieure

Soit A un sous-ensemble de $\mathbb{R}$; on dit qu'un nombre réel M est un *majorant* de l'ensemble A si tout élément x de A est inférieur ou égal à M,

$$\forall x \in \mathrm{A}, \quad x \leq \mathrm{M}.$$

Il est important (et facile) de savoir exprimer qu'un nombre y *n'est pas* un majorant de l'ensemble A : cela signifie qu'il existe au moins un nombre $x \in \mathrm{A}$ tel que $x > y$. Si A est vide, on est conduit à dire que n'importe quel $\mathrm{M} \in \mathbb{R}$ est un majorant de A. On dit que l'ensemble A est *majoré* s'il existe un majorant $\mathrm{M} \in \mathbb{R}$ pour l'ensemble A. Un *minorant* de A est défini de façon analogue, et on dit que A est *minoré* s'il possède un minorant $m \in \mathbb{R}$. On dit que A est *borné* s'il est à la fois majoré et minoré.

Si A est un sous-ensemble non vide et majoré de $\mathbb{R}$, considérons l'ensemble J des majorants de A et désignons par I son complémentaire. Alors (I, J) est une coupure dans $\mathbb{R}$: tout d'abord, J est non vide par hypothèse. Puisque A est non vide, on peut trouver $a \in \mathrm{A}$ et un réel x tel que $x < a$ parce que $\mathbb{R}$ n'a pas de plus petit élément, donc x n'est pas un majorant de A, c'est à dire que $x \in \mathrm{I}$, donc I est non vide. Soient ensuite $x \in \mathrm{I}$ et $y \in \mathrm{J}$; puisque x n'est pas un majorant de A, il existe un élément $a \in \mathrm{A}$ tel que $x < a$, et $a \leq y$ puisque y est un majorant de A, donc $x < y$. On a bien montré que (I, J) est une coupure.

Puisque (I, J) est une coupure, il existe un unique nombre réel b défini par la coupure, c'est à dire tel que $x \leq b \leq y$ pour tous $x \in \mathrm{I}$, $y \in \mathrm{J}$. Nous allons voir que

Le nombre b est le plus petit majorant de A.

Tout d'abord, on sait que $b \leq y$ pour tout majorant y de A (c'est à dire tout $y \in \mathrm{J}$). De plus, b est un majorant de A : sinon, il existerait $a \in \mathrm{A}$ tel que $b < a$, puis un rationnel q tel que $b < q < a$ d'après la densité (D) ; alors q ne serait pas un majorant de A, donc $q \in \mathrm{I}$ mais $b < q$, contredisant la définition de b par la coupure (I, J). Par conséquent, b est un majorant de A, donc finalement b est le plus petit majorant de A.

Définition 0.1.1. On dit que b est la *borne supérieure* d'un sous-ensemble A de $\mathbb{R}$ si b est le plus petit majorant de A.

On a donc établi une propriété fondamentale de l'ensemble $\mathbb{R}$:

Théorème 0.1.1. *Tout sous-ensemble* A *non vide et majoré de* $\mathbb{R}$ *possède une borne supérieure.*

Si A possède un plus grand élément a, cet élément a est évidemment la borne supérieure de A. La *borne inférieure* d'un ensemble A, si elle existe, est le plus grand minorant de A. Tout sous-ensemble non vide et minoré de $\mathbb{R}$ possède une borne inférieure. Quand elle existe, on désigne la borne supérieure de A par la notation $\sup \mathrm{A}$, et $\inf \mathrm{A}$ pour la borne inférieure.

Exemples. L'intervalle $\mathrm{A} =]0, 1[$ admet 1 pour borne supérieure et 0 pour borne inférieure. Noter qu'aucun de ces deux nombres n'est élément de A dans cet exemple. L'ensemble $\{1, 1/2, 1/3, \ldots, 1/n, \ldots\}$ admet 1 pour plus grand élément, donc pour borne supérieure, et 0 pour borne inférieure.

Il est important de comprendre le fonctionnement de ces notions. Commençons par une propriété très simple.

Si $\mathrm{A} \subset \mathrm{B} \subset \mathbb{R}$*, avec* A *non vide,* B *majoré, on a* $\sup \mathrm{A} \leq \sup \mathrm{B}$*. Dans la même situation* $\mathrm{A} \subset \mathrm{B} \subset \mathbb{R}$*, si* A *est non vide et* B *minoré, on a* $\inf \mathrm{B} \leq \inf \mathrm{A}$.

Vérification. Le nombre $\sup \mathrm{B}$ est par définition un majorant de B, donc c'est aussi un majorant de A puisque $\mathrm{A} \subset \mathrm{B}$. Mais puisque $\sup \mathrm{A}$ est *le plus petit* majorant de A, on a bien $\sup \mathrm{A} \leq \sup \mathrm{B}$.

On va maintenant expliquer comment on peut définir les opérations algébriques sur les nombres réels en utilisant l'addition et la multiplication des rationnels et les propriétés d'ordre. Précisons la règle du jeu pour la lecture de ce qui suit : on va faire semblant pour un moment de ne plus savoir ce qu'est l'addition de deux nombres réels, et on va voir comment on pourrait la définir à partir de ce qui précède. La réalisation complète de ce programme est longue et pénible, et on ne fera ici que l'esquisser.

Addition des nombres réels

Etant donnés deux nombres réels x_1 et x_2, on définit un nombre réel, noté provisoirement $[x_1 + x_2]$, par la formule

$$[x_1 + x_2] = \sup\{p_1 + p_2 : p_1, p_2 \in \mathbb{Q},\ p_1 \leq x_1, p_2 \leq x_2\}.$$

Désignons par $\mathrm{S}(x_1, x_2)$ l'ensemble des sommes $p_1 + p_2$, où p_1, p_2 sont rationnels, et $p_1 \leq x_1$, $p_2 \leq x_2$. Si x_1 et x_2 sont rationnels, on voit que $[x_1 + x_2] = x_1 + x_2$. En effet, dans ce cas, $x_1 + x_2$ est le plus grand élément de $\mathrm{S}(x_1, x_2)$, donc aussi sa borne supérieure. Cette vérification permet de noter simplement $x_1 + x_2$ pour la somme de deux réels.

Exercice (pénible et un peu délicat).

– Vérifier que $x_1 + x_2 = x_2 + x_1$ pour tous réels x_1, x_2.
– Si $x_1 \leq y_1$ et $x_2 \leq y_2$, montrer que $x_1 + x_2 \leq y_1 + y_2$.
– Montrer que $x_1 + (x_2 + x_3) = (x_1 + x_2) + x_3$ pour tous réels x_1, x_2, x_3.
– Montrer que $x + 0 = x$ pour tout nombre réel x.

Pour terminer la mise en place des propriétés liées à l'addition, on définit un nombre réel noté $[-x]$ comme borne supérieure de l'ensemble $\mathrm{N}(x)$ des rationnels q tels que $x \leq -q$. On montre alors que $[-x] + x = 0$. Cela permet de vérifier que si x est rationnel, $[-x]$ est bien égal au rationnel $-x$. Cette vérification étant faite, on notera simplement $-x$ pour l'opposé d'un nombre réel x. On voit que si $x \leq y$, alors $-y \leq -x$.

Multiplication

Le cas de la multiplication est plus embêtant, parce que la multiplication par un nombre réel < 0 va renverser l'ordre. On peut y arriver en définissant d'abord le produit de deux nombres réels ≥ 0, comme borne supérieure d'un ensemble de produits de rationnels, puis en définissant les autres cas en raisonnant sur les signes. On commence donc par poser pour x_1, x_2 réels positifs ou nuls

$$[x_1 x_2] = \sup\{p_1 p_2 : p_1, p_2 \in \mathbb{Q},\ 0 \leq p_1 \leq x_1,\ 0 \leq p_2 \leq x_2\}.$$

On vérifie que $[x_1 x_2] = x_1 x_2$ lorsque x_1 et x_2 sont rationnels ≥ 0. On omettra ici la suite de la construction de la multiplication, qui commence ainsi : si $x_1 < 0$ et $x_2 \geq 0$, on posera $x_1 x_2 = -(-x_1)x_2 \ldots$

Il faut se rappeler que si x, y sont ≥ 0, alors $xy \geq 0$. Il en résulte que si $a \leq b$ et $u \geq 0$, on a $au \leq bu$ (il suffit d'écrire $bu - au = (b - a)u \geq 0$).

Une construction des nombres réels

On pourra sans inconvénient sauter ce paragraphe en première lecture. L'objectif est d'expliquer comment on peut fabriquer un "modèle" pour l'ensemble $\mathbb{R}$ en utilisant le langage de la théorie des ensembles, et en ne supposant connu que l'ensemble $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels. Ce modèle sera noté provisoirement $\mathcal{R}$ au lieu de $\mathbb{R}$.

L'idée est assez simple. Si on "connaît" déjà l'ensemble $\mathbb{R}$, on voit bien qu'un nombre réel x est complètement déterminé par la connaissance de l'ensemble I_x de tous les nombres rationnels q tels que $q < x$. Si on oublie $\mathbb{R}$ et qu'on cherche à l'introduire "proprement" à partir de $\mathbb{Q}$, on peut se dire qu'il suffit de remplacer "l'idée" de x par "l'idée" de I_x, c'est à dire l'idée d'un intervalle I de rationnels, majoré mais sans plus grand élément, et illimité à gauche.

On désignera donc par $\mathcal{R}$ l'ensemble des sous-ensembles $\mathrm{I} \subset \mathbb{Q}$ qui vérifient les trois propriétés suivantes :

1. $\mathrm{I} \neq \emptyset$ et $\mathrm{I} \neq \mathbb{Q}$
2. Si I contient un nombre rationnel r, alors I contient tous les nombres rationnels q tels que $q \leq r$.
3. Pour tout $r \in \mathrm{I}$ il existe $r' \in \mathrm{I}$ tel que $r < r'$ (l'ensemble I n'a pas de plus grand élément).

Du point de vue ensembliste, $\mathcal{R}$ est un sous-ensemble de l'ensemble $\mathcal{P}(\mathbb{Q})$ des parties de $\mathbb{Q}$. Pour tout nombre rationnel q, posons

$$\mathrm{I}(q) = \{r \in \mathbb{Q} : r < q\}.$$

On vérifie que $\mathrm{I}(q)$ est un élément de $\mathcal{R}$. On a ainsi défini une application $j : q \to \mathrm{I}(q)$ de $\mathbb{Q}$ dans $\mathcal{R}$. Cette application j est injective, ce qui permettra de "plonger" $\mathbb{Q}$ dans $\mathcal{R}$. Si on n'aime

pas "plonger", on pourra dire que $\mathbb{R}$ sera la réunion de $\mathbb{Q}$ (le vrai) avec la partie $\mathcal{R} \setminus j(\mathbb{Q})$ de $\mathcal{R}$ formée de tous les $\mathrm{I} \in \mathcal{R}$ qui ne sont pas de la forme $\mathrm{I}(q)$ pour un rationnel q.

On définit maintenant l'ordre sur l'ensemble $\mathcal{R}$, en prenant l'ordre de l'inclusion des ensembles de rationnels : si $\mathrm{I}_1, \mathrm{I}_2 \in \mathcal{R}$, on dit que $\mathrm{I}_1 \leq \mathrm{I}_2$ si et seulement si $\mathrm{I}_1 \subset \mathrm{I}_2$. On vérifie que l'ensemble $\mathcal{R}$ est totalement ordonné. De plus, l'ordre sur l'image $j(\mathbb{Q})$ de $\mathbb{Q}$ est bien l'ordre de $\mathbb{Q}$, c'est à dire que l'on a $p_1 \leq p_2$ dans $\mathbb{Q}$ si et seulement si $\mathrm{I}(p_1) \subset \mathrm{I}(p_2)$. Il est clair que $\mathcal{R}$ n'a pas de plus grand élément ni de plus petit élément. On a donc vérifié les propriétés (O) et (E) pour l'ensemble $\mathcal{R}$.

Supposons que $\mathrm{I}_1, \mathrm{I}_2$ soient deux éléments de $\mathcal{R}$, tels que $\mathrm{I}_1 < \mathrm{I}_2$. Cela signifie qu'il existe un rationnel q tel que $q \in \mathrm{I}_2$ mais $q \notin \mathrm{I}_1$. Il existe aussi d'après la définition des éléments de $\mathcal{R}$ un nombre rationnel $q' > q$ tel que $q' \in \mathrm{I}_2$. Alors $\mathrm{I}_1 \leq \mathrm{I}(q) < \mathrm{I}(q') < \mathrm{I}_2$, ce qui montre la propriété (D).

Terminons avec la propriété (C) de coupure. Soit (I, J) une partition de $\mathbb{Q}$ en deux classes non-vides telle que tout élément q de I et tout élément r de J vérifient $q < r$; désignons par I' l'ensemble de tous les éléments $q \in \mathrm{I}$ pour lesquels il existe $q' \in \mathrm{I}$ tel que $q < q'$. On vérifie alors que $\mathrm{I}' \in \mathcal{R}$ et que $\mathrm{I}(q) \subset \mathrm{I}' \subset \mathrm{I}(r)$ pour tous $q \in \mathrm{I}$, $r \in \mathrm{J}$. Autrement dit, $\mathrm{I}' = z$ est l'élément cherché dans la propriété (C).

La droite achevée $\overline{\mathbb{R}}$

La *droite achevée*, notée $\overline{\mathbb{R}}$, est l'ensemble obtenu en ajoutant à l'ensemble $\mathbb{R}$ deux nouveaux éléments, $+\infty$ et $-\infty$. Pour bien se mettre d'accord sur le langage employé, insistons un peu : ces deux nouveaux éléments $+\infty$ et $-\infty$ *ne sont pas* des nombres *réels* et *ne devront pas* être appelés nombres réels.

Il est utile de préciser un certain nombre de conventions concernant les symboles $+\infty$ et $-\infty$. Tout d'abord, si x est réel, on considère que $-\infty < x < +\infty$; on pose ensuite $x + (+\infty) = x - (-\infty) = +\infty$, $x - (+\infty) = x + (-\infty) = -\infty$; on pose aussi $(+\infty)+(+\infty) = +\infty$ et la convention analogue pour $-\infty$, à savoir $(-\infty)+(-\infty) = -\infty$.

Si $x > 0$, on pose $x.(+\infty) = (-x).(-\infty) = +\infty$ et $x.(-\infty) = (-x).(+\infty) = -\infty$; on pose aussi $(+\infty).(+\infty) = (-\infty).(-\infty) = +\infty$ et $1/(+\infty) = 1/(-\infty) = 0$; les autres cas sont considérés indéterminés : $(+\infty) - (+\infty)$, $0.(+\infty)$ ou $0.(-\infty)$ et $1/0$.

On pourra noter que *tout sous-ensemble* A *de* $\overline{\mathbb{R}}$ *possède une borne supérieure dans* $\overline{\mathbb{R}}$ (et une borne inférieure) : si A est vide, son plus petit majorant est l'élément $-\infty$; si A n'est pas majoré par un nombre réel, son plus petit majorant dans $\overline{\mathbb{R}}$ est $+\infty$. Si A est non vide et majoré par un nombre réel, on utilise la propriété de borne supérieure dans $\mathbb{R}$.

0.2. Limite des suites numériques

Une suite de nombres réels est une application $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$; la notation habituelle pour une suite est (x_n), ou plus précisément $(x_n)_{n \geq 0}$, plutôt que les notations d'applications telles que $n \to x(n)$.

Suite de nombres réels convergente vers un nombre réel

Définition 0.2.1. On dit que la suite de nombres réels (x_n) converge vers $\ell \in \mathbb{R}$ si pour tout $\varepsilon > 0$, on a pour tout entier n assez grand (dépendant de ε) l'inégalité $|x_n - \ell| < \varepsilon$. En symboles

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \mathrm{N} \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ (n \geq \mathrm{N} \Rightarrow |x_n - \ell| < \varepsilon).$$

On peut traduire la convergence de la suite (x_n) vers la limite ℓ en disant qu'il existe une application $\varepsilon \to \mathrm{N}(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, définie pour tout $\varepsilon > 0$, qui *contrôle la convergence* dans le sens suivant : pour tout $\varepsilon > 0$, on a

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \big(n \geq \mathrm{N}(\varepsilon) \Rightarrow |x_n - \ell| < \varepsilon\big).$$

Par exemple, la convergence vers 0 de la suite $(1/n)$ est contrôlée par la fonction $\mathrm{N}(\varepsilon) = [1/\varepsilon] + 1$ (la notation $[x]$ désigne la *partie entière* du nombre réel x, c'est à dire le plus grand entier relatif k tel que $k \leq x$). Si la fonction $\varepsilon \to \mathrm{N}_1(\varepsilon)$ contrôle la convergence de la suite (x_n) vers ℓ et la fonction N_2 la convergence de la suite (y_n) vers m, on voit facilement que si on pose $\mathrm{N}(\varepsilon) = \max\{\mathrm{N}_1(\varepsilon/2), \mathrm{N}_2(\varepsilon/2)\}$, la fonction $\varepsilon \to \mathrm{N}(\varepsilon)$ contrôle la convergence de la suite $(x_n + y_n)$ vers $\ell + m$: c'est le théorème sur la somme de limites.

Le lecteur devra réviser les propriétés des limites : sommes, produits, quotients,...

Exercice. Etudier la suite définie par $x_0 = 1$, et $x_{n+1} = \frac{1}{2}\big(x_n + 5/x_n\big)$ pour tout $n \geq 0$ (on calculera $x_{n+1} \pm \sqrt{5}$, et on montrera que $1 - 2\sqrt{5}/(x_n + \sqrt{5}) = (x_n - \sqrt{5})/(x_n + \sqrt{5})$ tend vers 0).

Limite infinie

On dit que la suite de nombres réels (x_n) tend vers $+\infty$ si pour tout $\mathrm{A} \in \mathbb{R}$ on a pour tout entier n assez grand (dépendant de A) l'inégalité $x_n > \mathrm{A}$. En symboles

$$\forall \mathrm{A} \in \mathbb{R},\ \exists \mathrm{N} \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ \ (n \geq \mathrm{N} \Rightarrow x_n > \mathrm{A}).$$

Il existe évidemment une définition analogue pour $-\infty$ que le lecteur formulera lui-même. On réserve le terme de *suite convergente* aux suites qui convergent vers un nombre réel (c'est à dire que la limite est finie). Dans tous les cas la limite est unique quand elle existe, et on la note $\lim_n x_n$, finie ou $\pm\infty$.

Si (x_n) et (y_n) sont deux suites qui admettent les limites (peut-être infinies) ℓ et m, les suites $(x_n + y_n)$, $(x_n y_n)$ ou $(1/x_n)$ tendent respectivement vers $\ell + m$, ℓm ou $1/\ell$, chaque fois que les conventions naturelles pour l'arithmétique de $\overline{\mathbb{R}}$ (rappelées à la fin de la section précédente) donnent un sens à l'expression limite.

Dans certains cas une suite numérique ne commence pas avec $n = 0$, mais elle est seulement définie pour $n \geq n_0$; la notation $(x_n)_{n \geq n_0}$ rend compte de cette situation. Les modifications à faire dans ce cas à la définition des limites sont claires. La limite d'une suite ne change pas si on modifie un nombre fini de termes de la suite, ou si on décale tous les termes : si $\lim_n x_n = \ell \in \overline{\mathbb{R}}$, la suite (y_n) définie par $y_n = x_{n+1}$ vérifie aussi $\lim_n y_n = \ell$.

Principes simples

La propriété suivante est importante, c'est pratiquement la définition de la limite :

Si $a < \ell = \lim_n x_n \in \overline{\mathbb{R}}$, alors pour tout entier n assez grand on a l'inégalité $a < x_n$. De même si $b > \ell = \lim x_n \in \overline{\mathbb{R}}$ on a $b > x_n$ pour tout entier n assez grand.

Vérification dans le cas $a < \ell$ et ℓ finie. Dans l'application de la définition de la limite, on choisit $\varepsilon = (\ell - a)/2 > 0$. Pour $n \geq \mathrm{N}(\varepsilon)$, on aura $|x_n - \ell| < (\ell - a)/2$, ce qui donne $\ell - x_n < \ell - a$, donc $a < x_n$ pour tout $n \geq \mathrm{N}(\varepsilon)$.

Exemple : suites équivalentes ; soit $(y_n)_{n \geq 0}$ une suite numérique telle que $y_n \neq 0$ pour tout n assez grand. La suite (x_n) est dite équivalente à la suite (y_n) si x_n/y_n tend vers 1 quand $n \to +\infty$; alors pour tout $\varepsilon > 0$ on a pour n assez grand $(1-\varepsilon) < x_n/y_n < (1+\varepsilon)$. En particulier, on voit que $x_n/y_n > 0$ pour n assez grand (prendre $\varepsilon = 1/2$ par exemple), ce qui indique que x_n et y_n sont de même signe pour n assez grand.

Toute suite convergente (limite finie) est bornée.

Cela résulte du "principe simple" ci-dessus, appliqué avec par exemple $a = \ell - 1$ et $b = \ell + 1$.

Passage à la limite des inégalités larges

Il s'agit d'une remarque bien simple mais qui doit devenir un des automatismes fondamentaux de l'analyse : si $\ell = \lim x_n$ et si on a $x_n \leq \mathrm{M}$ pour tout $n \geq n_0$, alors "l'inégalité passe à la limite" et on obtient $\ell \leq \mathrm{M}$.

Important : seules les inégalités larges se conservent par passage à la limite.

Limites de fonctions et limites de suites

Soient $\mathrm{J} =]c, d[$ un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et a un point de $[c, d]$; posons $\mathrm{I} = \mathrm{J} \setminus \{a\}$; si f est une fonction réelle définie dans I, qui vérifie

$$\lim_{x \to a, x \in \mathrm{I}} f(x) = \ell$$

(avec $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$) et si (x_n) est une suite de points de I telle que $x_n \to a$, alors la suite $(f(x_n))$ tend vers ℓ. Le résultat s'étend au cas où $d = a = +\infty$ ou bien $c = a = -\infty$.

Exemple : soit t un nombre réel fixé ; déterminer $\lim_n \left(1 + \frac{t}{n}\right)^n$ en utilisant la limite du quotient $\ln(1 + x)/x$ lorsque $x \to 0$ (le seul cas intéressant est le cas $t \neq 0$).

En particulier, ce qui précède s'applique si f est une fonction continue en un point. Soient J un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et a un point de J ; si f est une fonction réelle définie sur J, continue au point a, et si (x_n) est une suite de points de J telle que $x_n \to a$, alors la suite $(f(x_n))$ tend vers $f(a)$.

Suites croissantes et majorées

On rappelle que la borne supérieure d'un sous-ensemble A de $\mathbb{R}$ est le plus petit majorant de A, et que tout sous-ensemble non vide et majoré de $\mathbb{R}$ possède une borne supérieure, notée $\sup \mathrm{A}$.

Théorème 0.2.1. *Toute suite croissante et majorée (x_n) de nombres réels converge vers un nombre $\ell \in \mathbb{R}$. La limite ℓ est la borne supérieure de l'ensemble*

$$\{x_0, x_1, \ldots, x_n, \ldots\}$$

des valeurs prises par la suite (x_n). En particulier, on a $x_n \leq \ell$ pour tout n.

Autrement dit, une suite croissante de nombres réels est convergente si et seulement si elle est majorée.

Démonstration. L'ensemble A des valeurs prises par la suite (x_n) est non vide, et il est majoré par hypothèse. Nous pouvons donc considérer la borne supérieure $\ell = \sup(\mathrm{A})$. Soit $\varepsilon > 0$ quelconque ; puisque $\ell - \varepsilon < \ell$ et puisque ℓ est *le plus petit* majorant de A, nous savons que $\ell - \varepsilon$ ne peut pas être un majorant de A. Il existe donc au moins un élément x_{N} de A tel que $\ell - \varepsilon < x_{\mathrm{N}}$ (l'entier N dépend de ε). Puisque la suite (x_n) est croissante, nous aurons $x_{\mathrm{N}} \leq x_n$ pour tout $n \geq \mathrm{N}$; par ailleurs $x_n \leq \ell$ puisque ℓ est un majorant de l'ensemble A. Au total nous avons pour tout entier $n \geq \mathrm{N}$

$$\ell - \varepsilon < x_{\mathrm{N}} \leq x_n \leq \ell,$$

ce qui entraîne que $|x_n - \ell| < \varepsilon$. Explicitons complètement la conclusion, pour une fois : nous venons bien de montrer qu'à tout $\varepsilon > 0$ donné, nous pouvons associer un entier $\mathrm{N} = \mathrm{N}(\varepsilon)$ tel que $|x_n - \ell| < \varepsilon$ pour tout $n \geq \mathrm{N}$, donc nous avons montré que la suite (x_n) converge vers ℓ.

A titre d'exercice, on montrera de façon analogue le théorème qui suit :

Théorème 0.2.2. *Soit f une fonction à valeurs réelles définie sur un intervalle $[a, b[$, croissante et majorée sur cet intervalle ; alors $f(x)$ tend vers une limite $\ell \in \mathbb{R}$ lorsque x tend vers b (par valeurs $x < b$). La limite ℓ est la borne supérieure de l'ensemble des valeurs prises par la fonction f sur l'intervalle $[a, b[$. En particulier, on a $f(x) \leq \ell$ pour tout $x \in [a, b[$. Le résultat reste valable pour un intervalle de la forme $[a, +\infty[$.*

Convergence de suites complexes

On dit qu'une suite (z_n) de nombres complexes converge vers $\ell \in \mathbb{C}$ si la suite réelle des modules $|z_n - \ell|$ tend vers 0. On peut exprimer la convergence en utilisant les parties réelles et imaginaires : la suite (z_n) converge vers $\ell \in \mathbb{C}$ si et seulement si les deux suites réelles formées des parties réelles et imaginaires convergent respectivement vers celles de la limite ℓ,

$$\lim_{n\to+\infty} z_n = \ell \Leftrightarrow \Big(\lim_{n\to+\infty} \operatorname{Re} z_n = \operatorname{Re} \ell \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} \operatorname{Im} z_n = \operatorname{Im} \ell \Big).$$

Il est parfois (et même souvent) nécessaire d'étudier une suite complexe directement comme suite complexe, alors que l'étude des parties réelles et imaginaires conduirait à des complications insurmontables. La même remarque s'applique à certains calculs matriciels ou vectoriels qui ne sont compréhensibles que si on raisonne globalement.

Reprendre l'exemple : $z_0 \in \mathbb{C}$, $z_{n+1} = \frac{1}{2}\big(z_n + b/z_n\big)$, avec b complexe, $b \neq 0$; discuter suivant la position de z_0 par rapport aux deux racines carrées de b.

Sous-suites

La notion de sous-suite est source de malentendus, et il faut se mettre d'accord sur le sens qu'on veut lui donner en mathématique. Etant donnée une suite (x_n) de nombres (ou une suite de n'importe quoi, ça serait pareil), la donnée d'une sous-suite consiste à sélectionner **dans l'ordre donné** et **sans répétition** certains éléments de la suite initiale, en conservant **une infinité** de termes de la suite donnée. Ce qui nous donne :

Définition 0.2.2. On dit que la suite $(y_k)_{k\geq 0}$ est une *sous-suite* de la suite $(x_n)_{n\geq 0}$ s'il existe une suite strictement croissante d'indices entiers $n_0 < n_1 < \ldots < n_k < \ldots$ tels que pour tout entier $k \geq 0$ on ait $y_k = x_{n_k}$.

Dans la pratique, on notera souvent directement $(x_{n_k})_k$ une sous-suite de la suite (x_n). Si la suite (x_n) tend vers $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$, toute sous-suite de la suite (x_n) tend vers la même limite ℓ ; bien sûr l'inverse n'est pas vrai : la suite $(x_n) = ((-1)^n)$ n'est pas convergente, mais possède des sous-suites convergentes, par exemple les sous-suites (x_{2n}) et (x_{2n+1}). On verra plus loin un théorème général sur ce sujet de l'extraction de sous-suites convergentes (théorème de Bolzano-Weierstrass 6.1.2 : toute suite bornée de nombres réels admet des sous-suites convergentes).

Limite supérieure d'une suite bornée de nombres réels

Soit (x_n) une suite bornée de nombres réels. Désignons par I l'ensemble de tous les nombres réels x tels qu'il existe une infinité d'indices n vérifiant $x < x_n$. Puisque (x_n) est bornée, on peut choisir M tel que $-\mathrm{M} \leq x_n \leq \mathrm{M}$ pour tout $n \geq 0$. Il n'y a donc aucun indice n tel que $\mathrm{M} < x_n$, par conséquent $\mathrm{M} \notin \mathrm{I}$, et on a $-\mathrm{M} - 1 < x_n$ pour *tous* les indices entiers n, donc $-\mathrm{M} - 1 \in \mathrm{I}$. Par ailleurs il est clair que si $x \in \mathrm{I}$ et $x' < x$, on a aussi $x' \in \mathrm{I}$. Si on désigne par J le complémentaire de I dans $\mathbb{R}$, on voit que (I, J) est une coupure, qui définit donc un unique nombre réel z. Précisons les deux propriétés qui caractérisent complètement le nombre z :

– pour tout $x < z$, il existe une infinité d'indices n tels que $x < x_n$
– pour tout $y > z$, il n'existe qu'un nombre fini d'indices n tels que $y < x_n$.

Le nombre z ainsi défini s'appelle la *limite supérieure* de la suite (x_n), et on le note

$$z = \limsup_{n\to+\infty} x_n.$$

Indiquons une autre approche. Pour chaque entier $m \geq 0$, considérons la borne supérieure

$$u_m = \sup\{x_m, x_{m+1}, x_{m+2}, \ldots\}$$

de l'ensemble A_m formé par les termes de la suite au-delà du rang m. Il n'existe évidemment qu'un nombre fini d'indices k tels que $u_m < x_k$ (tous ces indices k sont $< m$, puisque u_m majore tous les termes x_n pour $n \geq m$), par conséquent $z \leq u_m$. D'autre part, les ensembles A_m étant décroissants par rapport à m, la suite (u_m) est décroissante ; puisqu'elle est minorée par z, elle converge vers une limite u, qui est en fait égale à z (si on avait $z < u$, on pourrait choisir v tel que $z < v < u$. Il n'y a alors qu'un nombre fini d'indices n tels que $v < x_n$, donc on peut trouver m tel que $x_n \leq v$ pour tout $n \geq m$, ce qui entraîne $u_m \leq v$, puis $u \leq u_m \leq v < u$, ce qui est impossible. On doit donc avoir $u = z$). On trouve ainsi une formule qui peut expliquer le nom de limite supérieure,

$$\limsup_{n\to+\infty} x_n = \lim_{m\to+\infty} \big(\sup_{n\geq m} x_n\big). \quad \text{On pose aussi} \quad \liminf_{n\to+\infty} x_n = \lim_{m\to+\infty} \big(\inf_{n\geq m} x_n\big).$$

Propriétés de la limite supérieure.

1- Si $\lim_n x_n$ existe, on a $\limsup_n x_n = \lim_n x_n = \liminf_n x_n$. Réciproque ?

2- Si $\lambda > 0$, on a $\limsup_n \lambda x_n = \lambda \limsup_n x_n$.

3- Si $a_n \leq b_n$ pour $n \geq n_0$, on a $\limsup_n a_n \leq \limsup_n b_n$.

4- Si $z = \limsup_n x_n$, on peut trouver, aussi loin qu'on veut dans la suite, des termes x_n aussi près qu'on veut de z :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \forall \mathrm{N},\ \exists n \geq \mathrm{N}, \quad |x_n - z| < \varepsilon.$$

Ceci signifie que $z = \limsup_n x_n$ est une *valeur d'adhérence* de la suite (x_n).

Justifions ce qui précède. Etant donné $\varepsilon > 0$, on sait qu'il n'y a qu'un nombre fini d'indices n tels que $z + \varepsilon < x_n$, et il y a une infinité d'indices n tels que $z - \varepsilon < x_n$; on peut donc certainement trouver un indice $n \geq \mathrm{N}$ vérifiant la seconde condition et le contraire de la première, $z - \varepsilon < x_n \leq z + \varepsilon$, ce qui donne $|x_n - z| < 2\varepsilon$.

Exemple, exercice. La suite $((-1)^n)$ possède exactement deux valeurs d'adhérence, 1 et -1. Si y est une valeur d'adhérence de la suite (x_n), montrer qu'on peut construire une sous-suite (x_{n_k}) qui converge vers y (on tient alors une démonstration de Bolzano-Weierstrass).

0.3. Suites de Cauchy

Si une suite (x_n) réelle ou complexe converge vers ℓ, on peut trouver pour tout $\varepsilon > 0$ un entier N tel que pour tout $m \geq \mathrm{N}$, on ait $|x_m - \ell| < \frac{\varepsilon}{2}$. Si on prend un autre entier $n \geq \mathrm{N}$, on aura aussi $|x_n - \ell| < \frac{\varepsilon}{2}$, donc par l'inégalité triangulaire on obtient $|x_m - x_n| < \varepsilon$ pour tous $m, n \geq \mathrm{N}$, ce qui est une propriété vérifiée par toute suite convergente, mais où la valeur de la limite n'intervient pas. Nous allons donner un nom à la propriété que nous venons d'isoler.

Définition 0.3.1. Une suite réelle ou complexe (x_n) est une *suite de Cauchy* si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier N (dépendant de ε) tel que, pour tous les entiers $m, n \geq \mathrm{N}$, on ait $|x_m - x_n| < \varepsilon$.

Toute suite convergente est donc de Cauchy. Une suite complexe est de Cauchy si et seulement si les parties réelles et imaginaires sont de Cauchy. Pour que (x_n) soit de Cauchy il suffit que

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \mathrm{N},\ \forall n \geq \mathrm{N},\ |x_n - x_{\mathrm{N}}| < \varepsilon.$$

Exercices.

1. Si (x_n) est une suite réelle ou complexe telle que $|x_{n+1} - x_n| \leq 2^{-n}$ pour tout $n \geq 0$, montrer que la suite (x_n) est de Cauchy.

2. Soit f une fonction réelle définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, telle que $|f'(x)| \leq 1/2$ pour tout $x \in \mathbb{R}$; montrer que pour toute valeur de x_0, la suite définie par $x_{n+1} = f(x_n)$ pour tout $n \geq 0$ est une suite de Cauchy.

Proposition 0.3.1. *Toute suite de Cauchy de nombres réels ou complexes est bornée.*

Démonstration. Soit (x_n) une suite de Cauchy réelle ou complexe ; en prenant $\varepsilon = 1$ dans la définition, on trouve un entier N_1 tel que $|x_n - x_{\mathrm{N}_1}| < 1$ pour tout $n \geq \mathrm{N}_1$, donc $|x_n| \leq |x_{\mathrm{N}_1}| + 1$ pour $n \geq \mathrm{N}_1$ et finalement

$$\mathrm{M} = \max\{|x_0|, \ldots, |x_{\mathrm{N}_1 - 1}|, |x_{\mathrm{N}_1}| + 1\}$$

borne la suite (x_n).

Convergence des suites de Cauchy. Espaces complets

Théorème 0.3.1. *Toute suite de Cauchy, réelle ou complexe, est convergente (bien sûr, la limite est réelle si la suite est réelle). Par conséquent, une suite de nombres réels ou complexes est convergente si et seulement si elle est de Cauchy.*

Démonstration. Il suffit de traiter le cas réel. Soit (x_n) une suite de Cauchy de nombres réels ; on sait qu'elle est bornée, ce qui permet de définir sa limite supérieure $z = \limsup_n x_n$. On va montrer que la suite (x_n) converge vers z. Donnons nous un nombre $\varepsilon > 0$. Puisque la suite (x_n) est de Cauchy, il existe un entier N tel que pour tous $n, m \geq \mathrm{N}$, on ait $|x_n - x_m| < \frac{\varepsilon}{2}$; d'après les propriétés de la limite supérieure, on sait que z est valeur d'adhérence de la suite (x_n), donc il existe un entier $n_0 \geq \mathrm{N}$ tel que $|x_{n_0} - z| < \varepsilon/2$. Pour tout $n \geq \mathrm{N}$, on aura

$$|x_n - z| \leq |x_n - x_{n_0}| + |x_{n_0} - z| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2},$$

ce qui montre la convergence de (x_n) vers $z = \limsup_n x_n$.

On dit que $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ sont *complets*. On verra plus tard d'autres cadres dans lesquels seront définies la convergence des suites et les suites de Cauchy. On dira alors qu'un "espace" est complet si toute suite de Cauchy de cet espace converge vers une limite qui soit élément de cet espace (ainsi $\mathbb{Q}$ n'est pas complet : toute suite de Cauchy de points de $\mathbb{Q}$ a bien une limite dans $\mathbb{R}$, mais cette limite n'est pas forcément dans $\mathbb{Q}$).

Exemple. Soit f une fonction réelle définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, telle que $|f'(x)| \leq 1/2$ pour tout $x \in \mathbb{R}$; pour toute valeur de x_0, la suite définie par récurrence par la donnée de x_0 et par la relation $x_{n+1} = f(x_n)$ pour tout $n \geq 0$ converge vers l'unique solution de l'équation $f(x) = x$.

Chapitre 1. Séries numériques

1.1. Introduction

Commençons par donner quelques exemples frappants de séries numériques, avant même de donner la définition mathématique de cette notion.

(A) $$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^n}+\cdots=1.$$

(B) $$1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots=+\infty.$$

(C) $$1-\frac{1}{2}+\cdots+\frac{(-1)^{n+1}}{n}+\cdots=\ln 2.$$

(D) $$1-1+\cdots+(-1)^n+\cdots=???$$

Il faut certainement discuter ces exemples. La première saine réaction est la suivante : avant que l'on ait posé une définition mathématique précise, on a tout à fait le droit de dire que la notation

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^n}+\cdots$$

ne veut rien dire (ce sont les trois petits points à la fin de la ligne précédente qui posent problème). Si on est dans un état d'esprit plus conciliant, on peut accepter d'essayer de deviner le sens qu'on donnera un peu plus loin. Essayons donc. Le premier exemple se comprend bien avec un schéma de $[0,1]$: de l'intervalle $[0,1]$, on efface la première moitié $[0,\frac{1}{2}[$. Il reste une longueur $1/2$ dans l'intervalle restant $[\frac{1}{2},1]$; on enlève maintenant la première moitié $[\frac{1}{2},\frac{3}{4}[$ de l'intervalle restant, c'est à dire qu'on a enlevé en tout $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$, et il reste l'intervalle $[\frac{3}{4},1]$, de longueur $1/4$. On continue... On "voit bien" qu'on épuisera $[0,1]$ en enlevant successivement $1/2$, $1/4$, $1/8$,...

Pour le second exemple on note que

$$1\geq\frac{1}{2}\,;\quad \frac{1}{2}+\frac{1}{3}\geq 2\times\frac{1}{4}=\frac{1}{2}\,;\quad \frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}\geq 4\times\frac{1}{8}=\frac{1}{2},\ldots$$

et de même pour tout entier $n\geq 1$

$$\frac{1}{2^{n-1}}+\cdots+\frac{1}{2^n-1}\geq\frac{1}{2},$$

ce qui montre que

$$1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2^n-1}\geq\frac{n}{2}.$$

Le troisième exemple ne se devine pas, mais montre qu'une somme "infinie" peut devenir finie quand on change les signes. Dans le dernier exemple il y a un choix à faire ; on pourrait se débrouiller pour donner une valeur à cette expression (exercice hors sujet : laquelle ?), mais on choisira une définition pour laquelle la somme (D) ne sera pas définie ; on dira que cette série *diverge*.

1.2. Séries convergentes à termes réels ou complexes

Définition 1.2.1. On suppose donnés des nombres réels ou complexes $u_0, u_1, \ldots$ On associe à ces nombres la suite (U_n) des *sommes partielles* définie par

$$\forall n \geq 0, \quad \mathrm{U}_n = u_0 + \cdots + u_n.$$

On dit que *la série* $\sum(u_n)_n$ *est convergente* si la suite $(\mathrm{U}_n)_n$ des sommes partielles tend vers une limite finie (dans le cas réel ; vers une limite complexe dans le cas complexe). Dans ce cas on définit la *somme* U de la série par $\mathrm{U} = \lim_n \mathrm{U}_n$ et on introduit la notation

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \mathrm{U} = \lim_{n\to+\infty} \mathrm{U}_n$$

ou bien

$$u_0 + u_1 + \cdots + u_n + \cdots = \lim_{n\to+\infty} \mathrm{U}_n.$$

Remarque. Le lecteur pourra noter l'analogie avec la définition des intégrales convergentes $\int_1^{+\infty} f(t)\,dt$. Si f admet une primitive F, l'intégrale $\int_1^{+\infty} f(t)\,dt$ converge si et seulement si $\mathrm{F}(t)$ tend vers une limite quand $t \to +\infty$. La suite des sommes partielles (U_n) joue donc un rôle analogue à celui de la primitive F.

La notation lourde mais correcte $\sum(u_n)_{n\geq 0}$ (que personne à part l'auteur du poly n'emploie) est censée aider à distinguer entre *l'étude de la série* $\sum(u_n)_{n\geq 0}$, et la *valeur* $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ de la somme dans le cas où la série converge. Pratiquement, et sauf exception nous écrirons comme tout le monde "étudier la série $\sum u_n$" (sans bornes de sommation). En revanche nous essaierons de réserver le symbole $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ à la *valeur* de la somme.

Une série à termes complexes converge si et seulement si les deux séries à termes réels des parties réelles et parties imaginaires convergent, et dans le cas de convergence, la somme de la série complexe est égale à

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \operatorname{Re} u_n + i \sum_{n=0}^{+\infty} \operatorname{Im} u_n.$$

Souvent, cette méthode n'est pas la bonne pour calculer la somme de la série (elle est cependant raisonnable pour déterminer si la série est convergente). Pour trouver la somme, il est souvent préférable d'adopter un point de vue global, et de considérer les sommes partielles complexes directement. On verra un premier exemple un peu plus loin avec le calcul de la somme de la série géométrique.

On dit que u_n est le *terme général* de la série $\sum(u_n)_{n\geq 0}$. Une série qui ne converge pas est appelée *série divergente*. La nature d'une série ne change pas si on modifie un nombre fini de ses termes (mais bien entendu, la *somme* de la série peut changer dans cette opération). On écrira "la série $\sum u_n$ converge", ou "la série $\sum u_n$ diverge", ou "étudier la série $\sum u_n$", sans indiquer les bornes de sommation ; en revanche la notation $\sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n$ représentera un *nombre* bien précis, égal à la somme de la série

$$u_{n_0} + u_{n_0+1} + \cdots$$

(qui sera donc supposée convergente).

Si la série $\sum(u_n)_n$ converge, alors $\lim_n u_n = 0$; **l'inverse n'est pas vrai,** comme le montre l'exemple (B) de l'introduction. De façon tout à fait étonnante, un certain nombre d'étudiants persistent à oublier la phrase en gras qui précède.

Suites et séries

Donnons une interprétation "dynamique" pour essayer de balayer les confusions fâcheuses entre suites et séries. Quand on étudie une suite (x_n), on peut penser que x_n représente la *position* à l'instant n, et que l'on s'intéresse à l'existence d'une position limite quand le temps n devient très grand. Quand on étudie une série $\sum u_n$, il faut penser que u_n représente le *déplacement* entre les instants $n-1$ et n. Mais ce qui nous intéresse, c'est tout de même la position $\mathrm{U}_n = u_0 + \cdots + u_n$ à l'instant n. L'étude des séries donne des critères portant sur les *déplacements* qui permettent de garantir que la *position limite* existe.

On peut facilement retourner la correspondance séries-suites :

Théorème 1.2.1. *Soit (x_n) une suite de nombres réels ou complexes ; la série numérique $\sum(x_{n+1} - x_n)_{n\geq 0}$ converge si et seulement si la suite (x_n) tend vers une limite finie (ou une limite complexe). Posons plus précisément $u_0 = x_0$ et $u_{n+1} = x_{n+1} - x_n$ pour tout $n \geq 1$. Dans le cas où la série $\sum u_n$ converge, on a*

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n.$$

Démonstration. On voit que

$$\mathrm{U}_n = u_0 + \cdots + u_n = x_0 + (x_1 - x_0) + \cdots + (x_n - x_{n-1}) = x_n,$$

par conséquent la suite des sommes partielles (U_n) de la série $\sum u_n$ est exactement la suite (x_n). Par définition, la série $\sum u_n$ converge si et seulement si la suite (U_n) converge, c'est à dire si et seulement si la suite (x_n) converge. De plus, dans le cas de convergence, la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ de la série est par définition la limite de la suite (U_n), c'est à dire ici $\lim_n x_n$.

Exemples.

1. Montrer que

$$\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \cdots + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \cdots = 1.$$

2. Montrer que la série

$$\sum \ln\big(1 + \frac{1}{n+1}\big)$$

diverge. Dans ces deux exemples, on calcule directement (explicitement) les sommes partielles U_n pour tout $n \geq 0$.

Proposition 1.2.1. *Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries convergentes, et soit $\lambda \in \mathbb{C}$; la série $\sum(\lambda u_n + v_n)$ est convergente, et*

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(\lambda u_n + v_n) = \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \sum_{n=0}^{+\infty} v_n.$$

Série géométrique

Soit $z \in \mathbb{C}$; on étudie la série $\sum z^n$. Pour qu'elle converge, il est nécessaire que $z^n \to 0$, donc nécessaire que $|z| < 1$. Inversement, lorsque $|z| < 1$, on sait que $z^{n+1} \to 0$ et la formule

$$1 + z + \cdots + z^n = \frac{1}{1-z} - \frac{z^{n+1}}{1-z}$$

montre que la série converge. En résumé :

La série géométrique $\sum z^n$ converge si et seulement si $|z| < 1$. Dans le cas $|z| < 1$, on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} z^n = \frac{1}{1-z}.$$

Remarque. Dans le cas complexe, le calcul de la somme serait bien plus difficile si on séparait partie réelle et partie imaginaire.

Exercices et exemples.

1. (Question préparatoire) Montrer que pour tout $a \in \mathbb{C}$, on a

$$\lim_n \frac{a^n}{n!} = 0.$$

2. Séries obtenues par la formule de Taylor-Lagrange, ou Taylor avec reste intégral : montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\mathrm{e}^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$$

Etudier la série de Taylor d'une fonction réelle f définie sur $\mathbb{R}$, indéfiniment dérivable et telle que $|f^{(n)}(x)| \leq 1$ pour tout $n \geq 1$ et tout $x \in \mathbb{R}$. Traiter les exemples de $\sin x$ et $\cos x$.

3. Montrer la convergence de la série de Taylor de $-\ln(1-x)$ pour $x = -1$ (ou par la même méthode, pour $-1 \leq x \leq 1/2$). Montrer que

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \cdots + \frac{(-1)^{n+1}}{n} + \cdots$$

1.3. Séries à termes réels positifs

On dit que $\sum u_n$ est une série à termes réels positifs si $u_n \geq 0$ pour tout $n \geq 0$. Dans ce cas il est clair que la suite (U_n) des sommes partielles est croissante, donc d'après le théorème 0.2.1 on peut dire :

Théorème 1.3.1. *Une série $\sum u_n$ à termes positifs est convergente si et seulement si la suite (U_n) des sommes partielles est majorée. Lorsque $\sum u_n$ converge, on a pour tout entier $n \geq 0$ l'inégalité*

$$\mathrm{U}_n \leq \sum_{m=0}^{+\infty} u_m.$$

Remarque. Si on a seulement $u_n \geq 0$ pour $n \geq n_0$, la première partie du théorème subsiste, mais pas l'inégalité de la deuxième partie de l'énoncé.

Remarque. Une série à termes positifs diverge si et seulement si $\mathrm{U}_n \to +\infty$. On écrit parfois $\sum u_n = +\infty$ pour dire qu'une telle série diverge, et inversement on peut écrire $\sum u_n < +\infty$ pour exprimer qu'une série **à termes positifs** est convergente.

Théorème de comparaison 1.3.2. *Supposons que* $0 \leq u_n \leq v_n$ *pour tout* $n \geq 0$.

a. Si $\sum v_n$ *converge, alors* $\sum u_n$ *converge et*

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n \leq \sum_{n=0}^{\infty} v_n.$$

b. Si $\sum u_n$ *diverge, alors* $\sum v_n$ *diverge.*

Dans le cas où les hypothèses $0 \leq u_n \leq v_n$ ne sont vérifiées que pour $n \geq n_0$, on obtient encore les résultats de comparaison pour la nature des deux séries (qui n'est pas modifiée quand on change un nombre fini de termes) mais bien entendu l'inégalité entre les sommes des deux séries n'est plus nécessairement vraie.

Exemples.

1. La série $\sum (2^{-n}/n)_{n\geq 1}$ converge.

2. Pour tout $x \in [0, 1[$, la série $\sum n^2 x^n$ converge (comparer à la série $\sum y^n$ pour un y tel que $x < y < 1$).

3. Pour toute suite (k_n) d'entiers égaux à $0, 1, \ldots, 9$, la série $\sum k_n/10^n$ converge. Montrer que tout nombre $x \in [0, 1]$ est la somme d'au moins une série de la forme

$$\frac{k_1}{10} + \frac{k_2}{100} + \frac{k_3}{1000} + \cdots$$

avec $k_i \in \{0, 1, \ldots, 9\}$ pour tout $i \geq 1$. Quelle est la somme de la série

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{9}{10^{n+1}} = \frac{9}{10} + \frac{9}{100} + \frac{9}{1000} + \cdots ?$$

On dit qu'un développement décimal est *impropre* si toutes les décimales à partir d'un certain rang sont égales à 9, comme dans l'exemple précédent. Tout nombre décimal possède un développement propre et un développement impropre.

4. Généraliser au développement en base b, où b est un entier ≥ 2.

Indiquons un cas particulier utile du principe de comparaison : supposons que l'on ait $u_n, v_n > 0$ pour tout entier $n \geq 0$ et que $u_{n+1}/u_n \leq v_{n+1}/v_n$; on vérifie qu'alors $u_n \leq (u_0/v_0)\, v_n$, ce qui permet d'appliquer le théorème de comparaison. Dans le cas où les hypothèses $u_n, v_n > 0$ et $u_{n+1}/u_n \leq v_{n+1}/v_n$ ne sont satisfaites qu'à partir des rangs $n \geq n_0$, on obtient de même $u_n \leq (u_{n_0}/v_{n_0})\, v_n$ pour tout $n \geq n_0$, ce qui permet encore d'utiliser les principes de comparaison.

On dit que deux suites réelles ou complexes (x_n) et (y_n) sont *équivalentes*, et on note $x_n \sim y_n$ si pour n assez grand x_n et y_n sont non nuls et si $\lim_n x_n/y_n = 1$. On peut étendre la définition aux suites qui peuvent s'annuler pour certaines valeurs des indices, en disant que (x_n) et (y_n) sont équivalentes s'il existe une suite (a_n) telle que $\lim_n a_n = 1$ et telle que $y_n = a_n x_n$ pour tout $n \geq n_0$ (bien entendu, $a_n = y_n/x_n$ chaque fois que $x_n \neq 0$).

Corollaire 1.3.1. *Si* $u_n \sim v_n$ **et** $\sum u_n$ **à termes positifs**, *les deux séries* $\sum u_n$ *et* $\sum v_n$ *sont de même nature.*

Exemples.

1. La série $\sum (1/n^2)_{n\geq 1}$ converge ; on peut la comparer à la série convergente déjà étudiée plus haut, $\sum (1/n(n+1))_{n\geq 1}$.

2. La série $\sum(1-\cos(1/n))_{n\geq 1}$ est de même nature que la série $\sum 1/n^2$, elle est donc convergente.

3. On sait que la série $\sum(1/n)_{n\geq 1}$ diverge, mais on peut retrouver ce résultat d'une autre façon que dans l'introduction en comparant cette série à la série $\sum(\ln(1+1/n))_{n\geq 1}$ précédemment étudiée en exemple.

ATTENTION ! Le corollaire précédent est **FAUX** pour les séries dont les termes changent de signe.

Les bons vieux critères (Cours d'Analyse de Cauchy $\sim$ 1820)

Mentionnons deux critères de comparaison avec la série géométrique, que nous appellerons **A** et **B** (et qui ont quelques variantes). **On suppose ici** $u_n \geq 0$ pour tout entier n assez grand.

Critère A. *S'il existe $x<1$ tel que $u_n^{1/n} \leq x$ pour tout entier n assez grand, la série $\sum u_n$ converge. Si $u_n^{1/n} \geq 1$ pour une infinité d'entiers n, la série $\sum u_n$ diverge.*

La deuxième partie du critère est évidente, puisque si $u_n^{1/n} \geq 1$ pour une infinité d'entiers, on a $u_n \geq 1$ pour une infinité d'entiers, et u_n ne tend pas vers 0. La vérification de la première partie du critère **A** est très simple. Si $u_n^{1/n} \leq x < 1$ pour tout $n \geq n_0$, on a directement $u_n \leq x^n$ pour $n \geq n_0$, et x^n est le terme général d'une série convergente puisque $x<1$. La première partie du critère peut s'exprimer de façon plus rapide avec la notion de limite supérieure :

Critère A1. *Si $\limsup_n u_n^{1/n} < 1$, la série $\sum u_n$ converge. Si $\limsup_n u_n^{1/n} > 1$, la série $\sum u_n$ diverge.*

Si $\limsup_n u_n^{1/n} > 1$, on est sûr que (u_n) ne tend pas vers 0, ce qui justifie la deuxième partie de **A1**. ATTENTION : si $\limsup_n u_n^{1/n} = 1$, il est possible que $\lim_n u_n = 0$, et on ne peut pas conclure (voir plus loin). Le critère ci-dessus implique le cas particulier suivant :

Critère A'. *Supposons que $\lim_n u_n^{1/n}$ existe. Si $\lim_n u_n^{1/n} < 1$, la série $\sum u_n$ converge. Si $\lim_n u_n^{1/n} > 1$, la série $\sum u_n$ diverge.*

On remarquera bien qu'il n'y a pas de conclusion possible dans le cas limite où $\lim_n u_n^{1/n} = 1$. En effet, on a vu que $\sum(1/n)_{n\geq 1}$ diverge alors que $\sum(1/n^2)_{n\geq 1}$ converge. Pourtant, on a $\lim_n u_n^{1/n} = 1$ dans les deux cas (petit exercice de calcul de limite).

Le second critère utilise les quotients u_{n+1}/u_n : on suppose donc ici, non seulement que $u_n \geq 0$ mais aussi que $u_n > 0$ pour tout entier n assez grand.

Critère B. *S'il existe $x<1$ tel que $u_{n+1}/u_n \leq x$ pour tout entier n assez grand, la série $\sum u_n$ converge. Si $u_{n+1}/u_n \geq 1$ pour tout entier n assez grand, la série $\sum u_n$ diverge.*

Ici encore la deuxième partie du critère est évidente, puisque si $u_{n+1}/u_n \geq 1$ pour tout $n \geq n_0$, on aura $u_n \geq u_{n_0} > 0$ qui ne tend pas vers 0. La vérification de la première partie du critère **B** est très simple. Si $u_{n+1}/u_n \leq x < 1$ pour $n \geq n_0$, on a en posant $v_n = x^n$ que $u_{n+1}/u_n \leq x = v_{n+1}/v_n$ pour $n \geq n_0$, donc on peut majorer $\sum u_n$ par une série géométrique convergente. Si $\lim_n u_{n+1}/u_n$ existe, remarquons que si $\lim_n u_{n+1}/u_n < 1$, on est dans le premier cas du critère **B**, et si $\lim_n u_{n+1}/u_n > 1$,

on est dans le deuxième cas. Par conséquent, le second critère ci-dessus implique le cas particulier suivant :

Critère B'. *Supposons que* $\lim_n u_{n+1}/u_n$ *existe. Si* $\lim_n u_{n+1}/u_n < 1$, *la série* $\sum u_n$ *converge. Si* $\lim_n u_{n+1}/u_n > 1$, *la série* $\sum u_n$ *diverge.*

On remarquera ici encore qu'il n'y a pas de conclusion possible dans le cas limite où $\lim_n u_{n+1}/u_n = 1$ (pour la même raison que pour le critère **A'**).

Exercices.

1. Montrer que si $\lim_n u_{n+1}/u_n$ existe, alors

$$\lim_n u_n^{1/n} = \lim_n \frac{u_{n+1}}{u_n}.$$

2. Applications des critères. Retrouver la convergence pour tout $a > 0$ de la série exponentielle $\sum a^n/(n!)$, étudier la convergence des séries $\sum n^b a^n$ pour $a \geq 0$, $a \neq 1$. Vérifier que les deux critères échouent sur la série de Riemann $\sum n^b$.

3. Le critère $\sum 2^n u_{2^n}$ pour les séries à termes positifs décroissants :

Si $0 \leq u_{n+1} \leq u_n$ *pour tout* $n \geq 0$ *(c'est à dire si le terme général est décroissant), la série* $\sum u_n$ *converge si et seulement si la série* $\sum 2^n u_{2^n}$ *converge.*

(Remarquer que $2^k u_{2^{k+1}} \leq u_{2^k} + \cdots + u_{2^{k+1}-1} \leq 2^k u_{2^k}$ pour tout $k \geq 0$). Montrer que l'application de cette règle à la série de Riemann $\sum 1/n^\alpha$, dans le cas $\alpha \geq 0$, ramène à une série géométrique et permet de conclure. Etudier de même les *séries de Bertrand* $\sum \left(\frac{1}{n(\ln n)^\alpha}\right)_{n\geq 1}$.

1.4. Comparaison séries–intégrales

Proposition 1.4.1. *Soit* $f : [1, +\infty[\to [0, +\infty[$ *une fonction décroissante et positive ; on a pour tout entier* $n \geq 2$

$$\sum_{i=2}^{n} f(i) \leq \int_1^n f(t)\,dt \leq \sum_{i=1}^{n-1} f(i).$$

En conséquence, la série $\sum f(n)$ *converge si et seulement si l'intégrale* $\int_1^{+\infty} f(t)\,dt$ *converge.*

On peut donner des informations plus précises. Si $\sum u_n$ est une série convergente, on appelle *reste d'ordre* n de la série la quantité

$$\mathrm{R}_n = \sum_{m=0}^{+\infty} u_m - \mathrm{U}_n = u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots$$

Proposition 1.4.2. *Soit* $f : [1, +\infty[\to [0, +\infty[$ *une fonction décroissante et positive ; considérons la série de terme général* $u_n = f(n)$. *On a lorsque l'intégrale* $\int_1^{+\infty} f(t)\,dt$ *converge l'encadrement*

$$\int_{n+1}^{+\infty} f(t)\,dt \leq \mathrm{R}_n = f(n+1) + f(n+2) + \cdots \leq \int_n^{+\infty} f(t)\,dt$$

pour tout entier $n \geq 1$. *Dans le cas où l'intégrale est divergente,*

$$f(1) + f(2) + \cdots + f(n) = \mathrm{U}_n \sim \int_1^n f(t)\,dt \quad (n \to +\infty).$$

Séries de Riemann : étude par comparaison à une intégrale

Théorème 1.4.1. *La série de Riemann* $\sum(1/n^\alpha)_{n\geq 1}$ *est convergente si et seulement si* $\alpha > 1$. *De plus pour* $\alpha > 1$

$$\frac{1}{(n+1)^\alpha} + \frac{1}{(n+2)^\alpha} + \cdots \sim \frac{n^{1-\alpha}}{\alpha - 1}.$$

Pour $\alpha = 1$,

$$1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} \sim \ln n$$

et pour $\beta < 1$

$$1 + \frac{1}{2^\beta} + \cdots + \frac{1}{n^\beta} \sim \frac{n^{1-\beta}}{1-\beta}.$$

Exercice. Constante d'Euler : montrer l'existence de la limite

$$\mathrm{C} = \lim_n \Big(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n\Big)$$

en étudiant la série $\sum u_k$ de terme général $u_k = 1/k - \ln(1 + 1/k)$ (défini pour $k \geq 1$).

Retrouver la somme de la série $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}/n$ en utilisant l'existence de la limite précédente.

Règle $n^\alpha u_n$

On suppose toujours ici que $\sum u_n$ est une série **à termes positifs**.

Critère C. *S'il existe un nombre réel* $\alpha > 1$ *tel que la suite* $(n^\alpha u_n)$ *reste majorée, alors la série* $\sum u_n$ *est convergente. S'il existe* $\delta > 0$ *tels que* $nu_n \geq \delta$ *pour tout entier* n *assez grand, la série* $\sum u_n$ *est divergente.*

On obtient encore comme conséquence :

Critère C'. *S'il existe* $\alpha > 1$ *tel que la suite* $(n^\alpha u_n)$ *tende vers une limite finie, alors la série* $\sum u_n$ *est convergente. Si la suite* (nu_n) *tend vers* $+\infty$ *ou vers une limite* > 0, *la série* $\sum u_n$ *est divergente.*

Exemples. Etudier les séries

$$\sum \Big(\frac{\ln n}{n^2}\Big)_{n\geq 1} \; ; \; \sum \Big(\frac{1}{\sqrt{n}(\ln n)^2}\Big)_{n\geq 1}.$$

Exemple où le critère **C** ne donne rien : la série de Bertrand $\sum \dfrac{1}{n(\ln n)^\alpha}$, à traiter par comparaison avec une intégrale.

Exercice. Forme faible de la formule de Stirling. Montrer que

$$x_n = \frac{n!}{n^{n+1/2}\,\mathrm{e}^{-n}}$$

tend vers une limite non nulle ℓ (en fait $\ell = \sqrt{2\pi}$, mais on ne le montrera pas ici).
En passant au log on se ramène à montrer que

$$(n + \frac{1}{2}) \ln n - n - \ln(n!)$$

tend vers une limite réelle. On pose $g(x) = (x - 1/2)\ln x - x$ et on montre que $g(x+1) - g(x) - \ln x \sim 1/(12x^2)$ quand $x \to +\infty$. On en déduit la convergence de la série de terme général $u_k = g(k+1) - g(k) - \ln k$, $k \geq 1$. L'étude des sommes partielles de cette série donne le résultat.

1.5. Séries absolument convergentes

Définition 1.5.1. On dit que la série à termes réels ou complexes $\sum u_n$ est *absolument convergente* si la série des modules $\sum |u_n|$ est convergente.

Le *critère de Cauchy* pour la convergence des séries à termes réels ou complexes consiste à exprimer que la suite (U_n) des sommes partielles est de Cauchy. La série $\sum u_n$ vérifie donc le critère de Cauchy si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier $\mathrm{N} = \mathrm{N}(\varepsilon)$ tel que pour tous entiers m, n tels que $\mathrm{N} \leq m < n$ on ait

$$|\mathrm{U}_n - \mathrm{U}_m| = |u_{m+1} + \cdots + u_n| < \varepsilon.$$

Puisque la suite (U_n) converge si et seulement si elle est une *suite* de Cauchy (théorème 0.3.1), on voit qu'une série à termes réels ou complexes est convergente si et seulement si elle vérifie le critère de Cauchy.

Théorème 1.5.1. *Toute série absolument convergente $\sum u_n$ est convergente, et*

$$\Big|\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\Big| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|.$$

Cette dernière inégalité peut être vue comme une forme d'"inégalité triangulaire infinie".

Démonstration. Posons

$$\mathrm{U}_n = u_0 + \cdots + u_n\,; \quad \mathrm{V}_n = |u_0| + \cdots + |u_n|.$$

Supposons $m < n$. On a

$$|\mathrm{U}_n - \mathrm{U}_m| = |u_{m+1} + \cdots + u_n| \leq |u_{m+1}| + \cdots + |u_n| = \mathrm{V}_n - \mathrm{V}_m.$$

Puisque la série $\sum |u_n|$ converge, la suite (V_n) est convergente, donc de Cauchy, ce qui entraîne que (U_n) est de Cauchy, donc convergente. De plus $|\mathrm{U}_n| \leq \mathrm{V}_n$ pour tout $n \geq 0$ par l'inégalité triangulaire, d'où l'inégalité entre le module de la somme de la série et la somme de la série des modules, par passage à la limite des inégalités larges.

Indiquons une deuxième démonstration que nous qualifierons de "piétonne". Pour chaque entier $n \geq 0$, posons $u_n = v_n - w_n$, où on a posé $v_n = u_n, w_n = 0$ dans le cas $u_n > 0$ et $v_n = 0, w_n = -u_n$ dans le cas $u_n \leq 0$. On remarque que $v_n, w_n \geq 0$ et $v_n, w_n \leq v_n + w_n = |u_n|$. La convergence de la série $\sum |u_n|$ implique donc par le théorème de comparaison 1.3.2 la convergence des deux séries $\sum v_n$ et $\sum w_n$, qui donne par différence la convergence de $\sum u_n$.

Exemples. La série géométrique complexe $\sum z^n$ est absolument convergente pour $|z| < 1$. La série exponentielle complexe $\sum z^n/n!$ est absolument convergente pour tout $z \in \mathbb{C}$. La série $\sum (-1)^{n+1}/n$ est convergente, mais pas absolument convergente (on l'appelle *série harmonique alternée*).

Sommation par paquets des séries absolument convergentes

Si $\sum u_n$ est une série convergente, on peut être amené à s'intéresser à la série des termes pairs,

$$u_0 + u_2 + \cdots + u_{2n} + \cdots$$

Il faut voir que cette nouvelle série peut diverger (c'est le cas par exemple pour la série harmonique alternée mentionnée ci-dessus). Si elle converge on dira qu'on a fait la somme du "paquet" des termes pairs. Si $\sum u_n$ est absolument convergente, la série des termes pairs est encore absolument convergente, donc convergente.

Soit $\sum u_n$ une série absolument convergente à termes réels ou complexes, et soit A un sous-ensemble de $\mathbb{N}$; on définit une suite $(\chi_{\mathrm{A}}(n))$ de la façon suivante : $\chi_{\mathrm{A}}(n) = 1$ si $n \in \mathrm{A}$ et 0 sinon. On a $|\chi_{\mathrm{A}}(n)u_n| \leq |u_n|$, donc la série $\sum \chi_{\mathrm{A}}(n)u_n$ est absolument convergente. On pose

$$\sum_{n\in\mathrm{A}} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} \chi_{\mathrm{A}}(n)\, u_n.$$

On dira qu'on a effectué la somme du "paquet" A de la série. Dans ce paragraphe, on posera pour simplifier $\sigma(\mathrm{A}) = \sum_{n\in\mathrm{A}} u_n$. Si A et B sont deux sous-ensembles de $\mathbb{N}$ disjoints, on a $\chi_{\mathrm{A}\cup\mathrm{B}}(n) = \chi_{\mathrm{A}}(n) + \chi_{\mathrm{B}}(n)$ pour tout $n \geq 0$, donc $\sigma(\mathrm{A}\cup\mathrm{B}) = \sigma(\mathrm{A}) + \sigma(\mathrm{B})$. Cette propriété d'additivité s'étend à toute famille finie $\mathrm{A}_0, \mathrm{A}_1, \ldots, \mathrm{A}_k$ de paquets disjoints. On va maintenant étudier ce qui se passe pour une famille *infinie* de paquets disjoints.

Supposons fixée une série $\sum u_n$ absolument convergente à termes réels ou complexes. On posera donc $\sigma(\mathrm{A}) = \sum_{n\in\mathrm{A}} u_n$ et de la même façon $\tau(\mathrm{A}) = \sum_{n\in\mathrm{A}} |u_n|$, pour tout $\mathrm{A} \subset \mathbb{N}$. Pour tout A on a d'après le théorème 1.5.1 l'inégalité

$$|\sigma(\mathrm{A})| \leq \tau(\mathrm{A}).$$

Si $\mathrm{A} \subset \mathrm{B}$, il est clair que $\chi_{\mathrm{A}}(n) \leq \chi_{\mathrm{B}}(n)$ pour tout $n \geq 0$, donc

$$0 \leq \tau(\mathrm{A}) \leq \tau(\mathrm{B}) \leq \tau(\mathbb{N}) = \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n| < +\infty.$$

Théorème 1.5.2. *Soit $\sum v_n$ une série à termes positifs ; supposons choisie une suite $(\mathrm{A}_k)_{k\geq 0}$ de "paquets" deux à deux disjoints qui recouvre $\mathbb{N}$, et telle que $\tau_k = \sum_{n\in\mathrm{A}_k} v_n$ converge pour tout entier $k \geq 0$. Alors la série $\sum \tau_k$ est de même nature que la série $\sum v_n$, et dans le cas où ces deux séries convergent,*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} v_n = \sum_{k=0}^{+\infty} \Big(\sum_{n\in\mathrm{A}_k} v_n \Big).$$

Démonstration. Posons $\mathrm{C} = \{0, \ldots, \mathrm{N}\}$; chacun des entiers $j \leq \mathrm{N}$ appartient à un certain ensemble A_{k_j}. Si on pose $\mathrm{K} = \max\{k_0, k_1, \ldots, k_{\mathrm{N}}\}$ on voit que l'ensemble $\mathrm{A} = \mathrm{A}_0 \cup \mathrm{A}_1 \cup \ldots \cup \mathrm{A}_{\mathrm{K}}$ contient tous les éléments de C, donc

$$\tau(\mathrm{C}) = v_0 + \cdots + v_{\mathrm{N}} \leq \tau(\mathrm{A}) = \sum_{k=0}^{\mathrm{K}} \tau_k \leq \sum_{k=0}^{+\infty} \tau_k.$$

Si $\Sigma = \sum_{k=0}^{+\infty} \tau_k < +\infty$, il en résulte que la suite des sommes partielles $(\mathrm{V}_{\mathrm{N}})$ est majorée par Σ, donc la série $\sum v_n$ converge et $\sum_{n=0}^{+\infty} v_n \leq \Sigma$. Inversement on a déjà observé que

$$\tau_0 + \cdots + \tau_{\mathrm{K}} = \tau(\mathrm{A}_0 \cup \ldots \cup \mathrm{A}_{\mathrm{K}}) \leq \tau(\mathbb{N}) = \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$$

pour tout K, ce qui donne l'autre direction.

Remarque. Supposons donnée une famille $(u_{n,k})$ à deux indices de nombres réels positifs. On peut se demander ce que pourrait signifier la somme $\sum_{n,k=0}^{+\infty} u_{n,k}$. Il y a au moins deux solutions naturelles : on pourrait regrouper tous ces nombres par paquets A_n comprenant tous les couples (n,k) pour un n fixé, k variant dans $\mathbb{N}$, ou bien par paquets B_k regroupant tous les couples (n,k) pour un k fixé. Le résultat précédent nous permet de comprendre que ces deux solutions donnent le même résultat (ainsi que n'importe quel découpage de l'ensemble des couples d'ailleurs). Attention : ça ne marche plus du tout si le signe du terme général $u_{n,k}$ change.

Théorème 1.5.3. *Soit $\sum u_n$ une série absolument convergente à termes réels ou complexes ; supposons choisie une suite $(\mathrm{A}_k)_{k\geq 0}$ de "paquets" deux à deux disjoints qui recouvre $\mathbb{N}$. Alors la série $\sum \sigma_k$ de terme général $\sigma_k = \sum_{n\in \mathrm{A}_k} u_n$ est absolument convergente et*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{k=0}^{+\infty}\Big(\sum_{n\in \mathrm{A}_k} u_n\Big).$$

Démonstration. Il suffit de traiter le cas réel. Comme dans la démonstration dite piétonne, écrivons $u_n = v_n - w_n$, avec $v_n, w_n \geq 0$ et $v_n + w_n = |u_n|$. Puisque $v_n, w_n \leq |u_n|$, les deux séries à termes positifs $\sum v_n$ et $\sum w_n$ sont convergentes, ce qui permet d'appliquer le résultat précédent. Le résultat en découle.

Changement de l'ordre des termes

Proposition 1.5.1. *Soit π une bijection de $\mathbb{N}$ sur $\mathbb{N}$ et soit $\sum u_n$ une série absolument convergente ; la série permutée $\sum u_{\pi(n)}$ est absolument convergente et*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_{\pi(n)} = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n.$$

Démonstration. C'est un cas particulier du principe des paquets. Il suffit de poser $\mathrm{A}_k = \{\pi(k)\}$ pour tout entier $k \geq 0$.

ATTENTION. Ce résultat est FAUX pour les séries qui ne sont pas absolument convergentes. Par exemple, on peut trouver une permutation de la série $\sum_{n\geq 1}(-1)^{n+1}/n$ qui est divergente. On peut aussi trouver des permutations telles que la nouvelle série soit convergente, mais avec une somme différente.

Exercice (difficile). Soit $\sum u_n$ une série convergente telle que $\sum |u_n| = +\infty$; pour tout nombre réel x, il existe une permutation π des entiers telle que $\sum_{n=0}^{+\infty} u_{\pi(n)} = x$.

Produit de séries numériques absolument convergentes

Etant données deux séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$, on introduit une nouvelle série $\sum w_n$ appelée *série produit* et dont le terme général w_n est défini par

$$w_n = \sum_{k=0}^{n} u_k\, v_{n-k}.$$

Théorème 1.5.4. *Si les deux séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont absolument convergentes, la série produit est absolument convergente, et*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \Big(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\Big)\Big(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n\Big).$$

Démonstration. On va appliquer deux fois la sommation par paquets à la série obtenue en alignant les composants de $w_0, w_1, w_2, \ldots$

$$t_0 = u_0 v_0;\ t_1 = u_0 v_1, t_2 = u_1 v_0;\ t_3 = u_0 v_2, t_4 = u_1 v_1, t_5 = u_2 v_0;\ \ldots$$

(si on veut une définition précise du terme général t_n de cette série, on peut dire que $t_n = u_q v_{p-q}$ si $n = p(p+1)/2 + q$, $p \geq 0$ et $0 \leq q \leq p$). On définit les premiers paquets de sommation (A_k) qui correspondent aux composants de w_k, c'est à dire

$$\mathrm{A}_k = \{k(k+1)/2, \ldots, (k+1)(k+2)/2 - 1\}.$$

La somme sur A_k donne donc w_k. La deuxième famille de paquets (B_k) est définie en prenant tous les termes t_n qui contiennent le facteur u_k, et la somme du paquet B_k est égale à $u_k(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n)$. En appliquant deux fois la sommation par paquets, on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \sum_{n=0}^{+\infty} t_n = \Big(\sum_{k=0}^{+\infty} u_k\Big)\Big(\sum_{k=0}^{+\infty} v_k\Big).$$

Mais il faut aussi justifier que la série $\sum t_n$ est absolument convergente. Si on effectue la somme des $|t_n|$ du paquet B_k, on obtient

$$\tau_k = |u_k| \sum_{n=0}^{+\infty} |v_n|$$

qui est finie puisque $\sum |v_n| < +\infty$, et ensuite

$$\sum |t_n| = \sum_k \tau_k = \big(\sum_{k=0}^{+\infty} |u_k|\big)\ \big(\sum_{n=0}^{+\infty} |v_n|\big) < +\infty$$

d'après le théorème 1.5.2.

Exercice.

1. Donner une formule explicite pour les ensembles B_k (si on n'a pas peur des séries doubles, on évite ces problèmes assez artificiels de numérotage des termes (t_n) : on posera simplement $t_{n,k} = u_n v_k$, et le découpage qui donne le terme général de la série produit correspond au découpage de l'ensemble de tous les couples (n, k) selon la valeur de la somme $n + k$).

2. Montrer que le théorème du produit de séries reste vrai si $\sum u_n$ est absolument convergente et $\sum v_n$ simplement convergente (il faut donner une démonstration complètement différente de la précédente).

La fonction exponentielle complexe

On pose pour tout $z \in \mathbb{C}$

$$\varphi(z) = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \cdots + \frac{z^n}{n!} + \cdots$$

On a déjà vu que $\varphi(x) = \mathrm{e}^x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Posons pour $a, b \in \mathbb{C}$

$$u_n = \frac{a^n}{n!},\ \ v_n = \frac{b^n}{n!}.$$

On vérifie avec la formule du binôme que

$$w_n = \sum_{k=0}^{n} u_k\, v_{n-k} = \frac{(a+b)^n}{n!}$$

ce qui montre par le théorème des produits de séries que $\varphi(a+b) = \varphi(a)\varphi(b)$ pour tous nombres complexes a, b. Par ailleurs, on a vu avec la formule de Taylor, pour tout $y \in \mathbb{R}$

$$\sin y = y - \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} + \cdots + (-1)^n \frac{y^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots = \operatorname{Im} \varphi(iy)$$

$$\cos y = 1 - \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \frac{y^{2n}}{(2n)!} + \cdots = \operatorname{Re} \varphi(iy)$$

ce qui montre que pour tout $y \in \mathbb{R}$

$$\varphi(iy) = \cos y + i \sin y = \mathrm{e}^{iy}\,.$$

Finalement, si $z = x + iy$, on a

$$\varphi(z) = \varphi(x)\varphi(iy) = \mathrm{e}^x\,\mathrm{e}^{iy} = \mathrm{e}^x(\cos y + i \sin y).$$

Il est donc tout à fait raisonnable de poser pour tout nombre complexe z

$$\mathrm{e}^z = \varphi(z) = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \cdots + \frac{z^n}{n!} + \cdots$$

On peut également prolonger aux nombres complexes les fonctions ch et sh, en posant

$$\operatorname{ch}(z) = \frac{\mathrm{e}^z + \mathrm{e}^{-z}}{2} \text{ et } \operatorname{sh}(z) = \frac{\mathrm{e}^z - \mathrm{e}^{-z}}{2}$$

pour tout $z \in \mathbb{C}$. On peut de même prolonger les fonctions sin et cos aux valeurs complexes, en utilisant les développements en série ci-dessus. On remarque que $\operatorname{ch}(ix) = \cos(x)$, $\operatorname{sh}(ix) = i \sin(x)$ pour tout nombre réel (ou complexe) x.

1.6. Séries semi-convergentes. Séries alternées

Considérons ici des groupements de termes par paquets qui sont des *intervalles* : on se donne une suite $n_0 < n_1 < \ldots$ et on considère les ensembles $\mathrm{A}_0 = \{0, 1, \ldots, n_0\}$, $\mathrm{A}_1 = \{n_0 + 1, \ldots, n_1\}$ et plus généralement pour tout $k \geq 1$ on pose $\mathrm{A}_k = \{n \in \mathbb{N} : n_{k-1} < n \leq n_k\}$. On pose aussi

$$\sigma_k = \sum_{n \in \mathrm{A}_k} u_n = u_{n_{k-1}+1} + \cdots + u_{n_k},$$

$$\Sigma_k = \sigma_0 + \cdots + \sigma_k = u_0 + \cdots + u_{n_k} = \mathrm{U}_{n_k}.$$

Si la série $\sum u_n$ converge, la série $\sum \sigma_k$ converge aussi puisque la suite (Σ_k) de ses sommes partielles est une sous-suite de la suite (U_n) des sommes partielles de $\sum u_n$. L'inverse n'est pas toujours vrai, mais c'est l'inverse qui serait intéressant. On va ajouter des hypothèses pour pouvoir l'obtenir.

Théorème 1.6.1. Groupements de longueurs bornées. *On suppose données une suite $n_0 < n_1 < \ldots$ d'entiers et une série $\sum u_n$ telles que*

— les longueurs des intervalles (A_k) sont bornées, c'est à dire qu'il existe M tel que pour tout k, on ait $n_k - n_{k-1} \leq \mathrm{M}$.

— le terme général u_n tend vers 0 ;

alors la série $\sum u_n$ converge si et seulement si la série $\sum \sigma_k$ converge.

Démonstration. Il reste seulement à montrer que si $\sum \sigma_k$ est convergente, la série $\sum u_n$ est convergente aussi. Posons $\Sigma = \sum_{k=0}^{+\infty} \sigma_k$ et montrons que la suite (U_n) converge vers Σ. Soit $\varepsilon > 0$ donné ; on peut trouver un entier k_0 tel que $|\Sigma - \Sigma_k| < \varepsilon/2$ pour tout $k \geq k_0$. Puisque $u_n \to 0$, on peut ensuite trouver un entier k_1 tel que $k_1 \geq k_0$, et tel que $|u_n| < \varepsilon/(2\mathrm{M})$ pour tout $n > n_{k_1}$. Pour tout entier $n \geq \mathrm{N} = n_{k_1} + 1$, on vérifie que $|\mathrm{U}_n - \Sigma| < \varepsilon$. En effet, il existe un entier $k \geq k_1$ tel que $n_k < n \leq n_{k+1}$, et alors

$$|\mathrm{U}_n - \Sigma_k| = |\mathrm{U}_n - \mathrm{U}_{n_k}| = |u_{n_k+1} + \cdots + u_n| \leq \mathrm{M}\,\frac{\varepsilon}{2\mathrm{M}} = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Applications.

1. La série $\sum (-1)^{n+1}/\sqrt{n}$ converge : en groupant par deux, on obtient une série à termes positifs de terme général équivalent à $cn^{-3/2}$, donc convergente.

2. *Une permutation des termes d'une série simplement convergente peut changer la somme de la série (ou bien la rendre divergente).*

La série

$$1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{5} - \cdots$$

est une permutation de la série harmonique alternée. En groupant en paquets de longueur $2, 1, 2, 1, \ldots$, on trouve exactement la moitié de la série harmonique, et la nouvelle somme est donc la moitié de l'ancienne.

Exercice. Exprimer la permutation de $\mathbb{N}$ qui transforme la série harmonique alternée en la série précédente. Retrouver la somme de la série précédente en utilisant l'exercice sur la constante d'Euler. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on peut trouver une variante des permutations précédentes qui donnera la somme x pour la permutée de la série harmonique alternée correspondante (en jouant simplement sur la proportion des termes positifs parmi les n premiers de la série permutée).

Exemple de séries à terme général équivalent non positif de nature différente. Etudier les séries

$$\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}, \quad \sum \ln\Big(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}\Big).$$

On a vu que la première série est convergente. Pour la seconde : avec un DL de $\ln(1+u)$ à l'ordre 3, on fait apparaître la série convergente $\sum (-1)^n/\sqrt{n}$, une série absolument convergente de terme général équivalent à $cn^{-3/2}$ et la série divergente $\sum 1/n$. Ceci montre que la deuxième série diverge.

ATTENTION. On voit donc que deux séries de termes généraux équivalents peuvent être de nature différente.

Théorème 1.6.2 (des séries alternées). *Soit $\sum u_n$ une série à termes réels telle que $u_{n+1}u_n < 0$ pour tout $n \geq 0$, et telle que $|u_n|$ soit décroissant vers 0. La série $\sum u_n$ converge.*

Démonstration. Supposons par exemple $u_0 > 0$; on constate que $\mathrm{U}_{2n-1} \leq \mathrm{U}_{2n+1} \leq \mathrm{U}_{2n+2} \leq \mathrm{U}_{2n}$ pour tout entier $n \geq 1$; la sous-suite impaire de la suite (U_n) est croissante et majorée, et la sous-suite paire est décroissante et minorée, donc ces deux suites sont convergentes. Puisque $\mathrm{U}_{2n} - \mathrm{U}_{2n+1} = -u_{2n+1}$ tend vers 0, les deux sous-suites ont la même limite et la suite (U_n) converge.

On peut aussi utiliser un groupement par paquets de longueur deux. On se ramène donc à une série $\sum \sigma_k$ de terme général $\sigma_k = u_{2k} + u_{2k+1} \geq 0$. Il suffit de montrer que ses sommes partielles sont bornées. Or on a, en posant $v_n = |u_n|$

$$\Sigma_k = (v_0 - v_1) + (v_2 - v_3) + \cdots + (v_{2k} - v_{2k+1}) =$$

$$= v_0 - (v_1 - v_2) - (v_3 - v_4) - \cdots - (v_{2k-1} - v_{2k}) - v_{2k+1} \leq v_0 = u_0.$$

Exemples. La série

$$\sum \frac{(-1)^n}{n^\beta}$$

converge pour tout $\beta > 0$. Montrer que l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx$$

est convergente en étudiant la série de terme général $u_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} (\sin x)/x\, dx$.

La transformation d'Abel

Cette transformation, qui ressemble d'une certaine façon à l'intégration par parties, consiste à remarquer que

$$\mathrm{U}_0 v_0 + \cdots + \mathrm{U}_n v_n = \mathrm{U}_n \mathrm{V}_n - \big(u_1 \mathrm{V}_0 + u_2 \mathrm{V}_1 + \cdots + u_n \mathrm{V}_{n-1}\big),$$

où on a posé comme d'habitude $\mathrm{U}_n = u_0 + \cdots + u_n$ et $\mathrm{V}_n = v_0 + \cdots + v_n$. On obtient immédiatement le principe général suivant :

Proposition 1.6.1. *Si la suite* $(\mathrm{U}_n \mathrm{V}_n)$ *tend vers une limite finie, les deux séries* $\sum \mathrm{U}_n v_n$ *et* $\sum u_{n+1} \mathrm{V}_n$ *sont de même nature.*

Théorème 1.6.3. *Soit* $\sum u_n$ *une série à termes réels ou complexes de la forme* $\sum \lambda_n v_n$, *où* $\sum |\lambda_{n+1} - \lambda_n| < +\infty$. *On suppose de plus*

ou bien que la série $\sum v_n$ *converge,*

ou bien que $\lim \lambda_n = 0$ **et** *que la suite* (V_n) *des sommes partielles de la série* $\sum v_n$ *est bornée* ($\mathrm{V}_n = v_0 + \cdots + v_n$).

Dans chacun de ces deux cas, la série $\sum \lambda_n v_n$ *est convergente.*

On remarquera que l'hypothèse $\sum |\lambda_{n+1} - \lambda_n| < +\infty$ est satisfaite dans le cas particulier où (λ_n) est monotone et bornée.

Démonstration. On écrit

$$\lambda_0 v_0 + \cdots + \lambda_n v_n = \lambda_0 \mathrm{V}_0 + \lambda_1(\mathrm{V}_1 - \mathrm{V}_0) + \cdots + \lambda_{n-1}(\mathrm{V}_{n-1} - \mathrm{V}_{n-2}) + \lambda_n(\mathrm{V}_n - \mathrm{V}_{n-1}) =$$

$$(\lambda_0 - \lambda_1)\mathrm{V}_0 + \cdots + (\lambda_{n-1} - \lambda_n)\mathrm{V}_{n-1} + \lambda_n \mathrm{V}_n.$$

La série $\sum(\lambda_n - \lambda_{n+1})\mathrm{V}_n$ est absolument convergente (parce que (V_n) est bornée dans les deux cas) et la suite $(\lambda_n \mathrm{V}_n)$ est convergente dans chacun des deux cas proposés (la suite (λ_n) est convergente puisque la série $\sum(\lambda_{n+1} - \lambda_n)$ converge).

Exemple. Etudier la série

$$\sum \frac{\mathrm{e}^{in\alpha}}{n}$$

où α est réel.

Exercices sur le chapitre 1

Etudier les séries

$$\sum \int_0^1 x^n (\ln(x))^2 \, dx \, ; \quad \sum \frac{(-1)^n}{n - \ln n} \, ; \quad \sum \mathrm{e}^{-\sqrt{n}} \, ;$$

$$\sum \mathrm{e}^{-n^2} \int_0^n \mathrm{e}^{u^2} \, du \, ; \quad \sum \frac{1}{(1 + 1/\sqrt{n})^n} \, ; \quad \sum \frac{\cos(\ln n)}{n} \, ;$$

$$\sum \sin(n! \pi \, \mathrm{e}) \, ; \quad \sum \frac{n!}{n^n} \, ; \quad \sum \ln\big(1 + \frac{(-1)^n}{n^\alpha}\big).$$

Chapitre 2. Suites et séries de fonctions

Dans ce chapitre nous allons définir des notions de convergence pour des objets autres que des nombres réels ou complexes : dans la première partie du chapitre nous introduirons des notions de convergence pour les suites de fonctions ; la notion centrale de cette partie est la *convergence uniforme* ; dans la seconde partie du chapitre on étudiera les séries de fonctions.

Soient X un ensemble non vide, (f_n) une suite de fonctions définies sur X, à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou dans $\mathbb{C}$; on dit que la suite (f_n) converge *simplement sur* X si pour tout $x \in \mathrm{X}$ la suite numérique $(f_n(x))$ converge. On pose alors, pour tout $x \in \mathrm{X}$,

$$f(x) = \lim_{n \to +\infty} f_n(x).$$

La fonction f ainsi définie s'appelle la *limite simple*, ou bien *limite ponctuelle* de la suite de fonctions (f_n). Considérons par exemple la suite (f_n) de fonctions réelles définies sur $\mathbb{R}$ par

$$f_n(x) = \frac{1}{1 + nx^2}.$$

Pour tout point $x \in \mathbb{R}$ fixé, la suite numérique $(f_n(x))$ converge vers une valeur $f(x)$; on voit que $f(x) = 0$ pour tout $x \neq 0$, et $f(0) = 1$. On obtient ainsi une "fonction limite" f définie sur $\mathbb{R}$. Cet exemple montre que la limite ponctuelle f d'une suite (f_n) de fonctions continues n'est pas toujours continue. L'un des intérêts de la notion de convergence uniforme est d'éviter ce phénomène désagréable de perte de continuité.

2.1. Convergence simple et uniforme des suites de fonctions

Si f est une fonction réelle ou complexe bornée, définie sur un ensemble non vide X, on appelle *norme uniforme* de f sur X, notée $\|f\|_{u,\mathrm{X}}$, le plus petit nombre b tel que

$$\forall x \in \mathrm{X}, \quad |f(x)| \leq b\,;$$

ce nombre $\|f\|_{u,\mathrm{X}}$ est donc la borne supérieure de l'ensemble des modules $|f(x)|$ des valeurs de f, lorsque x varie dans X :

$$\|f\|_{u,\mathrm{X}} = \sup\{|f(x)| : x \in \mathrm{X}\}.$$

Si la fonction $x \to |f(x)|$ atteint son maximum sur l'ensemble X au point x_0, on aura simplement $\|f\|_{u,\mathrm{X}} = |f(x_0)|$. On voit que la norme uniforme de f est $\leq \alpha$ si et seulement si on a

$$\forall x \in \mathrm{X}, \quad |f(x)| \leq \alpha.$$

La norme uniforme donne une façon de mesurer la "taille" d'une fonction. Etant données deux fonctions bornées f et g définies sur X, on utilisera la norme $\|f - g\|_{u,\mathrm{X}}$ de la différence pour mesurer la "distance" entre les deux fonctions, et on appellera *distance de la convergence uniforme* (entre les fonctions f et g) l'expression

$$d_{u,\mathrm{X}}(f, g) = \|f - g\|_{u,\mathrm{X}}.$$

Il est commode de poser $\|f\|_{u,\mathrm{X}} = +\infty$ dans le cas où la fonction f n'est pas bornée sur l'ensemble X. On appelle *écart* de la convergence uniforme la "distance généralisée" obtenue en admettant la valeur $+\infty$. Ces notations $\|f\|_{u,\mathrm{X}}$ et $d_{u,\mathrm{X}}(f, g)$ étant très lourdes, on notera simplement $\|f\| = \|f\|_{u,\mathrm{X}}$ et $d(f, g) = \|f - g\|$ quand il n'y aura pas de confusion à craindre.

Exemples.

1. Considérons la fonction f_a définie sur $\mathrm{X} = [0, +\infty[$ par $f_a(x) = x\,\mathrm{e}^{-ax}$ (avec $a > 0$). La fonction $f = f_a$ est positive ou nulle sur X, donc la norme uniforme de f est simplement le sup des valeurs de f, sans valeur absolue. L'étude de cette fonction montre que f est croissante sur $[0, 1/a]$, et décroissante sur $[1/a, +\infty[$, donc elle atteint son maximum au point $1/a$, et

$$\|f_a\|_{u,\mathrm{X}} = a^{-1}\,\mathrm{e}^{-1}\,.$$

2. Sur le même ensemble X, considérons $g : x \to 1 - \mathrm{e}^{-x}$. La fonction g est positive, croissante. Elle n'atteint pas son maximum sur X, mais son sup est la limite quand x tend vers $+\infty$, $\|g\|_{u,\mathrm{X}} = 1$.

3. Sur $\mathrm{X} = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1/2\}$, le module de la fonction $f : z \to z^n$ atteint son maximum sur le cercle de rayon $1/2$, donc $\|f\|_{u,\mathrm{X}} = 2^{-n}$.

Norme sur un espace vectoriel

On connaît la notion de norme pour un vecteur $x = (a, b, c)$ de $\mathbb{R}^3$,

$$\|x\| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}.$$

Cette fonction $x \to \|x\| \in [0, +\infty[$ vérifie trois propriétés essentielles :

1. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ pour tous $x, y \in \mathbb{R}^3$ (*inégalité triangulaire*).
2. $\|\lambda x\| = |\lambda|\,\|x\|$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et tout $x \in \mathbb{R}^3$.
3. $(\|x\| = 0) \Leftrightarrow (x = 0_{\mathbb{R}^3})$.

Nous allons généraliser cette notion à un espace vectoriel quelconque sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Définition 2.1.1. Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ (pas nécessairement de dimension finie) ; on dit que la fonction $x \in \mathrm{E} \to \|x\| \in [0, +\infty[$ est une *norme* sur E si elle vérifie les trois propriétés suivantes :

1. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ pour tous $x, y \in \mathrm{E}$ (inégalité triangulaire).
2. $\|\lambda x\| = |\lambda|\,\|x\|$ pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$ et tout $x \in \mathrm{E}$.
3. Pour tout $x \in \mathrm{E}$, on a l'équivalence $(\|x\| = 0) \Leftrightarrow (x = 0_{\mathrm{E}})$ (où 0_{E} désigne le vecteur nul de l'espace vectoriel E).

Il résulte de la propriété (1) l'inégalité importante

$$\big|\|v\| - \|w\|\big| \leq \|v - w\|$$

(pour tous vecteurs v, w de E) ; c'est une deuxième forme de l'inégalité triangulaire, dont on voit facilement qu'elle est équivalente à la première (poser par exemple $v = x + y$ et $w = x$). Etant donnée une norme sur E, on utilise la quantité $\|x - y\|$ pour se faire une certaine idée de la *distance* entre deux vecteurs x et y de E. On peut alors définir une notion de convergence pour les suites de vecteurs de E en disant qu'une suite (x_n) de vecteurs de E converge vers $x \in \mathrm{E}$ si $\|x - x_n\| \to 0$ quand n tend vers l'infini. Nous allons voir que la notion de convergence uniforme entre (en gros) dans ce cadre.

Norme sur l'espace vectoriel des fonctions bornées

Soit X un sous-ensemble non vide de $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$; on va vérifier que la "norme uniforme" est effectivement une norme au sens de la définition précédente, définie sur l'espace vectoriel $\mathrm{E} = \mathrm{B}(\mathrm{X})$ des fonctions complexes bornées définies sur X (on peut considérer le cas réel comme un cas particulier du cas complexe).

Proposition 2.1.1. *L'application $f \to \|f\|_{u,\mathrm{X}}$ est une norme sur l'espace vectoriel* $\mathrm{B}(\mathrm{X})$ *des fonctions complexes bornées sur* X.

Démonstration. Notons simplement $\|f\|$ pour la norme uniforme d'une fonction f. Montrons que $\|f+g\| \leq \|f\| + \|g\|$ pour toutes fonctions bornées f, g (inégalité triangulaire). Soit x un point quelconque de X ; par définition de la norme uniforme, on a $|f(x)| \leq \|f\|$ et $|g(x)| \leq \|g\|$, par conséquent $|(f+g)(x)| \leq \|f\| + \|g\|$. Ceci montre que $\mathrm{M} = \|f\| + \|g\|$ est un majorant de l'ensemble des modules des valeurs de $f+g$, donc $\|f+g\| \leq \mathrm{M} = \|f\| + \|g\|$.

La deuxième propriété, $\|\lambda f\| = |\lambda|\,\|f\|$ pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ est très facile à vérifier. Pour terminer, il est presque évident qu'une fonction f est égale à la fonction nulle 0_{E} (c'est à dire que $f(x) = 0$ pour tout $x \in \mathrm{X}$) si et seulement si $\|f\| = 0$.

Définition 2.1.2. Soient X un ensemble non vide, (f_n) une suite de fonctions définies sur X, à valeurs réelles ou complexes ; on dit que la suite de fonctions (f_n) converge *uniformément sur* X vers la fonction f (réelle ou complexe, définie sur X) si

$$\|f_n - f\|_{u,\mathrm{X}} \to 0$$

lorsque $n \to +\infty$.

Rappelons que l'on a admis la valeur $+\infty$ pour $\|f_n - f\|_{u,\mathrm{X}}$. Il est possible que les premiers termes de la suite $(\|f_n - f\|_{u,\mathrm{X}})$ soient infinis, mais dire que la suite des normes tend vers 0 implique que $\|f_n - f\|_{u,\mathrm{X}}$ est fini à partir d'un certain rang. Par ailleurs, il est très important de remarquer que la convergence uniforme de la suite (f_n) vers la fonction f implique la convergence de la suite numérique $(f_n(x))$ vers $f(x)$ en tout point $x \in \mathrm{X}$. En effet, on a pour tout $x \in \mathrm{X}$ l'inégalité

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \|f_n - f\|_{u,\mathrm{X}}.$$

Notons aussi que l'inégalité triangulaire pour la norme uniforme implique

$$\big|\|f\| - \|f_n\|\big| \leq \|f - f_n\|.$$

Si chaque fonction f_n est bornée sur X et si la suite (f_n) converge uniformément sur X vers f, il en résulte que f est bornée, et

$$\lim_{n\to+\infty} \|f_n\| = \|f\|.$$

Exemples.

1. Pour la suite $f_n(x) = 1/(1+nx^2)$ (exemple de l'introduction), on vérifiera que $\|f_n - f\| = 1$ pour tout n, donc la convergence de la suite (f_n) vers f n'est pas uniforme.

2. La suite $(f_n)_{n\geq 0}$ définie par $f_n(x) = x\,\mathrm{e}^{-nx}$ tend uniformément vers la fonction nulle $f = 0$ égale à 0 sur l'ensemble $\mathrm{X} = [0, +\infty[$. En effet, on a vu que pour $n \geq 1$, on a $\|f_n - 0\| = \|f_n\| = n^{-1}\,\mathrm{e}^{-1}$, quantité qui tend vers 0 (on remarquera que $f_0(x) = x$ définit une fonction non bornée, donc ce premier terme $\|f_0 - f\|$ est infini).

3. La suite des fonctions $x \to \sqrt{x^2 + 1/n^2}$ tend uniformément vers $x \to |x|$ sur $\mathbb{R}$.

Interversion des limites

Le théorème suivant s'appelle la propriété d'interversion de limites. On suppose ici que X est un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On cherche un énoncé de la forme

$$\lim_{n\to+\infty} \lim_{\substack{x\to x_0\\ x\in \mathrm{X}}} f_n(x) = \lim_{\substack{x\to x_0\\ x\in \mathrm{X}}} \lim_{n\to+\infty} f_n(x).$$

Ceci est faux en général : considérons la suite (f_n) du premier exemple de ce chapitre, $f_n(x) = 1/(1+nx^2)$ mais seulement sur l'ensemble $\mathrm{X} =]0, +\infty[$ (au lieu de $\mathbb{R}$ tout entier), et posons $x_0 = 0$. On a $\lim_{x\to 0} f_n(x) = 1$ pour tout n, et $\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$ pour tout $x \in \mathrm{X}$. On a donc $\lim_n \lim_{x\to 0} f_n(x) = 1$ mais $\lim_{x\to 0} \lim_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$.

On va voir que tout se passe mieux avec la convergence uniforme. Soit $\mathrm{X} \subset \mathbb{C}$ un ensemble non vide ; on dit qu'un point $a \in \mathbb{C}$ est *adhérent* à X si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $x \in \mathrm{X}$ tel que $|a - x| < \varepsilon$. Par exemple, le point $a = i \in \mathbb{C}$ est adhérent au disque unité ouvert $\mathrm{X} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$, mais $a = i$ n'est pas dans X. Il est clair en revanche que tous les points de X sont adhérents à X. Dans la plupart de nos applications, X sera un intervalle de $\mathbb{R}$ et a sera un point de X ou une de ses extrémités.

Soit f une fonction réelle ou complexe définie sur X et soit $a \in \mathbb{C}$ un point adhérent à X ; on dit que $f(x)$ tend vers $b \in \mathbb{C}$ quand x tend vers a si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall x \in \mathrm{X}\ \big(|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon\big).$$

Le lecteur montrera en exercice que l'hypothèse a adhérent à X entraîne l'unicité de la limite (quand la limite existe). Montrons d'abord une proposition préliminaire.

Proposition 2.1.2. *On suppose que la suite (f_n) converge uniformément vers f sur X, et que x_0 est un point adhérent à X tel que $\ell_n = \lim_{x\to x_0} f_n(x)$ existe pour tout n. Alors $\lim_{n\to+\infty} \ell_n$ existe.*

Démonstration. Montrons que la suite numérique (ℓ_n) est convergente. Pour le faire il suffit de montrer que cette suite est de Cauchy. On a $|f_n(x) - f_m(x)| \le \|f_n - f_m\|$ pour tous n, m entiers fixés et pour tout $x \in \mathrm{X}$, donc par passage à la limite des inégalités larges quand $x \to x_0$, on aura

$$|\ell_n - \ell_m| \le \|f_n - f_m\|.$$

D'autre part, la relation $\|f_n - f_m\| \le \|f_n - f\| + \|f_m - f\|$ montre que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe N tel que $\|f_n - f_m\| < \varepsilon$ pour tous $n, m \ge \mathrm{N}$, donc la suite (ℓ_n) est de Cauchy, donc convergente vers un nombre k.

Théorème 2.1.1 (d'interversion des limites). *On suppose que la suite (f_n) converge uniformément vers f sur X, et que x_0 est un point adhérent à X tel que $\lim_{x\to x_0} f_n(x)$ existe pour tout n. Alors*

$$\lim_{n\to+\infty} \lim_{\substack{x\to x_0\\ x\in \mathrm{X}}} f_n(x) = \lim_{\substack{x\to x_0\\ x\in \mathrm{X}}} \lim_{n\to+\infty} f_n(x) \ \Big(= \lim_{\substack{x\to x_0\\ x\in \mathrm{X}}} f(x)\Big).$$

Démonstration. On a déjà vu que $\ell_n = \lim_{x\to x_0} f_n(x)$ converge vers un nombre k. Il reste à voir que $f(x)$ tend vers $k = \lim \ell_n$ lorsque x tend vers x_0. Soit $\varepsilon > 0$ donné ; on peut choisir n_0 tel que

$$\|f - f_{n_0}\| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{et} \quad |k - \ell_{n_0}| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

On peut alors choisir $\alpha > 0$ tel que

$$\forall x \in \mathrm{X}, \quad \big(|x - x_0| < \alpha \Rightarrow |f_{n_0}(x) - \ell_{n_0}| < \frac{\varepsilon}{3}\big).$$

On a aussi

$$|f(x) - f_{n_0}(x)| \leq \|f - f_{n_0}\| < \frac{\varepsilon}{3}$$

pour tout $x \in \mathrm{X}$. Supposons maintenant que $|x - x_0| < \alpha$; la conjonction des trois inégalités précédentes donne alors $|f(x) - k| < \varepsilon$ pour tout $x \in \mathrm{X}$ tel que $|x - x_0| < \alpha$, ce qui montre bien la convergence de $f(x)$ vers k quand x tend vers x_0.

Suites de fonctions continues

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, et (f_n) une suite de fonctions complexes continues définies sur I ; si la suite (f_n) converge simplement vers une fonction f, il n'est pas vrai en général que la fonction f soit continue (voir l'exemple de l'introduction de ce chapitre). En revanche, si la convergence de la suite (f_n) est uniforme, on est sûr que la limite f est continue :

Théorème 2.1.2. *Soit (f_n) une suite de fonctions complexes définies sur* I *et continues en un point $x_0 \in$* I*, qui converge uniformément sur* I *vers une fonction f ; alors la fonction f est continue au point x_0. En particulier, si une suite (f_n) de fonctions complexes continues sur* I *converge uniformément sur* I *vers une fonction f, alors la fonction f est continue sur* I.

Démonstration. Ce résultat est une conséquence immédiate du théorème d'interversion 2.1.1, appliqué au point x_0. Puisque chacune des fonctions f_n est continue au point x_0, on peut écrire $\lim_{x \to x_0} f_n(x) = f_n(x_0)$, et le théorème d'interversion donne alors

$$f(x_0) = \lim_n f_n(x_0) = \lim_{x \to x_0} f(x).$$

Exercice. Si (f_n) est une suite de fonctions continues sur $[a, b]$ qui converge uniformément sur $[a, b]$ vers une fonction f, et si (x_n) est une suite de points de $[a, b]$ qui converge vers x, montrer que $\lim f(x_n) = f(x)$.

Suites de fonctions dérivables

Commençons par un exemple. Considérons la suite de fonctions dérivables (f_n) définies sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x) = \sqrt{x^2 + n^{-2}}$. Cette suite converge simplement vers la fonction $x \to |x|$, qui n'est pas dérivable en 0. Pourtant, la convergence de cette suite de fonctions est uniforme : en effet,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad |f_n(x) - x| \leq \frac{1}{n} \cdot$$

Ainsi, il faut imposer des conditions supplémentaires pour assurer que la limite f soit dérivable. La convergence uniforme de la suite des fonctions dérivées est une telle condition. On remarquera d'abord que :

Proposition 2.1.3. *Soit (f_n) une suite de fonctions réelles dérivables sur un intervalle ouvert* I*, telle que la suite des fonctions dérivées (f'_n) converge uniformément sur* I *vers une fonction g. S'il existe $x_0 \in$* I *tel que la suite $(f_n(x_0))$ converge, alors $(f_n(x))$ converge pour tout $x \in$* I*. De plus, si on pose $f(x) = \lim_n f_n(x)$ pour tout $x \in$* I*, la suite (f_n) converge uniformément vers f sur tout intervalle borné* J *contenu dans l'intervalle* I.

Démonstration. Puisque la suite $(f_n(x_0))$ est supposée convergente, il suffit de montrer que pour tout $x \in \mathrm{I}$, la suite numérique $y_n = (f_n(x) - f_n(x_0))$ est convergente, et pour cela, il suffit de vérifier qu'elle est de Cauchy. En appliquant le théorème des accroissements finis à la fonction dérivable $\varphi = f_m - f_n$, on aura pour un certain point $c_{m,n}$ entre x et x_0 (donc un point $c_{m,n} \in \mathrm{I}$)

$$|y_m - y_n| = \big|(f_m(x) - f_m(x_0)) - (f_n(x) - f_n(x_0))\big| = |\varphi(x) - \varphi(x_0)| =$$
$$= |x - x_0|\,|\varphi'(c_{m,n})| \leq |x - x_0|\,\|f'_m - f'_n\|_{u,\mathrm{I}}.$$

La convergence uniforme des fonctions dérivées termine la démonstration de la première partie. Si J est un intervalle borné contenu dans I, on peut choisir M tel que $[-\mathrm{M}, \mathrm{M}]$ contienne J et x_0. Pour tout $x \in \mathrm{J}$, on aura d'après ce qui précède, en faisant tendre n vers $+\infty$

$$|(f_m(x) - f_m(x_0)) - (f(x) - f(x_0))| \leq |x - x_0|\,\|f'_m - g\|_{u,\mathrm{I}} \leq 2\mathrm{M}\,\|f'_m - g\|_{u,\mathrm{I}},$$

donc $|f_m(x) - f(x)| \leq 2\mathrm{M}\,\|f'_m - g\|_{u,\mathrm{I}} + |f_m(x_0) - f(x_0)|$ pour tout $x \in \mathrm{J}$ ce qui donne

$$\|f_m - f\|_{u,\mathrm{J}} \leq 2\mathrm{M}\,\|f'_m - g\|_{u,\mathrm{I}} + |f_m(x_0) - f(x_0)|.$$

Théorème 2.1.3. *Soit (f_n) une suite de fonctions complexes dérivables sur un intervalle ouvert* I *; on suppose que la suite des fonctions dérivées (f'_n) converge uniformément sur* I *vers une fonction g, et qu'il existe un point $x_0 \in \mathrm{I}$ tel que la suite $(f_n(x_0))$ tende vers une limite. Alors la suite (f_n) converge simplement sur* I *vers une fonction f, cette fonction f est dérivable, de dérivée g, et la suite (f_n) converge uniformément vers f sur tout intervalle borné* J *contenu dans l'intervalle* I.

Démonstration. Il suffit de traiter le cas des valeurs réelles ; le cas complexe se traitera en séparant partie réelle et imaginaire. Les résultats concernant la convergence de (f_n) vers f ont été vus dans la proposition précédente, il reste seulement à démontrer que $f' = g$. Fixons un point quelconque $x_1 \in \mathrm{I}$. Sur l'ensemble $\mathrm{I}^* = \mathrm{I} \setminus \{x_1\}$, on définit les fonctions (f^*_n) et f^* par

$$f^*_n(x) = \frac{f_n(x) - f_n(x_1)}{x - x_1}, \quad f^*(x) = \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1}.$$

Le théorème des accroissements finis montre que $|f^*_n(x) - f^*_m(x)| \leq \|f'_n - f'_m\|_{u,\mathrm{I}}$, et l'hypothèse de convergence uniforme des dérivées donne pour tout $\varepsilon > 0$ un entier $\mathrm{N} = \mathrm{N}(\varepsilon)$ tel que $\|f'_n - f'_m\|_{u,\mathrm{I}} < \varepsilon$ pour $n, m \geq \mathrm{N}$. En passant à la limite quand $m \to +\infty$, on obtient $|f^*_n(x) - f^*(x)| \leq \varepsilon$ pour $n \geq \mathrm{N}$ et pour tout $x \in \mathrm{I}^*$, ce qui montre que la suite (f^*_n) converge uniformément vers f^* sur I^*. On peut alors appliquer le théorème d'interversion, qui nous dit que

$$f'(x_1) = \lim_{x \to x_1} f^*(x) = \lim_n \lim_{x \to x_1} f^*_n(x) = \lim_n f'_n(x_1) = g(x_1).$$

Intégration et suites de fonctions uniformément convergentes sur un intervalle de $\mathbb{R}$

Rappel. Intégrales définies. On dit que $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est *intégrable Riemann* sur $[a, b]$ si elle est bornée sur $[a, b]$ et si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe deux fonctions en escalier h_1, h_2 sur $[a, b]$ telles que

$$h_1 \leq f \leq h_2 \quad \text{et} \quad \int_a^b (h_2 - h_1)(t)\,dt < \varepsilon.$$

Dans le cas où la fonction f est à valeurs complexes, on dit qu'elle est intégrable Riemann si sa partie réelle et sa partie imaginaire sont toutes les deux intégrables Riemann.

Proposition 2.1.4. *Soit f une fonction bornée sur $[a,b]$ à valeurs réelles ou complexes ; si pour tout $\alpha > 0$ il existe une fonction intégrable Riemann f_α telle que $|f - f_\alpha| < \alpha$ sur $[a,b]$, alors f est intégrable Riemann (en d'autres termes : si f est limite uniforme de fonctions intégrables Riemann, alors f est intégrable Riemann).*

Démonstration. Supposons d'abord f réelle. Donnons nous $\varepsilon > 0$. On peut par hypothèse trouver une fonction intégrable Riemann g telle que $|f-g| < \alpha = \varepsilon/(4(b-a))$. Il existe h_1, h_2 en escalier telles que

$$h_1 \leq g \leq h_2 \quad \text{et} \quad \int_a^b (h_2 - h_1)(t)\,dt < \frac{\varepsilon}{2}.$$

En posant $k_1 = h_1 - \alpha$ et $k_2 = h_2 + \alpha$ on obtient deux nouvelles fonctions en escalier sur $[a,b]$ telles que

$$k_1 \leq f \leq k_2 \quad \text{et} \quad \int_a^b (k_2 - k_1)(t)\,dt = \int_a^b (h_2 - h_1)(t)\,dt + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Dans le cas complexe on applique ce qui précède aux parties réelle et imaginaire de f.

Passons maintenant au rapport entre convergence uniforme et valeurs des intégrales. On note d'abord que

$$\Big|\int_a^b f(t)\,dt - \int_a^b g(t)\,dt\Big| \leq |b-a|\,\|f-g\|_{u,[a,b]}$$

pour toutes fonctions intégrables f, g sur $[a,b]$.

Théorème 2.1.4. *Si la suite de fonctions (f_n) est uniformément convergente sur $[a,b]$ vers f et si chaque fonction f_n est intégrable Riemann sur $[a,b]$, la fonction f est intégrable Riemann sur $[a,b]$ et on a*

$$\int_a^b f(t)\,dt = \lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(t)\,dt.$$

Démonstration. Le fait que la fonction limite f soit intégrable Riemann résulte de la proposition précédente. Pour la convergence des intégrales, on a dit que

$$\Big|\int_a^b f(t)\,dt - \int_a^b f_n(t)\,dt\Big| \leq (b-a)\,\|f-f_n\|_{u,[a,b]},$$

ce qui montre immédiatement la convergence de l'intégrale de f_n vers celle de f.

ATTENTION ! Le résultat précédent est faux pour des intégrales généralisées sur un intervalle non borné. Par exemple, si on définit une suite de fonctions (f_n) sur $\mathrm{X} = [0,+\infty[$ en posant $f_n(x) = 2^{-n}$ si $0 \leq x \leq 2^n$ et $f_n(x) = 0$ si $x > 2^n$, on voit que la suite (f_n) converge uniformément vers 0 (on calcule $\|f_n\|_{u,\mathrm{X}} = 2^{-n}$), mais pour tout $n \geq 0$ on a

$$\int_0^{+\infty} f_n(t)\,dt = 1$$

ce qui montre que la limite des intégrales (égale à 1) n'est pas égale à l'intégrale de la fonction limite (égale à 0).

Intégrale dépendant d'un paramètre

Théorème 2.1.5. *On suppose que* I *est un intervalle de* $\mathbb{R}$*, et que* f *est une fonction réelle ou complexe définie et continue sur* $[a,b]\times \mathrm{I}$*. La fonction* F *définie sur* I *par*

$$\forall t\in \mathrm{I},\quad \mathrm{F}(t)=\int_a^b f(x,t)\,dx$$

est une fonction continue sur I.

Démonstration. Soit τ un point fixé de I ; pour montrer la continuité de F au point τ, il suffit de voir que pour toute suite (t_n) de points de I qui tend vers τ, la suite $\mathrm{F}(t_n)$ tend vers $\mathrm{F}(\tau)$. Cela va provenir de la convergence uniforme sur $[a,b]$ de la suite des fonctions $x\to f(x,t_n)$ vers la fonction $x\to f(x,\tau)$: posons pour tout $n\geq 0$

$$\forall x\in[a,b],\ \varphi_n(x)=f(x,t_n)$$

et posons $\varphi(x)=f(x,\tau)$. Si on montre que la suite (φ_n) converge uniformément vers φ sur $[a,b]$, on pourra écrire

$$\mathrm{F}(\tau)=\int_a^b \varphi(x)\,dx=\lim_n\int_a^b \varphi_n(x)\,dx=\lim_n \mathrm{F}(t_n).$$

Démontrons cette convergence uniforme par l'absurde, en admettant le théorème de Bolzano-Weierstrass 6.1.2. S'il n'y a pas convergence uniforme sur $[a,b]$ de cette suite de fonctions, il existe $\varepsilon>0$ tel que pour tout N, on puisse trouver $k(\mathrm{N})\geq \mathrm{N}$ tel que $\|\varphi_{k(\mathrm{N})}-\varphi\|_{u,[a,b]}\geq\varepsilon$; on peut alors trouver un point $x_{\mathrm{N}}\in[a,b]$ tel que

$$|\varphi_{k(\mathrm{N})}(x_{\mathrm{N}})-\varphi(x_{\mathrm{N}})|\geq\varepsilon,$$

ou encore

$$(*)\qquad |f(x_{\mathrm{N}},t_{k(\mathrm{N})})-f(x_{\mathrm{N}},\tau)|\geq\varepsilon.$$

D'après Bolzano-Weierstrass, on peut trouver une sous-suite (x_{N_j}) qui converge vers un point $x\in[a,b]$. Les deux suites de couples $(x_{\mathrm{N}_j},t_{k(\mathrm{N}_j)})$ et (x_{N_j},τ) tendent alors vers la même limite (x,τ) lorsque $j\to+\infty$. En passant à la limite dans l'inégalité $(*)$ (en utilisant la continuité de f), on obtient l'inégalité impossible

$$|f(x,\tau)-f(x,\tau)|\geq\varepsilon\,!!$$

2.2. Convergence normale des séries de fonctions à valeurs réelles ou complexes

On considère un ensemble non vide X (dans la plupart des exemples, X sera un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ ou de $\mathbb{C}$). On suppose définies sur X des fonctions $x\to u_0(x)$, $x\to u_1(x)$, $\ldots$, $x\to u_n(x),\ldots$ à valeurs réelles ou complexes. On va étudier la série $\sum u_n(x)$, qui dépend du paramètre $x\in\mathrm{X}$. On va en fait établir quelques bases pour une théorie des *séries de fonctions*. Il est un peu difficile de mettre au point une notation qui soit à la fois raisonnablement simple et suffisamment correcte pour désigner "la série de fonctions", par opposition à la série numérique $\sum u_n(x)$ dépendant du paramètre $x\in\mathrm{X}$ (nuance subtile !). On pourrait noter simplement $\sum u_n$, où chaque u_n est une fonction, mais on risquerait d'oublier qu'il s'agit de fonctions ; on pourrait noter $\sum\{x\to u_n(x)\}$, mais c'est bien barbare ! Je ferai ici le choix (contestable et personnel) d'écrire $\sum u_n()$ pour désigner

l'objet abstrait "série de fonctions". Les parenthèses ne sont là que pour rappeler qu'il s'agit de fonctions.

On verra à l'usage qu'il est difficile de toujours respecter un système de notations "correctes", et il serait (à mon avis) insupportable de ne pas admettre de temps en temps la phrase un peu incorrecte "la série de fonctions $\sum 2^{-n}\sin(nx)\ldots$" à la place d'une phrase impitoyablement correcte telle que "définissons pour tout entier $n \geq 0$ la fonction f_n sur $\mathbb{R}$ par la formule $f_n(x) = \sin(nx)$ et considérons la série de fonctions $\sum 2^{-n} f_n()\ldots$".

Définition 2.2.1. Soit $\sum u_n()$ une série de fonctions réelles ou complexes définies sur un ensemble non vide X ; on dit que la série de fonctions $\sum u_n()$ est *normalement convergente sur l'ensemble* X si

$$\sum \sup\{|u_n(x)| : x \in \mathrm{X}\} < +\infty$$

c'est à dire si

$$\sum \|u_n\|_{u,\mathrm{X}} < +\infty.$$

C'est la définition précédente qui explique le nom *convergence normale* : la série de fonctions converge normalement si la *série des normes uniformes* est convergente.

Définition 2.2.2. On dit que la série numérique $\sum v_n$ est une *série majorante pour la série de fonctions* $\sum u_n()$ *sur l'ensemble* X si

$$\forall n \geq 0,\ \forall x \in \mathrm{X},\quad |u_n(x)| \leq v_n.$$

Par définition, une série majorante est une série numérique à termes positifs. On notera que $\sum \|u_n\|_{u,\mathrm{X}}$ est évidemment une série majorante pour la série de fonctions $\sum u_n()$. Inversement, si $\sum u_n()$ admet sur X la série majorante $\sum v_n$, on aura

$$\|u_n\|_{u,\mathrm{X}} = \sup\{|u_n(x)| : x \in \mathrm{X}\} \leq v_n$$

pour tout entier $n \geq 0$, donc $\sum \|u_n\|_{u,\mathrm{X}}$ apparaît comme *la* série majorante canonique, et il pourrait sembler inutile d'introduire cette définition générale de série majorante. Mais dans beaucoup d'exemples, il est assez difficile de calculer exactement le sup de chaque fonction u_n, alors qu'il peut être assez facile de trouver un bon majorant ; c'est ce qui fait l'intérêt de cette notion de série majorante. On obtient donc un critère qui est souvent utilisé dans la pratique :

la série de fonctions $\sum u_n()$ *est normalement convergente sur l'ensemble* X *si (et seulement si) elle admet sur l'ensemble* X *une série majorante* **convergente** $\sum v_n < +\infty$.

Supposons la série de fonctions $\sum u_n()$ normalement convergente sur X ; on sait que $|u_n(x)| \leq \|u_n\|$ pour tout $x \in \mathrm{X}$; on voit donc que pour chaque $x \in \mathrm{X}$ fixé la série numérique $\sum u_n(x)$ est absolument convergente, donc convergente, et on peut définir une fonction $x \to \mathrm{U}(x)$ sur X qui est égale en chaque point $x \in \mathrm{X}$ à la somme de la série numérique $\sum u_n(x)$,

$$\mathrm{U}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x).$$

On dira que U est la *fonction somme de la série de fonctions* $\sum u_n()$. L'objectif de ce chapitre est d'étudier les propriétés des fonctions U définies par ce procédé.

Exemples.

Commençons par des exemples pour lesquels il est facile de calculer explicitement la norme uniforme $\|u_n\|_{u,\mathrm{X}}$.

1. Posons $\mathrm{X} = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq \frac{1}{2}\}$ et posons $u_n(z) = z^n$ pour tout $z \in \mathrm{X}$ et tout $n \geq 0$. On voit que $\|u_n\|_{u,\mathrm{X}} = 2^{-n}$, donc la série proposée est normalement convergente sur X puisque $\sum 2^{-n} < +\infty$. Si on considère le disque ouvert de rayon 1 dans le plan complexe, $\mathrm{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$, la "même" série $\sum u_n()$, où on pose encore $u_n(z) = z^n$, n'est pas normalement convergente sur D puisque $\|u_n\|_{u,\mathrm{D}} = 1$ pour tout entier $n \geq 0$.

2. La série de fonctions $\sum_{n\geq 1} \mathrm{e}^{inx}/n^2$ (premier accroc à nos conventions de notation !) est normalement convergente sur $\mathrm{X} = \mathbb{R}$. En effet, en posant $u_n(x) = \mathrm{e}^{inx}/n^2$, on voit que $|u_n(x)| = 1/n^2$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, donc $\|u_n\|_{u,\mathbb{R}} = 1/n^2$, terme général d'une série de Riemann convergente.

3. Autres exemples à étudier suivant le même principe :

$u_n(x) = \dfrac{1}{1+n^2x}$, avec $\mathrm{X} = [1, +\infty[$, ou bien $u_n(x) = x^n\,\mathrm{e}^{-nx}$, avec $\mathrm{X} = [0, +\infty[$, ou bien $u_n(x) = n^2\,\mathrm{e}^{-nx}$ sur le même ensemble X.

4. Passons maintenant à un exemple où la notion de série majorante est utile. Supposons que u_n soit définie sur $\mathbb{R}$ par

$$u_n(x) = \frac{\sin(nx)}{1 + nx^8 + x^{24} + n^2}\cdot$$

On n'a certainement pas envie de calculer exactement la norme de cette fonction u_n, mais on pourra se contenter de remarquer par exemple que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad |u_n(x)| \leq \frac{1}{1+n^2} = v_n,$$

donc la série $\sum u_n()$ admet sur $\mathbb{R}$ la série majorante convergente $\sum v_n$, donc elle est normalement convergente sur $\mathbb{R}$.

Il arrive souvent que les séries de fonctions étudiées ne soient pas normalement convergentes sur la totalité de l'ensemble X où elles sont convergentes, mais seulement sur des parties $\mathrm{Y} \subset \mathrm{X}$. Considérons par exemple, pour $x \in \mathrm{X} =]1, +\infty[$ la série de Riemann

$$\zeta(x) = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^x}\cdot$$

Cette série de Riemann est convergente pour tout $x \in]1, +\infty[$. Mais elle n'est pas normalement convergente sur $\mathrm{X} =]1, +\infty[$: en effet, en désignant par u_n la fonction $x \to 1/n^x$, on a

$$\|u_n\|_{u,\mathrm{X}} = \sup\{1/n^x : x > 1\} = 1/n,$$

(le sup est obtenu quand $x \to 1$, bien que $1 \notin \mathrm{X}$), donc la série des normes est la série divergente $\sum 1/n$. En revanche, si a est un nombre > 1, on a sur l'intervalle $[a, +\infty[$, puisque u_n est décroissante, $\|u_n\|_{[a,+\infty[} = n^{-a}$ et la série $\sum_{n\geq 1} n^{-a}$ est une série de Riemann convergente puisque $a > 1$: ainsi, pour tout $a > 1$, la série donnée est normalement convergente sur le sous-ensemble $\mathrm{Y}_a = [a, +\infty[$ de X.

Donnons un autre exemple du même type. La série

$$\sum_{n\geq 0} \frac{1}{(x-n)^2}$$

converge simplement sur le complémentaire X de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$. Mais aucune des fonctions $\dfrac{1}{(x-n)^2}$ n'est bornée sur X, donc la convergence de la série n'est pas normale sur X. En revanche, R étant un nombre réel > 0 donné quelconque, on a sur le sous-ensemble $\mathrm{Y_R} = \{x \in \mathrm{X} : |x| \leq \mathrm{R}\}$ pour $n > \mathrm{R}$

$$0 \leq \frac{1}{(x-n)^2} \leq \frac{1}{(n-\mathrm{R})^2}$$

ce qui prouve la convergence normale sur $\mathrm{Y_R}$ de la série limitée aux indices $> \mathrm{R}$

$$\sum_{n>\mathrm{R}} \frac{1}{(x-n)^2}\,.$$

Proposition 2.2.1. *Soit $\sum u_n()$ une série de fonctions normalement convergente sur un ensemble* X *; la suite* (U_n) *des fonctions sommes partielles converge uniformément sur* X *vers la fonction somme* U.

Démonstration. On a pour tout $x \in \mathrm{X}$ fixé

$$\mathrm{U}(x) - \mathrm{U}_n(x) = u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + \cdots$$

Ecrivons simplement $\|u\|$ au lieu de $\|u\|_{u,\mathrm{X}}$. On a l'inégalité $|u_{n+k}(x)| \leq \|u_{n+k}\|$, donc

$$|\mathrm{U}_n(x) - \mathrm{U}(x)| \leq \|u_{n+1}\| + \|u_{n+2}\| + \cdots = \mathrm{R}_n.$$

Puisque cette inégalité est vraie pour tout $x \in \mathrm{X}$, on en déduit que $\|\mathrm{U}_n - \mathrm{U}\|_{u,\mathrm{X}} \leq \mathrm{R}_n$. D'autre part, $\mathrm{R}_n \to 0$ puisque $\sum \|u_n\|$ est une série numérique convergente.

On va obtenir immédiatement une traduction des théorèmes principaux sur la convergence uniforme dans le cas des séries normalement convergentes.

Théorème d'interversion des limites pour les séries

Le théorème cherché est de la forme

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \lim_{\substack{x\to x_0\\ x\in\mathrm{X}}} u_n(x) = ?? = \lim_{\substack{x\to x_0\\ x\in\mathrm{X}}} \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x).$$

Comme pour les suites de fonctions, un tel résultat est faux en général. Prenons par exemple $\mathrm{X} = [0,1[$, $u_n(x) = x^n(1-x)$ et $x_0 = 1$. Alors $\lim_{x\to 1} u_n(x) = 0$ pour tout n fixé, donc

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} u_n(x) = 0,$$

mais $\mathrm{U}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x) = (\sum_{n=0}^{+\infty} x^n)(1-x) = 1$ pour tout $x \in \mathrm{X}$, donc

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x) = 1.$$

Théorème 2.2.1. *Soit x_0 un point adhérent à X ; si la série de fonctions réelles ou complexes $\sum u_n()$ est normalement convergente sur X et si $u_n(x)$ admet pour tout $n \geq 0$ une limite (dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) quand $x \to x_0$ (avec $x \in \mathrm{X}$), on en déduit*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in \mathrm{X}}} u_n(x) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in \mathrm{X}}} \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x).$$

Démonstration. Pour chaque entier $n \geq 0$ on a

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in \mathrm{X}}} \mathrm{U}_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in \mathrm{X}}} u_k(x),$$

donc d'après la convergence uniforme vers U de la suite (U_n) des fonctions sommes partielles,

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in \mathrm{X}}} \mathrm{U}(x) = \lim_{n} \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in \mathrm{X}}} \mathrm{U}_n(x) = \lim_{n} \sum_{k=0}^{n} \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in \mathrm{X}}} u_k(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in \mathrm{X}}} u_n(x),$$

ce qui donne le résultat voulu.

Le résultat précédent est vrai aussi si $\mathrm{X} \subset \mathbb{R}$ est un ensemble non majoré et si le point adhérent (généralisé) considéré est $+\infty$. Pour le voir, il serait facile de modifier la démonstration précédente, mais on peut aussi déduire ce nouveau cas du précédent (c'est peut-être moins naturel, mais les mathématiciens aiment bien ce genre de détour).

Corollaire 2.2.1. *Soit X un sous-ensemble non majoré de $\mathbb{R}$, et soit $\sum u_n()$ une série de fonctions réelles ou complexes définies sur X ; si $\sum u_n()$ est normalement convergente sur X et si pour tout $n \geq 0$ la limite*

$$\lim_{\substack{x \to +\infty \\ x \in \mathrm{X}}} u_n(x)$$

existe (dans $\mathbb{R}$ ou dans $\mathbb{C}$) on en déduit

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \lim_{\substack{x \to +\infty \\ x \in \mathrm{X}}} u_n(x) = \lim_{\substack{x \to +\infty \\ x \in \mathrm{X}}} \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x).$$

Démonstration. La méthode est essentiellement un "changement de variable", le changement $\tilde{x} = 1/x$ qui transforme un problème en $+\infty$ en problème en 0. Posons $\tilde{\mathrm{X}} = \{1/x : x \in \mathrm{X}, x \neq 0\}$ et pour tout $\tilde{x} \in \tilde{\mathrm{X}}$, posons $\tilde{u}_n(\tilde{x}) = u_n(1/\tilde{x})$. Soit $\sum v_n$ une série majorante pour $\sum u_n()$ sur X ; alors $\sum v_n$ est aussi une série majorante pour la série de fonctions $\sum \tilde{u}_n()$ sur le nouvel ensemble $\tilde{\mathrm{X}}$, et pour tout entier $n \geq 0$ la fonction $\tilde{x} \to \tilde{u}_n(\tilde{x})$ tend vers une limite quand $\tilde{x} \to 0$, donc le résultat découle du théorème précédent appliqué à $\sum \tilde{u}_n(\tilde{x})$ quand $\tilde{x} \to 0$.

Cas particulier. Séries numériques doubles. On considère ici une série numérique dépendant de deux indices,

$$\sum_{n,k} a_{n,k}.$$

Corollaire 2.2.2. *Soit $\sum a_{n,k}$ une série numérique double ; si pour tout n et tout $k \in \mathbb{N}$ on a*

$$|a_{n,0} + \cdots + a_{n,k}| \leq v_n,$$

si $\sum v_n < +\infty$ et si $\sum_k a_{n,k}$ converge pour tout n, alors

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} a_{n,k} = \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} a_{n,k}.$$

La formule ci-dessus sous-entend un certain nombre de choses : par exemple, elle signifie implicitement que pour tout k fixé, la série $\sum_n a_{n,k}$ converge, puis que la série des résultats quand k varie converge aussi.

Démonstration. Pour rattacher aux énoncés antérieurs (dans le cas présent, nous aurons $\mathrm{X} = \mathbb{N} \subset \mathbb{R}$) on notera provisoirement x un entier quelconque, pour rappeler les notations précédentes. On posera donc pour tout entier n et pour tout $x \in \mathrm{X} = \mathbb{N}$

$$u_n(x) = a_{n,0} + \cdots + a_{n,x}.$$

L'hypothèse ci-dessus est que la série de fonctions $\sum u_n()$ admet sur X la série majorante convergente $\sum v_n$, et que pour tout n la limite $\lim_{x \to +\infty, x \in \mathrm{X}} u_n(x) = \sum_{x=0}^{+\infty} a_{n,x}$ existe. D'après le corollaire précédent, on obtient donc

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{x=0}^{+\infty} a_{n,x} = \sum_{n=0}^{+\infty} \lim_{x \to +\infty} u_n(x) = \lim_{x \to +\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x) =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{x} a_{n,k} = \lim_{x \to +\infty} \sum_{k=0}^{x} \sum_{n=0}^{+\infty} a_{n,k} = \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} a_{n,k}.$$

Exemple. On retrouve ainsi la sommation par paquets des séries numériques absolument convergentes. Soit en effet $\sum b_n$ une série numérique absolument convergente, soit $(\mathrm{A}_k)_{k=0}^{+\infty}$ une partition de $\mathbb{N}$ en paquets deux à deux disjoints et posons

$$a_{n,k} = \chi_{\mathrm{A}_k}(n)\, b_n$$

pour tous $n, k \geq 0$. On voit que pour tous n et k

$$|a_{n,0} + \cdots + a_{n,k}| \leq |b_n|,$$

et d'autre part

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_{n,k} = \sum_{n \in \mathrm{A}_k} b_n, \quad \sum_{k=0}^{+\infty} a_{n,k} = b_n.$$

Corollaire 2.2.3. *On suppose que*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (\sum_{k=0}^{+\infty} |a_{n,k}|) < +\infty.$$

Il en résulte alors que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} a_{n,k} = \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} a_{n,k}.$$

Démonstration. Posons $v_n = \sum_k |a_{n,k}|$. On a alors $|a_{n,0} + \cdots + a_{n,k}| \leq v_n$ et $\sum v_n < +\infty$ par hypothèse ; de plus la série $\sum_k a_{n,k}$ converge pour tout n.

Exemple. Pour $\alpha > 0$, étudier les séries de Riemann doubles

$$\sum_{n,k\geq 1} \frac{1}{n^\alpha + k^\alpha}.$$

Etant donné $c > 1$, on pourra estimer $\sum_{k\geq 1} 1/(c + k^\alpha)$ en découpant la somme de la série en deux, selon que $k^\alpha \leq c$ ou $k^\alpha > c$.

2.3. Applications. Continuité et dérivabilité de la somme d'une série de fonctions

Le premier théorème est une application immédiate de la convergence uniforme des sommes partielles et du théorème de continuité 2.1.2.

Théorème 2.3.1. *Si la série de fonctions réelles ou complexes $\sum u_n()$ est normalement convergente sur* X *et si chaque fonction u_n est continue au point $x_0 \in$* X*, la fonction somme $x \to \mathrm{U}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$, définie pour tout $x \in$* X*, est continue au point x_0. En particulier, si $\sum u_n()$ est normalement convergente sur* X *et si chaque fonction u_n est continue sur* X*, la fonction somme* U *est une fonction continue sur* X*.*

Exemples. Il est souvent nécessaire de travailler sur un sous-ensemble Y de X pour obtenir une convergence normale. Comme on l'a déjà dit, il arrive que les séries de fonctions étudiées ne soient pas normalement convergentes sur la totalité de l'ensemble X où elles sont naturellement définies, mais seulement sur des parties $\mathrm{Y} \subset \mathrm{X}$. Cela suffira souvent, comme on le verra, pour obtenir les résultats attendus, par exemple sur la continuité de la somme sur l'ensemble X tout entier.

1. On a vu que sur $]1, +\infty[$ la série de Riemann

$$\zeta(x) = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^x}$$

n'est pas normalement convergente, mais la série est normalement convergente sur tout intervalle $\mathrm{Y}_a = [a, +\infty[$ tel que $a > 1$. Ceci permet de montrer la continuité de la fonction ζ pour tout $x > 1$. En effet, pour montrer la continuité en un point $x > 1$, on peut choisir un nombre a tel que $1 < a < x$, et la continuité de la fonction ζ sur l'intervalle $[a, +\infty[$ implique la continuité au point x.

On peut étendre à une partie du plan complexe la définition et les propriétés de la fonction ζ. En effet, en posant $n^z = \mathrm{e}^{z\ln(n)}$ on voit que

$$\left|\frac{1}{n^z}\right| = \frac{1}{n^{\mathrm{Re}\, z}}$$

ce qui permet de voir que pour tout réel $a > 1$, la série $\sum 1/n^z$ converge normalement sur tout sous-ensemble Z_a de $\mathbb{C}$ de la forme

$$\mathrm{Z}_a = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\, z \geq a\}$$

donc $z \to \zeta(z)$ est continue sur l'ensemble $\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\, z > 1\}$.

2. La série

$$f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \frac{1}{(x-n)^2}$$

converge simplement sur le complémentaire X de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{R}$ (il s'agit en fait de deux séries, l'une pour les $n < 0$ et l'autre pour $n \geq 0$, qu'il est commode ici de regrouper en une écriture unique). Pour démontrer la continuité de la somme de cette série, il est commode de "localiser" le problème. Soit $x_0 \notin \mathbb{Z}$ quelconque. Il existe un entier relatif n_0 unique tel que $n_0 < x_0 < n_0+1$. Choisissons a, b de façon que $n_0 < a < x_0 < b < n_0 + 1$. Pour montrer que la fonction f est continue au point x_0, il suffit de savoir qu'elle est continue sur l'intervalle $[a, b]$, et pour le voir, on va utiliser la convergence normale sur $[a, b]$. Coupons notre série en deux séries,

$$\sum_{-\infty}^{n_0} \frac{1}{(x-n)^2}, \quad \sum_{n=n_0+1}^{+\infty} \frac{1}{(x-n)^2}.$$

Etudions la seconde série (le raisonnement est analogue pour la première). Si on définit pour tout $n \in \mathbb{Z}$ la fonction u_n sur $[a, b]$ par $u_n(x) = (x-n)^{-2}$, on constate que la fonction u_n est croissante sur $[a, b]$ lorsque $n \geq n_0 + 1 \geq b$, donc $\|u_n\|_{u,[a,b]} = (b-n)^{-2}$ pour $n > n_0$, terme général de la série numérique convergente $\sum_{n>n_0}(b-n)^{-2}$. La somme de la seconde série est donc continue sur $[a, b]$. On procède de même avec la première série et par suite, la somme de la série donnée est continue au point x_0, pour tout $x_0 \in$ X, donc f est continue sur X. Montrer en exercice que le résultat de convergence et de continuité s'étend aux valeurs complexes, pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$.

Dérivation des séries de fonctions

Dans ce paragraphe, X sera un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et x_0 un point de X.

Théorème 2.3.2. *On suppose chaque fonction u_n dérivable sur l'intervalle* X. *Si la série des fonctions dérivées $\sum u_n'()$ est normalement convergente sur* X *et si $\sum u_n(x_0)$ converge au point $x_0 \in$ X, la série $\sum u_n(x)$ converge pour tout $x \in$ X et sa somme* $\mathrm{U}(x)$ *est dérivable sur* X, *avec de plus*

$$\forall x \in \mathrm{X}, \quad \mathrm{U}'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n'(x).$$

Démonstration. Puisque la série $\sum u_n'()$ converge normalement sur X, la suite des fonctions sommes partielles (qui est la suite (U_n') des dérivées des fonctions sommes partielles (U_n) de la série $\sum u_n()$) converge uniformément sur X. De plus la suite (U_n) converge simplement au point x_0. D'après le théorème 2.1.3, la fonction U est dérivable et sa dérivée est la limite de la suite (U_n'), c'est à dire la somme de la série des dérivées.

Exemples.

1. Considérons la fonction de Riemann ζ sur l'intervalle $]1, +\infty[$, donnée par la somme de la série de fonctions

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x} = \zeta(x).$$

La série dérivée est donnée par

$$\sum_{n=1}^{+\infty} -\frac{\ln n}{n^x}.$$

Soit a un réel > 1 ; on voit que la fonction u_n' est un multiple de u_n, donc

$$\|u_n'\|_{u,[a,+\infty[} = (\ln n)\, \|u_n\|_{u,[a,+\infty[}$$

et $\|u_n\|_{[a,+\infty[}$ a déjà été calculé, donc

$$\sum \|u'_n\|_{[a,+\infty[} = \sum \frac{\ln n}{n^a}$$

qui est une série convergente. Par suite, la série dérivée est normalement convergente sur l'intervalle $[a, +\infty[$. Le théorème 2.3.2 montre que la fonction ζ est dérivable sur chacun des intervalles $]a, +\infty[$; il en résulte qu'elle est aussi dérivable sur $]1, +\infty[$, et de dérivée

$$\zeta'(x) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln n}{n^x}.$$

Il est très facile de voir que ce calcul se généralise à toutes les dérivées successives, donc ζ est de classe C^∞ sur $]1, +\infty[$. En particulier,

$$\zeta''(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(\ln n)^2}{n^x}$$

montre que la dérivée seconde est ≥ 0, donc la fonction ζ est convexe sur l'intervalle $]1, +\infty[$.

2. Pour tout entier $k \geq 1$, on obtient pour tout $x \in]-1, 1[$

$$\frac{1}{(1-x)^{k+1}} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+k)(n+k-1)\dots(n+1)\, x^n$$

en dérivant plusieurs fois la série géométrique et en vérifiant à chaque fois que la nouvelle série dérivée est normalement convergente sur tous les intervalles $[-a, a]$, pour $0 < a < 1$.

2.4. Intégration terme à terme des séries de fonctions normalement convergentes sur un intervalle de $\mathbb{R}$

Les résultats sur la convergence uniforme des suites donnent immédiatement :

Proposition 2.4.1. *Si la série de fonctions $\sum u_n()$ est normalement convergente sur $[a, b]$ et si chaque fonction u_n est intégrable Riemann, la fonction somme $x \to \mathrm{U}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$ est une fonction intégrable Riemann sur $[a, b]$.*

Théorème 2.4.1. *Si la série de fonctions $\sum u_n()$ est normalement convergente sur $[a, b]$ et si chaque fonction u_n est intégrable Riemann sur $[a, b]$, la série des intégrales est absolument convergente et on a*

$$\int_a^b \Big(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(t)\Big)\, dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b u_n(t)\, dt.$$

Démonstration. On applique à nouveau le résultat correspondant pour la convergence uniforme des suites. Puisque la suite (U_n) des fonctions sommes partielles converge uniformément vers U, on sait que

$$\int_a^b \mathrm{U}(t)\, dt = \lim_n \int_a^b \mathrm{U}_n(t)\, dt,$$

et

$$\int_a^b \mathrm{U}_n(t)\, dt = \sum_{k=0}^{n} \int_a^b u_k(t)\, dt.$$

Corollaire 2.4.1. *Soit* I *un intervalle de* $\mathbb{R}$ *; on suppose que la série de fonctions* $\sum u_n()$ *est normalement convergente sur* I *et que chaque fonction* u_n *est continue sur* I. *Soit* a *un point de* I *et posons*

$$\forall x \in \mathrm{I}, \quad f_n(x) = \int_a^x u_n(t)\,dt.$$

La fonction f_n *est la primitive de* u_n *nulle au point* a *; pour tout intervalle borné* J *contenu dans* I *la série des fonctions* $\sum f_n()$ *converge normalement sur* J, *et la fonction* F *somme de la série* $\sum f_n()$, *définie par* $\mathrm{F}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$, *est la primitive nulle en* a *de la fonction continue* U, *somme de la série de fonctions* $\sum u_n()$, *définie sur* I.

Démonstration. Soit J un intervalle borné contenu dans I et soit M tel que $\mathrm{J} \subset [-\mathrm{M}, \mathrm{M}]$ et $|a| \leq \mathrm{M}$; pour tout $x \in \mathrm{J}$ on aura

$$|f_n(x)| \leq |x-a|\,\|u_n\|_{u,\mathrm{I}} \leq 2\mathrm{M}\,\|u_n\|_{u,\mathrm{I}},$$

donc la série $\sum 2\mathrm{M}\,\|u_n\|_{u,\mathrm{I}}$ est une série majorante convergente sur J pour la série de fonctions $\sum f_n()$. Comme tout point $x \in \mathrm{I}$ est contenu dans un intervalle borné J, on en déduit que la série $\sum f_n(x)$ converge pour tout $x \in \mathrm{I}$, et on peut donc définir pour tout $x \in \mathrm{I}$

$$\mathrm{F}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x).$$

On va montrer que $\mathrm{F}'(x) = \mathrm{U}(x)$. Supposons d'abord $x > a$. Pour tout $x \in \mathrm{I}$, on peut appliquer le théorème 2.4.1 à l'intervalle fermé borné $[a, x]$, donc

$$\mathrm{F}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^x u_n(t)\,dt = \int_a^x \mathrm{U}(t)\,dt.$$

Le cas $x < a$ est analogue, ce qui permet de voir que

$$\mathrm{F}(x) = \int_a^x \mathrm{U}(t)\,dt$$

pour tout $x \in \mathrm{I}$, ce qui montre que F est une primitive de la fonction continue U.

Remarque. Pour une série de fonctions $\sum w_n()$ *de classe* C^1 telle que $\sum w_n'()$ converge normalement sur I, le théorème de dérivation 2.3.2 se déduit immédiatement du résultat précédent.

Exemple. Représentation de $-\ln(1-x)$ pour x dans $\mathrm{X}_a = [-a, a]$, $0 \leq a < 1$. On sait que pour tout $x \in \mathrm{X}_a$ on a

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$$

et la série des fonctions $u_n(x) = x^n$ converge normalement sur X_a, donc

$$\forall x \in \mathrm{X}_a, \quad -\ln(1-x) = \int_0^x \frac{1}{1-t}\,dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^x t^n\,dt = \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{x^m}{m},$$

donc cette relation est vraie pour tout x tel que $|x| < 1$ (on a vu qu'elle est vraie aussi pour $x = -1$, mais on ne l'obtient pas par les méthodes précédentes de convergence

normale). On peut remarquer que ce résultat peut aussi s'obtenir par le théorème de dérivation lu à l'envers.

De la même façon on obtient pour $|x| < 1$

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{2n}, \quad \text{donc} \quad \operatorname{Arctan}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

Equation de la chaleur. On suppose que $\sum_{n\in\mathbb{Z}} n^2 |a_n| < +\infty$, et que la fonction $g(x)$ est une fonction 2π-périodique donnée par la formule

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n \, \mathrm{e}^{inx} \, .$$

La fonction définie pour $x \in \mathbb{R}$ et $t \geq 0$ par

$$f(x,t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \, \mathrm{e}^{-n^2 t} \, \mathrm{e}^{inx}$$

vérifie *l'équation de la chaleur*

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

avec la *condition initiale*

$$f(x,0) = g(x).$$

On voit que $\lim_{t\to+\infty} f(x,t) = a_0$ pour tout x (on applique le théorème d'interversion des limites à la série normalement convergente qui définit $f(x,t)$).

L'exemple précédent est un cas particulier de la théorie des *séries de Fourier*. Pour toute suite (c_n) de coefficients réels ou complexes telle que $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n| < +\infty$, on peut définir une fonction f sur $\mathbb{R}$ par la formule

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n \, \mathrm{e}^{inx} \, .$$

La fonction obtenue est continue sur $\mathbb{R}$, et elle est 2π-périodique. D'après le théorème 2.4.1, on peut obtenir les coefficients c_n à partir de la fonction f en calculant

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \, \mathrm{e}^{-inx} \, dx.$$

Ce qui fait l'importance de cette théorie, c'est que l'on peut exprimer la plupart des fonctions périodiques sous la forme ci-dessus : on peut montrer par exemple que si f est une fonction 2π-périodique sur $\mathbb{R}$, de classe C^1, alors les coefficients (c_n) calculés par la formule précédente vérifient $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n| < +\infty$ et la fonction f est égale à la somme de la série de Fourier correspondante (voir chapitre 6, théorème 6.6.2).

Si on préfère les fonctions réelles, on peut décomposer l'exponentielle complexe en sinus et cosinus pour obtenir des décompositions de la forme

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \cos(nx) + \sum_{n=1}^{+\infty} b_n \sin(nx).$$

Séries alternées de fonctions

La méthode des séries normalement convergentes $\sum u_n()$ n'est qu'une façon très particulière d'obtenir la convergence uniforme de la suite des fonctions sommes partielles (U_n). Dans certains cas, d'autres méthodes sont beaucoup plus performantes.

Proposition 2.4.2. *Soit (v_n) une suite de fonctions sur un intervalle X de $\mathbb{R}$ telle que*

– pour tout $x \in \mathrm{X}$ et tout $n \geq 0$, on a $v_n(x) \geq v_{n+1}(x) \geq 0$ (c'est à dire que la suite $(v_n(x))$ est décroissante positive pour tout $x \in \mathrm{X}$)

– la suite de fonctions (v_n) tend uniformément vers 0 sur X, c'est à dire que

$$\lim_n \|v_n\|_{u,\mathrm{X}} = 0.$$

Alors les sommes partielles de la série alternée de fonctions $\sum(-1)^n v_n()$ convergent uniformément sur X. Il en résulte que la fonction somme est continue sur X si chaque fonction v_n est continue sur X.

Démonstration. On remarque d'abord que pour chaque $x \in \mathrm{X}$ fixé, on peut en posant $u_n(x) = (-1)^n v_n(x)$ appliquer le théorème des séries alternées pour déduire que la série $\sum u_n(x)$ converge pour chaque x fixé ; on peut donc poser $\mathrm{U}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$. On montre ensuite que

$$\|\mathrm{U}_n - \mathrm{U}\|_{u,\mathrm{X}} \leq \|v_{n+1}\|_{u,\mathrm{X}}$$

pour tout n. En effet, on voit que $(\mathrm{U}_{2n}(x))$ est décroissante et $(\mathrm{U}_{2n+1}(x))$ croissante, donc $\mathrm{U}_{2n+1}(x) \leq \mathrm{U}(x) \leq \mathrm{U}_{2n}(x)$. L'écart entre $\mathrm{U}(x)$ et $\mathrm{U}_{2n}(x)$ est donc au plus égal à $\mathrm{U}_{2n}(x) - \mathrm{U}_{2n+1}(x) = v_{2n+1}(x)$, et on raisonne de la même façon pour U_{2n+1} à partir de l'encadrement $\mathrm{U}_{2n+1}(x) \leq \mathrm{U}(x) \leq \mathrm{U}_{2n+2}(x)$.

Exercice. Montrer que

$$\frac{\pi}{4} = \mathrm{Arctan}(1) = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \cdots$$

en étudiant la série alternée

$$\sum (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

sur l'intervalle $[0, 1]$.

Un exemple avec Abel.

La série

$$\sum_{n \geq 1} \frac{\mathrm{e}^{inx}}{\sqrt{n}}$$

définit une fonction continue sur $\mathrm{X} = [\alpha, 2\pi - \alpha]$ pour tout α tel que $0 < \alpha < 2\pi - \alpha$. En effet, les fonctions sommes partielles convergent uniformément sur cet intervalle. On pose $\lambda_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}}$. C'est une suite qui décroît vers 0. On pose aussi $w_n(x) = \mathrm{e}^{i(n+1)x}$ pour tout $n \geq 0$. On montre que

$$|\mathrm{W}_n(x)| \leq \frac{2}{|1 - \mathrm{e}^{i\alpha}|}$$

pour tout $x \in [\alpha, 2\pi - \alpha]$. Ensuite la transformation d'Abel

$$\lambda_0 w_0(x) + \cdots + \lambda_n w_n(x) = (\lambda_0 - \lambda_1)\mathrm{W}_0(x) + \cdots + (\lambda_{n-1} - \lambda_n)\mathrm{W}_{n-1}(x) + \lambda_n \mathrm{W}_n(x)$$

transforme en une série normalement convergente $\sum(\lambda_{n-1} - \lambda_n)\mathrm{W}_{n-1}()$ plus un résidu $\lambda_n \mathrm{W}_n(x)$ qui tend uniformément vers 0 sur X.

Intégrale généralisée dépendant d'un paramètre

Théorème 2.4.2. *On suppose que* I *est un intervalle de* $\mathbb{R}$*, et que* f *est une fonction réelle ou complexe définie et continue sur* $[0, +\infty] \times \mathrm{I}$*. On suppose qu'il existe une fonction* g *sur* $[0, +\infty[$ *telle que*

– *pour tout* $(x, t) \in [0, +\infty[\times \mathrm{I}$*, on a* $|f(x, t)| \leq g(x)$ *;*

– *l'intégrale de* g *est convergente,* $\int_0^{+\infty} g(x)\, dx < +\infty$*.*

Dans ce cas, la fonction F *définie sur* I *par*

$$\forall t \in \mathrm{I}, \quad \mathrm{F}(t) = \int_0^{+\infty} f(x, t)\, dx$$

est une fonction continue sur I*.*

Démonstration. Pour tout entier $n \geq 0$, posons

$$u_n(t) = \int_n^{n+1} f(x, t)\, dx.$$

D'après le théorème 2.1.5, cette fonction u_n est continue sur l'intervalle I. De plus, on a pour tout $t \in \mathrm{I}$

$$|u_n(t)| \leq \int_n^{n+1} |f(x, t)|\, dt \leq \int_n^{n+1} g(x)\, dx = v_n,$$

et la série numérique $\sum v_n$ est convergente puisque

$$\sum_{n=0}^{+\infty} v_n = \int_0^{+\infty} g(x)\, dx.$$

La série de fonctions continues $\sum u_n()$ admet donc sur I une série majorante convergente, donc sa somme est une fonction continue. Mais on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(t) = \int_0^{+\infty} f(x, t)\, dx = \mathrm{F}(t).$$

Chapitre 3. Séries entières

On a déjà vu plusieurs exemples de séries entières : le développement

$$(1-x)^{-1} = 1 + x + \cdots + x^n + \cdots$$

valable pour $|x| < 1$, est un exemple de série entière. On a vu aussi des développements analogues pour $\ln(1-x)$, $(1+x^2)^{-1}$, $\operatorname{Arctan} x$, e^x, $\sin x$, $\cos x$. Dans le cas de l'exponentielle on a étendu la représentation aux nombres complexes : c'est ce que nous ferons systématiquement dans ce chapitre.

Définition 3.0.1. On appelle *série entière* une série de fonctions de la forme $\sum a_n z^n$, où les (a_n) sont des nombres complexes et où la variable z est complexe. Pour s'exprimer en termes plus corrects, une série entière est une série de fonctions $\sum u_n()$ où chaque fonction u_n est de la forme $u_n(z) = a_n z^n$, $z \in \mathbb{C}$.

Le premier problème que nous allons étudier est de préciser l'ensemble des points $z \in \mathbb{C}$ pour lesquels une telle série est convergente.

3.1. Rayon de convergence

Exemples

1. La série entière $\sum 2^n z^n$ converge pour $|z| < \frac{1}{2}$ et a pour somme $(1-2z)^{-1}$; elle diverge pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| \geq \frac{1}{2}$.

2. La série entière $\sum n!\, z^n$ ne converge que pour $z = 0$. En effet, quand $z \neq 0$, le terme général $n!\, z^n$ ne tend pas vers 0 (en fait son module tend vers $+\infty$).

3. La série entière $\sum z^n/n!$ converge pour tout $z \in \mathbb{C}$. Rappelons que la somme de cette série s'appelle l'exponentielle complexe :

$$\mathrm{e}^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}\,.$$

Lorsque z est réel, on retrouve bien sûr l'exponentielle au sens habituel.

Proposition 3.1.1. *Supposons donnée une série entière $\sum a_n z^n$. On suppose que $r_0 > 0$ est donné et que la suite $(a_n r_0^n)$ est bornée. Pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < r_0$, la série numérique $\sum a_n z^n$ est (absolument) convergente. De plus, pour tout r_1 tel que $0 \leq r_1 < r_0$, la série de fonctions $\sum a_n z^n$ est normalement convergente dans le disque $\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq r_1\}$. Il en résulte que la fonction somme $z \to f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ est une fonction continue dans le disque ouvert $\{z \in \mathbb{C} : |z| < r_0\}$.*

Démonstration. Il suffit de démontrer la deuxième partie de l'énoncé, qui implique en particulier que $\sum a_n z^n$ est absolument convergente pour tout z tel que $|z| < r_0$ (poser simplement $r_1 = |z|$, et appliquer la suite de l'énoncé) ; soit M un majorant de la suite $(|a_n|\, r_0^n)$ et soit r_1 tel que $0 \leq r_1 < r_0$; pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| \leq r_1$ on a la majoration

$$|a_n z^n| = \left| a_n r_0^n \left(\frac{z}{r_0}\right)^n \right| \leq \mathrm{M}\left(\frac{r_1}{r_0}\right)^n = v_n,$$

et la série majorante $\sum v_n$ est convergente puisque $0 \leq r_1/r_0 < 1$. Le reste de l'énoncé provient des résultats du chapitre 2.

Indiquons une conséquence importante de l'énoncé précédent. Si la série $\sum a_n z_0^n$ converge pour un certain $z_0 \in \mathbb{C}$ non nul, la série $\sum a_n z^n$ converge absolument pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < |z_0|$. En effet, la convergence de la série $\sum a_n z_0^n$ implique que la suite $(|a_n||z_0|^n)$ est bornée, ce qui permet d'appliquer la proposition précédente avec $r_0 = |z_0|$.

Passons maintenant à la notion de *rayon de convergence*. Considérons l'ensemble B des nombres réels $r \geq 0$ tels que la suite $(a_n r^n)$ soit bornée. On a bien sûr $0 \in \mathrm{B}$ (et on a vu dans l'exemple (2) ci-dessus qu'il est possible que $\mathrm{B} = \{0\}$). Si B contient le nombre $r \geq 0$, il est clair qu'il contient aussi tout le segment $[0, r]$, donc B est un intervalle, de la forme $[0, a]$ ou bien $[0, a[$, ou bien $[0, +\infty[$. Dans le cas où l'ensemble B est majoré, désignons par R la borne supérieure de B, et dans le cas où B n'est pas majoré posons $\mathrm{R} = +\infty$.

Le nombre R, peut être égal à $+\infty$, a la propriété que la série $\sum a_n z^n$ converge dans le disque ouvert $\{z \in \mathbb{C} : |z| < \mathrm{R}\}$ et ne converge pour aucun $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| > \mathrm{R}$. En effet, si $|z| < \mathrm{R}$ il existe $r_0 \in \mathrm{B}$ tel que $|z| < r_0$ (parce que R est *le plus petit* majorant de B) et la série $\sum a_n z^n$ est convergente d'après la proposition 3.1.1 (puisque la suite $(a_n r_0^n)$ est bornée et que $|z| < r_0$). Si $|z| > \mathrm{R}$, on en déduit que $|z| \notin \mathrm{B}$ (parce que R est un majorant de B) donc la série ne peut pas converger au point z puisque $|a_n||z|^n$ n'est pas bornée.

Définition 3.1.1. Le nombre R ainsi déterminé (éventuellement égal à $+\infty$) s'appelle le *rayon de convergence* de la série entière $\sum a_n z^n$. Le disque $\{z \in \mathbb{C} : |z| < \mathrm{R}\}$ s'appelle *disque (ouvert) de convergence*. Dans le cas où $\mathrm{R} < +\infty$, le cercle $\{z \in \mathbb{C} : |z| = \mathrm{R}\}$ s'appelle *cercle de convergence* de la série entière.

On ne sait pas en général si la série converge pour les points du cercle de convergence. Elle peut converger pour certains points de ce cercle, ou bien pour tous les points du cercle ou encore pour aucun point du cercle de convergence.

Exemples

1. La série géométrique $\sum z^n$ est une série entière de rayon de convergence $\mathrm{R} = 1$: elle est en effet convergente pour tout nombre complexe z de module < 1, et divergente pour tout nombre complexe z tel que $|z| \geq 1$. C'est un exemple où il y a divergence pour tout point du cercle de convergence.

2. La série entière $\sum_{n \geq 1} z^n/n$ converge pour $z = -1$, et elle diverge pour $z = 1$. Par conséquent, son rayon de convergence est $\mathrm{R} = 1$. Sur le cercle $|z| = 1$ il y a en fait convergence pour tout $z = \mathrm{e}^{ix} \neq 1$ (où $x \in \mathbb{R}$). On a vu en effet au chapitre 1 (en utilisant la transformation d'Abel) que la série

$$\sum_{n \geq 1} \frac{\mathrm{e}^{inx}}{n}$$

est convergente pour tout x réel différent des nombres $2k\pi$.

3. La série entière $\sum_{n \geq 1} z^n/n^2$ est de rayon de convergence $\mathrm{R} = 1$, et elle converge pour tout point z du cercle de convergence. La série entière $\sum n z^n$ est de rayon de convergence $\mathrm{R} = 1$, et elle ne converge pour aucun point z du cercle de convergence.

Résumé

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière ; il existe un nombre fini ou infini $\mathrm{R} \in [0, +\infty]$, appelé rayon de convergence *de la série entière, tel que*

– pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| > \mathrm{R}$, la série $\sum a_n z^n$ diverge

– pour tout r tel que $0 \leq r < \mathrm{R}$, la série numérique $\sum |a_n| r^n$ converge, donc la série $\sum a_n z^n$ converge normalement dans le disque $\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq r\}$. La somme de la série est une fonction continue dans le disque ouvert de convergence $\{z \in \mathbb{C} : |z| < \mathrm{R}\}$.

Rappelons que le comportement sur le cercle de rayon R dépend de l'exemple considéré. Dans le cas $\mathrm{R} = 0$, la série entière converge pour $z = 0$ et seulement pour $z = 0$.

Calcul du rayon de convergence

Lemme. *Considérons une série entière $\sum a_n z^n$, et désignons par R son rayon de convergence.*

– Si on a $r > \mathrm{R}$, il existe une infinité d'indices n tels que $r\,|a_n|^{1/n} > 1$. Autrement dit, si $r \geq 0$ et si on a $r\,|a_n|^{1/n} \leq 1$ pour tout n assez grand, alors $r \leq \mathrm{R}$.

– Si on a $0 \leq r < \mathrm{R}$, on a $r\,|a_n|^{1/n} < 1$ pour tout n assez grand.

– On a $\mathrm{R} > 0$ si et seulement si la suite $(|a_n|^{1/n})$ (définie pour $n \geq 1$) est bornée.

Démonstration. Supposons $r > \mathrm{R}$; on sait alors que $r \notin \mathrm{B}$, donc la suite $(a_n\, r^n)$ n'est pas bornée ; il existe alors par exemple une infinité d'indices n tels que $|a_n|\, r^n \geq 2$ et pour ces indices on a $r\,|a_n|^{1/n} \geq 2^{1/n} > 1$.

Soit $0 \leq r < \mathrm{R}$; on sait que la série $\sum a_n r^n$ est convergente, par conséquent on a $\lim_{n \to +\infty} a_n r^n = 0$. Il existe donc un entier N tel que pour $n \geq \mathrm{N}$ on ait $|a_n r^n| < 1$. Ainsi, pour tout $n \geq \mathrm{N}$, on a

$$|a_n|^{1/n}\, r < 1.$$

On voit en particulier que si $\mathrm{R} > 0$, la suite $(|a_n|^{1/n})$ est bornée (prendre $r = \mathrm{R}/2$ dans l'argument précédent). Inversement, si la suite $(|a_n|^{1/n})$ est bornée par M et si on prend $r = 1/\mathrm{M} > 0$ on aura $r\,|a_n|^{1/n} \leq 1$ pour tout n, donc la suite $(a_n\, r^n)$ est bornée par 1, donc $r \in \mathrm{B}$ et $\mathrm{R} \geq r > 0$. On a ainsi montré que le rayon de convergence R est nul si et seulement si la suite $(|a_n|^{1/n})$ n'est pas bornée.

Interprétons le lemme précédent avec la notion de limite supérieure, d'abord dans le cas $0 < \mathrm{R} < +\infty$. Soit $y > 1/\mathrm{R}$; alors $r = 1/y < \mathrm{R}$, donc $r\,|a_n|^{1/n} < 1$ pour n assez grand, donc il n'y a qu'un nombre fini d'indices n tels que $y < |a_n|^{1/n}$. Inversement, soit x tel que $0 < x < 1/\mathrm{R}$; alors $r = 1/x > \mathrm{R}$, donc d'après la première partie du lemme il existe une infinité d'indices n tels que $r\,|a_n|^{1/n} > 1$, ou encore d'indices n tels que $x < |a_n|^{1/n}$. On voit donc que $1/\mathrm{R}$ est le point de coupure qui définit la limite supérieure de la suite $(|a_n|^{1/n})$. On a donc

$$\frac{1}{\mathrm{R}} = \limsup_n |a_n|^{1/n}.$$

Etant donnée une suite (x_n) non majorée de nombres réels, on conviendra de poser $\limsup_n x_n = +\infty$. On a vu que $\mathrm{R} = 0$ si et seulement si la suite $|a_n|^{1/n}$ n'est pas bornée ; si on interprète $1/\mathrm{R} = 1/0 = +\infty$, on aura encore $1/\mathrm{R} = \limsup_n |a_n|^{1/n}$ dans ce cas. Finalement, si $\mathrm{R} = +\infty$ on voit que $\limsup_n |a_n|^{1/n} = 0 = 1/(+\infty)$. On obtient donc :

Proposition 3.1.2. *Le rayon de convergence R de la série entière $\sum a_n z^n$ est déterminé par la formule*

$$\frac{1}{\mathrm{R}} = \limsup_n |a_n|^{1/n}.$$

Si la limite supérieure ci-dessus est $+\infty$, le rayon est nul. Si la limite supérieure est nulle, $\mathrm{R} = +\infty$.

Détermination pratique du rayon de convergence

Corollaire 3.1.1. *Si la limite $\ell = \lim_n |a_n|^{1/n}$ existe (limite finie ou infinie), le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$ est égal à $1/\ell$ (avec les conventions naturelles $1/0 = +\infty$ et $1/(+\infty) = 0$).*

Exemples. Considérons les deux séries $\sum 2^n z^n$, $\sum n z^n$: on trouve $\ell = 2$ pour le premier exemple et $\ell = 1$ pour le second. Les rayons de convergence sont donc $1/2$ pour le premier exemple et 1 pour le second.

Proposition 3.1.3. *Soit $\sum a_n z^n$ une série entière ; on suppose qu'il existe deux réels $\rho_1, \rho_2 > 0$ tels que l'on ait pour tout n assez grand*

$$\rho_1 \leq \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \leq \rho_2$$

Alors

$$\frac{1}{\rho_2} \leq \mathrm{R} \leq \frac{1}{\rho_1}.$$

En particulier, si $\lim_{n \to +\infty} |a_{n+1}/a_n| = \ell$, le rayon de convergence de la série entière est égal à $\mathrm{R} = 1/\ell$ (avec les mêmes conventions que précédemment).

Démonstration. On aura pour $n \geq n_0$

$$|a_{n_0}|\, \rho_1^{n-n_0} \leq |a_n| \leq |a_{n_0}|\, \rho_2^{n-n_0},$$

donc $|a_n|\, \rho_1^{-n} \geq |a_{n_0}|\, \rho_1^{-n_0} > 0$ pour tout $n \geq n_0$; ainsi la suite $(a_n\, \rho_1^{-n})$ ne tend pas vers 0, donc la série $\sum a_n\, \rho_1^{-n}$ diverge et on en déduit que $\mathrm{R} \leq \rho_1^{-1}$. De l'autre côté, la suite $(a_n\, \rho_2^{-n})$ est bornée, donc $\rho_2^{-1} \leq \mathrm{R}$.

Exemples

1. Pour la série exponentielle $\sum z^n/n!$ on voit que $a_{n+1}/a_n \to 0$, ce qui confirme que le rayon de convergence est égal à $+\infty$.
2. La série entière $\sum n z^n$ a pour rayon de convergence 1. En effet, on a

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{n+1}{n} = 1.$$

Bien souvent, le rapport a_{n+1}/a_n n'a pas de sens, et il est alors nécessaire de revenir à la définition du rayon de convergence et d'encadrer le terme $|a_n|\, r^n$ par des termes généraux de séries dont on connaît déjà la nature.

Exercice. Si $n^{-1} \leq |a_n| \leq n$ pour tout entier $n \geq 1$, montrer que la série entière $\sum a_n z^n$ a pour rayon de convergence $\mathrm{R} = 1$.

3.2. Opérations sur les séries entières

Commençons par un rappel sur les séries numériques. Etant données deux séries numériques $\sum u_n$ et $\sum v_n$, on considère la série produit $\sum w_n$ dont le terme général est $w_n = \sum_{i=0}^{n} u_i\, v_{n-i}$.

Rappel. *Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries numériques absolument convergentes ; la série produit $\sum w_n$, de terme général $w_n = \sum_{i=0}^{n} u_i\, v_{n-i}$ est absolument convergente. De plus, si on pose $\mathrm{U} = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ et $\mathrm{V} = \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$ on a*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \mathrm{UV}.$$

On peut appliquer ceci aux séries entières, dont on sait qu'elles sont absolument convergentes à l'intérieur du disque de convergence. On remarque d'abord que la série produit $\sum w_n$ de deux séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ est encore une série entière,

$$w_n = (a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_n b_0)\, z^n.$$

Proposition 3.2.1. *Soient $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières de rayon de convergence R et R' respectivement ; posons $c_n = \sum_{i=0}^{n} a_i\, b_{n-i}$. Alors les séries entières*

$$\sum (a_n + b_n) z^n, \quad \sum c_n z^n$$

sont de rayon de convergence $\geq \min(\mathrm{R}, \mathrm{R}')$. De plus, si pour tout nombre complexe z de module $|z| < \min(\mathrm{R}, \mathrm{R}')$ on pose $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ et $g(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n$ on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (a_n + b_n) z^n = f(z) + g(z), \quad \sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n = f(z) g(z).$$

Remarque. Il est possible que le rayon de la somme ou celui du produit soit strictement plus grand que $\min(\mathrm{R}, \mathrm{R}')$. Pour donner un exemple dans le cas de la somme il suffit de prendre $a_n = -b_n = 1$ pour tout n ; alors $\mathrm{R} = \mathrm{R}' = 1$, mais la série somme est la série nulle, de rayon de convergence $+\infty$. Pour un exemple avec le produit, prenons encore $a_n = 1$ pour tout n, mais $g(z) = 1 - z$. Alors $\mathrm{R} = 1$, $f(z) = (1 - z)^{-1}$ mais la série produit se réduit au premier terme $c_0 = 1$, et son rayon de convergence est $+\infty$.

Dérivation des séries entières

Etant donnée une série entière $\sum a_n z^n$, la *série dérivée* est une nouvelle série entière définie par

$$\sum_{n \geq 1} n a_n z^{n-1}.$$

Proposition 3.2.2. *La série entière $\sum a_n z^n$ et sa série dérivée $\sum_{n \geq 1} n a_n z^{n-1}$ ont même rayon de convergence.*

Démonstration. Posons $b_n = n a_n$; on rappelle que $n^{1/n}$ tend vers 1 lorsque n tend vers $+\infty$, ce qui implique que les suites $(|a_n|^{1/n})$ et $(|b_n|^{1/n}) = (n^{1/n} |a_n|^{1/n})$ sont équivalentes. Il en résulte que

$$\limsup_n |a_n|^{1/n} = \limsup_n |b_n|^{1/n},$$

ce qui donne l'égalité des rayons de convergence des séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum n a_n z^n$. Le résultat voulu en découle.

Remarque. En utilisant la transformation d'Abel, on montre que si la série $\sum_{n\geq 1} n a_n z^{n-1}$ converge au point z, alors la série $\sum a_n z^n$ converge *au même* point z.

Proposition 3.2.3. *Soit* R *le rayon de convergence de la série entière* $\sum a_n z^n$ *; sur l'intervalle* $]-\mathrm{R}, \mathrm{R}[$ *la fonction* f *définie par*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

est dérivable, et de dérivée

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}.$$

Démonstration. Il suffit de constater que sur tout intervalle $]-r, r[$, avec $0 \leq r < \mathrm{R}$ la série dérivée $\sum_{n\geq 1} n a_n x^{n-1}$ est normalement convergente, et la série $\sum a_n x^n$ convergente ; d'après le théorème 2.3.2 de dérivation des séries de fonctions, la fonction f sera dérivable sur $]-r, r[$, de dérivée donnée par la somme de la série dérivée. Puisque ces intervalles recouvrent $]-\mathrm{R}, \mathrm{R}[$ la fonction f sera dérivable sur $]-\mathrm{R}, \mathrm{R}[$.

Calcul des dérivées successives

Calculons les dérivées successives de la somme $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ d'une série entière de rayon de convergence $\mathrm{R} > 0$; pour tout entier $k \geq 1$, on aura en itérant l'application de la proposition précédente

$$\forall x \in]-\mathrm{R}, \mathrm{R}[, \quad f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{+\infty} n(n-1)\dots(n-k+1)\, a_n x^{n-k}.$$

On en déduit

Corollaire 3.2.1. *Soit* R *le rayon de convergence de la série entière* $\sum a_n z^n$ *; la fonction* f *définie sur l'intervalle* $]-\mathrm{R}, \mathrm{R}[$ *par* $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ *est indéfiniment dérivable, et on a pour tout entier* $n \geq 0$

$$f^{(n)}(0) = n!\, a_n.$$

Exemple. Si on se donne $r > 0$ et $|x| < r$,

$$g(x) = 1 + \frac{x}{r} + \dots + \frac{x^n}{r^n} + \dots = \frac{r}{r-x},$$

et pour tout $k \geq 0$,

$$g^{(k)}(x) = \frac{r\, k!}{(r-x)^{k+1}} = \sum_{n=k}^{+\infty} n(n-1)\dots(n-k+1)\frac{x^{n-k}}{r^n}\cdot$$

Application : prolongement à $\mathbb{C}$ d'égalités obtenues dans le cas réel. Supposons que $f_1(z)$ et $f_2(z)$ soient deux fonctions sommes de séries entières de rayon de convergence $\geq \mathrm{R} > 0$, et que l'on ait pu démontrer que $f(x) = g(x)$ pour tout $x \in]-\mathrm{R}, \mathrm{R}[$. Il en résulte alors que $f(z) = g(z)$ pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < \mathrm{R}$. En effet, l'égalité de f et g sur l'intervalle $]-\mathrm{R}, \mathrm{R}[$ implique l'égalité de toutes les fonctions dérivées $f_1^{(k)}$ et $f_2^{(k)}$ sur le même intervalle, donc l'égalité de tous les coefficients des deux séries entières, obtenus à partir des valeurs $f_1^{(k)}(0) = f_2^{(k)}(0)$.

Pour donner un tout petit exemple, la formule ci-dessus donne le développement de la fonction $x \to (1-x)^{-k}$, obtenu par dérivation. Mais on sait aussi que $(1-z)^{-k}$ se représente par une série entière pour tout $|z| < 1$, en faisant k fois le produit de la série de $(1-z)^{-1}$ par elle-même. Cette deuxième méthode est plus compliquée, mais la remarque précédente nous garantit que les coefficients trouvés seront les mêmes.

Proposition 3.2.4. *Soit $g(z) = \sum b_n z^n$ une série entière à coefficients $b_n \geq 0$, de rayon de convergence $\mathrm{R} > 0$ et soit d'autre part $f(z) = \sum a_n z^n$ une série entière telle que $|a_n| \leq b_n$ pour tout $n \geq 0$. On a alors pour tout $k \geq 0$ et pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < \mathrm{R}$*

$$|f^{(k)}(z)| \leq g^{(k)}(|z|).$$

Démonstration. Prenons d'abord $k = 0$. On aura

$$|f(z)| = \Big|\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n\Big| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|\,|z|^n \leq \sum_{n=0}^{+\infty} b_n |z|^n = g(|z|).$$

On remarque ensuite que les séries dérivées $f'(z) = \sum n a_n z^{n-1}$ et $g'(z) = \sum n b_n z^{n-1}$ vérifient la même hypothèse de majoration des coefficients, puisqu'on a encore $|n a_n| \leq n b_n$ pour tout $n \geq 1$, et ainsi de suite pour toutes les dérivées successives, ce qui donne le résultat.

On va en déduire une majoration des dérivées de la somme d'une série entière $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, de rayon de convergence $\mathrm{R} > 0$. Si on se donne r tel que $0 < r < \mathrm{R}$, on sait que la suite $(a_n r^n)$ est bornée, et il en résulte qu'il existe une constante M telle que pour tout $n \geq 0$ on ait $|a_n| \leq \mathrm{M}/r^n$, donc on pourra appliquer le résultat précédent avec la série entière à coefficients positifs

$$g(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{M}\, r^{-n} z^n = \frac{\mathrm{M}}{1 - z/r} = \frac{\mathrm{M}r}{r - z}\cdot$$

Il en résulte pour tout $x \in]-r, r[$

$$|f^{(k)}(x)| \leq g^{(k)}(|x|) = k!\,\frac{\mathrm{M}r}{(r - |x|)^{k+1}}\cdot$$

On retiendra le résultat sous la forme suivante : si $f(x) = \sum a_n x^n$ pour tout $x \in]-\mathrm{R}, \mathrm{R}[$, alors pour tout r tel que $0 < r < \mathrm{R}$ il existe M' (dépendant de r) tel que pour tout $k \geq 0$ et tout x tel que $|x| < r$ on ait

$$\frac{|f^{(k)}(x)|}{k!} \leq \frac{\mathrm{M}'}{(r - |x|)^{k+1}}\cdot$$

Ces arguments montrent que les dérivées des fonctions définies par une série entière vérifient des inégalités particulières. Les résultats de ce paragraphe doivent servir à expliquer les conditions que nous donnerons plus loin pour garantir qu'une fonction f soit développable en série entière (proposition 3.3.1).

Dérivée complexe

Soit $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ la somme d'une série entière de rayon de convergence $\mathrm{R} > 0$; si $|z| + |h| \leq r < \mathrm{R}$, on a la majoration

$$\Big|\frac{(z+h)^n - z^n}{h}\Big| \leq n\, r^{n-1},$$

qui permet de montrer que

$$f'(z) = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h \in \mathbb{C} \setminus \{0\}}} \frac{f(z+h) - f(z)}{h}$$

existe, et est égale à la somme de la série dérivée.

Intégration des séries entières

Proposition 3.2.5. *La série entière* $\sum a_n z^n$ *et la série entière*

$$a_0 z + \frac{a_1}{2} z^2 + \frac{a_2}{3} z^3 + \cdots + \frac{a_n}{n+1} z^{n+1} + \cdots$$

ont même rayon de convergence R. *Si* $\mathrm{R} > 0$, *la fonction* f *définie sur l'intervalle* $]-\mathrm{R}, \mathrm{R}[$ *par la formule*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

admet pour primitive nulle en zéro la fonction

$$\mathrm{F}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}.$$

Démonstration. La série donnée $\sum a_n z^n$ est la série dérivée de la deuxième série. Toutes les affirmations découlent donc du théorème sur la dérivation.

Exemples

La série entière $\sum (-1)^n x^n$ a pour rayon de convergence 1 et pour $|x| < 1$ on a

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n.$$

La série entière $\sum (-1)^n x^{n+1}/(n+1)$ a aussi 1 pour rayon de convergence, et sa somme est la primitive de la fonction $x \mapsto 1/(1+x)$ qui s'annule pour $x = 0$. Ainsi, sur $]-1, 1[$ on a

$$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

De même, on a pour $|x| < 1$

$$\operatorname{Arctan} x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

Exponentielle complexe : rappels

On a posé pour tout $z \in \mathbb{C}$

$$\mathrm{e}^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

et on a vu que pour tous u et $v \in \mathbb{C}$, on a $\mathrm{e}^{u+v} = \mathrm{e}^u \, \mathrm{e}^v$.

Proposition 3.2.6. *Soit z un nombre complexe quelconque ;*

– le nombre e^z est toujours non nul, et son inverse est e^{-z} ;

– si $z = x + iy$, avec x et y réels, on a $\mathrm{e}^z = \mathrm{e}^x(\cos y + i \sin y)$. En particulier, $|\,\mathrm{e}^z\,| = \mathrm{e}^x$.

– Soit Z un nombre complexe non nul, de module ρ, d'argument θ, avec $0 \leq \theta < 2\pi$; alors l'équation

$$\mathrm{e}^z = \mathrm{Z}$$

a une infinité de solutions, données par $z = \ln \rho + i\theta + 2ik\pi$, avec k entier relatif quelconque.

Démonstration. Les deux premiers points sont des rappels ; pour vérifier le troisième, notons que le nombre complexe Z s'écrit $\mathrm{Z} = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)$, de sorte que l'équation ci-dessus est équivalente au système d'équations

$$\begin{cases} \mathrm{e}^x = \rho \\ \cos y = \cos\theta \ , \ \sin y = \sin\theta \end{cases}$$

ce qui équivaut à $x = \ln\rho$ et $y = \theta + 2k\pi$. D'où le résultat.

Exercice Montrer que la fonction complexe définie sur $\mathbb{R}$ par $t \to \mathrm{e}^{tz}$ est dérivable, de dérivée égale à $z\,\mathrm{e}^{tz}$.

Logarithme complexe

La série entière

$$z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{z^n}{n} + \cdots$$

a un rayon de convergence égal à 1, et on sait que pour $z = x$ réel, $|x| < 1$, sa somme est égale à $\ln(1 + x)$. Posons pour tout nombre complexe z tel que $|z| < 1$

$$\ln(1 + z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{z^n}{n} + \cdots$$

Nous allons calculer cette fonction. On suppose donc $|z| < 1$, et on pose $u = 1 + z = r\,\mathrm{e}^{i\theta}$. On peut choisir un argument θ tel que $|\theta| < \pi/2$ (faire un petit dessin ou bien noter que $\mathrm{Re}\,u > 0$). Posons $d = |z| = |u - 1| < 1$ et posons $u(t) = r\,\mathrm{e}^{it\theta}$ pour tout $t \in [0, 1]$. On a $u(0) = r$ et $u(1) = u$, et pour tout $t \in [0, 1]$,

$$|u(t) - 1|^2 = r^2 + 1 - 2r\cos(t\theta) \leq r^2 + 1 - 2r\cos(\theta) = |u - 1|^2 = d^2.$$

Cela montre que $|u(t) - 1| \leq d < 1$ pour tout $t \in [0, 1]$, ce qui permet de calculer, en posant $z(t) = u(t) - 1$

$$f(t) = \ln(u(t)) = \ln(1 + (u(t) - 1)) = \ln(1 + z(t))$$

au moyen de la série précédente,

$$f(t) = z(t) - \frac{z(t)^2}{2} + \frac{z(t)^3}{3} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{z(t)^n}{n} + \cdots$$

On obtient une série de fonctions $\sum u_n()$, où $u_0 = 0$ et $u_n(t) = (-1)^{n-1}z(t)^n/n$ pour tout $n \geq 1$. Nous allons montrer que la série dérivée de cette série de fonctions de la variable t est normalement convergente sur $[0, 1]$. La série dérivée est donnée par

$$z'(t) - z(t)z'(t) + z(t)^2 z'(t) + \cdots + (-1)^{n-1}z(t)^{n-1}z'(t) + \cdots = \frac{z'(t)}{1 + z(t)}.$$

On remarque que $z'(t) = ri\theta\,\mathrm{e}^{it\theta}$, donc $|z'(t)| = r|\theta|$, et on a pour tout $t \in [0, 1]$

$$|u_n'(t)| = r|\theta|\,|z(t)|^{n-1} \leq r|\theta|\,d^{n-1} = v_n,$$

ce qui nous donne une série majorante convergente $\sum v_n$ pour la série de fonctions $\sum u_n'()$ (parce que $d < 1$). Il en résulte que la somme de la série dérivée est bien la dérivée de la fonction f,

$$f'(t) = \frac{z'(t)}{1+z(t)} = \frac{ri\theta\,\mathrm{e}^{it\theta}}{r\,\mathrm{e}^{it\theta}} = i\theta.$$

On voit donc que la dérivée de f est constante, égale à $i\theta$. Il en résulte que

$$\ln(r\,\mathrm{e}^{i\theta}) = \ln(u) = f(1) = f(0) + i\theta = \ln(r) + i\theta.$$

Cela suggère une extension de la définition de $\ln(z)$ au moyen de la formule ci-dessus,

$$\ln(z) = \ln|z| + i\,\mathrm{Arg}\,z,$$

où on aura choisi pour $z \notin]-\infty, 0]$ l'argument tel que $-\pi < \mathrm{Arg}\,z < \pi$. A partir de cette formule on voit que $\mathrm{e}^{\ln(z)} = z$ et $\ln(\mathrm{e}^z) = z + 2ik\pi$ lorsque tous les termes sont définis.

Séries entières et développements limités (en abrégé : DL)

On a vu que pour tout x tel que $|x| < 1$

$$-\ln(1-x) = x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n} + \cdots$$

Cette information a un sens pour tout x fixé tel que $|x| < 1$, par exemple

$$-\ln(0,9) = \frac{1}{10} + \cdots + \frac{1}{n\,10^n} + \cdots$$

D'un autre côté, l'information DL est par exemple du type suivant

$$-\ln(1-x) = x + \frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon(x).$$

Cette information de DL n'a pas de sens intéressant pour une valeur fixée de x, par exemple si $x = 0,9$ écrire

$$-\ln(0,9) = \frac{1}{10} + \frac{1}{200} + \frac{1}{100}\,\varepsilon(1/10)$$

n'a aucun intérêt, car sous cette forme on ne sait rien de $\varepsilon(1/10)$. L'information donnée par l'écriture DL est que $\lim_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0$. Une information de DL est donc une information de type "global", ou bien de type "fonction", par opposition à une information ponctuelle. C'est ce qui rend son utilisation un petit peu délicate.

Classes $\mathrm{O}_a(f)$ (lire "Grand O")

Tout d'abord, un peu de vocabulaire : on dit que V est un *voisinage* d'un point $a \in \mathbb{R}$ si $\mathrm{V} \subset \mathbb{R}$ contient un intervalle ouvert de la forme $]a-\eta, a+\eta[$, pour un certain $\eta > 0$. On appelle *voisinage épointé* de ce même point a un ensemble obtenu à partir d'un voisinage de a en enlevant le point a, ce qui donne un ensemble de la forme $\mathrm{V} \setminus \{a\}$. Soit $a \in \mathbb{R}$ fixé ; soit f une fonction définie sur un voisinage épointé du point a ; on dit qu'une fonction g définie sur un voisinage épointé de a appartient à la classe $\mathrm{O}_a(f)$ s'il existe $\varepsilon > 0$ et une constante M tels que

$$\forall x \in]a-\varepsilon, a+\varepsilon[,\ \big(x \neq a \Rightarrow |g(x)| \leq \mathrm{M}|f(x)|\big).$$

En termes un peu trop rapides, cela signifie que g/f est bornée au voisinage de a.

Exemple. Posons $f(x) = 1$ pour tout x ; on écrit alors $\mathrm{O}_a(1)$ plutôt que $\mathrm{O}_a(f)$. Si $g(x) = 1/x$, on aura $g \notin \mathrm{O}_0(1)$, mais $g \in \mathrm{O}_1(1)$ par exemple.

Propriétés.

1. $f \in \mathrm{O}_a(f)$
2. $\mathrm{O}_a(f) + \mathrm{O}_a(f) \subset \mathrm{O}_a(f)$
3. $\mathrm{O}_a(f_1) \,.\, \mathrm{O}_a(f_2) \subset \mathrm{O}_a(f_1 f_2)$
4. $g \in \mathrm{O}_a(f)$ implique que $\mathrm{O}_a(g) \subset \mathrm{O}_a(f)$
5. Si $\lim_{x \to a} f(x)$ existe (dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), alors $f \in \mathrm{O}_a(1)$
6. $f \sim_a g$ entraîne $\mathrm{O}_a(f) = \mathrm{O}_a(g)$.

On peut aussi définir des classes $\mathrm{O}_{+\infty}(f)$ selon le même principe.

On va s'intéresser tout particulièrement pour les DL au cas où $a = 0$, et où les fonctions f sont les fonctions monômes $p_0, p_1, \ldots, p_n, \ldots$ définies sur $\mathbb{R}$ par $p_n(x) = x^n$. On notera en fait en suivant la tradition

$$\mathrm{O}(x^n) = \mathrm{O}_0(p_n).$$

On a les règles suivantes

$$\ldots \subset \mathrm{O}(x^{n+1}) \subset \mathrm{O}(x^n) \subset \ldots \subset \mathrm{O}(x) \subset \mathrm{O}(1)$$

Pour tous entiers $m, n \geq 0$,

$$\mathrm{O}(x^m) \,.\, \mathrm{O}(x^n) \subset \mathrm{O}(x^{m+n}).$$

Un DL avec notations O() est par exemple une expression de la forme

$$x + x^2 + \mathrm{O}(x^3).$$

Il s'agit d'une expression symbolique où le dernier terme $\mathrm{O}(x^3)$ représente un élément indéterminé g de la classe $\mathrm{O}(x^3)$. Il faut savoir simplifier les expressions obtenues après divers calculs, par exemple le carré de l'expression précédente sera

$$x^2 + 2x^3 + x^4 + 2x\mathrm{O}(x^3) + 2x^2\mathrm{O}(x^3) + \mathrm{O}(x^3)\mathrm{O}(x^3)$$

qui se réduit simplement à

$$x^2 + 2x^3 + \mathrm{O}(x^4).$$

Proposition 3.2.7. *Si $r > 0$ et si $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ pour tout $x \in]-r, r[$, on a pour tout $n \geq 0$*

$$f - (a_0 p_0 + \cdots + a_n p_n) \in \mathrm{O}_0(p_{n+1})$$

ce qu'on écrira simplement

$$f(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + \mathrm{O}(x^{n+1}).$$

La fonction f admet donc des développements limités en 0 de tous les ordres.

Démonstration. Si on choisit $0 < t < r$ on est sûr que la suite $(a_n t^n)$ est bornée, disons par M. On a alors pour $|x| < t$

$$|f(x) - (a_0 + \cdots + a_n x^n)| \leq \mathrm{M} \sum_{k>n} t^{-k} x^k = x^{n+1} \frac{\mathrm{M} t^{-n}}{t - x},$$

ce qui donne le résultat.

3.3. Séries de Taylor

On a vu qu'une série entière de rayon de convergence R est indéfiniment dérivable sur l'intervalle $]-\mathrm{R}, \mathrm{R}[$. On étudie ici le problème réciproque. Soient $\mathrm{I} =]-r, r[$ un intervalle centré en 0 et de rayon r, et f une fonction indéfiniment dérivable, réelle ou complexe, définie sur I.

Question 1 : existe-t-il une série entière $\sum a_n z^n$, de rayon de convergence $\mathrm{R} \geq r$ telle que pour tout $x \in \mathrm{I}$ on ait

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \,?$$

Question 2 : si cette série entière existe, est-elle unique ?

La réponse à la question 2 est immédiate : si cette série entière existe, on doit avoir d'après le corollaire 3.2.1

$$\forall n \geq 0, \quad a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!},$$

ce qui donne l'unicité. Moyennant une translation, on pourra aussi étudier le problème plus général suivant : soient $\mathrm{I} =]x_0 - r, x_0 + r[$ un intervalle centré en x_0 et de rayon r, et f une fonction indéfiniment dérivable, réelle ou complexe, définie sur I. Existe-t-il une série entière $\sum a_n z^n$, de rayon de convergence $\mathrm{R} \geq r$ telle que pour tout $x \in \mathrm{I}$ on ait

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (x - x_0)^n \,?$$

Comme avant, l'unicité d'une telle série est immédiate (par un petit changement de variable pour ramener l'étude en x_0 à une étude en 0, on voit que a_n est nécessairement égal à $f^{(n)}(x_0)/(n!)$ pour tout entier $n \geq 0$).

Définition 3.3.1. Etant donnée une fonction f à valeurs complexes, définie et indéfiniment dérivable sur un intervalle ouvert $\mathrm{J} \subset \mathbb{R}$, et étant donné un point x_0 de J, la série de fonctions de la variable x

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$$

s'appelle la *série de Taylor de f au point x_0* (ou série de Mac-Laurin de f, dans le cas où $x_0 = 0$).

Supposons que f soit une fonction indéfiniment dérivable définie sur l'intervalle $\mathrm{I} =]x_0 - r, x_0 + r[$. Pour répondre à nos questions, il faut déterminer

– si la série de Taylor de f au point x_0 converge pour tout $x \in \mathrm{I}$;

– si la somme de la série de Taylor est égale à $f(x)$ pour tout $x \in \mathrm{I}$.

Si la réponse est *oui* pour ces deux questions, on dit que la fonction f est *développable en série entière sur* I. Le changement de variable $h = x - x_0$ met la série de Taylor de f sous forme de série entière de la variable h. La fonction f est donc développable en série entière sur l'intervalle $\mathrm{I} =]x_0 - r, x_0 + r[$ si on a pour tout h réel tel que $|h| < r$ l'égalité

$$f(x_0 + h) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} h^n.$$

Il peut sembler peu naturel de ne s'intéresser dans la définition précédente qu'au développement de Taylor par rapport au point central x_0 de l'intervalle de définition $]x_0-r, x_0+r[$ de la fonction f. On verra en fait que si f vérifie la définition précédente sur l'intervalle $]x_0-r, x_0+r[$, alors elle est aussi développable sur tout intervalle plus petit $]x_1-\rho, x_1+\rho[\subset]x_0-r, x_0+r[$ (et on s'intéresse donc cette fois-ci au développement de Taylor au point x_1).

En général, le rayon de convergence R de la série de Taylor de f en x_0 d'une fonction f de classe C^∞ définie sur un intervalle $\mathrm{I}=]x_0-r, x_0+r[$ n'a aucune raison d'être supérieur ou égal à r. Par exemple, la fonction réelle définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x)=\frac{1}{1+x^2}$$

est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$. Mais la série de Mac-Laurin de la fonction f à l'origine, égale à $\sum(-1)^n x^{2n}$ est de rayon de convergence 1, par conséquent cette série ne peut pas représenter la fonction f pour les points $x>1$. Il peut même arriver que ce rayon de convergence soit nul. On peut en effet démontrer (théorème d'Emile Borel) qu'étant donnée une suite arbitraire de nombres réels (a_n), il existe une fonction indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f^n(0)=a_n$ pour tout $n\geq 0$. Si on prend $a_n=(n!)^2$, on obtient pour cette fonction f une série de Mac-Laurin de rayon de convergence nul.

Il peut aussi arriver que le rayon de convergence soit $\geq r$ sans que la somme de la série de Taylor soit égale à f sur l'intervalle I. Considérons par exemple la fonction réelle f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x)=\begin{cases} \mathrm{e}^{-1/x^2} & \text{si} \quad x\neq 0 \\ 0 \quad \text{si} & x=0. \end{cases}$$

On vérifie sans difficulté que cette fonction est indéfiniment dérivable, et que l'on a $f^{(n)}(0)=0$ pour tout entier $n\geq 0$. Ainsi, la série de Mac-Laurin de f est identiquement nulle : pourtant, quel que soit l'intervalle $]-r, r[$ centré à l'origine, la fonction f n'est pas identiquement nulle sur cet intervalle.

Développement en série entière des fonctions usuelles

Un premier moyen simple d'obtenir des développements de certaines fonctions usuelles est de procéder par intégration à partir d'autres développements connus. On a ainsi obtenu par intégration les développements de Taylor suivants sur $]-1, 1[$

$$\ln(1+x)=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}\,; \quad \operatorname{Arctan} x=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

Le moyen principal pour prouver qu'une fonction est développable en série entière est d'utiliser la formule de Taylor au point x_0, à un ordre arbitraire n :

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\,(x-x_0)^n+\mathrm{R}_n(f,x_0,x),$$

où $\mathrm{R}_n(f,x_0,x)$ s'appelle le *reste de Taylor*. Montrer que $f(x)$ est égal à la somme de la série de Taylor au point x_0 revient exactement à montrer que le reste $\mathrm{R}_n(f,x_0,x)$ tend vers zéro lorsque $n\to+\infty$. Il existe plusieurs façons d'exprimer le reste, qui permettent d'atteindre notre objectif ; l'une d'elles est d'utiliser le *reste de Lagrange* et la majoration qui en résulte. On obtient ainsi par exemple :

Lemme. *Soient* I *un intervalle ouvert et* f *une fonction complexe indéfiniment dérivable sur* I *; on suppose qu'il existe un nombre réel* M *tel que pour tout* $x\in\mathrm{I}$ *et tout entier* $n\geq 0$ *on ait*

$$|f^{(n)}(x)|\leq \mathrm{M}.$$

Pour tous points $x_0, x \in \mathrm{I}$ on a

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n.$$

Démonstration. D'après la formule de Taylor-Lagrange, on a pour tout $x = x_0 + h \in \mathrm{I}$

$$\Big| f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}\, h^k \Big| \leq \mathrm{M} \frac{|h|^{n+1}}{(n+1)!}\,.$$

Le terme de droite tend vers 0 quand $n \to +\infty$. Par suite la fonction f est développable en série entière sur I.

On peut appliquer ce résultat à la fonction e^x sur n'importe quel intervalle borné $\mathrm{I} =]-r, r[$, puisque toutes les dérivées sont égales à la même fonction, et donc majorées sur I par $\mathrm{M} = \mathrm{e}^r$. On peut aussi l'appliquer à $\operatorname{sh} x$ et $\operatorname{ch} x$, pour lesquelles la suite des fonctions dérivées ne comprend que les deux fonctions $\operatorname{sh} x$ et $\operatorname{ch} x$ (on peut aussi obtenir ces deux développements à partir de e^x et e^{-x}). Pour les fonctions $\cos x$, $\sin x$, on obtient le même phénomène, mais on peut prendre tout de suite $\mathrm{I} = \mathbb{R}$ et $\mathrm{M} = 1$. On obtient ainsi que ces fonctions sont développables en séries entières sur $\mathbb{R}$ et que l'on a

$$\mathrm{e}^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}\,; \quad \operatorname{sh} x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\,; \quad \operatorname{ch} x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}\,;$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}\,; \quad \sin x = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\,.$$

Il ne faut pas oublier qu'on peut aussi considérer le développement de Taylor en un point $x_0 \neq 0$, par exemple

$$\sin x = \sin(x_0) + \cos(x_0)(x - x_0) - \sin(x_0)\frac{(x - x_0)^2}{2!} + \cdots$$

Dans le cas de la fonction sin (ou cos) ce développement ne nous apprend en fait rien de bien nouveau : en posant $x = x_0 + h$ on voit en regroupant les termes facteurs de $\sin x_0$ et ceux qui contiennent $\cos x_0$ que la formule ci-dessus revient à la relation trigonométrique $\sin(x_0 + h) = \sin(x_0)\cos h + \cos(x_0)\sin h$, jointe au développement de $\cos h$ et $\sin h$ à l'origine.

On obtient parfois de meilleures estimations du reste de la formule de Taylor en utilisant la formule de Taylor avec *reste intégral*, que nous rappelons.

Lemme. *Soient* I *un intervalle de* $\mathbb{R}$ *contenant* 0 *et* f *une fonction réelle ou complexe indéfiniment dérivable définie sur* I *; pour tout* $x \in \mathrm{I}$,

$$f(x) = f(0) + f'(0)\, x + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}\, x^n + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!}\, f^{(n+1)}(t)\, dt.$$

Démonstration. Posons pour x fixé dans I

$$g(t) = f(t) + (x - t)f'(t) + \cdots + \frac{(x-t)^n}{n!}\, f^{(n)}(t).$$

On voit que

$$g'(t) = \frac{(x-t)^n}{n!}\, f^{(n+1)}(t),$$

et on termine en écrivant

$$g(x) = g(0) + \int_0^x g'(t)\, dt.$$

Nous allons exploiter cette expression du reste du développement de Taylor au point $x_0 = 0$,

$$\mathrm{R}_n(f, 0, x) = \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!}\, f^{(n+1)}(t)\, dt.$$

Proposition 3.3.1. *Soit f une fonction de classe C^∞ sur l'intervalle $\mathrm{I} =]-r, r[$, telle qu'il existe M tel que*

$$\forall n \geq 0,\ \forall t \in \mathrm{I},\quad \Big|\frac{f^{(n)}(t)}{n!}\Big| \leq \frac{\mathrm{M}}{(r-|t|)^{n+1}}.$$

On a alors pour tout $x \in \mathrm{I}$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}\, x^n.$$

Démonstration. Supposons d'abord $x > 0$. Désignons par g la fonction définie sur I par

$$g(t) = \frac{\mathrm{M}}{r-t}.$$

On sait que cette fonction g est développable en série entière sur l'intervalle $]-r, r[$, donc le reste $\mathrm{R}_n(g, 0, x)$ tend vers 0 pour tout x tel que $|x| < r$. On vérifie que pour tout $n \geq 0$ et $t \geq 0$

$$g^{(n)}(t) = n!\, \frac{\mathrm{M}}{(r-t)^{n+1}}$$

qui majore $|f^{(n)}(t)|$ d'après l'hypothèse de la proposition. On écrit alors

$$\Big|f(x) - \Big(\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}\, x^k\Big)\Big| = \Big|\int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!}\, f^{(n+1)}(t)\, dt\Big| \leq \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!}\, |f^{(n+1)}(t)|\, dt \leq$$

$$\leq \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!}\, g^{(n+1)}(t)\, dt = g(x) - \Big(\sum_{k=0}^{n} \frac{g^{(k)}(0)}{k!}\, x^k\Big)$$

qui tend vers zéro lorsque $n \to +\infty$ puisque g est développable en série sur I. Dans le cas $x < 0$ on utilise la fonction $g(t) = \mathrm{M}(r+t)^{-1}$.

Exercice. Donner une autre démonstration du résultat précédent en utilisant, toujours pour x fixé, $0 < x < r$, la série de fonctions de la variable $t \in [0, x]$

$$\varphi(t) = f(x-t) + f'(x-t)t + \cdots + \frac{f^{(n)}(x-t)}{n!}\, t^n + \cdots$$

En posant $u_n(t) = f^{(n)}(x-t)\, t^n/n!$ on constatera que la série des fonctions dérivées $u_n'(t)$ converge normalement sur $[0, x]$ et que la somme de la série dérivée est nulle. Il en résulte que la fonction φ est constante, donc

$$f(x) = \varphi(0) = \varphi(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}\, x^n.$$

On va voir qu'on peut obtenir des informations supplémentaires sans beaucoup se fatiguer. Gardons les hypothèses de la proposition précédente, et fixons un point $x_1 \in]-r, r[$. Posons aussi $\rho = r - |x_1|$. On a alors $]x_1 - \rho, x_1 + \rho[\subset]-r, r[$. Posons $f_1(h) = f(x_1 + h)$ pour $|h| < \rho$. On voit que pour tout entier n

$$\frac{|f_1^{(n)}(h)|}{n!} = \frac{|f^{(n)}(x_1 + h)|}{n!} \leq \frac{\mathrm{M}}{(r - |x_1 + h|)^{n+1}} \leq \frac{\mathrm{M}}{(\rho - |h|)^{n+1}},$$

(car $r - |x_1 + h| \geq r - |x_1| - |h| = \rho - |h|$), ce qui montre que la fonction f_1 vérifie la même hypothèse que f, mais avec r remplacé par ρ. On obtient donc pour $|h| < \rho$

$$f_1(h) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f_1^{(n)}(0)}{n!} h^n$$

ce qui donne par changement de variable, pour tout $x \in]x_1 - \rho, x_1 + \rho[$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(x_1)}{n!} (x - x_1)^n.$$

Fonction de fonction

On est très naturellement amené à se demander si une fonction telle que par exemple

$$x \to \frac{1}{1 - \sin x} \quad \text{ou bien} \quad x \to \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

est développable en série dans un voisinage de 0. Les méthodes présentées précédemment seraient très peu commodes sur un tel problème. La bonne méthode est d'obtenir un résultat général sur les compositions de fonctions. Le résultat qui suit est important ; sa démonstration est facile quand on dispose de la théorie des fonctions holomorphes (qui est hors programme), mais assez délicate avec les outils dont nous disposons. Nous l'indiquons pour les amateurs...

Théorème 3.3.1. *Soit $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ une série entière de rayon $\mathrm{R} > 0$ et $g(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} b_k x^k$ une série entière de rayon $\rho > 0$, telle que*

$$|b_0| = |g(0)| < \mathrm{R}.$$

La fonction $x \to f(g(x))$ est développable en série entière dans un voisinage de 0.

Démonstration. Posons

$$\mathrm{A}_n = |a_n|, \ \mathrm{B}_k = |b_k|, \ \mathrm{F}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{A}_n x^n, \ \mathrm{G}(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathrm{B}_k x^k.$$

On sait que les séries entières de F et G ont les mêmes rayons de convergence que celles de f et g, à savoir R et ρ. D'autre part, pour tout entier $n \geq 1$ les puissances g^n et G^n sont également développables en série entière de rayon $\geq \rho$ d'après le théorème des séries produit. Ecrivons

$$g^n(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} b_{n,k} x^k \ ; \quad \mathrm{G}^n(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathrm{B}_{n,k} x^k.$$

On montre par récurrence sur $n \geq 1$ que $|b_{n,k}| \leq \mathrm{B}_{n,k}$ pour tous n, k ; en effet, on a d'abord $|b_{1,k}| = |b_k| = \mathrm{B}_k = \mathrm{B}_{1,k}$, puis

$$|b_{n+1,k}| = \Big|\sum_{j=0}^{k} b_{n,j} b_{1,k-j}\Big| \leq \sum_{j=0}^{k} \mathrm{B}_{n,j} \mathrm{B}_{1,k-j} = \mathrm{B}_{n+1,k}.$$

Puisque G est continue et que $|\mathrm{G}(0)| = |b_0| < \mathrm{R}$, on peut trouver $r > 0$ tel que $\mathrm{G}(r) < \mathrm{R}$, ce qui garantit que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{A}_n \mathrm{G}^n(r) = \mathrm{F}(\mathrm{G}(r)) < +\infty.$$

On écrit pour $|x| < r$

$$f(g(x)) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \Big(\sum_{k=0}^{+\infty} b_{n,k}\, x^k \Big)$$

et on montre que la série double est absolument convergente,

$$\sum_{n,k=0}^{+\infty} |a_n b_{n,k} x^k| \leq \sum_{n,k=0}^{+\infty} \mathrm{A}_n \mathrm{B}_{n,k} |x|^k \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{A}_n \Big(\sum_{k=0}^{+\infty} \mathrm{B}_{n,k} r^k \Big) = \mathrm{F}(\mathrm{G}(r)) < +\infty.$$

On peut donc intervertir l'ordre des sommations d'après le théorème 1.5.3 ou le corollaire 2.2.3 et écrire

$$f(g(x)) = \sum_{k=0}^{+\infty} \Big(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n b_{n,k} \Big) x^k.$$

Complément

Théorème 3.3.2. *Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $\mathrm{R} > 0$ et considérons lorsque $|z| < \mathrm{R}$ sa somme $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$. Lorsque $|z| < \mathrm{R}$, notons aussi $f^{(n)}(z)$ la somme de la nième série dérivée, pour tout entier $n \geq 0$ (en convenant que $f^{(0)} = f$). Pour tout z_0 tel que $|z_0| < \mathrm{R}$, la série entière de la variable complexe u*

$$\sum \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}\, u^n$$

a un rayon de convergence $\geq \mathrm{R} - |z_0|$ et de plus pour tout $u \in \mathbb{C}$ tel que $|z_0| + |u| < \mathrm{R}$ on a l'identité

$$f(z_0 + u) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}\, u^n.$$

Embryon de démonstration. Il s'agit essentiellement d'un cas particulier du résultat précédent, si on pose $g(x) = z_0 + x$. Si on suit pas à pas la démonstration précédente, on voit qu'on aura ici $\mathrm{G}(x) = |z_0| + x$, et cette démonstration précédente garantit le résultat dès que $\mathrm{G}(|x|) < \mathrm{R}$, ce qui donne bien la condition $|z_0| + |x| < \mathrm{R}$. On retrouve la notion de dérivée complexe. En effet, la majoration du reste d'ordre 1 de la série de Taylor au point z_0 donne pour $|u| < u_0$ une inégalité de la forme

$$|f(z_0 + u) - f(z_0) - f'(z_0)u| \leq \mathrm{M}|u|^2$$

donc

$$f'(z_0) = \lim_{u \to 0, u \in \mathbb{C}^*} \frac{f(z_0 + u) - f(z_0)}{u}.$$

Solutions d'équations différentielles

Le développement en série entière d'une fonction f peut parfois s'obtenir en montrant que la somme de la série de Mac-Laurin satisfait, sur l'intervalle où elle est convergente, une même équation différentielle que f, avec mêmes conditions initiales en un point ; on utilise alors l'unicité des solutions d'équations différentielles satisfaisant aux mêmes conditions initiales pour conclure que la somme de la série entière est bien égale à la fonction f.

Lemme. *Soit a une fonction réelle continue sur un intervalle* $\mathrm{I} \subset \mathbb{R}$ *et soient* $x_0 \in \mathrm{I}$ *et* y_0 *un nombre réel quelconque ; l'équation différentielle*

$$\text{(E)} \qquad y' = a(x)y$$

a une solution et une seule sur l'intervalle I *satisfaisant à la condition initiale* $y(x_0) = y_0$ *; cette solution est donnée par*

$$y(x) = y_0 \exp(\int_{x_0}^{x} a(t)\, dt).$$

Démonstration. Considérons la fonction A définie sur I par la formule $\mathrm{A}(x) = \int_{x_0}^{x} a(t)\, dt$. Alors A est une fonction dérivable sur I de dérivée a, et on voit que $(y_0\, \mathrm{e}^{\mathrm{A}})' = y_0\, a\, \mathrm{e}^{\mathrm{A}}$, donc la fonction $f : x \to y_0\, e^{\mathrm{A}(x)}$ satisfait l'équation (E), et de plus $f(x_0) = y_0$. Inversement, si y est solution de (E) vérifiant la condition initiale $y(x_0) = y_0$, considérons la fonction $x \to z(x) = \mathrm{e}^{-\mathrm{A}(x)}\, y(x)$. On vérifie que

$$z'(x) = \mathrm{e}^{-\mathrm{A}(x)}(y'(x) - a(x)y(x)) = 0$$

ce qui entraîne que z est constante sur l'intervalle I, donc $z(x) = z(x_0) = y_0$ et $y(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{A}(x)}\, z(x) = y_0\, \mathrm{e}^{\mathrm{A}(x)}$.

Développement en série entière de $(1+x)^\alpha$

Soit α un nombre réel ; la fonction $x \to (1+x)^\alpha$ est indéfiniment dérivable sur $]-1, +\infty[$. Elle a pour série de Mac-Laurin

$$1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}\, x^n + \cdots$$

Cette série entière a pour rayon de convergence $\mathrm{R} = 1$ dans le cas $\alpha \notin \mathbb{N}$ (appliquer le critère a_{n+1}/a_n), et pour $\alpha \in \mathbb{N}$ on remarque que ce développement est fini, et qu'on retrouve simplement dans ce cas la formule du binôme. Il est donc raisonnable d'appeler le cas général la *formule du binôme généralisée*. Posons

$$\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}.$$

Ce coefficient du binôme généralisé vérifie encore la formule du triangle de Pascal,

$$\binom{\alpha}{n} + \binom{\alpha}{n+1} = \binom{\alpha+1}{n+1}.$$

Désignons par g la somme de cette série entière sur $]-1, 1[$. Cette fonction est dérivable, et sa dérivée est la somme de la série obtenue en dérivant terme à terme la série ci-dessus :

$$g'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{(n-1)!}\, x^{n-1}$$

et sur $]-1, 1[$ on a $(1+x)g'(x) = \alpha g(x)$ (utiliser la relation du triangle de Pascal généralisée). Puisque $g(0) = 1$ on voit que $g(x) = (1+x)^\alpha$ pour tout $x \in]-1, 1[$.

On peut aussi utiliser les résultats des sections précédentes. Le calcul est plus agréable dans le cas $-1 < \alpha < 0$, qu'on peut écrire

$$f(x) = \frac{1}{(1-x)^\beta}$$

avec $0 < \beta < 1$. Les dérivées successives de f sont ≥ 0, et pour tout x tel que $|x| < 1$ on a

$$f^{(n)}(x) = \beta(\beta+1)\dots(\beta+n-1)(1-x)^{-\beta-n} \leq$$
$$\leq 1(1+1)\dots(1+n-1)(1-|x|)^{-1-n} = n!\,\frac{1}{(1-|x|)^{n+1}},$$

ce qui permet d'appliquer la proposition 3.3.1. On récupère les autres valeurs de β par intégration ou dérivation.

Exercice. Déduire de ce qui précède le développement en série entière de $x \to \operatorname{Arcsin} x$.

Recherche de solutions d'équations différentielles développables en série entière

On traitera seulement un exemple. On considère l'équation différentielle linéaire du second ordre

$$\text{(E)} \qquad y'' + xy' + y = 0$$

Une solution de l'équation différentielle (E) sur un intervalle I est une fonction $x \to y(x)$ deux fois dérivable sur I et telle que pour tout $x \in \mathrm{I}$ on ait

$$y''(x) + xy'(x) + y(x) = 0.$$

Une telle solution est obligatoirement indéfiniment dérivable (petit exercice), et les solutions sur l'intervalle I de cette équation différentielle constituent évidemment un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des fonctions deux fois dérivables sur I. Cherchons si parmi ces solutions il y en a qui sont développables en série entière sur un intervalle $]-r, r[$. Une telle solution s'écrirait

$$y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

On aurait alors par dérivation

$$y'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}\,; \quad y''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$$

de sorte que y est solution de l'équation (E) si et seulement si pour tout $x \in]-r, r[$ on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \big((n+1)(n+2)a_{n+2} + n a_n + a_n\big)\, x^n = 0.$$

Ceci équivaut à dire que $(n+2)a_{n+2} + a_n = 0$ pour tout entier $n \geq 0$, c'est-à-dire à

$$a_{2p} = \frac{(-1)^p}{2^p p!} a_0\,; \quad a_{2p+1} = \frac{(-1)^p}{1.3.5\dots(2p+1)}\, a_1.$$

Toute série entière satisfaisant à ces conditions est déterminée par les nombres a_0 et a_1 qu'on peut choisir arbitraires. Une telle série entière est alors de rayon de convergence infini. On a ainsi prouvé que les solutions de (E) qui sont développables en série entière sur $]-r, r[$ constituent un espace vectoriel de dimension 2 engendré par les solutions

$$y_0(x) = \mathrm{e}^{-x^2/2}\,; \quad y_1(x) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{1.3.5\dots(2p+1)}\, x^{2p+1}.$$

Ainsi, ces solutions se prolongent à $\mathbb{R}$.

Les solutions que nous venons de trouver sont les seules qui sont développables en série entière sur un intervalle $]-r, r[$ centré à l'origine. On peut naturellement se demander s'il n'en

existe pas d'autres, qui ne soient pas développables en série entière sur $]-r, r[$. La proposition qui suit, qui peut s'étendre en fait à toute équation différentielle linéaire du type

$$y'' + a(x)y' + b(x)y = 0$$

montre que ce n'est pas le cas :

Proposition 3.3.2. *Soient a_0 et a_1 deux nombres réels ; l'équation différentielle (E) n'a qu'une seule solution $y :]-r, r[\to \mathbb{R}$ satisfaisant aux conditions initiales $y(0) = a_0$ et $y'(0) = a_1$. Cette solution est donnée par*

$$y(x) = a_0 y_0(x) + a_1 y_1(x).$$

Démonstration. Il est clair que la solution $x \to y(x) = a_0 y_0(x) + a_1 y_1(x)$ satisfait aux conditions demandées. Pour montrer que c'est la seule, nous utilisons la méthode dite traditionnellement *méthode de variation des constantes*, et qui permet de trouver les solutions d'une équation différentielle linéaire du second ordre quand on connaît une de ces solutions.

Toute fonction deux fois dérivable $y :]-r, r[\to \mathbb{R}$ peut s'écrire

$$y(x) = z(x)\ \mathrm{e}^{-x^2/2}$$

où $z :]-r, r[\to \mathbb{R}$ est deux fois dérivable. Dire que y est solution de (E) avec les conditions initiales $y(0) = a_0$, $y'(0) = a_1$ revient à dire que z est solution de l'équation différentielle

$$z'' - xz' = 0$$

et satisfait aux conditions initiales $z(0) = a_0$, $z'(0) = a_1$. D'après le lemme, ceci est équivalent à

$$z'(x) = a_1 \int_0^x \mathrm{e}^{-t^2/2}\ dt\,; \quad z(0) = a_0.$$

Ceci détermine z de manière unique, et par suite y. Ceci démontre la proposition.

Exercice. On considère l'équation différentielle

$$y'' + \frac{y'}{x} + y = 0.$$

Chercher une solution série entière qui vérifie la condition $y'(0) = 0$ (qui permet d'espérer qu'on pourra diviser par x et obtenir une limite en 0) et la condition $y(0) = 1$.

Chapitre 4. Rappels d'algèbre linéaire

4.1. Espaces vectoriels

Pour "fabriquer" un *espace vectoriel*, il faut d'abord se donner un ensemble E (dont les éléments seront appelés *vecteurs*), puis donner deux opérations, l'addition des vecteurs d'une part, et d'autre part la multiplication des vecteurs par des nombres appelés *scalaires* ; on suppose que ces données vérifient les axiomes des espaces vectoriels, que nous ne rappellerons pas ici ; l'ensemble des scalaires doit être un *corps*, appelé le *corps de base* de l'espace vectoriel E ; ce corps sera noté $\mathbb{K}$. On se limitera le plus souvent dans ce cours au cas où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$; le corps $\mathbb{K}$ pourra être aussi un *sous-corps de* $\mathbb{C}$, par exemple $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$. Strictement parlant, on devrait dire "l'espace vectoriel $(\mathrm{E}, +, .)$" mais l'usage courant est de dire simplement "l'espace vectoriel E".

Pour tout entier $n \geq 1$, l'espace vectoriel $\mathbb{K}^n$ est l'ensemble des n-uplets $(a_1, \ldots, a_n)$ d'éléments de $\mathbb{K}$, muni des opérations usuelles d'addition et de multiplication par les éléments de $\mathbb{K}$ (les "scalaires"). Nous associerons souvent à un élément x de $\mathbb{K}^n$ une matrice colonne X pour pouvoir appliquer le calcul matriciel,

$$x = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{K}^n, \quad \mathrm{X} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

(attention aux conventions : $(a_1, \ldots, a_n)$ est un n-uplet, pas une matrice ligne ; une matrice ligne ne contient pas de virgules).

La *base canonique* de l'espace vectoriel $\mathbb{K}^n$ est formée des vecteurs $\mathbf{e}_1 = (1, 0, \ldots, 0)$, $\mathbf{e}_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0)$, jusqu'à $\mathbf{e}_n = (0, \ldots, 0, 1)$. Dans cette base le vecteur x ci-dessus peut s'écrire $x = a_1\mathbf{e}_1 + \cdots + a_n\mathbf{e}_n$.

Sous-espaces vectoriels et applications linéaires

Définitions.

4.1.1. *Sous-espace vectoriel.* Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$; on dit qu'un sous-ensemble F de E est un *sous-espace vectoriel de* E si les trois conditions suivantes sont vérifiées :

a. Le vecteur nul 0_{E} de E appartient à F, c'est à dire $0_{\mathrm{E}} \in \mathrm{F}$
b. Pour tous vecteurs x, y de F, on a $x + y \in \mathrm{F}$
c. Pour tout vecteur $x \in \mathrm{F}$ et tout $\lambda \in \mathbb{K}$, on a $\lambda x \in \mathrm{F}$.

On peut résumer ces trois conditions en disant que F est **non vide** et que $\lambda x + y \in \mathrm{F}$ pour tous $x, y \in \mathrm{F}$ et tout $\lambda \in \mathbb{K}$.

4.1.2. *Application linéaire.* Soient E_1 et E_2 deux espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$; on dit qu'une application $u : \mathrm{E}_1 \to \mathrm{E}_2$ est une *application linéaire* de E_1 dans E_2 si

a. Pour tous vecteurs $x, y \in \mathrm{E}_1$, on a $u(x + y) = u(x) + u(y)$
b. Pour tout vecteur $x \in \mathrm{E}_1$ et tout $\lambda \in \mathbb{K}$, on a $u(\lambda x) = \lambda u(x)$.

On peut résumer en disant que $u(\lambda x + y) = \lambda u(x) + u(y)$ pour tous $x, y \in \mathrm{E}_1$ et tout $\lambda \in \mathbb{K}$. On rappelle que $u(0_{\mathrm{E}_1}) = 0_{\mathrm{E}_2}$, et $u(-x) = -u(x)$ pour tout vecteur $x \in \mathrm{E}_1$.

Exemples de sous-espaces vectoriels.

1. Les ensembles $\{0_{\mathrm{E}}\}$ et E sont des sous-espaces vectoriels de E.

2. Pour tout vecteur $x \in \mathrm{E}$ non nul, on peut considérer la *droite vectorielle*

$$\mathbb{K}x = \{\lambda x : \lambda \in \mathbb{K}\}.$$

C'est un sous-espace vectoriel de E. Dans le cas où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, le sous-espace vectoriel $\mathbb{R}x$ correspond vraiment à une droite au sens usuel, de vecteur directeur x et passant par le point origine 0_{E}. Dans le cas complexe (si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$), le lecteur devra bien comprendre qu'une "droite complexe" ne correspond pas à l'idée géométrique usuelle de droite. Une *droite affine* n'est pas en général un sous-espace vectoriel (elle ne passe pas toujours par 0) ; c'est un ensemble de la forme $a + \mathbb{K}x$; une telle droite affine passe par le point $a \in \mathrm{E}$, et elle admet le vecteur $x \neq 0_{\mathrm{E}}$ comme vecteur directeur. Un *plan vectoriel* est un sous-espace vectoriel de la forme $\{\lambda x + \mu y : \lambda, \mu \in \mathbb{K}\}$, où x et y sont deux vecteurs non $\mathbb{K}$-colinéaires.

3. L'intersection $\mathrm{E}_1 \cap \mathrm{E}_2$ de deux sous-espaces vectoriels E_1 et E_2 de E est un sous-espace vectoriel de E.

4. Etant donnés deux sous-espaces vectoriels F_1 et F_2 de E, on définit la *somme des deux sous-espaces* par

$$\mathrm{F}_1 + \mathrm{F}_2 = \{y_1 + y_2 : y_1 \in \mathrm{F}_1, y_2 \in \mathrm{F}_2\}.$$

Par exemple, la somme de deux droites vectorielles distinctes est un plan vectoriel. Cette opération est associative : $(\mathrm{F}_1 + \mathrm{F}_2) + \mathrm{F}_3 = \mathrm{F}_1 + (\mathrm{F}_2 + \mathrm{F}_3)$. On définit de même la somme $\mathrm{F}_1 + \cdots + \mathrm{F}_n$ d'une famille finie $\mathrm{F}_1, \ldots, \mathrm{F}_n$ de sous-espaces vectoriels de E.

5. *Produit fini d'espaces vectoriels*

Si $\mathrm{E}_1, \ldots, \mathrm{E}_n$ sont des espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$, l'espace produit $\mathrm{E}_1 \times \cdots \times \mathrm{E}_n$, qui est l'ensemble des n-uplets $(x_1, \ldots, x_n)$ où $x_i \in \mathrm{E}_i$ pour chaque $i = 1, \ldots, n$, est muni d'une structure naturelle d'espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ qui découle des structures de $\mathrm{E}_1, \ldots, \mathrm{E}_n$: les opérations de l'espace vectoriel $\mathrm{E}_1 \times \cdots \times \mathrm{E}_n$ sont définies par

$$(x_1, \ldots, x_n) + (y_1, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n),$$

$$a\,(x_1, \ldots, x_n) = (ax_1, \ldots, ax_n)$$

pour tout $a \in \mathbb{K}$. L'espace vectoriel $\mathbb{K}^n$ est un cas particulier de cette opération produit, le cas où tous les facteurs E_i sont égaux à $\mathbb{K}$. L'application de $\mathrm{E}_1 \times \cdots \times \mathrm{E}_n$ dans E_i définie par $\pi_i(x_1, \ldots, x_n) = x_i$ s'appelle la *i-ème projection* de l'espace produit sur le $i$ème facteur E_i.

Exemples d'applications linéaires.

1. L'application nulle, les projections d'un espace vectoriel produit sur les facteurs sont des applications linéaires. *L'application identique* de E ou *identité* de E, qui sera notée Id_{E} dans ces notes, et qui est définie par $\mathrm{Id}_{\mathrm{E}}(x) = x$ pour tout $x \in \mathrm{E}$, est évidemment une application linéaire de E dans E. On appelle *endomorphisme* de E toute application linéaire de E dans lui-même.

2. La somme de deux applications linéaires est une application linéaire. L'ensemble de toutes les applications linéaires de E dans F est l'espace vectoriel $\mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$.

3. On appelle *forme linéaire* une application linéaire de E dans le corps $\mathbb{K}$. Le *dual* de E est l'espace $\mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathbb{K})$ de toutes les formes linéaires sur E. On le note en général E^*.

4. Quand elle est définie, la composition $v \circ u$ de deux applications linéaires u et v est une application linéaire.

5. Etant donné un système $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_p)$ de vecteurs d'un espace vectoriel E, l'application de $\mathbb{K}^p$ dans E définie par

$$\varphi_{\mathbf{x}}(\lambda_1, \ldots, \lambda_p) = \sum_{j=1}^{p} \lambda_j x_j$$

est une application linéaire.

Une application linéaire u de E dans F est un *isomorphisme* (d'espaces vectoriels) s'il existe une application linéaire $v : \mathrm{F} \to \mathrm{E}$ telle que $v \circ u = \mathrm{Id}_{\mathrm{E}}$ et $u \circ v = \mathrm{Id}_{\mathrm{F}}$. Dans ce cas l'application v est l'application réciproque de u (au sens ensembliste) ; pour que l'application linéaire u soit un isomorphisme, il suffit que u soit bijective de E sur F ; l'application réciproque $v = u^{-1}$ sera automatiquement linéaire.

Soit $u \in \mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$ une application linéaire ; le *noyau* de u est l'ensemble des vecteurs $x \in \mathrm{E}$ tels que $u(x) = 0_{\mathrm{F}}$; c'est un sous-espace vectoriel de E et on le note $\ker u$. *L'image* de u est l'ensemble $u(\mathrm{E})$ des éléments de F qui sont l'image d'au moins un élément de l'espace E ; c'est un sous-espace vectoriel de F.

Rappel. *Une application linéaire $u \in \mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$ est injective si et seulement si* $\ker u = \{0_{\mathrm{E}}\}$.

Exemple. La somme $\mathrm{F}_1 + \mathrm{F}_2$ de deux sous-espaces de E est l'image de $\mathrm{F}_1 \times \mathrm{F}_2$ par l'application linéaire u de $\mathrm{F}_1 \times \mathrm{F}_2$ dans E définie par $u(x_1, x_2) = x_1 + x_2$. Le noyau de u est le sous-espace de $\mathrm{F}_1 \times \mathrm{F}_2$ formé de tous les couples $(x, -x)$ où x varie dans l'intersection $\mathrm{F}_1 \cap \mathrm{F}_2$. L'application u est donc injective si et seulement si $\mathrm{F}_1 \cap \mathrm{F}_2 = \{0\}$; dans ce cas u sera un isomorphisme de $\mathrm{F}_1 \times \mathrm{F}_2$ sur $\mathrm{F}_1 + \mathrm{F}_2$.

Exemples mettant en jeu des espaces vectoriels de dimension infinie

L'ensemble S des séries convergentes, muni de la somme $(\sum u_n) + (\sum v_n) = \sum (u_n + v_n)$ et de l'opération $\lambda \sum u_n = \sum \lambda u_n$, est un espace vectoriel (de dimension infinie) ; l'espace des séries absolument convergentes est un sous-espace vectoriel de S, l'application qui associe à chaque série convergente la somme de la série est une application linéaire de S dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ (forme linéaire). La transformation d'Abel fournit des exemples d'endomorphismes de l'espace vectoriel S : si (λ_n) est une suite réelle décroissante tendant vers 0, l'application $\sum v_n \to \sum \lambda_n v_n$ est linéaire de S dans S.

L'ensemble $\mathrm{C}(\mathbb{R})$ des fonctions réelles continues sur $\mathbb{R}$ est muni d'une structure naturelle d'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ où les opérations sont la somme de deux fonctions et la multiplication d'une fonction par une constante réelle,

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x), \quad (a\, f)(x) = a f(x).$$

Les fonctions de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ forment un sous-espace vectoriel $\mathrm{C}^1(\mathbb{R})$ de l'espace vectoriel $\mathrm{C}(\mathbb{R})$. Les fonctions de classe C^2 forment un autre sous-espace $\mathrm{C}^2(\mathbb{R})$, contenu dans $\mathrm{C}^1(\mathbb{R})$. Etant données deux fonctions a et b sur $\mathbb{R}$, les fonctions f de $\mathrm{C}^2(\mathbb{R})$ telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f''(x) = a(x) f'(x) + b(x) f(x)$$

forment un sous-espace vectoriel de $\mathrm{C}^2(\mathbb{R})$.

L'application qui associe à toute fonction $f \in \mathrm{C}(\mathbb{R})$ sa primitive F nulle en 0 est une application linéaire de $\mathrm{C}(\mathbb{R})$ dans $\mathrm{C}^1(\mathbb{R})$. L'application qui associe à toute fonction $f \in \mathrm{C}(\mathbb{R})$ la quantité $\int_0^1 f(t)\, dt$ est une application linéaire de $\mathrm{C}(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$ (forme linéaire).

Combinaisons linéaires

Soit $x_1, \ldots, x_n$ une famille de vecteurs d'un espace vectoriel E sur le corps $\mathbb{K}$; on dit qu'un vecteur $z \in \mathrm{E}$ est une *combinaison linéaire* des vecteurs $x_1, \ldots, x_n$ s'il existe des coefficients $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ tels que

$$z = \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n.$$

On notera (dans ces notes de cours) $[x_1, \ldots, x_n]$ l'ensemble des combinaisons linéaires des vecteurs $x_1, \ldots, x_n$. Dans le cas d'un seul vecteur, on a $[x] = \mathbb{K}x$.

On voit que $[x_1, \ldots, x_n]$ est l'image de $\mathbb{K}^n$ par l'application linéaire $\varphi_{\mathbf{x}}$ définie dans l'exemple 5 ci-dessus. Par conséquent $[x_1, \ldots, x_n]$ est un sous-espace vectoriel de E. Inversement, tout sous-espace F de E qui contient les vecteurs $x_1, \ldots, x_n$ contiendra aussi toutes les combinaisons linéaires de ces vecteurs, donc $[x_1, \ldots, x_n] \subset \mathrm{F}$. Autrement dit, le sous-espace vectoriel $[x_1, \ldots, x_n]$ est le plus petit sous-espace vectoriel de E qui contienne les vecteurs $x_1, \ldots, x_n$. On l'appelle le *sous-espace vectoriel engendré* par les vecteurs $x_1, \ldots, x_n$.

Remarque. Si $u : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ est linéaire, on a $u([y_1, \ldots, y_n]) = [u(y_1), \ldots, u(y_n)]$.

4.2. Dimension

A tout système $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ de n vecteurs de E, on a associé une application linéaire $\varphi_{\mathbf{x}}$ de $\mathbb{K}^n$ dans E, définie par

$$\forall (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n, \quad \varphi_{\mathbf{x}}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n \in \mathrm{E}.$$

On a dit que l'image $\varphi_{\mathbf{x}}(\mathbb{K}^n)$ est égale à l'ensemble $[x_1, \ldots, x_n]$ des combinaisons linéaires des vecteurs $x_1, \ldots, x_n$.

Système libre, générateur

Définitions.

4.2.1. On dit que le système de vecteurs $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ est *libre* ou *linéairement indépendant* si l'application $\varphi_{\mathbf{x}}$ est injective, c'est à dire si

$$\forall (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n, \quad (\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n = 0_{\mathrm{E}} \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0).$$

4.2.2. On dit que le système de vecteurs $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ est un *système de générateurs* pour E si l'application $\varphi_{\mathbf{x}}$ est surjective de $\mathbb{K}^n$ sur E, c'est à dire si tout vecteur de E peut s'exprimer comme combinaison linéaire des vecteurs $x_1, \ldots, x_n$.

Remarques.

1. Image linéaire d'un système générateur : si $u \in \mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$, et si le système de vecteurs $(x_1, \ldots, x_n)$ est générateur pour E, alors $(u(x_1), \ldots, u(x_n))$ est générateur pour l'image $u(\mathrm{E})$. En particulier, si u est surjective de E sur F, l'image d'un système de générateurs pour E est un système de générateurs pour F.

2. Image inverse d'un système libre : si $u \in \mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$, si $(u(x_1), \ldots, u(x_n))$ est libre dans F, alors $(x_1, \ldots, x_n)$ est libre dans E.

3. Si un système de vecteurs est libre, tous ses sous-systèmes sont libres.

4. Un système de vecteurs $(x_1, \ldots, x_n)$ est libre si et seulement si aucun des vecteurs du système ne peut s'exprimer comme combinaison linéaire des **autres** vecteurs du système.

Lemme. Expression de l'indépendance linéaire par conditions successives. *Le système de vecteurs* $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ *est libre si et seulement si*

$$x_1 \neq 0_{\mathrm{E}} \quad \textit{et} \quad \forall i = 1, \ldots, n-1, \quad x_{i+1} \notin [x_1, \ldots, x_i].$$

Démonstration abrégée. Supposons que la condition ci-dessus soit satisfaite, et montrons que le système $\mathbf{x}$ est libre. Supposons donc que $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i = 0_{\mathrm{E}}$ et montrons que tous les coefficients λ_i sont nuls ; s'il existait des λ_i non nuls, on pourrait considérer le dernier (le plus grand) indice p tel que $\lambda_p \neq 0$, et on aurait alors puisque $\lambda_{p+1} = \cdots = \lambda_n = 0$,

$$\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_p x_p = 0_{\mathrm{E}},$$

donc

$$x_p = -\frac{1}{\lambda_p}(\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_{p-1} x_{p-1}) \in [x_1, \ldots, x_{p-1}],$$

ce qui contredirait notre condition. Par conséquent tous les λ_i sont nuls, et on a donc montré que le système $(x_1, \ldots, x_n)$ est libre.

Autre expression de l'indépendance linéaire : un système de vecteurs $(x_1, \ldots, x_n)$ est libre si et seulement si

$$\{0_{\mathrm{E}}\} \neq [x_1] \neq [x_1, x_2] \neq [x_1, x_2, x_3] \neq \cdots \neq [x_1, \ldots, x_n].$$

Corollaire 4.2.1. *Si* $(x_1, \ldots, x_k)$ *est libre et* $y \notin [x_1, \ldots, x_k]$, *alors* $(x_1, \ldots, x_k, y)$ *est libre.*

Base d'un espace vectoriel

Un système $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ de vecteurs de E est une *base* de E s'il est à la fois libre et générateur pour E. Cela revient à dire que l'application $\varphi_{\mathbf{x}}$ est injective et surjective, donc que $\varphi_{\mathbf{x}}$ est un isomorphisme de $\mathbb{K}^n$ sur E.

Exemple. Si $\mathrm{E} = [x]$, avec $x \neq 0_{\mathrm{E}}$, tout vecteur $y \neq 0_{\mathrm{E}}$ est une base de E.

Si $\mathbf{e} = (e_1, \ldots, e_n)$ est une base de E, on définit les *fonctions coordonnées* e_j^*, pour $j = 1, \ldots, n$ par

$$e_j^*(a_1 e_1 + \cdots + a_n e_n) = a_j.$$

Ce sont des formes linéaires. Elles forment une base du dual E^*, appelée la *base duale* $\mathbf{e}^*$ de la base $\mathbf{e}$.

Les théorèmes sur la dimension pour les espaces engendrés par une partie finie

Dans ce paragraphe on suppose que l'espace vectoriel E étudié est différent de $\{0_{\mathrm{E}}\}$.

Théorème 4.2.1. (Théorème de la base incomplète). *Si* $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_p)$ *est libre (ou bien si le système* $\mathbf{x}$ *est le système vide) et si* $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_q)$ *est générateur pour* E, *il existe une base de* E *contenant tous les vecteurs du système* $\mathbf{x}$ *et* complétée *par certains des vecteurs du système* $\mathbf{y}$.

Corollaire 4.2.2. *Si* E *est engendré par une partie finie, il existe une base pour* E. *Plus précisément, si* E *est engendré par* q *vecteurs on peut trouver une base de* n *vecteurs pour* E, *avec* $n \leq q$.

Démonstration. On applique le théorème de la base incomplète au système vide et à un système de générateurs pour E.

Théorème 4.2.2. *Si* E *possède une base formée de* n *vecteurs, toutes les bases de* E *ont* n *vecteurs. Le nombre* n *s'appelle la* dimension *de* E*, et on le note* $\dim \mathrm{E}$.

Dans le cas de l'espace vectoriel $\mathrm{E} = \{0\}$ réduit au vecteur nul, on convient de poser $\dim\{0\} = 0$.

Remarques.

a. Si $\dim \mathrm{E} = n$, l'espace E ne peut pas contenir $n+1$ vecteurs indépendants.

b. Si F est un sous-espace de E et si $\dim \mathrm{E} = n$, on a $\dim \mathrm{F} \leq n$; si $\dim \mathrm{F} = n = \dim \mathrm{E}$, alors $\mathrm{F} = \mathrm{E}$.

c. Si $n = \dim \mathrm{E}$ et si $(x_1, \ldots, x_n)$ est un système libre formé de n vecteurs de E, c'est une base de E.

Montrons le point *a* : si E contenait $n+1$ vecteurs indépendants, il contiendrait une base ayant au moins $n+1$ vecteurs d'après le théorème de la base incomplète, ce qui contredit $\dim \mathrm{E} = n$. Le premier point de *b* résulte de *a*. Pour le second, si on avait $\mathrm{F} \subset \mathrm{E}$, différent de E et de même dimension n que E, on aurait, en prenant une base $(y_1, \ldots, y_n)$ de F et un vecteur $x \notin \mathrm{F}$, un système libre $(y_1, \ldots, y_n, x)$ de $n+1$ vecteurs dans E, ce qui est impossible d'après le point *a*. Pour le point *c*, on remarque que si $\mathrm{F} = [x_1, \ldots, x_n]$, on aura $\dim \mathrm{F} = n = \dim \mathrm{E}$, donc $\mathrm{F} = \mathrm{E}$.

Proposition 4.2.1. *Soit* u *une application linéaire de* E *dans* F*. Si* E *est de dimension finie, on a*

$$\dim \mathrm{E} = \dim \ker u + \dim u(\mathrm{E}).$$

En particulier, si $\dim \mathrm{F} = \dim \mathrm{E}$*, une application linéaire de* E *dans* F *est injective si et seulement si elle est surjective.*

4.3. Sommes directes

On a défini précédemment la somme de deux sous-espaces vectoriels F_1 et F_2 d'un espace vectoriel E,

$$\mathrm{F}_1 + \mathrm{F}_2 = \{y_1 + y_2 : y_1 \in \mathrm{F}_1, y_2 \in \mathrm{F}_2\}.$$

On dit que la somme $\mathrm{F}_1 + \mathrm{F}_2$ est une *somme directe* si $\mathrm{F}_1 \cap \mathrm{F}_2 = \{0_\mathrm{E}\}$. Cela entraîne l'unicité de la décomposition $y = y_1 + y_2$ d'un vecteur de $\mathrm{F}_1 + \mathrm{F}_2$ et l'existence des applications projections de $\mathrm{F}_1 + \mathrm{F}_2$ sur les deux facteurs. Dans le cas d'une somme directe, on note l'espace somme $\mathrm{F}_1 \oplus \mathrm{F}_2$.

La somme $\mathrm{F}_1 + \mathrm{F}_2$ *est directe si et seulement si l'application* $(y_1, y_2) \to y_1 + y_2$ *de l'espace* $\mathrm{F}_1 \times \mathrm{F}_2$ *dans* $\mathrm{F}_1 + \mathrm{F}_2$ *est un isomorphisme.*

Pour définir une somme directe $\mathrm{F}_1 \oplus \cdots \oplus \mathrm{F}_p$ de plusieurs sous-espaces vectoriels $\mathrm{F}_1, \ldots, \mathrm{F}_p$ d'un espace vectoriel E, le plus simple est de partir de la propriété précédente : on dit que la somme $\mathrm{F}_1 + \cdots + \mathrm{F}_p$ est une *somme directe* lorsque l'application linéaire $(y_1, \ldots, y_p) \in \mathrm{F}_1 \times \cdots \times \mathrm{F}_p \to y_1 + \cdots + y_p$ est un isomorphisme de $\mathrm{F}_1 \times \cdots \times \mathrm{F}_p$ sur $\mathrm{F}_1 + \cdots + \mathrm{F}_p$. Comme cette application est surjective par définition de la somme, dire que la somme est directe signifie donc que l'application est injective, donc

la somme $\mathrm{F}_1 + \cdots + \mathrm{F}_p$ *est une somme directe si et seulement si pour tout choix de vecteurs* $(y_1, \ldots, y_p) \in \mathrm{F}_1 \times \cdots \times \mathrm{F}_p$*, la condition* $y_1 + \cdots + y_p = 0_\mathrm{E}$ *implique les égalités* $y_1 = y_2 = \cdots = y_p = 0_\mathrm{E}$.

Remarque. Le système $(x_1, \dots, x_n)$ est une base de E si et seulement si

$$\mathrm{E} = \mathbb{K}x_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{K}x_n.$$

Caractérisation par conditions successives

La somme $\mathrm{F}_1 + \cdots + \mathrm{F}_p$ est directe si et seulement si pour tout $j = 1, 2, \dots, p-1$, l'espace F_{j+1} rencontre $\mathrm{F}_1 + \cdots + \mathrm{F}_j$ seulement en 0_{E},

$$\mathrm{F}_{j+1} \cap (\mathrm{F}_1 + \cdots + \mathrm{F}_j) = \{0_{\mathrm{E}}\}.$$

Base d'une somme directe. Soit $\mathrm{F}_1 \oplus \cdots \oplus \mathrm{F}_p$ une somme directe de sous-espaces de dimension finie ; pour obtenir une base de $\mathrm{F}_1 \oplus \cdots \oplus \mathrm{F}_p$, il suffit de prendre un système de vecteurs formé d'une base de F_1, suivie d'une base de F_2, ainsi de suite jusqu'à une base de F_p.

Lemme. *Soient* $\mathrm{F}_1, \dots, \mathrm{F}_p$ *des sous-espaces de dimension finie d'un espace vectoriel* E *; la somme* $\mathrm{F}_1 + \cdots + \mathrm{F}_p$ *est une somme directe si et seulement si*

$$\dim(\mathrm{F}_1 + \cdots + \mathrm{F}_p) = \dim \mathrm{F}_1 + \cdots + \dim \mathrm{F}_p.$$

Matrice d'une application linéaire

On suppose donnée $u : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ une application linéaire, $\mathbf{e} = (e_1, \dots, e_m)$ une base de E et $\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_n)$ une base de F. Pour chaque $j = 1, \dots, m$ soit Y_j le vecteur colonne de $\mathbb{K}^n$ formé des coordonnées **dans la base f** (à l'arrivée) de **l'image** $u(e_j)$ du $j$ième vecteur e_j de la base de départ $\mathbf{e}$,

$$\mathrm{Y}_j = \begin{pmatrix} a_{1,j} \\ \vdots \\ a_{n,j} \end{pmatrix}, \quad \text{avec} \quad u(e_j) = a_{1,j} f_1 + \cdots + a_{n,j} f_n.$$

La matrice $\mathrm{M} = \mathrm{mat}(u, \mathbf{e}, \mathbf{f})$ de u par rapport aux bases $\mathbf{e}$ et $\mathbf{f}$ est alors

$$\mathrm{M} = \begin{pmatrix} \mathrm{Y}_1 & \mathrm{Y}_2 & \dots & \mathrm{Y}_m \end{pmatrix}$$

matrice de taille $n \times m$ (c'est à dire n lignes, m colonnes) dont les colonnes successives sont Y_1, Y_2, ..., Y_m. On notera $\mathrm{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ l'espace vectoriel des matrices de taille $n \times m$ à coefficients dans $\mathbb{K}$ (et $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ si $m = n$). Si X est le vecteur colonne des coordonnées de $x \in \mathrm{E}$ dans la base $\mathbf{e}$, le vecteur colonne $\mathrm{Y} = \mathrm{MX}$ obtenu par produit avec la matrice M est le vecteur des coordonnées de $y = u(x) \in \mathrm{F}$ dans la base $\mathbf{f}$.

Exemple. Rotation d'angle θ dans $\mathbb{R}^2$. Sa matrice dans la base canonique est

$$\mathrm{R}_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

Soit $\mathbf{e} = (e_1, \dots, e_n)$ une base d'un espace vectoriel E et soit Id_{E} l'application identique de E ; la matrice de Id_{E} en prenant la base $\mathbf{e}$ au départ et à l'arrivée est la *matrice identité* de dimension n

$$\mathrm{I}_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{I}_n = \mathrm{mat}(\mathrm{Id}_{\mathrm{E}}, \mathbf{e}, \mathbf{e}).$$

Rappel important. Produit d'applications linéaires et produit de matrices. Si $u : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ et $v : \mathrm{F} \to \mathrm{G}$ sont deux applications linéaires, $\mathbf{e}$ une base de E, $\mathbf{f}$ une base de F et $\mathbf{g}$ une base de G, la matrice de l'application composée $v \circ u$ par rapport aux bases $\mathbf{e}$ et $\mathbf{g}$ est égale au produit des matrices de v et de u,

$$\mathrm{mat}(v \circ u, \mathbf{e}, \mathbf{g}) = \mathrm{mat}(v, \mathbf{f}, \mathbf{g})\,\mathrm{mat}(u, \mathbf{e}, \mathbf{f}).$$

Si u est inversible, $\mathrm{mat}(u^{-1}, \mathbf{f}, \mathbf{e})$ est la matrice inverse de $\mathrm{mat}(u, \mathbf{e}, \mathbf{f})$.

Rappel. Changement de base.

On considère deux bases $\mathbf{e} = (e_1, \ldots, e_n)$ et $\mathbf{f} = (f_1, \ldots, f_n)$ pour le même espace vectoriel E de dimension n. Pour un endomorphisme u de E, désignons par $\mathrm{A}_{\mathbf{e}}$ et $\mathrm{A}_{\mathbf{f}}$ les matrices de u relatives aux bases $\mathbf{e}$ et $\mathbf{f}$ respectivement, $\mathrm{A}_{\mathbf{e}} = \mathrm{mat}(u, \mathbf{e}, \mathbf{e})$ et $\mathrm{A}_{\mathbf{f}} = \mathrm{mat}(u, \mathbf{f}, \mathbf{f})$. Considérons par ailleurs la matrice $\mathrm{V} = \mathrm{mat}(\mathrm{Id}_{\mathrm{E}}, \mathbf{f}, \mathbf{e})$ de l'application identique de l'espace E, avec la base $\mathbf{f}$ au départ et la base $\mathbf{e}$ à l'arrivée. La matrice V est inversible et son inverse V^{-1} est la matrice de l'application inverse, qui est encore l'application identique, mais avec la base $\mathbf{e}$ au départ et $\mathbf{f}$ à l'arrivée. On a d'après les principes généraux sur la matrice d'une composition d'applications

$$\mathrm{A}_{\mathbf{f}} = \mathrm{V}^{-1}\mathrm{A}_{\mathbf{e}}\mathrm{V}.$$

Par définition de la matrice d'une application linéaire par rapport à deux bases, la *matrice de passage* V contient dans sa colonne j les coordonnées du vecteur f_j de la base $\mathbf{f}$ calculées par rapport à la base $\mathbf{e}$.

Calcul par blocs

On va essayer dans ce paragraphe de convaincre le lecteur de l'utilité de se servir du langage matriciel dans des situations plus abstraites, en introduisant des matrices dont les coefficients ne seront plus nécessairement des nombres, mais des applications linéaires, ou des vecteurs, ou bien d'autres matrices. Expliquons le principe de l'opération. Supposons donnés quatre espaces vectoriels E_1, E_2, F_1 et F_2. Les deux espaces E joueront le rôle d'espaces de départ, et les F seront les espaces d'arrivée. Supposons données quatre applications linéaires $u_{j,k} : \mathrm{E}_k \to \mathrm{F}_j$, $j, k = 1, 2$. Elles permettent de définir une application linéaire u du produit $\mathrm{E}_1 \times \mathrm{E}_2$ dans le produit $\mathrm{F}_1 \times \mathrm{F}_2$, en posant pour tout couple $(x_1, x_2) \in \mathrm{E}_1 \times \mathrm{E}_2$

$$u(x_1, x_2) = (y_1, y_2) = (u_{1,1}(x_1) + u_{1,2}(x_2), u_{2,1}(x_1) + u_{2,2}(x_2)) \in \mathrm{F}_1 \times \mathrm{F}_2.$$

Il est assez naturel d'introduire la matrice abstraite

$$\begin{pmatrix} u_{1,1} & u_{1,2} \\ u_{2,1} & u_{2,2} \end{pmatrix}$$

et de remarquer que le calcul de $u(x_1, x_2)$ peut se comprendre en langage matriciel étendu, en effectuant avec les règles presque usuelles le produit

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{1,1} & u_{1,2} \\ u_{2,1} & u_{2,2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{1,1}(x_1) + u_{1,2}(x_2) \\ u_{2,1}(x_1) + u_{2,2}(x_2) \end{pmatrix}.$$

Si on se donne maintenant deux autres espaces G_1, G_2 et quatre applications linéaires $v_{i,j} : \mathrm{F}_j \to \mathrm{G}_i$, il leur correspond une application linéaire $v : \mathrm{F}_1 \times \mathrm{F}_2 \to \mathrm{G}_1 \times \mathrm{G}_2$, que l'on peut représenter par une matrice 2×2 dont les coefficients sont les $(v_{i,j})$. Ce qui est très sympathique, c'est que la composition $v \circ u$ peut alors se représenter par le produit de ces deux matrices abstraites, en écrivant simplement $v_{i,j}u_{j,k}$ pour la composition $v_{i,j} \circ u_{j,k}$

$$v \circ u = \begin{pmatrix} v_{1,1} & v_{1,2} \\ v_{2,1} & v_{2,2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{1,1} & u_{1,2} \\ u_{2,1} & u_{2,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_{1,1}u_{1,1} + v_{1,2}u_{2,1} & v_{1,1}u_{1,2} + v_{1,2}u_{2,2} \\ v_{2,1}u_{1,1} + v_{2,2}u_{2,1} & v_{2,1}u_{1,2} + v_{2,2}u_{2,2} \end{pmatrix}$$

toujours avec les règles presque habituelles ; il faut seulement faire attention à l'ordre des facteurs, parce que par exemple $v_{1,1}u_{1,1}$ a un sens alors que $u_{1,1}v_{1,1}$ n'a pas de sens en général (et même si les deux ont un sens — quand $\mathrm{E}_1 = \mathrm{F}_1 = \mathrm{G}_1$ — les deux produits sont différents en général).

Supposons que l'espace vectoriel E soit égal à la somme directe $\mathrm{E}_1 \oplus \mathrm{E}_2$ de deux sous-espaces E_1 et E_2. L'espace E est alors naturellement isomorphe au produit $\mathrm{E}_1 \times \mathrm{E}_2$, et on peut appliquer ce qui a été dit précédemment. Tout vecteur $x \in \mathrm{E}$ se décompose alors de façon unique en $x = x_1 + x_2$, avec $x_i = p_i(x) \in \mathrm{E}_i$, $i = 1, 2$, les applications p_1 et p_2 étant les deux projections de E sur les facteurs de la somme directe. Pour chaque endomorphisme u de E, on peut définir quatre applications linéaires $u_{i,j}$, où $i, j = 1, 2$, et où $u_{i,j}$ est l'application linéaire de E_j dans E_i définie par $u_{i,j}(y) = p_i(u(y))$ pour tout $y \in \mathrm{E}_j$. On peut alors représenter u par la matrice

$$\begin{pmatrix} u_{1,1} & u_{1,2} \\ u_{2,1} & u_{2,2} \end{pmatrix}.$$

On dira qu'on a effectué la *décomposition en blocs* de l'endomorphisme u par rapport à la décomposition $\mathrm{E} = \mathrm{E}_1 \oplus \mathrm{E}_2$. On imagine facilement comment généraliser au cas où E est décomposé en une somme de plus de deux facteurs directs.

Si on se donne une base de chacun des deux espaces E_i de la somme directe, on pourra remplacer les matrices "abstraites" qui précèdent par de vraies matrices, mais considérées comme des matrices découpées en blocs bien identifiés. Par exemple, si $\mathbf{e}_1 = (z_1, \ldots, z_p)$ et $\mathbf{e}_2 = (z_{p+1}, \ldots, z_{p+q})$ sont des bases de E_1 et E_2 respectivement, si on décompose un vecteur $x \in \mathrm{E}$ sous la forme $x = x_1 + x_2$ avec $x_i \in \mathrm{E}_i$, $i = 1, 2$, on aura deux matrices colonne X_1 et X_2 des coordonnées de x_1 et de x_2 dans les bases correspondantes $\mathbf{e}_1$ et $\mathbf{e}_2$. On notera les coordonnées de x dans la base $(z_1, \ldots, z_p, z_{p+1}, \ldots, z_{p+q})$ de E obtenue en prenant la base de E_1 suivie de la base de E_2 par une notation en blocs,

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad \text{représenté par} \quad \mathrm{X} = \begin{pmatrix} \mathrm{X}_1 \\ \mathrm{X}_2 \end{pmatrix}.$$

Le vecteur colonne X a $n = p + q$ lignes, réparties en p lignes pour X_1 et q lignes pour X_2. De même, chaque application $u_{i,j}$ sera représentée par sa matrice $\mathrm{A}_{i,j}$ par rapport aux bases de E_j (au départ) et de E_i (à l'arrivée),

$$u = \begin{pmatrix} u_{1,1} & u_{1,2} \\ u_{2,1} & u_{2,2} \end{pmatrix} \quad \text{représenté par} \quad \mathrm{A} = \begin{pmatrix} \mathrm{A}_{1,1} & \mathrm{A}_{1,2} \\ \mathrm{A}_{2,1} & \mathrm{A}_{2,2} \end{pmatrix}.$$

On dira qu'on a effectué la décomposition par blocs de la matrice A, décomposition associée à la décomposition $\mathrm{E} = [z_1, \ldots, z_p] \oplus [z_{p+1}, \ldots, z_{p+q}]$. Les deux matrices $\mathrm{A}_{1,1}$ et $\mathrm{A}_{2,2}$ sont carrées, respectivement de tailles $p \times p$ et $q \times q$, mais les deux autres sont en général des matrices rectangulaires, de tailles $p \times q$ et $q \times p$. Si $\mathrm{Y} \in \mathbb{K}^n$ représente les coordonnées de $u(x)$, on écrira

$$\mathrm{Y} = \mathrm{AX} = \begin{pmatrix} \mathrm{A}_{1,1} & \mathrm{A}_{1,2} \\ \mathrm{A}_{2,1} & \mathrm{A}_{2,2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{X}_1 \\ \mathrm{X}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{A}_{1,1}\mathrm{X}_1 + \mathrm{A}_{1,2}\mathrm{X}_2 \\ \mathrm{A}_{2,1}\mathrm{X}_1 + \mathrm{A}_{2,2}\mathrm{X}_2 \end{pmatrix}.$$

Supposons maintenant que v soit un autre endomorphisme de E, lui aussi représenté par une matrice en blocs $\mathrm{B} = (\mathrm{B}_{i,j})$ pour les mêmes bases. La composition $v \circ u$ sera représentée par la matrice produit BA, produit qu'on pourra calculer par blocs (en respectant bien l'ordre des facteurs matriciels),

$$\mathrm{BA} = \begin{pmatrix} \mathrm{B}_{1,1} & \mathrm{B}_{1,2} \\ \mathrm{B}_{2,1} & \mathrm{B}_{2,2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{A}_{1,1} & \mathrm{A}_{1,2} \\ \mathrm{A}_{2,1} & \mathrm{A}_{2,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{B}_{1,1}\mathrm{A}_{1,1} + \mathrm{B}_{1,2}\mathrm{A}_{2,1} & \mathrm{B}_{1,1}\mathrm{A}_{1,2} + \mathrm{B}_{1,2}\mathrm{A}_{2,2} \\ \mathrm{B}_{2,1}\mathrm{A}_{1,1} + \mathrm{B}_{2,2}\mathrm{A}_{2,1} & \mathrm{B}_{2,1}\mathrm{A}_{1,2} + \mathrm{B}_{2,2}\mathrm{A}_{2,2} \end{pmatrix}.$$

Il est bien sûr possible de généraliser ce qui précède à une somme directe d'un nombre fini quelconque de facteurs.

Exemple. On peut voir le produit usuel AB de deux matrices comme un produit par blocs, en groupant A par lignes et B par colonnes.

Matrices diagonales par blocs, triangulaires par blocs

Supposons que l'ensemble d'indices $\{1, \ldots, n\}$ soit découpé en p intervalles disjoints $\mathrm{I}_1, \ldots, \mathrm{I}_p$. On aura alors une décomposition du carré $\{1, \ldots, n\}^2$ en p^2 rectangles $\mathrm{I}_i \times \mathrm{I}_j$, qui permettra de décomposer une matrice carrée A de taille $n \times n$ en p^2 blocs $(\mathrm{A}_{i,j})$ où i et j varient tous les deux de 1 à p, et où chaque bloc diagonal $\mathrm{A}_{i,i}$ est une matrice carrée ; on dit que A est *diagonale par blocs* si on a $\mathrm{A}_{i,j} = 0$ pour tout couple (i, j) tel que $i \neq j$. Sous les mêmes conditions de décomposition on dit que A est *triangulaire (supérieure) par blocs* si $\mathrm{A}_{i,j} = 0$ chaque fois que $i > j$. Le produit AB de deux matrices A et B diagonales par blocs, pour des décompositions correspondant à la même partition de $\{1, \ldots, n\}$, est facile à exprimer : c'est la matrice diagonale par blocs dont les blocs diagonaux sont les produits $\mathrm{A}_{i,i}\mathrm{B}_{i,i}$ (dans le bon ordre !). On a donc dans ce cas $\mathrm{AB} = \mathrm{BA}$ si et seulement si $\mathrm{A}_{i,i}\mathrm{B}_{i,i} = \mathrm{B}_{i,i}\mathrm{A}_{i,i}$ pour tout $i = 1, \ldots, n$. On voit aussi que le produit de deux matrices triangulaires par blocs est triangulaire par blocs. Les blocs diagonaux du produit sont les produits des blocs diagonaux.

Supposons que F soit un sous-espace vectoriel de E, et choisissons une base de E formée d'une base $(f_1, \ldots, f_p)$ de F complétée par des vecteurs $(g_1, \ldots, g_q)$. Posons $\mathrm{G} = [g_1, \ldots, g_q]$. On a $u(\mathrm{F}) \subset \mathrm{F}$ (on dit dans ce cas que F est *stable* par u) si et seulement si la matrice de u est triangulaire par blocs dans la décomposition par blocs associée à la décomposition $\mathrm{E} = [f_1, \ldots, f_p] \oplus [g_1, \ldots, g_q]$.

Un exemple de décomposition en blocs

Soit a un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie E. On a toujours

$$\{0_\mathrm{E}\} \subset \ker a \subset \ker a^2 \subset \cdots \subset \ker a^p \ldots$$

Comme E est de dimension finie, cette chaîne de sous-espaces ne peut pas rester strictement croissante, donc il existe un plus petit entier $r \geq 0$ tel que $\ker a^r = \ker a^{r+1}$ (si $r = 0$, on a $\ker a = \{0_\mathrm{E}\}$, donc a est injective). Supposons pour fixer les idées que $r = 2$, c'est à dire que $\{0_\mathrm{E}\} \neq \ker a \neq \ker a^2 = \ker a^3$. On vérifie alors que $\ker a^p = \ker a^2$ pour tout $p \geq 2$ (par récurrence sur p). Ensuite,

$$\ker a^2 \cap a^2(\mathrm{E}) = \{0_\mathrm{E}\}.$$

En effet, si $x \in \ker a^2 \cap a^2(\mathrm{E})$, on a $a^2(x) = 0_\mathrm{E}$ et on peut écrire $x = a^2(y)$ pour un certain $y \in \mathrm{E}$. Alors $0_\mathrm{E} = a^2(x) = a^4(y)$, donc $y \in \ker a^4 = \ker a^2$, ce qui donne $a^2(y) = x = 0_\mathrm{E}$. Par ailleurs, d'après la proposition 4.2.1, on sait que $\dim \ker a^2 + \dim a^2(\mathrm{E}) = \dim \mathrm{E}$. On a donc

$$\mathrm{E} = \ker a^2 \oplus a^2(\mathrm{E}),$$

et cette décomposition est formée de deux sous-espaces stables par a. On a *a fortiori* $\ker a \cap a^2(\mathrm{E}) = \{0_\mathrm{E}\}$, donc la restriction de a au sous-espace $a^2(\mathrm{E})$ est injective. Si a_1 désigne la restriction de a à $\ker a^2$ et a_2 la restriction à $a^2(\mathrm{E})$, on voit que $a_1^2 = 0$ et a_2 est inversible.

Ecrivons $\ker a^2 = \ker a \oplus \mathrm{F}$, et soit $(f_1, \ldots, f_p)$ une base de F. Pour tout $j = 1, \ldots, p$, on voit que $a(f_j) \in \ker a$, et a est injective sur F, donc $a(\mathrm{F}) \subset \ker a$ est de même dimension que F, et les vecteurs $a(f_1), \ldots, a(f_p)$ sont linéairement indépendants. On peut choisir un supplémentaire G de $a(\mathrm{F})$ dans $\ker a$, muni d'une base $(g_1, \ldots, g_q)$ et par rapport à la décomposition $\ker a^2 = [g_1, \ldots, g_q] \oplus [a(f_1), f_1, \ldots, a(f_p), f_p]$, la matrice de u_1 aura une décomposition par blocs de la forme

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{B} \end{pmatrix} \quad \text{où} \quad \mathrm{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & 1 & \ldots \\ \vdots & & & \end{pmatrix}.$$

Si on choisit une base $(y_1, \dots, y_s)$ de $a^2(\mathrm{E})$, la matrice de a aura par rapport à la décomposition $\mathrm{E} = [g_1, \dots, g_q] \oplus [a(f_1), f_1, \dots, f_p] \oplus [y_1, \dots, y_s]$ la décomposition en blocs

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{B} & 0 \\ 0 & 0 & \mathrm{C} \end{pmatrix}$$

où C est une matrice inversible de taille $s \times s$ (c'est la matrice de a_2).

4.4. Déterminants

On considère un espace vectoriel E sur $\mathbb{K}$.

Définition 4.4.1. Une *forme p-linéaire alternée* sur E est une application φ de E^p dans $\mathbb{K}$ telle que

1. Pour tout $j = 1, \dots, p$ et pour tous vecteurs $(x_1, \dots, x_p)$ fixés dans E, l'application $x \in \mathrm{E} \to \varphi(x_1, \dots, x_{j-1}, x, x_{j+1}, \dots, x_p)$ est linéaire de E dans $\mathbb{K}$.
2. S'il existe $i \neq j$ tel que $x_i = x_j$, alors $\varphi(x_1, \dots, x_p) = 0$.

Il en résulte que si $i \neq j$, la fonction φ change de signe quand on échange les variables x_i et x_j,

$$\varphi(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_j, \dots, x_p) = -\varphi(x_1, \dots, x_{i-1}, x_j, x_{i+1}, \dots, x_i, \dots, x_p).$$

Proposition 4.4.1. Formes alternées et indépendance. *Si un système $(x_1, \dots, x_p)$ de vecteurs de* E *est lié, toute fonction p-linéaire alternée sur* E *s'annule sur $(x_1, \dots, x_p)$.*

En effet, si par exemple $x_p = a_1 x_1 + \dots + a_{p-1} x_{p-1}$ on a en décomposant x_p

$$\varphi(x_1, \dots, x_p) = \varphi(x_1, \dots, x_{p-1}, \sum_{j=1}^{p-1} a_j x_j) = \sum_{j=1}^{p-1} a_j \varphi(x_1, \dots, x_j, \dots, x_{p-1}, x_j) = 0.$$

Construction de formes multilinéaires alternées

Supposons pour commencer que l'on s'est donné deux formes linéaires f_1, f_2 sur E. On pose alors pour tous $x_1, x_2 \in \mathrm{E}$

$$(f_1 \wedge f_2)(x_1, x_2) = f_1(x_1) f_2(x_2) - f_1(x_2) f_2(x_1).$$

On peut voir que $f_1 \wedge f_2$ est linéaire par rapport à chaque variable et qu'elle est alternée. Si $f_1 = \mathbf{e}_1^*$, $f_2 = \mathbf{e}_2^*$, où $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ est la base canonique de $\mathbb{K}^2$, et si $x = (a, b)$ et $y = (c, d)$, on aura

$$(\mathbf{e}_1^* \wedge \mathbf{e}_2^*)(x, y) = ad - bc.$$

Il est facile de voir que la seule forme 2-linéaire alternée sur $\mathbb{K}^2$ telle que $\varphi(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) = 1$ est donnée par

$$\varphi(x, y) = ad - bc$$

si $x = (a, b)$ et $y = (c, d)$. En effet, on aura $\varphi(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1) = \varphi(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2) = 0$ et $\varphi(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1) = -\varphi(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) = -1$, d'où le résultat en développant l'expression

$$\varphi(x, y) = \varphi(a\,\mathbf{e}_1 + b\,\mathbf{e}_2, c\,\mathbf{e}_1 + d\,\mathbf{e}_2).$$

Passage aux ordres supérieurs

Expliquons pour commencer le passage de deux à trois variables. Supposons données une forme linéaire f et une forme 2-linéaire alternée g sur E. Posons

$$(f \wedge g)(x_1, x_2, x_3) = f(x_1)g(x_2, x_3) - f(x_2)g(x_1, x_3) + f(x_3)g(x_1, x_2).$$

Il est facile de vérifier que $f \wedge g$ est 3-linéaire alternée. Si $f = e_1^*$ et $g = e_2^* \wedge e_3^*$, on posera

$$e_1^* \wedge e_2^* \wedge e_3^* = e_1^* \wedge (e_2^* \wedge e_3^*).$$

Dans le cas de $\mathbb{K}^3$, si on prend $f = \mathbf{e}_1^*$ et $g = \mathbf{e}_2^* \wedge \mathbf{e}_3^*$, on obtient, en développant g dans l'expression de la forme $\mathbf{e}_1^* \wedge g$ ci-dessus, une expression contenant six produits de trois termes, et compte-tenu de l'expression de g sur deux vecteurs $x = (x_1, x_2, x_3)$ et $y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{K}^3$

$$g(x, y) = x_2 y_3 - x_3 y_2,$$

on aura si $x_i = (x_{i,1}, x_{i,2}, x_{i,3}) \in \mathbb{K}^3$ pour $i = 1, 2, 3$ l'expression

$$x_{1,1}(x_{2,2}\, x_{3,3} - x_{2,3}\, x_{3,2}) - x_{2,1}(x_{1,2}\, x_{3,3} - x_{1,3}\, x_{3,2}) + x_{3,1}(x_{1,2}\, x_{2,3} - x_{1,3}\, x_{2,3}).$$

C'est le déterminant de la matrice 3×3 des coordonnées des trois vecteurs (x_1, x_2, x_3).

Expliquons maintenant le pas général pour passer de $p - 1$ variables à p variables. Supposons données une forme linéaire f et une forme $(p-1)$-linéaire alternée g sur E. Posons

$$(f \wedge g)(x_1, x_2, \ldots, x_p) = f(x_1)g(x_2, x_3, \ldots, x_p) - f(x_2)g(x_1, x_3, x_4, \ldots, x_p) +$$

$$+ f(x_3)g(x_1, x_2, x_4, \ldots, x_p) + \cdots + (-1)^{p-1} f(x_p)g(x_1, \ldots, x_{p-2}, x_{p-1}).$$

Il est facile de vérifier que $f \wedge g$ est p-linéaire alternée : en effet, il est clair que chacun des p termes de la somme est linéaire par rapport à chacune des variables x_i, et d'autre part, si par exemple on suppose $x_1 = x_2$, on aura $g(x_1, x_2, \ldots) = 0$ pour tous les termes où g contient les deux vecteurs x_1 et x_2 (parce que g est alternée) ; de la somme ci-dessus, il restera donc seulement les deux premiers termes

$$(f \wedge g)(x_1, x_1, x_3, \ldots, x_p) = f(x_1)g(x_1, x_3, \ldots, x_p) - f(x_1)g(x_1, x_3, \ldots, x_p) = 0.$$

Supposons que $(e_1, \ldots, e_n)$ soit une base de E et calculons $(e_1^* \wedge \cdots \wedge e_n^*)(e_1, \ldots, e_n)$. Posons $g = e_2^* \wedge \cdots \wedge e_n^*$, on aura

$$(e_1^* \wedge g)(e_1, \ldots, e_n) = e_1^*(e_1)g(e_2, \ldots, e_n) + 0 + \cdots + 0 = (e_2^* \wedge \cdots \wedge e_n^*)(e_2, \ldots, e_n)$$

parce que $e_1^*(e_j)$ est nul pour tout $j \neq 1$. En continuant de proche en proche on arrive à

$$(e_1^* \wedge \cdots \wedge e_n^*)(e_1, \ldots, e_n) = \cdots = e_1^*(e_1) = 1.$$

On a donc montré que sur tout espace de dimension $n \geq 1$ existe une forme n-linéaire alternée non nulle.

Notons S_n l'ensemble des permutations de $\{1, \ldots, n\}$, et soit $\sigma \in \mathrm{S}_n$; on sait que σ peut être obtenue comme produit d'un certain nombre k de transpositions. Si on considère une fonction n-linéaire alternée φ, l'expression $\varphi(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)})$ est donc obtenue à partir de $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ par k transpositions des vecteurs, donc

$$\varphi(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)}) = (-1)^k \varphi(x_1, \ldots, x_n).$$

Supposons maintenant que $(e_1, \ldots, e_n)$ soit une base de E et que $\varphi_{\mathbf{e}}$ soit une fonction n-linéaire alternée sur E telle que $\varphi_{\mathbf{e}}(\mathbf{e}) = 1$. On aura $\varphi_{\mathbf{e}}(e_{\sigma(1)}, \ldots, e_{\sigma(n)}) = (-1)^k$, ce qui montre que l'expression $(-1)^k$ ne dépend que de σ. C'est la *signature* de la permutation σ, signature qui sera notée $\varepsilon(\sigma)$. On a donc

$$\varphi(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)}) = \varepsilon(\sigma)\varphi(x_1, \ldots, x_n)$$

pour toute fonction alternée φ sur l'espace E, toute permutation σ et tout système de vecteurs $(x_1, \ldots, x_n)$.

Théorème 4.4.1. *Soit* E *un espace vectoriel de dimension* $n \geq 1$, *muni d'une base* $\mathbf{e} = (e_1, \ldots, e_n)$ *; soient* $x_1, \ldots, x_n$ *des vecteurs de* E, *et* $x_j = \sum_{i=1}^n a_{i,j} e_i$ *leur décomposition dans la base* $\mathbf{e}$, *pour* $j = 1, \ldots, n$. *Pour toute forme* n*-linéaire alternée* φ *sur* E, *on a*

$$\varphi(x_1, \ldots, x_n) = \Big(\sum_{\sigma \in \mathrm{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1),1} \ldots a_{\sigma(n),n} \Big) \varphi(e_1, \ldots, e_n).$$

Il existe une et une seule forme n*-linéaire alternée* $\varphi_{\mathbf{e}}$ *sur* E *telle que* $\varphi_{\mathbf{e}}(e_1, \ldots, e_n) = 1$. *Toute autre forme* n*-linéaire alternée* ψ *sur* E *est proportionnelle à* $\varphi_{\mathbf{e}}$. *L'espace vectoriel des formes* n*-linéaires alternées sur un espace de dimension* n *(le même* n *aux deux endroits !) est donc de dimension* 1.

Expliquons la démonstration dans le cas $n = 3$ pour simplifier. En utilisant la multilinéarité, on obtient en développant

$$\varphi(x_1, x_2, x_3) = \sum a_{i_1,1} a_{i_2,2} a_{i_3,3}\, \varphi(e_{i_1}, e_{i_2}, e_{i_3}),$$

où la somme porte sur les 27 choix possibles de $(i_1, i_2, i_3) \in \{1, 2, 3\}^3$. Mais $\varphi(e_{i_1}, e_{i_2}, e_{i_3})$ est nul chaque fois que deux des indices i_j sont égaux. Ils ne reste plus alors que les six choix correspondant à une permutation σ de l'ensemble $\{1, 2, 3\}$, c'est à dire $(i_1, i_2, i_3) = (\sigma(1), \sigma(2), \sigma(3))$, donc

$$\varphi(x_1, x_2, x_3) = \sum_{\sigma \in \mathrm{S}_3} a_{\sigma(1),1} a_{\sigma(2),2} a_{\sigma(3),3}\, \varphi(e_{\sigma(1)}, e_{\sigma(2)}, e_{\sigma(3)}),$$

et on termine en utilisant $\varphi(e_{\sigma(1)}, e_{\sigma(2)}, e_{\sigma(3)}) = \varepsilon(\sigma)\varphi(e_1, e_2, e_3)$. On a déjà vu l'existence et l'unicité de $\varphi_{\mathbf{e}}$,

$$\varphi_{\mathbf{e}} = e_1^* \wedge \ldots \wedge e_n^*, \quad \varphi_{\mathbf{e}}(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{\sigma \in \mathrm{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1),1} \ldots a_{\sigma(n),n}.$$

D'après les formules précédentes il est clair que pour toute forme n-linéaire alternée ψ sur E on a $\psi = \psi(\mathbf{e})\varphi_{\mathbf{e}}$, ce qui montre que ψ est proportionnelle à $\varphi_{\mathbf{e}}$.

Remarques.

1. Si ψ_1 et ψ_2 sont deux formes n-linéaires alternées sur E et si $\psi_1(e_1, \ldots, e_n) = \psi_2(e_1, \ldots, e_n)$, alors $\psi_1 = \psi_2$.

2. L'unique forme n-linéaire alternée $\varphi_{\mathbf{e}}$ sur E telle que $\varphi_{\mathbf{e}}(e_1, \ldots, e_n) = 1$ est donc donnée par la formule

$$\varphi_{\mathbf{e}}(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{\sigma \in \mathrm{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1),1} \ldots a_{\sigma(n),n}.$$

On aurait pu partir directement de cette formule pour définir $e_1^* \wedge \ldots \wedge e_n^*$, mais l'autre méthode est peut-être un peu moins féroce !

Déterminant dans une base

Soit $\mathbf{e} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E ; on appelle *déterminant par rapport à la base* $\mathbf{e}$ l'unique forme n-linéaire alternée $\varphi_{\mathbf{e}}$ telle que $\varphi_{\mathbf{e}}(e_1, \ldots, e_n) = 1$. On le notera $\det_{\mathbf{e}}$.

Déterminant et indépendance. Si un système $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ est lié, on a vu dans la proposition 4.4.1 que $\det_{\mathbf{e}}(\mathbf{x}) = 0$. Réciproquement, si $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ est une base de

E, la fonction $\det_{\mathbf{x}}$ est proportionnelle à $\det_{\mathbf{e}}$, donc il existe λ tel que $\det_{\mathbf{x}} = \lambda \det_{\mathbf{e}}$; en appliquant au système $\mathbf{x}$ on obtient $\det_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}) = 1 = \lambda \det_{\mathbf{e}}(\mathbf{x})$, ce qui montre en particulier que $\det_{\mathbf{e}}(\mathbf{x}) \neq 0$. En appliquant au système $\mathbf{e}$ on voit que $\lambda = \det_{\mathbf{x}}(\mathbf{e})$, donc

$$\det_{\mathbf{x}} = \det_{\mathbf{x}}(\mathbf{e}) \det_{\mathbf{e}} .$$

Exemple d'application du principe d'unicité. La surface orientée $\mathrm{S}(x_1, x_2)$ du parallélogramme construit sur deux vecteurs x_1, x_2 de $\mathbb{R}^2$ est une forme 2-linéaire alternée, égale à 1 pour la base canonique, donc elle est égale au déterminant dans la base canonique. On peut généraliser aux volumes dans $\mathbb{R}^3$.

Déterminant des matrices

Considérons une matrice $n \times n$ comme formée de n vecteurs colonne. L'unique forme n-linéaire alternée sur $\mathbb{K}^n$ qui vaut 1 sur la base canonique donne le déterminant des matrices $n \times n$. Autrement dit :

Le déterminant d'une matrice $n \times n$ est l'unique forme n-linéaire des vecteurs colonne, qui est nulle quand deux colonnes sont égales, et vaut 1 pour la matrice unité I_n de taille $n \times n$.

Le déterminant de la matrice $\mathrm{A} = (a_{i,j})$ de taille $n \times n$ est donc donné par la "grosse formule"

$$\det \mathrm{A} = \sum_{\sigma \in \mathrm{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1),1} \dots a_{\sigma(n),n}.$$

On remarquera qu'on pourrait remplacer les nombres $a_{i,j}$ dans l'expression ci-dessus par des objets plus généraux, en particulier des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$. Si A est une matrice dont les coefficients sont des polynômes $\mathrm{P}_{i,j}$, son déterminant sera un polynôme $\mathrm{D} = \det \mathrm{A}$. Il est intéressant de noter que pour tout $a \in \mathbb{K}$, on aura alors $\mathrm{D}(a) = \det(\mathrm{P}_{i,j}(a))$: la valeur au point a du déterminant-polynôme est égale au déterminant de la matrice des valeurs au point a des coefficients-polynômes.

Développement du déterminant d'une matrice suivant une ligne

Soit $\mathrm{A} = (a_{i,j})$ une matrice de taille $n \times n$. Pour tous $i, j = 1, \dots, n$, désignons par $\mathrm{A}^{(i,j)}$ la matrice $(n-1) \times (n-1)$ obtenue en effaçant dans A la ligne i et la colonne j, et considérons l'expression

$$\varphi_i(\mathrm{A}) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{i,j} \det \mathrm{A}^{(i,j)}.$$

On peut déduire de la caractérisation précédente que $\varphi_i(\mathrm{A}) = \det \mathrm{A}$ pour tout indice $i = 1, \dots, n$: en effet, la formule obtenue par ce développement suivant une ligne définit une forme n-linéaire alternée des vecteurs colonne d'une matrice, égale à 1 pour la matrice identité I_n : si $\mathrm{A} = \mathrm{I}_n$, on aura $a_{i,j} = 0$ si $i \neq j$, et $a_{i,i} = 1$, $\mathrm{A}^{(i,i)} = \mathrm{I}_{n-1}$, donc

$$\varphi_i(\mathrm{I}_n) = (-1)^{2i} \det \mathrm{I}_{n-1} = 1.$$

Transposition. Déterminant et lignes de la matrice. La "grosse formule" du théorème 4.4.1 permet de voir que le déterminant de la transposée ${}^t\mathrm{A}$ de la matrice A est le même que le déterminant de la matrice A. Il en résulte que le déterminant est aussi une fonction alternée des lignes de la matrice, et qu'on peut caractériser la fonction qui

associe à chaque matrice son déterminant comme l'unique fonction définie sur l'espace des matrices qui est une forme n-linéaire alternée des lignes des matrices et qui est égale à 1 pour la matrice unité I_n. On déduit de ce qui précède la formule de développement suivant une colonne (qui revient à appliquer à la transposée le développement suivant une ligne).

Remarque. Soient $\mathbf{e}$ une base de E, $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ un système de vecteurs de E et A la matrice carrée dont les vecteurs colonne sont formés par les coordonnées des vecteurs x_j dans la base $\mathbf{e}$. Le déterminant de la matrice A est égal à $\det_{\mathbf{e}}(x_1, \ldots, x_n)$.

En effet, on obtient quand le système $\mathbf{x}$ varie deux fonctions n-linéaires alternées sur E qui coïncident sur $\mathbf{e}$, donc sont égales sur E^n.

Cette remarque permet de montrer que le déterminant d'un produit de matrices est égal au produit des déterminants. On voit aussi que le déterminant d'une matrice A est non nul si et seulement si elle est inversible.

Déterminant d'une matrice triangulaire. La "grosse formule", ou bien plus simplement le développement par rapport à la première colonne et une récurrence, permettent de voir que le déterminant d'une matrice triangulaire (supérieure) est égal au produit des coefficients diagonaux.

Proposition 4.4.2. *Considérons une matrice carrée* M *de la forme*

$$\mathrm{M} = \begin{pmatrix} \mathrm{A} & \mathrm{B} \\ 0 & \mathrm{D} \end{pmatrix}$$

où A *et* D *sont des matrices carrées. Le déterminant de* M *est égal à* $\det \mathrm{A} \det \mathrm{D}$.

Démonstration. Supposons que A soit de taille $p \times p$ et D de taille $q \times q$. Considérons lorsque B et D sont fixées la fonction

$$\mathrm{A} \to \varphi(\mathrm{A}) = \det \begin{pmatrix} \mathrm{A} & \mathrm{B} \\ 0 & \mathrm{D} \end{pmatrix}.$$

C'est une forme p-linéaire alternée des colonnes de A, qui est donc proportionnelle à la fonction $\mathrm{A} \to \det \mathrm{A}$, donc

$$\varphi(\mathrm{A}) = \varphi(\mathrm{I}_p) \det \mathrm{A} = \det \begin{pmatrix} \mathrm{I}_p & \mathrm{B} \\ 0 & \mathrm{D} \end{pmatrix} \det \mathrm{A}.$$

Il est facile de terminer en montrant que

$$\psi(\mathrm{D}) = \det \begin{pmatrix} \mathrm{I}_p & \mathrm{B} \\ 0 & \mathrm{D} \end{pmatrix} = \det \mathrm{D}$$

soit par le calcul (développer suivant la première colonne, puis récurrence sur p), soit en considérant ce déterminant $\psi(\mathrm{D})$ comme une fonction alternée des lignes de D et en raisonnant comme pour φ.

Bien entendu la formule se généralise dans le cas où la matrice M admet une décomposition en blocs qui est triangulaire supérieure, avec plus de deux blocs diagonaux carrés. Le déterminant de M dans ce cas est égal au produit des déterminants des blocs diagonaux.

Exercice. Démontrer ce qui précède avec la “grosse formule”, ou bien par développement suivant la première colonne et récurrence sur p.

ATTENTION !! La formule qui pourrait sembler “naturelle” pour calculer le déterminant d'une matrice carrée décomposée en blocs (tous carrés) de la forme

$$\mathrm{M} = \begin{pmatrix} \mathrm{A} & \mathrm{B} \\ \mathrm{C} & \mathrm{D} \end{pmatrix}$$

n'est pas vraie : le déterminant de M n'est pas en général égal à $\det \mathrm{A} \det \mathrm{D} - \det \mathrm{B} \det \mathrm{C}$.

Exercice.

a. Si A et D sont carrées et si A est inversible, le déterminant de la matrice M précédente est égal à $\det \mathrm{M} = \det \mathrm{A} \det(\mathrm{D} - \mathrm{C}\mathrm{A}^{-1}\mathrm{B})$.

b. Si A et D sont de même dimension et si A *commute* avec C (c'est à dire que $\mathrm{AC} = \mathrm{CA}$), on a $\det \mathrm{M} = \det(\mathrm{AD} - \mathrm{CB})$.

Indépendance linéaire et changement de corps de base

Soient $x_1, \ldots, x_p$ des vecteurs de $\mathbb{R}^n$, linéairement indépendants. Si on les considère maintenant comme des vecteurs du $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathbb{C}^n$, on aura beaucoup plus de choix de scalaires pour former des combinaisons linéaires (complexes), donc il n'est pas tout à fait évident que les vecteurs proposés restent $\mathbb{C}$-indépendants, c'est à dire que les conditions

$$\lambda_1, \ldots, \lambda_p \in \mathbb{C}, \quad \sum_{j=1}^{p} \lambda_j x_j = 0_{\mathbb{C}^n}$$

impliquent $\lambda_1 = \cdots = \lambda_p = 0$. C'est pourtant vrai. Dans le cas de $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$, on peut y arriver assez facilement en décomposant les coefficients λ_j en partie réelle et partie imaginaire, mais nous allons voir un résultat plus général valable pour tout sous-corps L de $\mathbb{C}$.

Proposition 4.4.3. *Soient* L *un sous-corps de* $\mathbb{C}$ *et* $x_1, \ldots, x_p$ *des vecteurs de* L^n *; si les vecteurs* $x_1, \ldots, x_p$ *sont linéairement indépendants dans le* L*-espace vectoriel* L^n*, ils restent* $\mathbb{C}$*-indépendants quand on les considère comme vecteurs de* $\mathbb{C}^n$*.*

Démonstration. Complétons le système $(x_1, \ldots, x_p)$ en une base $(x_1, \ldots, x_n)$ de L^n. Soit A la matrice dont les colonnes sont $x_1, \ldots, x_n$. Alors $\det \mathrm{A} \neq 0$. Mais quand on travaille dans $\mathbb{C}$, le calcul du déterminant est le même, donc les vecteurs sont aussi $\mathbb{C}$-indépendants.

Symétrisation et antisymétrisation

Considérons la fonction de trois variables réelles $f(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2 x_3$. Cette fonction est certainement *symétrique* par rapport à l'ensemble des variables x_1, x_2, x_3. En revanche, la fonction $f(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2^2$ n'est visiblement pas symétrique. Comment lui associer de façon “naturelle” une fonction symétrique ? Essayons la fonction

$$g(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2^2 + x_2 x_3^2 + x_3 x_1^2$$

qui a déjà l'air un peu plus symétrique. Mais elle n'est pas vraiment symétrique, mais seulement invariante par permutation circulaire $1 \to 2$, $2 \to 3$ et $3 \to 1$; si on effectue la transposition $(1, 2)$ on obtient en reclassant les termes

$$x_1^2 x_2 + x_2^2 x_3 + x_3^2 x_1$$

qui n'est pas la même fonction que g !

Pour comprendre le procédé de symétrisation, introduisons une famille d'applications bijectives T_σ de $\mathrm{Z} = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ dans Z, définies pour toute permutation σ de $\{1, 2, 3\}$ par

$$\mathrm{T}_\sigma(z) = (x_{\sigma^{-1}(1)}, x_{\sigma^{-1}(2)}, x_{\sigma^{-1}(3)}) \quad \text{pour tout} \quad z = (x_1, x_2, x_3) \in \mathrm{Z}.$$

On note que $\mathrm{T}_{id} = id_{\mathrm{Z}}$ et $\mathrm{T}_{\sigma_1} \circ \mathrm{T}_{\sigma_2} = \mathrm{T}_{\sigma_1 \circ \sigma_2}$ pour tout couple σ_1, σ_2 de permutations de $\{1, 2, 3\}$. On associera alors à toute fonction f de trois variables la nouvelle fonction f_s définie pour tout $z = (x_1, x_2, x_3)$ par la formule

$$f_s(z) = \frac{1}{3!} \sum_{\sigma \in \mathrm{S}_3} f(\mathrm{T}_\sigma(z)) =$$

$$= \frac{1}{6} \Big(f(x_1, x_2, x_3) + f(x_1, x_3, x_2) + f(x_2, x_1, x_3) + f(x_2, x_3, x_1) + f(x_3, x_1, x_2) + f(x_3, x_2, x_1) \Big).$$

Cette procédure se généralise à tout ensemble Z sur lequel est définie une *action* T du groupe S_n. On se limitera ici au cas où l'ensemble Z est un produit X^n, et où l'action d'une permutation $\sigma \in \mathrm{S}_n$ sur un élément $z = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathrm{Z}$ est définie par

$$\mathrm{T}_\sigma(z) = (x_{\sigma^{-1}(1)}, \ldots, x_{\sigma^{-1}(n)}),$$

c'est à dire que l'action consiste simplement à permuter les coordonnées du produit X^n. Il est encore clair que $\mathrm{T}_{id} = id_{\mathrm{Z}}$ et que $\mathrm{T}_{\sigma_1} \circ \mathrm{T}_{\sigma_2} = \mathrm{T}_{\sigma_1 \circ \sigma_2}$ pour tout couple $\sigma_1, \sigma_2 \in \mathrm{S}_n$.

Définition. La fonction réelle f définie sur $\mathrm{Z} = \mathrm{X}^n$ est *symétrique* si on a $f(z) = f(\mathrm{T}_\sigma(z))$ pour tout $z \in \mathrm{Z}$ et pour toute permutation $\sigma \in \mathrm{S}_n$.

On associera encore à toute fonction réelle f définie sur Z la nouvelle fonction f_s définie pour tout $z = (x_1, \ldots, x_n)$ par la formule

$$f_s(z) = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathrm{S}_n} f(\mathrm{T}_\sigma(z)).$$

Si f est symétrique, il est clair que $f = f_s$, parce que tous les termes $f(\mathrm{T}_\sigma(z))$ de la somme sont égaux à $f(z)$. Mais en fait, cette fonction f_s est symétrique pour toute fonction f. En effet

$$f(\mathrm{T}_\sigma(z)) = \frac{1}{n!} \sum_{\pi \in \mathrm{S}_n} f(\mathrm{T}_\pi(\mathrm{T}_\sigma(z))) = \frac{1}{n!} \sum_{\pi \in \mathrm{S}_n} f(\mathrm{T}_{\pi \circ \sigma}(z)).$$

La permutation σ étant fixée, on vérifie que l'application $\pi \in \mathrm{S}_n \to \pi \circ \sigma$ est une bijection de S_n. Par conséquent, si on effectue le "changement de variable" $\rho = \pi \circ \sigma$ dans l'expression ci-dessus, on verra que

$$f(\mathrm{T}_\sigma(z)) = \frac{1}{n!} \sum_{\rho \in \mathrm{S}_n} f(\mathrm{T}_\rho(z)) = f_s(z).$$

Exemples.

1. Symétriser en trois variables les fonctions $f(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2$, $f(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2^2$.

2. Prenons un cas un peu plus compliqué. Prenons $\mathrm{X} = \mathbb{R}^3$, puis $\mathrm{Z} = \mathrm{X}^3$, et pour éviter les doubles indices écrivons chaque $x \in \mathrm{X}$ comme $x = (a, b, c)$, ce qui donnera $x_j = (a_j, b_j, c_j)$ pour chaque vecteur x_j composante de $z = (x_1, x_2, x_3) \in \mathrm{Z}$. Symétriser la fonction $f(x_1, x_2, x_3) = a_1 b_2 c_3$.

Passons maintenant à l'antisymétrie. Supposons comme avant que $\mathrm{Z} = \mathrm{X}^n$, et faisons encore agir S_n par permutation des coordonnées. Une fonction réelle g définie sur Z est *antisymétrique* si

$$g(\mathrm{T}_\tau(z)) = -g(z)$$

pour toute *transposition* $\tau \in \mathrm{S}_n$. Il en résulte alors

$$g(\mathrm{T}_\sigma(z)) = \varepsilon(\sigma) g(z)$$

pour toute permutation σ (où $\varepsilon(\sigma)$ désigne la signature de la permutation σ).
Exemple. La fonction $g(x_1, x_2) = x_1 - x_2$ est antisymétrique sur $\mathrm{Z} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.
Exercice. Montrer que

$$\varepsilon(\sigma) = \prod_{i<j} \frac{\sigma(j) - \sigma(i)}{j - i}.$$

Pour antisymétriser une fonction f, on posera pour tout $z \in \mathrm{Z} = \mathrm{X}^n$

$$f_a(z) = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathrm{S}_n} \varepsilon(\sigma)\, f(\mathrm{T}_\sigma(z)).$$

Si f est déjà antisymétrique, on a $f_a = f$. Pour montrer que f_a est antisymétrique pour toute fonction f, on écrit, en désignant par τ une transposition quelconque de $\{1, \ldots, n\}$

$$f(\mathrm{T}_\tau(z)) = \frac{1}{n!} \sum_{\pi \in \mathrm{S}_n} \varepsilon(\pi) f(\mathrm{T}_\pi(\mathrm{T}_\tau(z))) = -\frac{1}{n!} \sum_{\pi \in \mathrm{S}_n} \varepsilon(\pi \circ \tau) f(\mathrm{T}_{\pi \circ \tau}(z)),$$

et on termine comme dans le cas symétrique.
Exercice. Antisymétriser en trois variables les deux fonctions

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2, \quad f(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2^2.$$

Revenons au cas linéaire. Soient E un espace de dimension n, $\mathbf{e} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E et $e_1^*, \ldots, e_n^*$ les fonctions coordonnées dans cette base ; posons sur $\mathrm{Z} = \mathrm{E}^n$

$$f(x_1, \ldots, x_n) = e_1^*(x_1) \ldots e_n^*(x_n).$$

Cette fonction est linéaire par rapport à chacune des variables $x_1, \ldots, x_n \in \mathrm{E}$. Il en résulte que l'antisymétrisée f_a est elle aussi linéaire par rapport à chaque variable. Considérons

$$n!\, f_a(e_1, \ldots, e_n) = \sum_{\sigma \in \mathrm{S}_n} \varepsilon(\sigma)\, e_1^*(e_{\sigma(1)}) \ldots e_n^*(e_{\sigma(n)}).$$

Chacun des produits $e_1^*(e_{\sigma(1)}) \ldots e_n^*(e_{\sigma(n)})$ est nul si $\sigma \neq id$, et égal à 1 pour $\sigma = id$, donc

$$n!\, f_a(e_1, \ldots, e_n) = 1.$$

On a donc trouvé une forme n-linéaire sur E, non identiquement nulle, à savoir $n!\, f_a$. C'est le déterminant dans la base $\mathbf{e}$.

Chapitre 5. Réduction des endomorphismes d'un espace vectoriel de dimension finie sur un sous-corps de $\mathbb{C}$

Dans ce chapitre, E est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$, où $\mathbb{K}$ sera le plus souvent un sous-corps de $\mathbb{C}$ (par exemple : $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$). Considérons deux exemples. Soit u l'application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par $u(x_1, x_2) = (2x_1 + x_2, x_1 + 2x_2)$; on voit que dans la base (f_1, f_2) de $\mathbb{R}^2$ définie par $f_1 = (1, 1)$, $f_2 = (1, -1)$, la matrice de u est diagonale. En effet on a $u(f_1) = 3f_1$ et $u(f_2) = f_2$. On dit que f_1 et f_2 sont des *vecteurs propres* de u, et que les scalaires 3 et 1 sont des *valeurs propres* correspondant à ces vecteurs propres. Une des questions fondamentales de ce chapitre est d'étudier la possibilité de trouver une base de E formée de vecteurs propres d'un endomorphisme u donné. On dira dans ce cas que u est *diagonalisable*.

Si on définit l'endomorphisme v de $\mathbb{R}^2$ par la formule $v(x_1, x_2) = (x_2, 0)$, on voit que la seule valeur propre possible pour v est 0, et les seuls vecteurs propres possibles sont de la forme $(x_1, 0)$, donc on ne peut pas trouver une base de $\mathbb{R}^2$ formée de vecteurs propres de v. Il existe donc des endomorphismes non diagonalisables, et nous donnerons des critères de diagonalisabilité.

L'une des motivations pour l'étude de la diagonalisation est la suivante : dans un certain nombre de situations, on étudie un système qui évolue dans le temps par étapes successives, et on décrit son état au temps n par un vecteur $\mathrm{X}_n \in \mathbb{R}^d$; dans certains modèles simples (les chaînes de Markov par exemple), l'état X_{n+1} est obtenu en multipliant X_n par une matrice carrée M de taille $d \times d$, c'est à dire que $\mathrm{X}_{n+1} = \mathrm{M}\mathrm{X}_n$, donc $\mathrm{X}_n = \mathrm{M}^n\mathrm{X}_0$. Pour pouvoir prévoir l'évolution du système lorsque le temps n devient grand, on est donc conduit à étudier la suite des matrices M^n. Cette étude est évidente si M est diagonale, et encore assez facile quand M est diagonalisable. On rencontre une situation analogue lorsqu'on veut résoudre les *systèmes différentiels linéaires*, qui sont des systèmes d'équations différentielles linéaires que l'on peut écrire sous la forme matricielle $\mathrm{X}'(t) = \mathrm{A}\mathrm{X}(t)$, où $\mathrm{X}(t)$ est un vecteur dépendant du temps $t \in \mathbb{R}$ et A une matrice carrée de taille $d \times d$; si on sait diagonaliser A, le problème se décompose immédiatement en d équations d'une seule variable.

5.1. Polynôme caractéristique ; vecteurs propres et valeurs propres

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$; rappelons qu'un *endomorphisme* de E est une application linéaire de E dans E, et que nous avons noté Id_E *l'endomorphisme identité* de E, qui est défini par $\mathrm{Id}_\mathrm{E}(x) = x$ pour tout $x \in \mathrm{E}$. Le produit de deux endomorphismes est obtenu par la composition des applications, $uv = u \circ v$. On désigne par $\mathcal{L}(\mathrm{E})$ l'espace vectoriel des endomorphismes de E ; muni de l'opération de produit, c'est une *algèbre*.

Déterminant d'un endomorphisme

Soit E un espace vectoriel de dimension finie > 0 sur le corps $\mathbb{K}$; on va montrer qu'on peut définir le déterminant d'un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$, indépendamment du choix d'une base de E.

Montrons d'abord une méthode "à la main". Soit $\mathbf{e}$ une base de E, et notons $\mathrm{A}_{\mathbf{e}} = \mathrm{mat}(u, \mathbf{e}, \mathbf{e}) = \mathrm{mat}_{\mathbf{e}}(u)$ la matrice de u par rapport à la base $\mathbf{e}$; considérons le déterminant $\det \mathrm{A}_{\mathbf{e}}$ de cette matrice. Si on change de base, on aura $\mathrm{A}_{\mathbf{f}} = \mathrm{V}^{-1}\mathrm{A}_{\mathbf{e}}\mathrm{V}$, donc

$$\det \mathrm{A}_{\mathbf{f}} = \det \mathrm{V}^{-1} \det \mathrm{A}_{\mathbf{e}} \det \mathrm{V} = \det \mathrm{A}_{\mathbf{e}},$$

ce qui montre que le déterminant de la matrice de u ne dépend pas de la base choisie, donc il serait raisonnable de dire que c'est le *déterminant de* u. Indiquons ensuite une méthode super-conceptuelle. Posons $n = \dim \mathrm{E}$; l'espace vectoriel $\wedge^n \mathrm{E}^*$ des formes n-linéaires alternées sur E est de dimension 1, et l'application qui associe à chaque $\varphi \in \wedge^n \mathrm{E}^*$ la forme $\mathrm{T}\varphi$ définie par

$$(\mathrm{T}\varphi)(x_1, \ldots, x_n) = \varphi(u(x_1), \ldots, u(x_n))$$

est un endomorphisme de $\wedge^n \mathrm{E}^*$, donc c'est une homothétie. Le coefficient de cette homothétie sera appelé $\det u$.

Pour finir, donnons la méthode que nous emploierons dans la suite de la section ; c'est une variante adoucie de la précédente. Soit $u \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ et soit $\mathbf{e} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base de E ; la fonction

$$\varphi_{\mathbf{e}}(x_1, \ldots, x_n) = \det_{\mathbf{e}}(u(x_1), \ldots, u(x_n))$$

est une forme n-linéaire alternée sur E, donc elle est proportionnelle à la fonction $\det_{\mathbf{e}}$. Il existe donc $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $\varphi_{\mathbf{e}} = \lambda \det_{\mathbf{e}}$. Il est facile de vérifier que λ ne dépend que de u et pas de la base $\mathbf{e}$ choisie : si on a une deuxième base $\mathbf{f}$ de E, on sait qu'il existe $\mu \neq 0$ tel que $\det_{\mathbf{f}} = \mu \det_{\mathbf{e}}$, donc

$$\varphi_{\mathbf{f}}(x_1, \ldots, x_n) = \det_{\mathbf{f}}(u(x_1), \ldots, u(x_n)) =$$

$$= \mu \det_{\mathbf{e}}(u(x_1), \ldots, u(x_n)) = \mu\lambda \det_{\mathbf{e}}(x_1, \ldots, x_n) = \lambda \det_{\mathbf{f}}(x_1, \ldots, x_n).$$

On va appeler *déterminant de* u cette constante λ qui ne dépend que de u.

Définition 5.1.1. Soit E un espace vectoriel de dimension $n > 0$; le déterminant d'un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ est donné par

$$\det u = \det_{\mathbf{e}}(u(e_1), \ldots, u(e_n)),$$

où $\mathbf{e}$ est une base quelconque de E. On a alors pour tout système $(x_1, \ldots, x_n)$ de n vecteurs de E

$$\det_{\mathbf{e}}(u(x_1), \ldots, u(x_n)) = \det(u)\ \det_{\mathbf{e}}(x_1, \ldots, x_n).$$

Proposition 5.1.1. *Le déterminant des endomorphismes vérifie les propriétés suivantes :*

1. $\det(\mathrm{Id}_{\mathrm{E}}) = 1$.

2. Le déterminant d'un produit d'endomorphismes est égal au produit des déterminants,

$$\det(u \circ v) = \det u \det v.$$

3. L'endomorphisme u est inversible si et seulement si $\det(u) \neq 0$. *Lorsque l'inverse de u existe,* $\det(u^{-1}) = (\det(u))^{-1}$.

4. Si $\mathbf{e}$ est une base de E, *le déterminant d'un endomorphisme u de* E *est égal au déterminant de la matrice de u par rapport à la base $\mathbf{e}$.*

Démonstration. Commençons par la fin. On a remarqué que pour tout système $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ de vecteurs de E, le déterminant $\det_{\mathbf{e}}(x_1, \ldots, x_n)$ est égal au déterminant

de la matrice $\mathrm{M}_{\mathbf{x}}$ dont les colonnes sont les vecteurs colonne successifs des coordonnées de $x_1, \ldots, x_n$ par rapport à la base $\mathbf{e}$. On voit donc que $\det(u) = \det_{\mathbf{e}}(u(e_1), \ldots, u(e_n))$ est égal au déterminant de la matrice de u dans la base $\mathbf{e}$. Revenons au point 1. Il est clair d'après la définition que $\det(\mathrm{Id}_{\mathrm{E}}) = 1$. Soit $\mathbf{e}$ une base de E ; on aura

$$\det(u \circ v) = \det_{\mathbf{e}}(u(v(e_1)), \ldots, u(v(e_n))) = \det u \, \det_{\mathbf{e}}(v(e_1), \ldots, v(e_n)) = \det u \, \det v.$$

Passons au point trois. Si u est inversible, on aura $1 = \det(u\, u^{-1}) = \det(u)\, \det(u^{-1})$, ce qui prouve que $\det(u) \neq 0$. Réciproquement, si u n'est pas inversible, il existe un vecteur $x \neq 0$ dans E tel que $u(x) = 0$. On complète en une base $(x, e_2, \ldots, e_n)$ de E, et dans cette base la matrice M de u a une première colonne nulle, donc $\det u = \det \mathrm{M} = 0$.

Interprétation physique dans $\mathbb{R}^3$. Le déterminant du système de vecteurs $(\mathrm{X}_1, \mathrm{X}_2, \mathrm{X}_3)$ est égal au volume orienté du parallélépipède construit sur ces trois vecteurs. Si u est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$, le déterminant de u est le facteur de transformation des volumes, quand on prend l'image par u.

Valeurs propres, vecteurs propres

Définitions 5.1.2. Soient E un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{K}$ et $u \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$; un vecteur $x \in \mathrm{E}$ est *vecteur propre* de u si $x \neq 0_{\mathrm{E}}$ et si $u(x) \in \mathbb{K}x$.

Si x est vecteur propre de u il existe donc $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $u(x) = \lambda x$. Un élément $\lambda \in \mathbb{K}$ est *valeur propre* de u s'il existe un vecteur $x \neq 0_{\mathrm{E}}$ dans E tel que $ux = \lambda x$.

Exemple. L'application linéaire u de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ dont la matrice dans la base canonique est

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

admet $(1, 0)$ pour vecteur propre, avec valeur propre $\lambda = 2$.

L'application linéaire de rotation d'angle $\pi/2$ dans $\mathbb{R}^2$ n'admet aucun vecteur propre.

Proposition 5.1.2. *Soient* E *un espace vectoriel de dimension* $n > 0$ *sur* $\mathbb{K}$ *et* u *un endomorphisme de* E *; le nombre* λ *est valeur propre de* u *si et seulement si* $\lambda \in \mathbb{K}$ *et* $\det(u - \lambda\, \mathrm{Id}_{\mathrm{E}}) = 0$. *Si* A *est la matrice de* u *dans une base de* E*, ce qui précède équivaut à dire que* λ *est valeur propre de* u *si et seulement si* $\lambda \in \mathbb{K}$ *et* $\det(\mathrm{A} - \lambda \mathrm{I}_n) = 0$.

Démonstration. Supposons que $\lambda \in \mathbb{K}$ soit valeur propre de u. Alors il existe un vecteur $x \neq 0_{\mathrm{E}}$ tel que $(u - \lambda\, \mathrm{Id}_{\mathrm{E}})(x) = 0_{\mathrm{E}}$, donc $u - \lambda\, \mathrm{Id}_{\mathrm{E}}$ n'est pas injectif, donc pas inversible, ce qui implique $\det(u - \lambda\, \mathrm{Id}_{\mathrm{E}}) = 0$. Inversement si $\det(u - \lambda\, \mathrm{Id}_{\mathrm{E}}) = 0$, l'endomorphisme $u - \lambda\, \mathrm{Id}_{\mathrm{E}}$ n'est pas inversible donc pas injectif d'après la proposition 4.2.1, donc il existe $x \neq 0_{\mathrm{E}}$ tel que $ux = \lambda x$.

Lemme. *Soient* φ *une forme* p*-linéaire sur* E *et* $y_1, \ldots, y_p$, $z_1, \ldots, z_p$ *des vecteurs de* E *fixés ; la fonction*

$$\lambda \in \mathbb{K} \to \varphi(y_1 + \lambda z_1, \ldots, y_p + \lambda z_p)$$

est une fonction polynomiale de la variable λ*, de degré* $\leq p$*, à coefficients dans* $\mathbb{K}$ *: il existe un polynôme* $\mathrm{P} \in \mathbb{K}[\mathrm{X}]$ *de degré* $\leq p$*, de la forme*

$$\mathrm{P} = \varphi(y_1, \ldots, y_p) + c_1 \mathrm{X} + \cdots + c_{p-1} \mathrm{X}^{p-1} + \varphi(z_1, \ldots, z_p)\, \mathrm{X}^p$$

et tel que $\varphi(y_1 + \lambda z_1, \ldots, y_p + \lambda z_p) = \mathrm{P}(\lambda)$ *pour tout* $\lambda \in \mathbb{K}$.

Démonstration. Par récurrence sur p ; on peut en fait démontrer la formule plus explicite

$$\varphi(y_1 + \lambda z_1, \ldots, y_p + \lambda z_p) = \sum_{\mathrm{L} \subset \{1,\ldots,p\}} \lambda^{|\mathrm{L}|} \varphi(w_1^{\mathrm{L}}, \ldots, w_p^{\mathrm{L}})$$

où $|\mathrm{L}|$ désigne le cardinal du sous-ensemble L, $w_j^{\mathrm{L}} = z_j$ si $j \in \mathrm{L}$ et $w_j^{\mathrm{L}} = y_j$ si $j \notin \mathrm{L}$. Il y a 2^p termes dans la somme, correspondant aux 2^p sous-ensembles de l'ensemble $\{1, \ldots, p\}$.

Si E est de dimension n, le déterminant de $u - \lambda \,\mathrm{Id}_{\mathrm{E}}$ est une fonction polynomiale de degré n en λ d'après le lemme précédent, puisque dans toute base $\mathbf{e}$ de E on a

$$\det(u - \lambda \,\mathrm{Id}_{\mathrm{E}}) = \det_{\mathbf{e}}(u(e_1) - \lambda e_1, \ldots, u(e_n) - \lambda e_n),$$

et il existe un polynôme $\chi_u \in \mathbb{K}[\mathrm{X}]$, de la forme

$$\chi_u = \det(u) + c_1 \mathrm{X} + \cdots + c_{n-1} \mathrm{X}^{n-1} + (-1)^n \mathrm{X}^n$$

tel que $\det(u - \lambda \,\mathrm{Id}_{\mathrm{E}}) = \chi_u(\lambda)$ pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$. C'est le *polynôme caractéristique* de u. On note que $\deg \chi_u = \dim \mathrm{E} = n$.

Exercices.

1. Trace d'un endomorphisme. Montrer que le coefficient c_{n-1} est égal à

$$(-1)^{n-1} \sum_{i=1}^{n} a_{i,i},$$

si $\mathrm{A} = (a_{i,j})$ est la matrice de u dans une base de E. En déduire que la quantité $\sum_{i=1}^{n} a_{i,i}$ ne dépend que de u. On l'appelle la *trace* de l'endomorphisme u (et aussi la trace de la matrice). On notera $\mathrm{tr}\,\mathrm{A}$, $\mathrm{tr}\, u$ pour la trace de A et de u.

2. Montrer que le coefficient c_k du polynôme caractéristique peut s'exprimer à partir des mineurs d'ordre $n - k$ de la matrice de u dans une base $\mathbf{e}$.

Remarque. Si $\mathbf{e}$ est une base de E et si $\mathrm{A} = (a_{i,j})$ est la matrice de u dans cette base, on peut considérer la matrice B à coefficients polynômes dont les termes diagonaux sont les polynômes de degré un $a_{i,i} - \mathrm{X}$ et dont les coefficients non-diagonaux sont les polynômes constants $a_{i,j}$. On peut écrire symboliquement $\mathrm{B} = \mathrm{A} - \mathrm{X}\,\mathrm{I}_n$ et calculer le déterminant $\det(\mathrm{A} - \mathrm{X}\,\mathrm{I}_n)$ qui est un polynôme. On vérifiera comme au début de la section que ce déterminant-polynôme ne dépend pas de la base choisie, mais seulement de u : c'est le polynôme caractéristique χ_u.

Corollaire 5.1.1. *Soient* E *un espace vectoriel de dimension finie* > 0 *sur* $\mathbb{K}$ *et* $u \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ *; les valeurs propres de* u *sont les racines de* χ_u *qui sont dans* $\mathbb{K}$.

Exemple. Prenons $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. L'endomorphisme r_θ de rotation d'angle θ dans $\mathbb{R}^2$ a pour matrice

$$\mathrm{R}_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

dans la base canonique. Le polynôme caractéristique est $\chi = \mathrm{X}^2 - 2\mathrm{X}\cos\theta + 1$. Lorsque $\sin\theta \neq 0$, ce trinôme n'a pas de racine réelle, donc l'endomorphisme r_θ n'a aucune valeur propre et aucun vecteur propre.

En particulier, lorsque $\theta = \pi/2$, l'endomorphisme $r_{\pi/2}$ de $\mathbb{R}^2$ n'a pas de valeur propre. En revanche, l'endomorphisme de $\mathbb{C}^2$ défini par $u(z_1, z_2) = (-z_2, z_1)$ admet les vecteurs $(1, i)$ et $(1, -i)$ comme vecteurs propres, avec $-i$ et i comme valeurs propres. Dans ces deux exemples la matrice (dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{C}^2$) est la même, la différence vient du changement de corps de base.

Polynôme caractéristique d'une matrice

Si A est une matrice $n \times n$ à coefficients dans $\mathbb{K}$, on désigne par χ_{A} le polynôme caractéristique de l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ défini par $\mathrm{Y} \in \mathbb{K}^n \to \mathrm{AY} \in \mathbb{K}^n$. On a pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$

$$\chi_{\mathrm{A}}(\lambda) = \det(\mathrm{A} - \lambda \mathrm{I}_n).$$

Si E est un espace vectoriel de dimension n sur $\mathbb{K}$, si on choisit une base de E et si A est la matrice d'un endomorphisme u de E dans cette base, on aura $\chi_u = \chi_{\mathrm{A}}$.

Exemples de polynômes caractéristiques

1. Cas d'une matrice triangulaire $\mathrm{A} = (a_{i,j})$: on voit directement dans ce cas que $\chi_{\mathrm{A}} = \prod_{i=1}^{n}(a_{i,i} - \mathrm{X})$ puisque le déterminant caractéristique est triangulaire. Les valeurs propres de A sont donc les coefficients diagonaux de la matrice triangulaire A.

2. Calcul par blocs ; le polynôme caractéristique d'une matrice triangulaire par blocs est le produit des polynômes caractéristiques des blocs diagonaux.

3. Etant donné un polynôme $\mathrm{P} = a_0 + a_1\mathrm{X} + \cdots + a_{n-1}\mathrm{X}^{n-1} + \mathrm{X}^n$ de degré $n \geq 1$ à coefficients dans $\mathbb{K}$, on lui associe une matrice $n \times n$ appelée *matrice compagnon* de P,

$$\mathrm{M(P)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & -a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & \dots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Le calcul du polynôme caractéristique de la matrice M(P) se fait par récurrence sur le degré n de P, en développant par rapport à la première ligne. On montre que

$$\chi_{\mathrm{M(P)}} = (-1)^n \, \mathrm{P}.$$

Définition 5.1.3. Soit u un endomorphisme de E ; on dit qu'un sous-espace vectoriel F de E est *stable par* u si $u(\mathrm{F}) \subset \mathrm{F}$, c'est à dire

$$\forall x \in \mathrm{F}, \quad u(x) \in \mathrm{F}.$$

Exemples. Les sous-espaces $\{0\}$ et E sont toujours stables. Si $u \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$, les deux sous-espaces $\ker u$ et $u(\mathrm{E})$ sont stables par u. Si x est un vecteur propre de u, la droite $\mathbb{K}x$ est stable par u.

Remarques.

1. Si F est engendré par $(y_1, \dots, y_q)$, il suffit que $u(y_j) \in \mathrm{F}$ pour tout $j = 1, \dots, q$ pour que F soit stable par u.

2. Si F est stable par u, si $\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_p)$ est une base de F et si

$$\mathbf{b} = (f_1, \dots, f_p, x_{p+1}, \dots, x_n)$$

est une base de E obtenue en complétant la base $\mathbf{f}$ de F, la matrice de u dans la base $\mathbf{b}$ est triangulaire par blocs pour la décomposition $\mathrm{E} = [f_1, \dots, f_p] \oplus [x_{p+1}, \dots, x_n]$.

Proposition 5.1.3. *Soient $u, v \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$; si $u \circ v = v \circ u$ alors $\ker v$ et $v(\mathrm{E})$ sont stables par u.*

Démonstration. Supposons que $v(x) = 0_{\mathrm{E}}$. On voit que $v(u(x)) = u(v(x)) = 0_{\mathrm{E}}$, donc $u(x) \in \ker v$, ce qui montre que $\ker v$ est stable par u. Si $y = v(x)$ appartient à l'image de v, on aura $u(y) = u(v(x)) = v(u(x)) \in v(\mathrm{E})$, donc l'image $v(\mathrm{E})$ est stable par u.

Si un sous-espace $\mathrm{F} \subset \mathrm{E}$ est stable par $u \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$, on peut définir un endomorphisme v de F en posant $v(y) = u(y) \in \mathrm{F}$ pour tout $y \in \mathrm{F}$ (on aurait pu aussi définir une application linéaire w de F dans E en posant $w(y) = u(y) \in \mathrm{E}$ pour tout $y \in \mathrm{F}$! cela peut sembler du pinaillage, mais il est important de comprendre que ces trois objets sont différents, parce que l'ensemble de définition ou bien l'ensemble d'arrivée n'est pas le même. Dans ce chapitre on ne se servira pas de w, mais de v).

Définition 5.1.4. Soient u un endomorphisme de E et F un sous-espace vectoriel de E stable par u ; *l'endomorphisme restriction* de u au sous-espace F est l'endomorphisme $v = u_{|\mathrm{F}} : \mathrm{F} \to \mathrm{F}$ défini par

$$\forall y \in \mathrm{F}, \quad v(y) = u(y) \in \mathrm{F}.$$

Exemples. La restriction de Id_E à F est Id_F. Si F est stable par u, il est stable par toutes les puissances u^n et la restriction de u^n à F est la puissance v^n de la restriction v de u. Si F est stable par u_1 et u_2, il est stable par $\lambda u_1 + u_2$ et la restriction de $\lambda u_1 + u_2$ est $\lambda v_1 + v_2$; par exemple, la restriction de $u - \lambda\,\mathrm{Id}_\mathrm{E}$ est $v - \lambda\,\mathrm{Id}_\mathrm{F}$.

Si on aime bien les grands mots, on peut traduire le paragraphe précédent en disant que l'ensemble $\mathcal{L}_\mathrm{F}(\mathrm{E})$ des endomorphismes u de E qui laissent stable un sous-espace donné F est une *sous-algèbre* de $\mathcal{L}(\mathrm{E})$, c'est à dire un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(\mathrm{E})$, contenant l'identité et tel que $u_1 u_2 \in \mathcal{L}_\mathrm{F}(\mathrm{E})$ chaque fois que $u_1, u_2 \in \mathcal{L}_\mathrm{F}(\mathrm{E})$, et en disant ensuite que l'application de restriction $u \to u_{|\mathrm{F}}$ est un *homomorphisme d'algèbre* de $\mathcal{L}_\mathrm{F}(\mathrm{E})$ dans $\mathcal{L}(\mathrm{F})$.

Polynôme caractéristique de la restriction à un sous-espace stable

Supposons que $u \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ admette un sous-espace stable F, et désignons par v la restriction de u à F. On a dit qu'en formant une base de E en prenant d'abord une base $\mathbf{f}$ de F, suivie d'une base d'un supplémentaire quelconque G de F dans E, on obtient pour u une matrice M triangulaire par blocs pour la décomposition $\mathrm{E} = \mathrm{F} \oplus \mathrm{G}$, dont le coin "nord-ouest" est la matrice A de v dans la base $\mathbf{f}$. Cela implique d'après la proposition 4.4.2 que le polynôme caractéristique de v divise χ_u. Dans le cas où l'espace est somme directe de deux sous-espaces stables F_1 et F_2, on choisit une base de E formée d'une base $\mathbf{f}_1$ de F_1 suivie d'une base $\mathbf{f}_2$ de F_2. Dans cette base de E, la matrice M est diagonale par blocs, avec deux blocs diagonaux A_1 et A_2 qui sont les matrices des restrictions v_1 et v_2 de u par rapport aux bases $\mathbf{f}_1$ et $\mathbf{f}_2$. Il en résulte que le polynôme caractéristique de u est le produit des polynômes caractéristiques des restrictions v_1 et v_2 de u aux sous-espaces F_1 et F_2.

Proposition 5.1.4. *Si* F *est un sous-espace stable pour un endomorphisme* $u \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ *et si* v *désigne la restriction de* u *à* F, *le polynôme* χ_v *divise* χ_u. *Si* $\mathrm{E} = \mathrm{F}_1 \oplus \mathrm{F}_2$, *où* F_1 *et* F_2 *sont stables par* u, *on a*

$$\chi_u = \chi_{v_1}\,\chi_{v_2}$$

où v_1 *et* v_2 *désignent les restrictions de* u *à* F_1 *et* F_2.

Valeurs propres, vecteurs propres : le cas complexe

Lorsque E est un espace vectoriel de dimension n sur $\mathbb{C}$, toutes les racines du polynôme caractéristique sont automatiquement dans $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, donc toutes les racines de χ_u sont des valeurs propres de u dans ce cas. De plus, on sait d'après le théorème de d'Alembert que tout polynôme de degré ≥ 1 à coefficients complexes a au moins une racine complexe (et en fait, exactement n quand on les compte avec leur ordre de multiplicité) donc tout endomorphisme de E admet au moins un vecteur propre.

Donc : *sur $\mathbb{C}$, tout endomorphisme a une droite stable.*

Exemple des matrices de Jordan. Il est possible qu'il n'existe qu'une seule direction propre pour une matrice donnée. C'est le cas pour une matrice de la forme

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

dont le polynôme caractéristique est $\chi = \mathrm{X}^4$, la seule valeur propre est $\lambda = 0$ et les seuls vecteurs propres sont de la forme $(a, 0, 0, 0)$.

Cas réel en dimension impaire

On sait que tout polynôme à coefficients réels de degré impair admet une racine réelle (théorème des valeurs intermédiaires). Un endomorphisme d'un espace réel de dimension impaire a donc toujours au moins un vecteur propre.

Exemple. Une isométrie u de $\mathbb{R}^3$ admet toujours un vecteur $x \neq 0$ tel que $u(x) = \pm x$.

Valeurs propres d'une matrice à coefficients dans un sous-corps $\mathbb{K}$ de $\mathbb{C}$

Une matrice A de taille $n \times n$ à coefficients dans $\mathbb{K}$ est en particulier une matrice à coefficients dans $\mathbb{C}$ et définit donc un endomorphisme $\mathrm{A}^{\mathbb{C}}$ de $\mathbb{C}^n$ auquel la discussion du paragraphe précédent s'applique. L'endomorphisme $\mathrm{A}^{\mathbb{C}}$ est défini par le calcul matriciel,

$$\forall \mathrm{Z} \in \mathbb{C}^n, \quad \mathrm{A}^{\mathbb{C}}(\mathrm{Z}) = \mathrm{AZ}.$$

Exemple. Matrice R_θ de la rotation d'angle θ : pour cette matrice on a le polynôme caractéristique $\chi = \mathrm{X}^2 - 2(\cos\theta)\,\mathrm{X} + 1$, qui admet les deux racines complexes (conjuguées) $\lambda = \cos\theta \pm i \sin\theta$. On trouve une base de $\mathbb{C}^2$ formée de deux vecteurs propres de l'endomorphisme $\mathrm{R}_\theta^{\mathbb{C}}$, les vecteurs $(1, i)$ et $(1, -i)$ de $\mathbb{C}^2$. Il faut donc faire bien attention au changement de corps. La rotation r_θ d'angle θ (avec $\sin\theta \neq 0$) dans le plan $\mathbb{R}^2$ n'a pas de vecteur propre, mais sa matrice a des valeurs propres complexes, qui donnent des vecteurs propres pour l'endomorphisme $\mathrm{R}_\theta^{\mathbb{C}}$ de $\mathbb{C}^2$ qui a la même matrice.

D'après le théorème de d'Alembert, on peut factoriser dans $\mathbb{C}[\mathrm{X}]$ le polynôme caractéristique χ_{A} en facteurs de degré 1,

$$\chi_{\mathrm{A}} = (\lambda_1 - \mathrm{X}) \dots (\lambda_n - \mathrm{X}),$$

où chaque λ_i est une des valeurs propres de A. Chaque valeur propre peut apparaître plusieurs fois, c'est à dire que certaines valeurs propres peuvent être racines multiples du polynôme caractéristique. Si on compte les valeurs propres avec leur ordre de multiplicité comme racines de χ_{A}, on trouve par identification que $\det \mathrm{A}$ est égal au produit des valeurs propres.

Proposition 5.1.5. *Soit* E *un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, de dimension finie > 0 ; tout endomorphisme u de l'espace* E *admet une droite ou un plan stable.*

Démonstration. En passant à la matrice (réelle) A de u dans une base $\mathbf{e} = (e_1, \dots, e_n)$ de E on trouve une valeur propre complexe $\lambda = a + ib$ de la matrice, $a, b \in \mathbb{R}$. Si $b = 0$ (c'est à dire que $\lambda \in \mathbb{R}$), λ est valeur propre de u, et il lui correspond une droite vectorielle

stable par u. Sinon, on peut trouver un vecteur propre $\mathrm{Z} = \mathrm{X} + i\mathrm{Y} \in \mathbb{C}^n$ de la matrice A, où $\mathrm{X}, \mathrm{Y} \in \mathbb{R}^n$. On voit que X et Y sont $\mathbb{R}$-indépendants (sinon, si $\mathrm{Y} = \mu\mathrm{X}$, μ réel, on aurait $(1 + i\mu)\mathrm{AX} = (1 + i\mu)(a + ib)\mathrm{X}$, donc $\mathrm{AX} = a\mathrm{X} + ib\mathrm{X}$, ce qui est impossible puisque AX est réel et $b \neq 0$, $\mathrm{X} \neq 0$), donc X et Y engendrent un plan passant par 0. La relation

$$\mathrm{A}(\mathrm{X} + i\mathrm{Y}) = (a + ib)(\mathrm{X} + i\mathrm{Y}) = (a\mathrm{X} - b\mathrm{Y}) + i(b\mathrm{X} + a\mathrm{Y})$$

montre par identification que $\mathrm{AX} = a\mathrm{X} - b\mathrm{Y}$ et $\mathrm{AY} = b\mathrm{X} + a\mathrm{Y}$. Si on écrit $\mathrm{X} = (c_1, \ldots, c_n) \in \mathbb{R}^n$ et $\mathrm{Y} = (d_1, \ldots, d_n) \in \mathbb{R}^n$ et si on pose

$$x = \sum_{i=1}^{n} c_i e_i \in \mathrm{E}\,; \quad y = \sum_{i=1}^{n} d_i e_i \in \mathrm{E},$$

on aura aussi $u(x) = ax - by$ et $u(y) = bx + ay$, donc le plan $[x, y]$ est stable par u.

Exemple. Réduction sur $\mathbb{R}$ de la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Le polynôme caractéristique est $\mathrm{X}^4 + 1$, on trouve quatre racines complexes $\lambda = \gamma(\pm 1 \pm i)$ où $\gamma = \sqrt{2}/2$. Pour chaque racine λ le vecteur $(\lambda^3, \lambda^2, \lambda, 1) \in \mathbb{C}^4$ est vecteur propre et on obtient un plan stable en séparant partie réelle et imaginaire.

5.2. Sous-espaces propres d'un endomorphisme

Si $u \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ et si $\mu \in \mathbb{K}$ est une valeur propre de u, le sous-espace vectoriel

$$\mathrm{E}_\mu = \ker(u - \mu\,\mathrm{Id}_\mathrm{E}) = \{x \in \mathrm{E} : ux = \mu x\}$$

est différent de $\{0_\mathrm{E}\}$. Tout vecteur $x \neq 0_\mathrm{E}$ de E_μ est un vecteur propre de u de valeur propre μ. On appelle E_μ le *sous-espace propre* de u associé à la valeur propre μ. Il est clair que E_μ est un sous-espace stable pour u. Si $v \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ commute avec u, il commute avec $u - \lambda\,\mathrm{Id}_\mathrm{E}$ donc les sous-espaces propres de u sont stables par v d'après la proposition 5.1.3.

Proposition 5.2.1. *Les sous-espaces propres d'un endomorphisme u forment une somme directe.*

Démonstration. On démontre cette propriété par récurrence sur le nombre de sous-espaces propres considérés. Supposons donc que toute famille de $k - 1$ sous-espaces propres forme une somme directe, et montrons que cela reste vrai pour k. Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ des valeurs propres de u, deux à deux distinctes, et soient $\mathrm{E}_1, \ldots, \mathrm{E}_k$ les sous-espaces propres correspondants ; supposons que $x_j \in \mathrm{E}_j$ pour $j = 1, \ldots, k$ et que

$$x_1 + \cdots + x_k = 0_\mathrm{E}.$$

Nous devons montrer que $x_1 = x_2 = \cdots = x_k = 0_\mathrm{E}$. On déduit en appliquant u, puisque $u(x_j) = \lambda_j x_j$ pour $j = 1, \ldots, k$

$$\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_k x_k = 0_\mathrm{E},$$

donc en retranchant $\lambda_k(x_1 + \cdots + x_k) = 0_{\mathrm{E}}$ on obtient

$$(\lambda_1 - \lambda_k)x_1 + \cdots + (\lambda_{k-1} - \lambda_k)x_{k-1} = 0_{\mathrm{E}},$$

relation qui fait intervenir seulement $k-1$ des sous-espaces propres, ce qui entraîne que $(\lambda_j - \lambda_k)x_j = 0_{\mathrm{E}}$ pour $j = 1, \ldots, k-1$ par l'hypothèse de récurrence, donc $x_1 = \cdots = x_{k-1} = 0_{\mathrm{E}}$ puisque $\lambda_j \neq \lambda_k$ pour $j < k$, donc $x_k = 0_{\mathrm{E}}$ aussi.

Définition 5.2.1. Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie sur $\mathbb{K}$; on dit que u est *diagonalisable* s'il existe une base de E formée de vecteurs propres de u.

Proposition 5.2.2. *Si* $\dim \mathrm{E} = n$ *et si* $u \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ *admet* n *valeurs propres distinctes,* u *est diagonalisable.*

Démonstration. Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ les valeurs propres (supposées distinctes) ; pour chaque $j = 1, \ldots, n$ on peut trouver un vecteur propre f_j tel que $u(f_j) = \lambda_j f_j$. On va montrer que le système $(f_1, \ldots, f_n)$ est libre (donc ce sera une base de E puisque $n = \dim \mathrm{E}$) : si on a une relation

$$c_1 f_1 + \cdots + c_n f_n = 0_{\mathrm{E}}$$

on aura en posant $x_j = c_j f_j$ pour tout $j = 1, \ldots, n$, d'une part $x_j \in \mathrm{E}_{\lambda_j}$ pour tout j et $x_1 + \cdots + x_n = 0_{\mathrm{E}}$. Puisque les sous-espaces propres forment une somme directe, il en résulte que $x_1 = \cdots = x_n = 0_{\mathrm{E}}$, donc $c_j f_j = 0_{\mathrm{E}}$ pour tout $j = 1, \ldots, n$, donc $c_j = 0$ puisque $f_j \neq 0_{\mathrm{E}}$ par définition d'un vecteur propre, et on a montré que $(f_1, \ldots, f_n)$ est libre. On a donc trouvé une base de E formée de vecteurs propres de u.

Dans une base formée de vecteurs propres la matrice de u est diagonale, et les coefficients diagonaux sont les valeurs propres, qui apparaissent éventuellement plusieurs fois. Chaque valeur propre λ apparaît un nombre de fois égal à la dimension du sous-espace propre E_λ correspondant. Si u est diagonalisable, il existe donc une base de E dans laquelle la matrice A de u est diagonale, avec diagonale $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ formée d'éléments de $\mathbb{K}$, et alors

$$\chi_u = \chi_{\mathrm{A}} = \prod_{i=1}^{n} (\lambda_i - \mathrm{X})$$

montre que toutes les racines de χ_u sont dans $\mathbb{K}$.

Pour que u *soit diagonalisable, il est nécessaire que toutes les racines de* χ_u *soient dans* $\mathbb{K}$.

Dire que u est diagonalisable revient à dire que E est la somme des sous-espaces propres de u. En effet, si $\mathbf{f} = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$ est une base de E formée de vecteurs propres de u, et si $\mu_1, \ldots, \mu_p$ est la liste des valeurs propres (sans répétition), chaque vecteur de base f_j appartient à l'un des sous-espaces propres $\mathrm{E}_{\mu_1}, \ldots, \mathrm{E}_{\mu_p}$, donc *a fortiori* f_j appartient au sous-espace $\mathrm{F} = \mathrm{E}_{\mu_1} + \cdots + \mathrm{E}_{\mu_p}$, donc $\mathrm{F} = \mathrm{E}$ puisque F contient tous les vecteurs de la base $\mathbf{f}$. Inversement, si $\mathrm{F} = \mathrm{E}$, on aura

$$\mathrm{E} = \mathrm{E}_{\mu_1} \oplus \cdots \oplus \mathrm{E}_{\mu_p},$$

et on obtiendra une base de E en prenant une base de chaque sous-espace E_{μ_j}, puis en rassemblant tous les vecteurs ainsi obtenus ; une telle base de E est formée de vecteurs propres de u.

Puisque la somme des sous-espaces propres est une somme directe, la dimension de $\mathrm{E}_{\mu_1} \oplus \cdots \oplus \mathrm{E}_{\mu_p}$ est la somme des dimensions, donc

l'endomorphisme u est diagonalisable si et seulement si la somme des dimensions des sous-espaces propres est égale à $n = \dim \mathrm{E}$.

Soit $\mu \in \mathbb{K}$ une valeur propre de u, et soit r l'ordre de multiplicité de μ comme racine de χ_u ; alors $\dim \mathrm{E}_\mu \leq r$. En effet, si on écrit la matrice A de u dans une base de E qui commence par une base de E_μ, le bloc carré A_μ correspondant au sous-espace E_μ est égal à $\mu \mathrm{I}_p$, où p est la dimension de E_μ, et la matrice A est triangulaire par blocs, donc le polynôme $\chi_{\mathrm{A}_\mu} = (\mu - \mathrm{X})^p$ divise le polynôme χ_u, donc $\dim \mathrm{E}_\mu = p \leq r$.

Supposons que toutes les racines de χ_u soient dans $\mathbb{K}$, et soit $\mu_1, \ldots, \mu_k \in \mathbb{K}$ la liste des racines (deux à deux distinctes) du polynôme χ_u ; soient $r_1, \ldots, r_k$ leurs multiplicités comme racines de χ_u ; on a $\dim \mathrm{E} = n = r_1 + \cdots + r_k$. On sait que $\dim_{\mathrm{E}_{\mu_j}} \leq r_j$, donc pour que u soit diagonalisable il faut que pour tout $j = 1, \ldots, k$, on ait $\dim_{\mathrm{E}_{\mu_j}} = r_j$.

Pour que u soit diagonalisable, il faut et il suffit que toutes les racines de χ_u soient dans $\mathbb{K}$ et que pour chaque racine μ de χ_u de multiplicité r on ait $\dim \mathrm{E}_\mu = r$.

Puisque E_μ est le noyau de $u - \mu \,\mathrm{Id}_\mathrm{E}$, on sait que sa dimension est donnée par la relation $\dim \mathrm{E}_\mu = \dim \mathrm{E} - \dim(u - \mu \,\mathrm{Id}_\mathrm{E})(\mathrm{E})$, c'est à dire $\dim \mathrm{E}_\mu = n - \mathrm{rang}(\mathrm{A} - \mu \mathrm{I}_n)$ si A est la matrice de u dans une base de E. Cette remarque fournit une méthode pratique pour appliquer le critère précédent.

Exercices.

1. Montrer que la matrice

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

n'est pas diagonalisable.

2. Montrer que la matrice compagnon M(P) d'un polynôme P est diagonalisable sur $\mathbb{C}$ si et seulement si le polynôme P a toutes ses racines simples.

Réduction réelle d'une matrice qui est diagonalisable sur $\mathbb{C}$

Soit A une matrice réelle, qui définit un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ par $\mathrm{X} \in \mathbb{R}^n \to \mathrm{AX} \in \mathbb{R}^n$; supposons que l'endomorphisme $\mathrm{A}^\mathbb{C}$ de $\mathbb{C}^n$ défini par la même matrice soit diagonalisable. Pour chaque vecteur $\mathrm{Z} \in \mathbb{C}^n$ ou matrice B à coefficients complexes on peut définir le vecteur complexe conjugué $\overline{\mathrm{Z}}$ et la matrice $\overline{\mathrm{B}}$, et les règles habituelles pour le calcul des conjugués des sommes et des produits restent valables. Puisque A est réelle, l'équation $\mathrm{AZ} = \mu \mathrm{Z}$ équivaut à $\mathrm{A}\overline{\mathrm{Z}} = \overline{\mu}\,\overline{\mathrm{Z}}$. Par conséquent, μ est valeur propre de $\mathrm{A}^\mathbb{C}$ si et seulement si $\overline{\mu}$ est valeur propre, et la correspondance $\mathrm{Z} \to \overline{\mathrm{Z}}$ (qui n'est pas $\mathbb{C}$-linéaire) transforme les éléments de E_μ en éléments de $\mathrm{E}_{\overline{\mu}}$. Soit $\mu = a + ib$, $a, b \in \mathbb{R}$ et $b \neq 0$ une valeur propre non réelle de $\mathrm{A}^\mathbb{C}$; soit $(\mathrm{Z}_1, \ldots, \mathrm{Z}_p)$ une base de E_μ, et décomposons $\mathrm{Z}_j = \mathrm{X}_j + i\mathrm{Y}_j$, $\mathrm{X}_j, \mathrm{Y}_j \in \mathbb{R}^n$, pour tout $j = 1, \ldots, p$; alors $(\overline{\mathrm{Z}}_1, \ldots, \overline{\mathrm{Z}}_p)$ est une base de $\mathrm{E}_{\overline{\mu}}$ et $\big((\mathrm{Z}_1 + \overline{\mathrm{Z}}_1), \ldots, (\mathrm{Z}_p + \overline{\mathrm{Z}}_p), -i(\mathrm{Z}_1 - \overline{\mathrm{Z}}_1), \ldots, -i(\mathrm{Z}_p - \overline{\mathrm{Z}}_p)\big)$ est une base (sur $\mathbb{C}$) de $\mathrm{E}_\mu \oplus \mathrm{E}_{\overline{\mu}}$. Mais ces vecteurs sont les vecteurs réels $(2\mathrm{X}_1, \ldots, 2\mathrm{X}_p, 2\mathrm{Y}_1, \ldots, 2\mathrm{Y}_p)$, qui sont *a fortiori* $\mathbb{R}$-indépendants. De plus, comme on l'a déjà vu, on a pour chaque $j = 1, \ldots, k$

$$\mathrm{AX}_j = a\mathrm{X}_j - b\mathrm{Y}_j; \quad \mathrm{AY}_j = b\mathrm{X}_j + a\mathrm{Y}_j.$$

Revenant au problème réel, on obtiendra pour la partie d'espace $\mathbb{R}^n$ engendrée par le système libre $(\mathrm{X}_1, \mathrm{Y}_1, \ldots, \mathrm{X}_p, \mathrm{Y}_p)$ une matrice diagonale par blocs, avec k blocs de taille 2×2 tous égaux à

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}.$$

Sous-espaces caractéristiques

Soient E un espace vectoriel de dimension finie $n > 0$ sur $\mathbb{K}$ et $u \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$; soit μ une valeur propre de u, racine d'ordre r du polynôme caractéristique,

$$\chi_u = (\mu - \mathrm{X})^r \mathrm{Q},$$

avec $\mathrm{Q}(\mu) \neq 0$. Le sous-espace propre $\mathrm{E}_\mu = \ker(u - \mu \operatorname{Id}_\mathrm{E})$ vérifie $0 < \dim \mathrm{E}_\mu \leq r$. Dans les bons cas, on a $\dim \mathrm{E}_\mu = r$. Que faire dans les cas moins bons où $\dim \mathrm{E}_\mu < r$? (rappelons qu'on est déjà sûr que u n'est pas diagonalisable dans ces cas moins bons).

Posons $v = u - \mu \operatorname{Id}_\mathrm{E}$. On a

$$\{0\} \subset \ker v \subset \ker v^2 \subset \cdots \subset \ker v^q \ldots$$

La suite croissante des entiers $d_q = \dim \ker v^q$ est majorée par $n = \dim \mathrm{E}$, donc elle finit par être constante : il existe un entier q_0 tel que $d_q = d_{q_0}$ pour tout $q \geq q_0$, ce qui entraîne $\ker v^q = \ker v^{q_0}$ pour tout $q \geq q_0$. On appelle *sous-espace caractéristique de u pour la valeur propre μ* ce "noyau limite" $\mathrm{F}_\mu = \ker(u - \mu \operatorname{Id}_\mathrm{E})^q$ lorsque $q \geq q_0$. Il contient le sous-espace propre E_μ. Dans le cas où u est diagonalisable, on vérifie que ces deux sous-espaces E_μ et F_μ sont égaux (petit exercice).

On peut en fait déterminer l'entier q_0 de la discussion précédente très simplement : désignons par p le plus petit entier $q \geq 0$ vérifiant l'égalité $\ker v^q = \ker v^{q+1}$; on a $p > 0$ car $\mathrm{E}_\mu = \ker v \neq \{0\} = \ker v^0$. On vérifie alors que $\ker v^q = \ker v^p$ pour tout entier $q \geq p$ par récurrence sur $q \geq p$ (exercice), donc $\ker v^p$ est déjà égal au sous-espace caractéristique F_μ (on verra plus loin que p est inférieur ou égal à l'ordre de multiplicité r de la racine μ, donc on a aussi $\mathrm{F}_\mu = \ker v^r = \ker(u - \mu \operatorname{Id}_\mathrm{E})^r$, ce qui donne une formule plus directe) ; on va montrer que

$$\mathrm{E} = \ker v^p \oplus v^p(\mathrm{E}).$$

Tout d'abord, $\ker v^p \cap v^p(\mathrm{E}) = \{0\}$; en effet, si $x \in \ker v^p \cap v^p(\mathrm{E})$, on a $v^p(x) = 0$ et on peut écrire $x = v^p(y)$ pour un certain $y \in \mathrm{E}$; alors $0 = v^p(x) = v^{2p}(y)$, donc $y \in \ker v^{2p} = \ker v^p$ (puisque $2p \geq p$), ce qui donne $v^p(y) = x = 0$. Ensuite, la relation $\dim \mathrm{E} = \dim \ker v^p + \dim v^p(\mathrm{E})$ finit de montrer que $\mathrm{E} = \ker v^p \oplus v^p(\mathrm{E})$; cette décomposition est formée de deux sous-espaces stables par v, donc par u.

Théorème 5.2.1. *On suppose que $\mu \in \mathbb{K}$ est valeur propre de $u \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ et racine d'ordre r du polynôme caractéristique χ_u. Le sous-espace caractéristique F_μ de u correspondant à la valeur propre μ est égal à*

$$\mathrm{F}_\mu = \ker(u - \mu \operatorname{Id}_\mathrm{E})^r \quad \textit{et on a} \quad \dim \mathrm{F}_\mu = r.$$

Si on pose $v = u - \mu \operatorname{Id}_\mathrm{E}$, $\mathrm{G}_1 = \mathrm{F}_\mu = \ker v^r$ et $\mathrm{G}_2 = v^r(\mathrm{E})$, on a $\mathrm{E} = \mathrm{G}_1 \oplus \mathrm{G}_2$, et G_1, G_2 sont stables par u ; si on désigne par u_1 et u_2 les deux endomorphismes restriction de u à G_1 et à G_2, on a $\chi_u = \chi_{u_1}\chi_{u_2}$, avec $\chi_{u_1} = (\mu - \mathrm{X})^r$ et $\chi_{u_2}(\mu) \neq 0$.

Démonstration. On pose avec les notations établies avant l'énoncé

$$\mathrm{G}_1 = \ker v^p\,; \quad \mathrm{G}_2 = v^p(\mathrm{E}).$$

On a vu que $\mathrm{E} = \mathrm{G}_1 \oplus \mathrm{G}_2$, et cette décomposition est formée de deux sous-espaces stables par u. On a *a fortiori* $\ker v \cap v^p(\mathrm{E}) = \{0\}$, donc la restriction $v_2 = u_2 - \mu\,\mathrm{Id}_{\mathrm{G}_2}$ de v au sous-espace G_2 est injective, ce qui signifie que la restriction u_2 de u à G_2 n'admet plus la valeur propre μ, ou encore que $\chi_{u_2}(\mu) \neq 0$. On sait que $\chi_u = \chi_{u_1}\chi_{u_2}$. Puisque $(\mathrm{X}-\mu)^r$ divise χ_u et $\chi_{u_2}(\mu) \neq 0$, on déduit que $(\mathrm{X}-\mu)^r$ divise χ_{u_1}. Il en résulte que $r \leq \deg \chi_{u_1} = \dim \mathrm{G}_1$.

On va montrer maintenant que μ est la seule racine complexe de χ_{u_1}, ce qui entraînera que $\chi_{u_1} = (\mu - \mathrm{X})^r$ et $\dim \mathrm{G}_1 = r$. Pour tout $x \in \mathrm{G}_1$, on a $v^p(x) = 0$ par définition de G_1, ce qui signifie que $v_1^p = 0$. Si on choisit une base $\mathbf{f}$ de G_1 et si A est la matrice de u_1 dans cette base, la matrice de v_1 sera $\mathrm{A} - \mu\mathrm{I}_d$ (en posant $d = \dim \mathrm{G}_1$) et on aura $(\mathrm{A} - \mu\mathrm{I}_d)^p = 0$. Si λ est une valeur propre complexe de A et $\mathrm{Z} \in \mathbb{C}^d$ un vecteur non nul tel que $\mathrm{AZ} = \lambda\mathrm{Z}$, on aura $(\mathrm{A} - \mu\mathrm{I}_d)\mathrm{Z} = (\lambda - \mu)\mathrm{Z}$ et $0 = (\mathrm{A} - \mu\mathrm{I}_d)^p\,\mathrm{Z} = (\lambda - \mu)^p\,\mathrm{Z}$, donc $\lambda - \mu = 0$.

On sait maintenant que $\chi_{u_1} = (\mu - \mathrm{X})^r$ et $\dim \mathrm{G}_1 = r$. Pour finir, on remarque que $0 < \dim \ker v < \dim \ker v^2 < \cdots < \dim \ker v^p = \dim \mathrm{G}_1$, ce qui montre que $p \leq \dim \mathrm{G}_1 = r$. On sait alors que $\mathrm{G}_1 = \ker v^p = \ker v^r$. Enfin, $v^r(\mathrm{E}) = v^p(\mathrm{E})$ (on a $v^r(\mathrm{E}) \subset v^p(\mathrm{E})$ et ils ont la même dimension $n - \dim \ker v^r = n - \dim \ker v^p$).

Remarque. Le lecteur aura peut-être remarqué que nous avons renoncé à notre manie de toujours écrire 0_{E} pour le vecteur nul de E, manie qui finissait par être insupportable. Ca nous reprendra encore de temps en temps, mais rarement...

Dans le cas d'un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ qui n'est pas diagonalisable, mais tel que toutes les racines de χ_u soient dans $\mathbb{K}$, on obtient une décomposition intéressante en sous-espaces stables par u, plus grands que les sous-espaces propres. En effet, si toutes les racines de χ_u sont dans $\mathbb{K}$, on peut continuer la décomposition en sous-espaces caractéristiques que nous avons commencée avec la valeur propre μ : on a pour l'instant

$$\mathrm{E} = \ker(u - \mu\,\mathrm{Id}_{\mathrm{E}})^r \oplus \mathrm{G},$$

et on continue la décomposition de E en somme directe en raisonnant sur la restriction de u à G, qui n'admet plus la valeur propre μ.

Théorème 5.2.2. *Si toutes les racines de χ_u sont dans $\mathbb{K}$, l'espace* E *est somme directe des sous-espaces caractéristiques,*

$$\mathrm{E} = \mathrm{F}_{\mu_1} \oplus \cdots \oplus \mathrm{F}_{\mu_k},$$

où $\mu_1, \ldots, \mu_k$ est la liste des racines de χ_u (sans répétition).

Triangulation

Définition 5.2.2. On dit que $u \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ est *triangulable* s'il existe une base $\mathbf{f}$ de E dans laquelle la matrice $\mathrm{A} = \mathrm{mat}_{\mathbf{f}}(u)$ de u est triangulaire supérieure.

Si u est triangulable, on voit immédiatement que les coefficients diagonaux de la matrice triangulaire A qui représente u dans la base $\mathbf{f}$ sont les racines de χ_u, et ces coefficients sont dans $\mathbb{K}$. Pour pouvoir trianguler u, il est donc nécessaire que toutes les racines de χ_u soient dans $\mathbb{K}$.

Proposition 5.2.3. *Soit* E *un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{K}$; l'endomorphisme $u \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ est triangulable si et seulement si le polynôme caractéristique χ_u se décompose en facteurs de degré* 1 *dans $\mathbb{K}[\mathrm{X}]$ (en d'autres termes si et seulement si χ_u a toutes ses racines dans $\mathbb{K}$).*

Démonstration. Si u est triangulable, le polynôme caractéristique a toutes ses racines dans $\mathbb{K}$. On montre le résultat inverse par récurrence sur la dimension de E. C'est trivial quand $n = \dim \mathrm{E} = 1$. Supposons le résultat vrai pour les espaces de dimension $< n$, et soit $u \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ un endomorphisme d'un espace E de dimension n, dont le polynôme caractéristique ait toutes ses racines dans $\mathbb{K}$. Soit $\mu \in \mathbb{K}$ l'une de ces racines ; soit x un vecteur propre tel que $u(x) = \mu x$ et soit F un supplémentaire de $\mathbb{K}x$ dans E ; désignons par p la projection de $\mathrm{E} = \mathbb{K}x \oplus \mathrm{F}$ sur F et soit v l'endomorphisme de F défini par

$$\forall y \in \mathrm{F}, \quad v(y) = p(u(y)).$$

En écrivant la matrice A de u dans une base de E formée de x suivi d'une base de F, on voit que la matrice A est triangulaire par blocs, avec un bloc diagonal de taille 1×1 égal à (μ), et un autre bloc diagonal D de taille $(n-1) \times (n-1)$, et D est la matrice de v dans la base choisie pour F. On a alors $\chi_{\mathrm{A}} = (\mu - \mathrm{X})\,\chi_{\mathrm{D}}$, donc χ_{D} a toutes ses racines dans $\mathbb{K}$, puisque toutes les racines de χ_{D} sont racines de χ_{A}. D'après l'hypothèse de récurrence, il existe une base $(f_1, \ldots, f_{n-1})$ de F dans laquelle la matrice de v est triangulaire supérieure. On vérifie que dans la base $(x, f_1, \ldots, f_{n-1})$ de E, la matrice de u est triangulaire supérieure.

Corollaire 5.2.1. *Sur $\mathbb{C}$, tout endomorphisme est triangulable.*

Triangulation d'une matrice

Définition 5.2.3. On dit que $\mathrm{A} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ est *triangulable sur* $\mathbb{R}$ s'il existe une base $\mathbf{f}$ de $\mathbb{R}^n$ dans laquelle la nouvelle matrice $\mathrm{B} = \mathrm{A}_{\mathbf{f}} = \mathrm{V}^{-1}\mathrm{AV}$ obtenue par changement de base soit triangulaire supérieure. Autrement dit, s'il existe une matrice **réelle** V inversible telle que $\mathrm{V}^{-1}\mathrm{AV}$ soit triangulaire. On dira que A, matrice carrée complexe, est triangulable sur $\mathbb{C}$ s'il existe une matrice **complexe** V inversible telle que $\mathrm{V}^{-1}\mathrm{AV}$ soit triangulaire supérieure.

Corollaire 5.2.2. *Sur $\mathbb{C}$, toute matrice carrée est triangulable.*

Proposition 5.2.4. *Une matrice $\mathrm{A} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{R})$ est triangulable sur $\mathbb{R}$ si et seulement si toutes les racines du polynôme caractéristique χ_{A} sont réelles.*

Combinaison du théorème des sous-espaces caractéristiques et de la triangulation

Examinons le cas particulier où le polynôme caractéristique de la matrice A est $\chi_{\mathrm{A}} = (\mu - \mathrm{X})^n$, avec $\mu \in \mathbb{K}$. Dans ce cas la seule valeur propre est μ, donc la forme triangulaire sera

$$\mathrm{T} = \begin{pmatrix} \mu & * & \ldots & * \\ 0 & \mu & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \ldots & 0 & \mu \end{pmatrix},$$

où les étoiles représentent des coefficients inconnus. On peut écrire $\mathrm{T} = \mu \mathrm{I}_n + \mathrm{N}$, où la matrice N est *strictement triangulaire*,

$$\mathrm{N} = \begin{pmatrix} 0 & * & \ldots & * \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \ldots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On montre par le calcul que $\mathrm{N}^n = 0$, c'est à dire que N est *nilpotente* (on pourra aussi le voir par le théorème de Cayley-Hamilton 5.3.1, sachant que $\chi_n = (-1)^n \mathrm{X}^n$). Puisque $\mu \mathrm{I}_n$ commute avec N, on a obtenu le résultat suivant : si $\chi_\mathrm{A} = (\mu - \mathrm{X})^n$, avec $\mu \in \mathbb{K}$, il existe trois matrices $\mathrm{V}, \mathrm{D}, \mathrm{N}$ à coefficients dans $\mathbb{K}$ telles que V est inversible, D diagonale et N strictement triangulaire, et

$$\mathrm{A} = \mathrm{V}(\mathrm{D} + \mathrm{N})\mathrm{V}^{-1}, \quad \mathrm{DN} = \mathrm{ND}.$$

Soit $\mathrm{A} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ telle que toutes les racines de χ_A soient dans $\mathbb{K}$ (ce qui est automatique si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) ; soit $\mu_1, \ldots, \mu_p$ la liste des racines du polynôme χ_A (deux à deux distinctes) ; il existe une matrice inversible $\mathrm{V} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $\mathrm{V}^{-1}\mathrm{AV}$ soit diagonale par blocs,

$$\mathrm{T} = \mathrm{V}^{-1}\mathrm{AV} = \begin{pmatrix} \mathrm{T}_1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & \mathrm{T}_p \end{pmatrix},$$

où chaque bloc diagonal T_j est une matrice carrée triangulaire supérieure de la forme

$$\mathrm{T}_j = \begin{pmatrix} \mu_j & * & \ldots & * \\ 0 & \mu_j & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \ldots & 0 & \mu_j \end{pmatrix}.$$

Au total, T est triangulaire et peut s'écrire $\mathrm{T} = \mathrm{D} + \mathrm{N}$ avec D diagonale et N strictement triangulaire, et $\mathrm{DN} = \mathrm{ND}$.

Cette forme est très utile pour calculer les puissance de A. En effet, la formule du binôme s'applique parce que $\mathrm{DN} = \mathrm{ND}$, les puissances de D sont évidentes à calculer et celles de N s'arrêtent à n. On a donc pour tout $k \geq 0$

$$\mathrm{T}^k = \mathrm{D}^k + k\mathrm{D}^{k-1}\mathrm{N} + \mathbf{C}_k^2\, \mathrm{D}^{k-2}\mathrm{N}^2 + \cdots + \mathbf{C}_k^{n-1}\mathrm{D}^{k-n+1}\mathrm{N}^{n-1},$$

et pour finir $\mathrm{A}^k = \mathrm{VT}^k\mathrm{V}^{-1}$.

Exercice. Réduire sous cette forme la matrice compagnon du polynôme $\mathrm{X}^2(\mathrm{X}+1)^2$.

5.3. Polynômes d'endomorphismes

Soit E un espace vectoriel de dimension finie > 0 sur $\mathbb{K}$; on rappelle que le produit de deux endomorphismes est défini par la composition des applications, $uv = u \circ v$.

Puissances et polynômes d'un endomorphisme

On pose $u^0 = \mathrm{Id}_\mathrm{E}$ pour tout $u \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$, et on définit par récurrence $u^{m+1} = u^m u$ pour tout entier $m \geq 0$. On vérifie par récurrence sur k entier ≥ 0 que

$$u^{m+k} = u^m \circ u^k = u^k \circ u^m.$$

Si $\mathrm{P} = c_0 + c_1\mathrm{X} + \cdots + c_k\mathrm{X}^k \in \mathbb{K}[\mathrm{X}]$ est un polynôme à coefficients dans $\mathbb{K}$, on définit un endomorphisme $\mathrm{P}(u)$ par la formule

$$\mathrm{P}(u) = c_0\, \mathrm{Id}_\mathrm{E} + c_1 u + \cdots + c_k u^k \in \mathcal{L}(\mathrm{E}).$$

Pour bien comprendre le remplacement il vaut mieux écrire $\mathrm{P} = c_0\mathrm{X}^0 + \cdots + c_k\mathrm{X}^k \in \mathbb{K}[\mathrm{X}]$, où X^0 n'est pas simplement le nombre 1 mais le polynôme constant égal à 1. Il faut faire attention à cet aspect un peu particulier de l'opération : il faut remplacer le polynôme constant X^0 par $u^0 = \mathrm{Id}_\mathrm{E}$. Si P est un polynôme constant, disons $\mathrm{P} = \lambda$, on pose $\mathrm{P}(u) = \lambda\,\mathrm{Id}_\mathrm{E}$, en particulier lorsque P est le polynôme constant égal à 1, on a posé

$$1(u) = \mathrm{Id}_\mathrm{E}\,.$$

On voit facilement que $(\mathrm{P}+\mathrm{Q})(u) = \mathrm{P}(u)+\mathrm{Q}(u)$ et $(\lambda\mathrm{P})(u) = \lambda\mathrm{P}(u)$ pour tous polynômes $\mathrm{P}, \mathrm{Q} \in \mathbb{K}[\mathrm{X}]$ et tout $\lambda \in \mathbb{K}$.

Exemples.

1. Si u est la rotation d'angle $+\pi/2$ dans $\mathbb{R}^2$ et si $\mathrm{P} = \mathrm{X}^2+1$, on trouve que $\mathrm{P}(u) = 0$.

2. Application de $\mathrm{P}(u)$ à un vecteur propre : si $u(x) = \lambda x$, on a $\mathrm{P}(u)(x) = \mathrm{P}(\lambda)x$ pour tout polynôme $\mathrm{P} \in \mathbb{K}[\mathrm{X}]$.

3. Supposons que u soit diagonalisable, et soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de E formée de vecteurs propres de u, avec valeurs propres $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$; soit x un vecteur quelconque de l'espace E ; on écrit

$$x = a_1e_1 + a_2e_2 + \cdots + a_ne_n,$$

ce qui donne en additionnant les égalités $\mathrm{P}(u)(e_j) = \mathrm{P}(\lambda_j)e_j$

$$\mathrm{P}(u)(x) = a_1\mathrm{P}(\lambda_1)e_1 + a_2\mathrm{P}(\lambda_2)e_2 + \cdots + a_n\mathrm{P}(\lambda_n)e_n.$$

4. Avec les mêmes hypothèses (u diagonalisable), supposons que $\mathrm{P}(\lambda_j) = 0$ pour tout $j = 1, \ldots, n$. Il en résulte que $\mathrm{P}(u)(x) = 0$ pour tout x, ce qui veut dire que $\mathrm{P}(u)$ est l'endomorphisme nul. En particulier, si $\mathrm{P} = \chi_u$ on trouve $\chi_u(u) = 0$. C'est le cas facile du théorème de Cayley-Hamilton, dont le cas général suit. En fait on peut faire un peu mieux : si $\mu_1, \ldots, \mu_p$ est la liste des valeurs propres sans répétition et si

$$\mathrm{P} = (\mathrm{X} - \mu_1)\ldots(\mathrm{X} - \mu_p),$$

le même argument montre que $\mathrm{P}(u) = 0$. Cette remarque anticipe la notion de polynôme minimal qui sera vue plus loin.

La proposition qui suit est facile, mais elle joue un rôle important dans ce qui suit.

Proposition 5.3.1. *Si* P *et* Q *sont deux polynômes à coefficients dans* $\mathbb{K}$ *et* u *un endomorphisme de* E*, on a*

$$\mathrm{P}(u) \circ \mathrm{Q}(u) = (\mathrm{PQ})(u) = \mathrm{Q}(u) \circ \mathrm{P}(u).$$

Démonstration. On le vérifie d'abord pour un monôme de la forme $\mathrm{Q} = d_k\mathrm{X}^k$. Dans ce cas, si $\mathrm{P} = c_0 + c_1\mathrm{X} + \cdots + c_p\mathrm{X}^p$, on aura

$$(\mathrm{PQ})(u) = c_0d_ku^k + \cdots + c_pd_ku^{p+k} = (c_0\,\mathrm{Id}_\mathrm{E} + \cdots + c_pu^p)(d_ku^k) = \mathrm{P}(u) \circ \mathrm{Q}(u).$$

Ensuite, on décompose un polynôme quelconque Q en somme de monômes $\mathrm{Q} = \sum_k \mathrm{Q}_k$ et on utilise l'associativité,

$$(\mathrm{PQ})(u) = (\sum_k \mathrm{PQ}_k)(u) = \sum_k (\mathrm{PQ}_k)(u) =$$

$$= \sum_k \mathrm{P}(u) \circ \mathrm{Q}_k(u) = \mathrm{P}(u) \circ (\sum_k \mathrm{Q}_k(u)) = \mathrm{P}(u) \circ \mathrm{Q}(u).$$

Corollaire 5.3.1. *Deux endomorphismes de la forme* $\mathrm{P}(u)$ *et* $\mathrm{Q}(u)$ *(pour le même* u*) commutent.*

On définit de même l'application d'un polynôme $\mathrm{P} \in \mathbb{K}[\mathrm{X}]$ à une matrice carrée A de taille $n \times n$ à coefficients dans $\mathbb{K}$,

$$\mathrm{P}(\mathrm{A}) = c_0 \mathrm{I}_n + c_1 \mathrm{A} + \cdots + c_k \mathrm{A}^k \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K}),$$

où I_n désigne la matrice identité de taille $n \times n$. Si A est la matrice d'un endomorphisme u par rapport à une base $\mathbf{e}$ de E, la matrice P(A) est la matrice de l'endomorphisme $\mathrm{P}(u)$ dans la même base $\mathbf{e}$,

$$\mathrm{mat}_{\mathbf{e}}(\mathrm{P}(u)) = \mathrm{P}(\mathrm{mat}_{\mathbf{e}}(u)).$$

On remarque dans le même ordre d'idées que $\mathrm{P}(\mathrm{VAV}^{-1}) = \mathrm{VP}(\mathrm{A})\mathrm{V}^{-1}$.

Si A est une matrice diagonale de taille $n \times n$, avec éléments diagonaux $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, on voit facilement que pour tout entier $k \geq 0$, la matrice A^k est la matrice diagonale de diagonale $\lambda_1^k, \ldots, \lambda_n^k$. Il en résulte immédiatement que pour tout polynôme P, la matrice P(A) est la matrice diagonale de diagonale $\mathrm{P}(\lambda_1), \ldots, \mathrm{P}(\lambda_n)$. Cette remarque se généralise facilement aux matrices diagonales par blocs.

Si A est une matrice triangulaire supérieure de taille $n \times n$, avec éléments diagonaux $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, on voit aussi que pour tout entier $k \geq 0$, la matrice A^k est triangulaire supérieure de diagonale $\lambda_1^k, \ldots, \lambda_n^k$ (mais les coefficients au dessus de la diagonale sont en général difficiles à calculer). Il en résulte immédiatement que pour tout polynôme P, la matrice P(A) est triangulaire supérieure, de diagonale $\mathrm{P}(\lambda_1), \ldots, \mathrm{P}(\lambda_n)$. Cette remarque se généralise également aux matrices triangulaires par blocs.

Remarque. Si F est stable par u, il est stable par tout endomorphisme de la forme $\mathrm{P}(u)$, où P est un polynôme quelconque à coefficients dans $\mathbb{K}$. Par exemple, $\ker u$ et $u(\mathrm{E})$ sont stables par $\mathrm{P}(u)$ pour tout polynôme P. Rappelons que si $u \circ v = v \circ u$ alors les deux sous-espaces $\ker v$ et $v(\mathrm{E})$ sont stables par u ; ils sont alors stables par $\mathrm{P}(u)$ pour tout polynôme $\mathrm{P} \in \mathbb{K}[\mathrm{X}]$.

Sous-espace stable engendré par un vecteur non nul

Soit x un vecteur non nul d'un espace vectoriel E de dimension finie n sur $\mathbb{K}$, et soit $u \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$; on va décrire le plus petit sous-espace stable par u contenant le vecteur x, et qui sera noté $\mathrm{F}_{x,u}$, ou simplement F_x si l'endomorphisme u est clairement identifié par le contexte. Puisque E est de dimension n, il n'est pas possible que les $n+1$ vecteurs du système $(x, u(x), \ldots, u^n(x))$ soient linéairement indépendants ; il existe donc un entier $k \leq n$ qui est le plus petit entier $\ell > 0$ tel que $u^\ell(x) \in [x, u(x), \ldots, u^{\ell-1}(x)]$. Posons $x_j = u^j(x)$ pour $j = 0, \ldots, k-1$. Ces k vecteurs sont linéairement indépendants, puisque $x_0 = x \neq 0$ et que $x_i \notin [x_0, \ldots, x_{i-1}]$ pour $i < k$. Posons $\mathrm{G} = [x, u(x), u^2(x), \ldots, u^{k-1}(x)]$ et montrons que G est stable par u. Pour cela, il suffit de vérifier que les images par u des générateurs $x_0, \ldots, x_{k-1}$ de G restent dans G ; pour $j < k-1$ on a $u(x_j) = x_{j+1} \in \mathrm{G}$, et pour le dernier générateur $x_{k-1} = u^{k-1}(x)$ on a $u(x_{k-1}) = u^k(x) \in [x, u(x), \ldots, u^{k-1}(x)] = \mathrm{G}$ d'après la définition de k. Remarquons ensuite que tout sous-espace F stable par u et qui contient x contient aussi $u(x), u^2(x), \ldots$, donc $\mathrm{G} = [x, u(x), u^2(x), \ldots, u^{k-1}(x)]$ est contenu dans tout sous-espace stable F contenant x. Tout ceci montre que $\mathrm{F}_x = \mathrm{G}$ est le plus petit sous-espace stable contenant x, et que les vecteurs $(x, u(x), \ldots, u^{k-1}(x))$ forment une base de F_x. Par ailleurs, il existe par définition de k des coefficients $a_0, \ldots, a_{k-1}$ dans $\mathbb{K}$ tels que

$$u^k(x) + a_{k-1}u^{k-1}(x) + \cdots + a_1 u(x) + a_0 x = 0.$$

Si nous posons $\mathrm{P}_x = \mathrm{P}_{x,u} = a_0 + a_1\mathrm{X} + \cdots + a_{k-1}\mathrm{X}^{k-1} + \mathrm{X}^k$, nous voyons que

$$\mathrm{P}_x(u)(x) = 0.$$

On dira que le polynôme $\mathrm{P}_x = \mathrm{P}_{x,u}$ est le *polynôme annulateur de x* associé à l'endomorphisme u. Dans la base $(x, u(x), \ldots, u^{k-1}(x))$, la matrice de la restriction de u à F_x a la forme

$$\mathrm{M}(\mathrm{P}_x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \ldots & 0 & -a_1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & -a_{k-2} \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & -a_{k-1} \end{pmatrix},$$

c'est à dire qu'elle est égale à la matrice compagnon $\mathrm{M}(\mathrm{P}_x)$ du polynôme P_x.

Remarquons que si R est un polynôme non nul de $\mathbb{K}[\mathrm{X}]$ de degré $\leq k-1$, on a $\mathrm{R}(u)(x) \neq 0$. En effet $\mathrm{R} = c_0 + c_1\mathrm{X} + \cdots + c_{k-1}\mathrm{X}^{k-1}$, donc

$$\mathrm{R}(u)(x) = c_0 x + c_1 u(x) + \cdots + c_{k-1}u^{k-1}(x) \neq 0$$

puisque $(x, u(x), \ldots, u^{k-1}(x))$ est une base et que les coefficients (c_i) ne sont pas tous nuls. Le polynôme P_x est donc le polynôme unitaire P du plus petit degré tel que $\mathrm{P}(u)(x) = 0$. Son degré est égal à la dimension de F_x.

Exemples.

Rotation de $\pi/2$ autour de l'axe $\mathrm{O}z$ dans $\mathrm{E} = \mathbb{R}^3$, avec $x = (1, 0, 1)$. Dans ce cas $\mathrm{F}_x = \mathbb{R}^3$ et $\mathrm{P}_x = \mathrm{X}^3 - \mathrm{X}^2 + \mathrm{X} - 1$.

Projection $(y_1, y_2, y_3) \to (y_1, y_2, 0)$ de $\mathbb{R}^3$ sur le plan $y_3 = 0$, en partant de $x = (1, 0, 1)$. Dans ce cas F_x est le sous-espace de dimension deux formé de tous les vecteurs $(y_1, 0, y_3)$, et $\mathrm{P}_x = \mathrm{X}^2 - \mathrm{X}$.

Partons de l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ définie par $u(y) = (y_1, 2y_2, 3y_3)$ pour tout $y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$. Quand on part de $x = \mathbf{e}_2$ par exemple, on a affaire à un vecteur propre, donc $u(\mathbf{e}_2) = 2\mathbf{e}_2$, donc $\mathrm{F}_x = \mathbb{R}\mathbf{e}_2$, $\mathrm{P}_x = \mathrm{X} - 2$. Pour $x = (1, 1, 1)$, les vecteurs successifs

$$x = (1, 1, 1), \quad u(x) = (1, 2, 3), \quad u^2(x) = (1, 4, 9)$$

forment une base de $\mathbb{R}^3$, donc $\mathrm{F}_x = \mathbb{R}^3$ et on voit que $\mathrm{P}_x = (\mathrm{X} - 1)(\mathrm{X} - 2)(\mathrm{X} - 3)$.

Il ne faut pas croire qu'on puisse toujours trouver un vecteur x qui donne un sous-espace F_x égal à E tout entier : exemple de $u = \mathrm{Id}_\mathrm{E}$, ou de la projection sur un plan vue ci-dessus.

Proposition 5.3.2. *Soit* E *un espace de dimension finie* > 0 *et soit* $u \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ *; pour tout vecteur* $x \neq 0$*, le polynôme* $\mathrm{P}_{x,u}$ *défini ci-dessus divise le polynôme caractéristique de* u*.*

Démonstration. Dans une base de E commençant par la base de F_x

$$(x, u(x), \ldots, u^{k-1}(x)),$$

la matrice de u sera triangulaire par blocs pour la décomposition $\mathrm{E} = \mathrm{F}_x \oplus \mathrm{G}$, avec un bloc diagonal "nord-ouest" égal à la matrice compagnon de $\mathrm{P}_x = \mathrm{P}_{x,u}$, ce qui donne le résultat d'après la proposition 4.4.2 et le fait que le polynôme caractéristique de $\mathrm{M}(\mathrm{P}_x)$ est égal à $\pm\mathrm{P}_x$.

Théorème de Cayley-Hamilton

Le théorème de Cayley-Hamilton pour une matrice carrée A dit que

$$\chi_{\mathrm{A}}(\mathrm{A}) = 0.$$

Il existe de nombreuses démonstrations de ce théorème. Commençons par indiquer des cas particuliers faciles ; on peut faire une vérification directe en dimension deux par calcul matriciel. Dans le cas d'une matrice diagonale A de diagonale $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, on sait que les valeurs propres sont $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ et on sait que $\mathrm{P}(\mathrm{A})$ est la matrice diagonale dont la diagonale est $\mathrm{P}(\lambda_1), \ldots, \mathrm{P}(\lambda_n)$. Si $\mathrm{P} = \chi_{\mathrm{A}}$, les λ_i sont racines de P donc $\chi_{\mathrm{A}}(\mathrm{A}) = 0$ pour une matrice diagonale. Si B est seulement diagonalisable, on aura $\mathrm{B} = \mathrm{V}^{-1}\mathrm{AV}$ pour une certaine matrice inversible V et une certaine matrice diagonale A. On aura alors $\chi_{\mathrm{B}} = \chi_{\mathrm{A}}$ et

$$\chi_{\mathrm{B}}(\mathrm{B}) = \mathrm{V}^{-1}\chi_{\mathrm{B}}(\mathrm{A})\mathrm{V} = 0.$$

Le théorème de Cayley-Hamilton est donc facile dans le cas d'une matrice diagonalisable.

Théorème 5.3.1. (Théorème de Cayley-Hamilton) *Soit* E *un espace vectoriel de dimension finie* > 0 *sur* $\mathbb{K}$ *; pour tout endomorphisme* $u \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$*, le polynôme caractéristique annule l'endomorphisme* u*,*

$$\chi_u(u) = 0_{\mathcal{L}(\mathrm{E})}.$$

Démonstration. Soit x un vecteur de E ; si $x = 0_{\mathrm{E}}$, on a bien $\chi_u(u)(x) = 0_{\mathrm{E}}$. Sinon, soit $\mathrm{P}_x = \mathrm{P}_{x,u}$ le polynôme annulateur de x associé à l'endomorphisme u ; on sait que $\mathrm{P}_x(u)(x) = 0_{\mathrm{E}}$ et d'après la proposition 5.3.2, le polynôme P_x divise le polynôme χ_u, donc il existe un polynôme Q tel que $\chi_u = \mathrm{QP}_x$. Alors $\chi_u(u) = \mathrm{Q}(u)\mathrm{P}_x(u)$ et $\chi_u(u)(x) = \mathrm{Q}(u)(\mathrm{P}_x(u)(x)) = 0_{\mathrm{E}}$. Ainsi l'endomorphisme $\chi_u(u)$ annule tous les vecteurs de E, c'est à dire que

$$\chi_u(u) = 0_{\mathcal{L}(\mathrm{E})}.$$

5.4. Idéaux de polynômes. Polynôme minimal

On dit qu'un polynôme $\mathrm{P} \in \mathbb{K}[\mathrm{X}]$ est *unitaire* si le coefficient de son terme de plus haut degré est égal à 1,

$$\mathrm{P} = \mathrm{X}^n + a_{n-1}\mathrm{X}^{n-1} + \cdots + a_0.$$

Un polynôme unitaire est donc non nul par définition.

Définition 5.4.1. Un ensemble I de polynômes de $\mathbb{K}[\mathrm{X}]$ est un *idéal* de $\mathbb{K}[\mathrm{X}]$ si

1. L'ensemble I contient le polynôme nul 0,
2. I contient $\mathrm{P} - \mathrm{Q}$ chaque fois qu'il contient les polynômes P et Q,
3. Pour tous $\mathrm{P} \in \mathrm{I}$ et pour tout polynôme $\mathrm{Q} \in \mathbb{K}[\mathrm{X}]$, on a $\mathrm{PQ} \in \mathrm{I}$.

Si $\mathrm{P} \in \mathrm{I}$, alors $\alpha\mathrm{P} \in \mathrm{I}$ pour tout $\alpha \in \mathbb{K}$. Si $\mathrm{P} \neq 0$ appartient à I, on voit que I contient aussi le polynôme unitaire P_1 de même degré que P obtenu en multipliant P par l'inverse du coefficient du terme de plus haut degré de P.

Exemples d'idéaux.

1. $\{0\}$ et $\mathbb{K}[X]$ sont deux idéaux de $\mathbb{K}[X]$.

2. Si P est un polynôme de $\mathbb{K}[X]$, l'ensemble des multiples de P, noté

$$(P) = \{AP : A \in \mathbb{K}[X]\}$$

est un idéal de $\mathbb{K}[X]$.

3. Les polynômes P à coefficients réels tels que $P(i) = 0$ forment un idéal de $\mathbb{R}[X]$. Posons $\alpha = 2^{1/3}$. L'ensemble des polynômes à coefficients rationnels qui s'annulent en α est un idéal de $\mathbb{Q}[X]$; il contient le polynôme unitaire $X^3 - 2$.

4. Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie > 0 ; l'ensemble

$$I(u) = \{P \in \mathbb{K}[X] : P(u) = 0\}$$

est un idéal de $\mathbb{K}[X]$. On sait que χ_u appartient à cet idéal, donc cet idéal est non nul.

5. Soit C une partie d'un espace vectoriel E de dimension finie > 0 et soit $u \in \mathcal{L}(E)$; l'ensemble

$$I_C(u) = \{P \in \mathbb{K}[X] : \forall x \in C,\ P(u)(x) = 0\}$$

est un idéal de $\mathbb{K}[X]$. En particulier, $I_E(u) = I(u)$ est l'idéal des polynômes tels que $P(u) = 0$. Si $x \in E$ est non nul et $C = \{x\}$, l'idéal $I_x(u)$ contient le polynôme $P_{x,u}$ de la proposition 5.3.2.

Théorème 5.4.1. *Soit* I *un idéal de polynômes de* $\mathbb{K}[X]$*, avec* $I \neq \{0\}$ *; il existe dans* I *un (unique) polynôme unitaire* P *de plus petit degré, et l'idéal* I *est exactement l'ensemble* (P) *des multiples de* P.

On dit que P est le *générateur unitaire* de I.

Démonstration. Puisque $I \neq \{0\}$, il contient des polynômes non nuls. Soit k le plus petit degré d'un polynôme non nul de I, et soit P un polynôme non nul tel que $P \in I$ et $\deg P = k$; on peut supposer que P est unitaire (en multipliant P par une constante). Montrons que tous les éléments de I sont multiples de P. Soit $S \in I$, et effectuons la division euclidienne de S par P,

$$S = PQ + R, \quad \deg R < \deg P$$

(avec la convention usuelle $\deg 0 = -\infty$). Puisque $P \in I$, on a $PQ \in I$ et puisque $S \in I$, $R = S - PQ \in I$. Si on avait $R \neq 0$, on aurait trouvé dans I un polynôme non nul de degré $< k$, ce qui est impossible par la définition de k. Donc $R = 0$ et on a montré que tous les éléments de I sont multiples de P. Inversement tout multiple de P est dans I par la définition d'un idéal. On a donc montré que $I = (P)$. Si $Q \in I$ est unitaire et $\deg Q = \deg P$, on a $R = P - Q \in I$ et $\deg R < \deg P$, donc $R = 0$, $Q = P$, donc P est le seul polynôme unitaire de degré minimal dans I.

Exemples.

1. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et soit $x \neq 0$; le polynôme $P_x = P_{x,u}$ est le générateur unitaire de $I_x(u)$; en effet, on l'a introduit comme le polynôme unitaire de plus petit degré tel que $P_x(u)(x) = 0$. Si $y \in F_x$, le polynôme P_y divise P_x. Dans le cas où P_x est irréductible, on voit que $F_y = F_x$ pour tout y non nul dans F_x (parce que $\dim F_y = \deg P_y$).

2. Les polynômes P à coefficients réels tels que $P(i) = 0$ forment un idéal de $\mathbb{R}[X]$ dont le générateur unitaire est $X^2 + 1$. En effet, aucun polynôme unitaire à coefficients réels de degré < 2 ne s'annule au point i.

3. Posons $\alpha = 2^{1/3}$. L'idéal des polynômes à coefficients rationnels qui s'annulent en α contient le polynôme unitaire X^3-2. Soit P le générateur unitaire de cet idéal ; si $P \neq X^3-2$, on aura $X^3-2 = PQ$, avec $P, Q \in \mathbb{Q}[X]$, donc P ou Q sera de degré 1, donc aura une racine rationnelle, ce qui est impossible puisque la seule racine réelle de X^3-2 est α qui n'est pas rationnel.

Remarque. Soit I un idéal de $\mathbb{K}[X]$, avec $\{0\} \neq I \neq \mathbb{K}[X]$ et soit P un polynôme unitaire irréductible de $\mathbb{K}[X]$; si $P \in I$, alors $I = (P)$. En effet, puisque $I \neq \{0\}$ cet idéal admet un générateur unitaire G et $G \neq 1$ puisque $I \neq \mathbb{K}[X]$. Le polynôme G est alors un diviseur unitaire différent de 1 du polynôme unitaire irréductible P, donc $P = G$.

Théorème 5.4.2. (Bézout) *Soient* P *et* Q *deux polynômes de* $\mathbb{K}[X]$ *premiers entre eux. Il existe* $U, V \in \mathbb{K}[X]$ *tels que*

$$1 = UP + VQ.$$

Démonstration. On montre facilement que l'ensemble de tous les polynômes de la forme $UP + VQ$, lorsque U, V varient dans $\mathbb{K}[X]$ est un idéal I. Cet idéal n'est pas $\{0\}$ parce que P et Q ne sont pas tous les deux nuls. Soit G le générateur unitaire de l'idéal I. Puisque $P = 1P + 0Q$ et $Q = 0P + 1Q$, les deux polynômes P et Q sont dans I, ils sont par conséquent multiples de G, donc $G = 1$ puisque P et Q sont premiers entre eux, et $1 = G$ est bien de la forme $UP + VQ$ puisque $G \in I$.

Polynôme minimal d'un endomorphisme, d'une matrice

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie > 0 et $u \in \mathcal{L}(E)$; d'après le théorème de Cayley-Hamilton (théorème 5.3.1), l'idéal $I(u)$ de $\mathbb{K}[X]$ formé des polynômes $P \in \mathbb{K}[X]$ tels que $P(u) = 0$ n'est pas réduit à 0. Le générateur unitaire de l'idéal $I(u)$ est le polynôme unitaire P de plus petit degré tel que $P(u) = 0$. On l'appelle le *polynôme minimal* de u, il sera noté m_u dans ces notes.

Le polynôme caractéristique χ_u est donc un multiple du polynôme minimal. En particulier, le degré du polynôme minimal est $\leq \dim E$. Il est clair aussi que $\deg m_u \geq 1$ (parce que $E \neq \{0\}$).

Si A est une matrice à coefficients dans $\mathbb{K}$, on peut considérer l'idéal $I(A)$ de $\mathbb{K}[X]$ formé de tous les polynômes P à coefficients dans $\mathbb{K}$ tels que $P(A) = 0$. C'est un idéal non nul, dont le générateur unitaire est le *polynôme minimal* de la matrice A, noté m_A.

Soit $\mathbf{e}$ une base d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie, soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et $A = \mathrm{mat}_{\mathbf{e}}(u)$; alors $P(u) = 0$ si et seulement si $P(A) = 0$, donc $I(u) = I(A)$ et $m_u = m_A$.

Exemples de polynôme minimal.

a. La rotation d'angle $\pi/2$ dans le plan $\mathbb{R}^2$ a pour polynôme minimal $X^2 + 1$.

b. Si $m_u = X - \lambda$, alors $u = \lambda Id$ (et réciproquement).

c. Si $m_u = X(X-1)$, u est un projecteur et l'image $F = u(E)$ est telle que $\{0\} \neq F \neq E$.

d. Posons $\alpha = 2^{1/3}$. Soit $E \subset \mathbb{C}$ l'espace vectoriel de dimension ≤ 3 sur $\mathbb{Q}$ engendré par $1, \alpha, \alpha^2$; la multiplication par α définit un endomorphisme u_α de E. Pour tout polynôme $P \in \mathbb{Q}[X]$ l'endomorphisme $P(u_\alpha)$ est la multiplication par $P(\alpha)$ dans $\mathbb{C}$, donc $P(u_\alpha) = 0$ si et seulement si $P(\alpha) = 0$, donc l'idéal $I(u_\alpha)$ est égal à l'idéal de $\mathbb{Q}[X]$ formé des polynômes à coefficients rationnels qui s'annulent en α, dont le générateur unitaire est $X^3 - 2$.

Valeurs propres et polynôme minimal

Proposition 5.4.1. *Soient* E *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel de dimension finie et* $u \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ *; les polynômes* χ_u *et* m_u *ont les mêmes racines complexes.*

Démonstration. Puisque m_u divise χ_u, chaque racine de m_u est une racine de χ_u. Réciproquement, soit $\mathbf{e}$ une base de E et soit A la matrice de u dans cette base ; soit $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $\chi_u(\lambda) = 0$; il existe alors un vecteur colonne non nul $\mathrm{Z} \in \mathbb{C}^n$ tel que $\mathrm{AZ} = \lambda \mathrm{Z}$, et il en résulte que $\mathrm{P(A)Z} = \mathrm{P}(\lambda)\mathrm{Z}$ pour tout polynôme $\mathrm{P} \in \mathbb{K}[\mathrm{X}]$. En particulier,

$$0 = m_u(\mathrm{A})\mathrm{Z} = m_u(\lambda)\mathrm{Z},$$

donc $m_u(\lambda) = 0$.

Puisque les valeurs propres de u sont les racines de χ_u dans $\mathbb{K}$, on obtient :

Corollaire 5.4.1. *Les valeurs propres de* $u \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ *sont celles des racines du polynôme minimal* m_u *qui appartiennent au corps* $\mathbb{K}$.

Exemples.

1. Polynôme minimal d'un endomorphisme diagonalisable : soit $u \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ un endomorphisme diagonalisable et soient $\mu_1, \ldots, \mu_p \in \mathbb{K}$ les valeurs propres de u (deux à deux distinctes) ; d'après ce qui précède, chaque μ_i est une racine de m_u, donc

$$\mathrm{P} = (\mathrm{X} - \mu_1) \ldots (\mathrm{X} - \mu_p)$$

divise m_u. Pour chaque i, écrivons $\mathrm{P} = (\mathrm{X} - \mu_i)\mathrm{Q}_i$ avec $\mathrm{Q}_i \in \mathbb{K}[\mathrm{X}]$. Soit $x_i \in \mathrm{E}_{\mu_i}$; on aura

$$\mathrm{P}(u)(x_i) = \mathrm{Q}_i(u)(u - \mu_i \operatorname{Id}_{\mathrm{E}})(x_i) = 0$$

donc $\mathrm{P}(u)$ annule chaque sous-espace propre E_{μ_i} de u, donc $\mathrm{P}(u)$ annule E tout entier puisque $\mathrm{E} = \sum_{i=1}^{p} \mathrm{E}_{\mu_i}$, ce qui entraîne que m_u divise P, donc

$$m_u = (\mathrm{X} - \mu_1) \ldots (\mathrm{X} - \mu_p).$$

Remarquons que m_u a toutes ses racines dans $\mathbb{K}$, et toutes ses racines sont simples.

2. Matrice de Jordan. Si la matrice de u dans une base de E est une matrice de taille $n \times n$ de la forme

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \lambda & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

la seule racine possible de m_u est λ, donc m_u est de la forme $(\mathrm{X} - \lambda)^r$, avec $r \leq n$. On vérifie qu'en posant $v = u - \lambda \operatorname{Id}_{\mathrm{E}}$ on a $v(\mathbf{e}_j) = \mathbf{e}_{j-1}$ pour $j \geq 2$, donc $v^{n-1}(\mathbf{e}_n) = \mathbf{e}_1 \neq 0$, donc $r = n$.

3. Calcul du polynôme minimal d'une matrice compagnon de la forme

$$\mathrm{M(P)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \ldots & 0 & -a_1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Soit $(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n)$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$; désignons par u l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ dont la matrice dans la base canonique est M(P). En posant $x_0 = \mathbf{e}_1$, on voit que $u^j(x_0) = \mathbf{e}_{j+1}$ pour tout $j < n$, ce qui montre que tout vecteur de $\mathbb{K}^n$ peut s'écrire $\mathrm{Q}(u)(x_0)$ et que $\mathrm{R}(u) \neq 0$ lorsque $\deg \mathrm{R} < n$. Le polynôme unitaire

$$\mathrm{P} = \mathrm{X}^n + a_{n-1}\mathrm{X}^{n-1} + \cdots + a_1\mathrm{X} + a_0$$

est tel que $\mathrm{P}(u)(x_0) = 0$, donc $\mathrm{P}(u) = 0$, donc P est le polynôme minimal de la matrice M(P).

4. Polynôme minimal d'un endomorphisme lorsque l'espace est somme directe de deux sous-espaces stables. Dans ce cas le polynôme minimal est le PPCM des polynômes minimaux des deux restrictions u_1 et u_2. Cette remarque s'applique aux matrices diagonales par blocs.

Proposition 5.4.2. *Les polynômes minimal et caractéristique ont les mêmes facteurs irréductibles dans* $\mathbb{K}[\mathrm{X}]$.

Démonstration. Si P est un facteur irréductible de m_u, il divise χ_u, puisque m_u divise χ_u d'après Cayley-Hamilton. Inversement, soit Q un facteur irréductible (et unitaire) de χ_u et soit λ une racine complexe de Q, donc de χ_u ; on a vu que λ est racine de m_u. Considérons l'idéal $\mathrm{I} = (\mathrm{G})$ (avec G unitaire) des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$ qui s'annulent au point λ. Alors $\mathrm{G} \neq 1$ et G divise Q, donc $\mathrm{G} = \mathrm{Q}$, et Q divise m_u puisque m_u appartient à l'idéal I.

Critère de diagonalisabilité

Théorème 5.4.3. *Soient* E *un espace vectoriel de dimension finie* > 0 *sur* $\mathbb{K}$ *et* u *un endomorphisme de* E *; l'endomorphisme* u *est diagonalisable si et seulement si son polynôme minimal* m_u *se décompose en facteurs du premier degré dans* $\mathbb{K}[\mathrm{X}]$*, et si les racines sont deux à deux distinctes.*

Démonstration. On a vu que lorsque u est diagonalisable, on a

$$m_u = (\mathrm{X} - \mu_1) \ldots (\mathrm{X} - \mu_p)$$

où $\mu_1, \ldots, \mu_p$ est la liste des valeurs propres de u (deux à deux distinctes ; par définition, $\mu_i \in \mathbb{K}$). Inversement, supposons que

$$m_u = (\mathrm{X} - \mu_1) \ldots (\mathrm{X} - \mu_k)$$

avec $\mu_1, \ldots, \mu_k$ éléments deux à deux distincts de $\mathbb{K}$. Il est utile de dégager la remarque suivante, qu'il suffira d'appliquer au polynôme m_u pour terminer.

Lemme. *Soient* $\mu_1, \ldots, \mu_k$ *des éléments deux à deux distincts de* $\mathbb{K}$*, et considérons le polynôme*

$$\mathrm{P} = (\mathrm{X} - \mu_1) \ldots (\mathrm{X} - \mu_k).$$

Si $\mathrm{P}(u) = 0$*, l'endomorphisme* u *est diagonalisable. En résumé, si un endomorphisme* u *est annulé par un polynôme ayant toutes ses racines simples et toutes dans* $\mathbb{K}$*, il est diagonalisable.*

Démonstration. Pour chaque $j = 1, \ldots, k$ soit P_j le polynôme de degré $k - 1$ qui est le produit des facteurs $(\mathrm{X} - \mu_i)$ pour $i \neq j$ et soit $c_j = \mathrm{P}(\mu_j)^{-1}$; le polynôme

$$1 - \sum_{j=1}^{k} c_j \mathrm{P}_j$$

est de degré $\leq k-1$ et s'annule en k points distincts (il s'annule en chaque μ_j) donc ce polynôme est identiquement nul. Soit $v_j = c_j \mathrm{P}_j(u)$; puisque $\mathrm{P} = (\mathrm{X} - \mu_j)\mathrm{P}_j$ et $\mathrm{P}(u) = 0$, il est clair que l'image de v_j est contenue dans le noyau de $u - \mu_j \operatorname{Id}_{\mathrm{E}}$. On a

$$\forall x \in \mathrm{E}, \quad x = \sum_j v_j(x),$$

ce qui montre que E est la somme des sous-espaces propres de u, donc u est diagonalisable.

Exemple. La rotation d'angle $\pi/2$ dans $\mathbb{R}^2$ admet (X^2+1) pour polynôme minimal. Les racines de ce polynôme sont $\pm i$, qui ne sont pas dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, donc la rotation n'a pas de vecteur propre. En revanche, tout endomorphisme d'un espace vectoriel complexe tel que $m_u = \mathrm{X}^2 + 1$ est diagonalisable (et plus généralement d'après le lemme, tout endomorphisme u d'un espace vectoriel complexe E tel que $u^2 = -\operatorname{Id}_{\mathrm{E}}$ est diagonalisable).

Sous-espaces stables d'un endomorphisme diagonalisable

Soit $u \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ diagonalisable et soit G un sous-espace stable par u ; désignons par $v \in \mathcal{L}(\mathrm{G})$ la restriction de u à G. Puisque m_u annule v, m_u est un multiple de m_v. Puisque m_u a toutes ses racines simples, on voit que m_v est le produit de certains des facteurs $(\mathrm{X} - \mu_i)$ de m_u. L'espace G est donc de la forme

$$\mathrm{G} = \mathrm{G}_{\mu_1} + \cdots + \mathrm{G}_{\mu_p},$$

somme de sous-espaces G_{μ_i} des sous-espaces propres E_{μ_i} de u, et l'endomorphisme v est diagonalisable.

Invariance du polynôme minimal

Théorème 5.4.4. *Le polynôme minimal d'une matrice* $\mathrm{A} \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ *ne dépend pas du corps (pour tous les sous-corps* L *de* $\mathbb{C}$ *contenant les coefficients de la matrice* A*, le polynôme de* L[X] *de degré minimal qui annule* A *est le même).*

Démonstration. Soit L un sous-corps de $\mathbb{K}$ contenant les coefficients de la matrice A, et soit m_{L} le polynôme minimal calculé dans $\mathrm{M}_n(\mathrm{L})$. *A fortiori*, m_{L} est un polynôme à coefficients dans $\mathbb{K}$ qui annule A, donc m_{L} est un multiple de m_{A}. On a donc $p = \deg m_{\mathrm{L}} \geq \deg m_{\mathrm{A}} = q$. Mais dire que m_{L} est de degré $\geq p$ équivaut à dire que les matrices

$$\mathrm{I}_n, \mathrm{A}, \mathrm{A}^2, \ldots, \mathrm{A}^{p-1}$$

sont des vecteurs L-linéairement indépendants du L-espace $\mathrm{M}_n(\mathrm{L})$, que l'on peut considérer comme étant l'espace vectoriel L^{n^2}. D'après la proposition 4.4.3, ces matrices restent $\mathbb{K}$-linéairement indépendantes dans $\mathbb{K}^{n^2} \simeq \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$, ce qui implique que le degré de m_{A} ne peut pas être $< p$. On a donc $p = q$ et $m_{\mathrm{A}} = m_{\mathrm{L}}$.

Sous-espaces caractéristiques et polynôme minimal

Rappels sur les projecteurs. Un endomorphisme p de E est appelé *projecteur* si $p^2 = p$. Cela équivaut à dire que $p(y) = y$ pour tout $y \in p(\mathrm{E})$. Si p est un projecteur, $\operatorname{Id}_{\mathrm{E}} - p$ est aussi un projecteur. Si p est un projecteur, on obtient une décomposition de E en somme directe $\mathrm{E} = \mathrm{F} \oplus \mathrm{G}$ en posant $\mathrm{F} = p(\mathrm{E})$ et $\mathrm{G} = (\operatorname{Id}_{\mathrm{E}} - p)(\mathrm{E})$. En effet, pour tout $x \in \mathrm{E}$,

$$x = (p + (\operatorname{Id}_{\mathrm{E}} - p))(x) = p(x) + (\operatorname{Id}_{\mathrm{E}} - p)(x) \in \mathrm{F} + \mathrm{G}$$

et si $x \in \mathrm{F} \cap \mathrm{G}$, on a $x = p(x) = x - p(x)$ donc $p(x) = x = 0$.

Lemme des noyaux. *Soient* E *un espace vectoriel de dimension finie* > 0 *sur* $\mathbb{K}$ *et* $u \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$.

a. Pour tout polynôme $\mathrm{P} \in \mathbb{K}[\mathrm{X}]$, *le noyau* $\mathrm{F} = \ker \mathrm{P}(u)$ *est stable par* u.
b. Si $\mathrm{P} = \mathrm{P}_1\mathrm{P}_2$, *avec* $\mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2 \in \mathbb{K}[\mathrm{X}]$ *premiers entre eux, on a*

$$\ker \mathrm{P}(u) = \ker \mathrm{P}_1(u) \oplus \ker \mathrm{P}_2(u).$$

Démonstration. Le point a est un rappel. Passons au second point. D'après Bézout il existe $\mathrm{V}_1, \mathrm{V}_2 \in \mathbb{K}[\mathrm{X}]$ tels que

$$1 = \mathrm{V}_1\mathrm{P}_1 + \mathrm{V}_2\mathrm{P}_2.$$

Posons $p = \mathrm{P}(u)$, $\mathrm{F} = \ker p$, et $p_i = \mathrm{P}_i(u)$, $v_i = \mathrm{V}_i(u)$, $\mathrm{F}_i = \ker p_i$ pour $i = 1, 2$. On a $p = p_1p_2$ et $\mathrm{Id}_\mathrm{E} = v_1p_1 + v_2p_2$. Il est clair que $\mathrm{F}_i \subset \mathrm{F}$ puisque $p = p_1p_2$. Montrons que $\mathrm{F} = \mathrm{F}_1 + \mathrm{F}_2$. Pour tout $y \in \mathrm{F}$, on a $y = (v_1p_1)(y) + (v_2p_2)(y)$, et $p_2(v_1p_1)(y) = v_1(p(y)) = 0$ puisque $y \in \ker p$, donc $(v_1p_1)(y) \in \mathrm{F}_2$ et de même $(v_2p_2)(y) \in \mathrm{F}_1$, donc on a bien montré que $\mathrm{F} = \mathrm{F}_1 + \mathrm{F}_2$. Montrons que la somme est directe : si $y \in \mathrm{F}_1 \cap \mathrm{F}_2$, on aura $y = v_1(p_1(y)) + v_2(p_2(y)) = 0$.

Corollaire 5.4.2. *Soient* E *un espace vectoriel de dimension finie* > 0 *sur* $\mathbb{K}$, $u \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$ *et* P *un polynôme à coefficients dans* $\mathbb{K}$ *; si* $\mathrm{P}(u) = 0$ *et si* $\mathrm{P} = \mathrm{P}_1 \dots \mathrm{P}_k$ *avec des polynômes* (P_j) *deux à deux premiers entre eux, et tels que* $\ker \mathrm{P}_j(u) \neq \{0\}$ *pour tout* $j = 1, \dots, k$, *on a en posant* $\mathrm{F}_j = \ker \mathrm{P}_j(u)$, *pour* $j = 1, \dots, k$

— *chaque espace* F_j *est stable par* u.
— *on a* $\mathrm{E} = \mathrm{F}_1 \oplus \cdots \oplus \mathrm{F}_k$.

Démonstration. On montre par récurrence sur $j = 1, \dots, k$ que

$$\ker(\mathrm{P}_1 \dots \mathrm{P}_j)(u) = \mathrm{F}_1 \oplus \cdots \oplus \mathrm{F}_j.$$

Remarque. On retrouve le critère de diagonalisation.

Considérons un endomorphisme u. Supposons que m_u ait toutes ses racines dans $\mathbb{K}$ (cette hypothèse est automatique si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$). Soit $\mu_1, \dots, \mu_k$ la liste des racines du polynôme minimal m_u (deux à deux distinctes) ; on a

$$m_u = (\mathrm{X} - \mu_1)^{p_1} \dots (\mathrm{X} - \mu_k)^{p_k},$$

où $p_1, \dots, p_k$ sont des entiers ≥ 1. D'après les corollaires précédents, on voit que E est la somme directe des $\mathrm{E}_i = \ker(u - \mu_i \,\mathrm{Id}_\mathrm{E})^{p_i}$. On voit aussi que le polynôme minimal de chaque restriction u_i de u à E_i est égal à $(\mathrm{X} - \mu_i)^{p_i}$.

Exercice. Soit μ l'une des racines de m_u, et soit p sa multiplicité comme racine de m_u (par exemple, $\mu = \mu_1$ et $p = p_1$). Montrer que le plus petit entier ℓ tel que $\ker(u - \mu \,\mathrm{Id}_\mathrm{E})^\ell = \ker(u - \mu \,\mathrm{Id}_\mathrm{E})^{\ell+1}$ est égal à p.

Le noyau de l'endomorphisme $(u - \mu_j \,\mathrm{Id}_\mathrm{E})^{p_j}$ est donc le sous-espace caractéristique relatif à la valeur propre μ_j

$$\mathrm{F}_{\mu_j} = \ker(u - \mu_j \,\mathrm{Id}_\mathrm{E})^{p_j} = \ker(u - \mu_j \,\mathrm{Id}_\mathrm{E})^{r_j}.$$

Il est clair que F_{μ_j} contient le sous-espace propre E_{μ_j}. Nous avons retrouvé le théorème 5.2.2 : les sous-espaces caractéristiques forment une somme directe, et cette somme est égale à E,

$$\mathrm{E} = \mathrm{F}_{\mu_1} \oplus \cdots \oplus \mathrm{F}_{\mu_k}.$$

Chapitre 6. Topologie de $\mathbb{R}^n$

6.1. Topologie de $\mathbb{R}$

Théorème 6.1.1. *Toute suite de nombres réels admet des sous-suites monotones.*

Dans l'énoncé précédent, il faut entendre les mots *suites monotones* dans le sens de monotone au sens large. Bien entendu, on ne peut pas garantir qu'une suite de nombres réels possède toujours une sous-suite croissante, ou qu'elle possède toujours une sous-suite décroissante. On veut seulement dire qu'on a toujours *l'une des deux* possibilités.

Démonstration. Soit (x_n) une suite de nombres réels ; on va démontrer un résultat un tout petit peu plus précis que le résultat annoncé : il existe une sous-suite croissante au sens large, ou bien une sous-suite strictement décroissante. Disons que l'entier m est une *dernière chance* (sous-entendu : pour avoir une grande valeur de x_m) si

$$\forall n > m, \quad x_n < x_m.$$

Désignons par D le sous-ensemble de $\mathbb{N}$ formé des dernières chances. Ou bien D est fini (peut-être vide), ou bien il est infini. Si D est fini, soit M un majorant de D ; alors aucun entier $m > \mathrm{M}$ ne peut être une dernière chance, donc pour tout $m > \mathrm{M}$ il existe $n > m$ tel que $x_n \geq x_m$. Il est clair dans ce cas qu'on peut définir par récurrence une sous-suite (x_{n_k}), croissante au sens large : on pose $n_0 = \mathrm{M}+1$; si on a déjà défini $n_0 < n_1 < \ldots < n_k$ de façon que $x_{n_0} \leq x_{n_1} \leq \ldots \leq x_{n_k}$, on aura $m = n_k > \mathrm{M}$, donc il existe $n = n_{k+1} > n_k$ tel que $x_{n_{k+1}} \geq x_{n_k}$. La sous-suite (x_{n_k}) ainsi définie par récurrence est croissante (au sens large).

Dans le deuxième cas, l'ensemble D est infini ; écrivons le sous la forme

$$\mathrm{D} = \{m_0 < m_1 < \ldots < m_k < \ldots\}.$$

On vérifie alors que par définition de D, la sous-suite (x_{m_k}) est décroissante (strictement).

Cas particulier. Soit (n_k) une suite d'entiers ≥ 0 ; on peut trouver, ou bien une sous-suite (n_{k_j}) strictement croissante, ou bien une sous-suite constante. En effet, d'après ce qui précède (avec une modification évidente) on peut trouver une sous-suite strictement croissante, ou bien une sous-suite décroissante. Mais une suite décroissante d'entiers ≥ 0 est constante à partir d'un certain rang.

Exercice (difficile). A chaque couple d'entiers (m, n) avec $m < n$ on associe une couleur, disons bleu ou rouge. Montrer qu'il existe une suite strictement croissante $n_0 < n_1 < \ldots$ telle que tous les couples (n_i, n_j) (avec $i < j$) soient de la même couleur (théorème de Ramsey).

Théorème de Bolzano-Weierstrass 6.1.2. *Toute suite* bornée *de nombres réels admet des sous-suites convergentes.*

Démonstration. La sous-suite monotone fournie par le théorème précédent sera en plus ici une suite monotone *bornée*, donc convergente d'après le théorème 0.2.1.

Indiquons une autre démonstration, appelée démonstration *par dichotomie*. On suppose que la suite (x_n) est contenue dans l'intervalle $[0, 1]$. On construit par récurrence sur

l'entier $k \geq 0$ des suites (a_k), (b_k) de nombres réels et une suite d'entiers (n_k) qui vérifient l'hypothèse de récurrence $\mathrm{H}(k)$ suivante (hypothèse en trois points) :

– la suite (finie) a_j, $j = 0, \ldots, k$ est croissante, et la suite b_j, $j = 0, \ldots, k$ est décroissante ; de plus $a_0 = 0$, $b_0 = 1$, et $b_j - a_j = 2^{-j}$ pour tout $j = 0, \ldots, k$,

– les entiers (n_j), $j = 0, \ldots, k$ sont tels que $n_0 < n_1 < \cdots < n_k$, et $x_{n_j} \in [a_j, b_j]$ pour tout $j = 0, \ldots, k$,

– il existe une infinité d'indices n tels que $x_n \in [a_k, b_k]$.

Tous ces éléments étant donnés, expliquons comment passer de la propriété $\mathrm{H}(k)$ à la propriété $\mathrm{H}(k+1)$. Supposons $\mathrm{H}(k)$ satisfaite. Posons $m = (a_k + b_k)/2$, le milieu du segment $[a_k, b_k]$). L'intervalle $[a_k, b_k]$ est recouvert par les deux intervalles $[a_k, m]$ et $[m, b_k]$, donc l'un de ces deux intervalles contient une infinité de termes de la suite (x_n) donnée, puisque d'après $\mathrm{H}(k)$ il existe une infinité d'indices n tels que $x_n \in [a_k, b_k]$. Si c'est le premier intervalle, on pose $[a_{k+1}, b_{k+1}] = [a_k, m]$, c'est à dire que $a_{k+1} = a_k$ et $b_{k+1} = m$. Dans le cas contraire on pose $a_{k+1} = m$ et $b_{k+1} = b_k$. Dans tous les cas $a_k \leq a_{k+1} < b_{k+1} \leq b_k$ et $b_{k+1} - a_{k+1} = (b_k - a_k)/2 = 2^{-k-1}$. Puisque $[a_{k+1}, b_{k+1}]$ contient une infinité de termes de la suite, on peut certainement trouver un indice $\mathrm{N} > n_k$ tel que $x_{\mathrm{N}} \in [a_{k+1}, b_{k+1}]$. On pose alors pour finir $n_{k+1} = \mathrm{N}$.

On a ainsi prouvé la possibilité de la construction par récurrence. On a alors deux suites adjacentes (a_k) et (b_k), qui ont donc la même limite x, et de plus on a l'inégalité $a_k \leq x_{n_k} \leq b_k$ pour tout k, qui montre que la sous-suite (x_{n_k}) tend vers la même limite x.

Exercice. Autre application de la dichotomie : démontrer le théorème des valeurs intermédiaires en adaptant les idées précédentes.

Ensembles fermés de $\mathbb{R}$

Définition 6.1.1. On dit qu'un sous-ensemble $\mathrm{F} \subset \mathbb{R}$ est *fermé* si pour toute suite (x_n) de points de F qui converge dans $\mathbb{R}$ vers un point x, la limite x reste dans F.

Exemples.

1. Pour tous $a < b$ réels, l'ensemble $\mathrm{F} = [a, b]$ est fermé. Supposons en effet que (x_n) soit une suite de points de F, et que (x_n) tende vers une limite $x \in \mathbb{R}$. Puisque $a \leq x_n \leq b$ pour tout n, on obtient $a \leq x \leq b$ par passage à la limite des inégalités larges, donc x est bien dans l'ensemble F.

2. Si $a < b$, l'intervalle $]a, b[$ n'est pas fermé.

3. L'ensemble vide est fermé par pinaillage logique : en effet, il n'y a aucune suite de points de $\emptyset$, donc la condition de définition est satisfaite !

4. Ensembles définis par une inégalité large portant sur une fonction continue : soit $f : \mathrm{F} \to \mathbb{R}$ une fonction continue définie sur une partie fermée F de $\mathbb{R}$; pour tout $c \in \mathbb{R}$, les deux ensembles $\{x \in \mathrm{F} : f(x) \leq c\}$ et $\{x \in \mathrm{F} : f(x) \geq c\}$ sont fermés.

Proposition 6.1.1. *Si F_1 et F_2 sont deux ensembles fermés, leur réunion $\mathrm{F}_1 \cup \mathrm{F}_2$ et leur intersection $\mathrm{F}_1 \cap \mathrm{F}_2$ sont des ensembles fermés. Plus généralement, l'intersection $\bigcap_{i \in \mathrm{I}} \mathrm{F}_i$ d'une famille quelconque d'ensembles fermés $(\mathrm{F}_i)_{i \in \mathrm{I}}$ est un ensemble fermé.*

Rappel des propriétés des fonctions continues sur un fermé borné de $\mathbb{R}$ (avec Bolzano)

Lorsque f est une fonction réelle *minorée* définie sur un ensemble non vide X, on peut considérer la borne inférieure $\inf f(\mathrm{X})$ de l'ensemble $f(\mathrm{X})$ de ses valeurs sur X, et on peut toujours trouver une suite (x_n) de points de X telle que

$$\inf f(\mathrm{X}) = \lim_n f(x_n).$$

En effet, pour tout $n \geq 1$ on peut trouver par définition de la borne inférieure une valeur $f(x_n)$ de f en un certain point $x_n \in \mathrm{X}$ telle que $\inf f(\mathrm{X}) \leq f(x_n) < \inf f(\mathrm{X}) + 1/n$, donc

la suite des valeurs $f(x_n)$ converge vers $\inf f(\mathrm{X})$. Mais on ne peut pas en général trouver un point $x \in \mathrm{X}$ tel que $f(x) = \inf f(\mathrm{X})$. Si un tel point x existe, il est clair que $f(x)$ est alors *la plus petite valeur de* f sur l'ensemble X, et on convient de noter dans ce cas

$$f(x) = \min f(\mathrm{X}).$$

(et de façon analogue, on note $f(y) = \max f(\mathrm{X})$ si f atteint son maximum sur X au point $y \in \mathrm{X}$). Nous allons voir que tel est le cas pour les fonctions continues définies sur un sous-ensemble fermé borné non vide de $\mathbb{R}$.

Théorème 6.1.3. *Si f est une fonction réelle définie et continue en tout point d'un ensemble fermé borné non vide* $\mathrm{F} \subset \mathbb{R}$*, elle est bornée et elle atteint son maximum et son minimum sur* F.

Démonstration. Montrons d'abord que f est bornée sur F. Sinon, on pourrait trouver pour tout entier $n \geq 0$ un point $x_n \in \mathrm{F}$ tel que $|f(x_n)| > n$. Par Bolzano, on trouve une sous-suite (x_{n_k}) convergente vers un certain point $x \in \mathbb{R}$, et on a $x \in \mathrm{F}$ puisque F est fermé et que $x_{n_k} \in \mathrm{F}$ pour tout k. On devrait alors avoir $f(x_{n_k}) \to f(x)$ par continuité de la fonction f au point x, mais $|f(x_{n_k})| > n_k$ tend vers l'infini, ce qui est contradictoire. On en déduit que f est bornée sur F.

L'ensemble $f(\mathrm{F})$ des valeurs de f sur F est non vide (puisque F est non vide) et borné, donc on peut définir sa borne inférieure $m = \inf f(\mathrm{F})$ et on peut trouver une suite de points $x_n \in \mathrm{F}$ telle que $(f(x_n))$ converge vers m. D'après le théorème 6.1.2 (de Bolzano-Weierstrass), il existe une sous-suite (x_{n_k}) qui converge vers un point $x \in \mathbb{R}$. Puisque $x_{n_k} \in \mathrm{F}$ pour tout k, on obtient $x \in \mathrm{F}$ parce que F est fermé, donc x est bien dans l'ensemble de définition de f. Puisque f est continue au point x, on doit avoir $f(x) = \lim_k f(x_{n_k}) = m$, donc $f(x) \leq f(t)$ pour tout $t \in \mathrm{F}$, c'est à dire que la fonction f atteint son minimum sur F au point x. La même démonstration s'applique pour trouver un point $y \in \mathrm{F}$ où le maximum de f est atteint.

Corollaire 6.1.1. *Tout fermé* F *borné et non vide de* $\mathbb{R}$ *possède un plus grand et un plus petit élément.*

Démonstration. La fonction continue f définie sur F par $f(x) = x$ atteint son maximum et son minimum sur F.

Corollaire 6.1.2. *Soit* F *un fermé non borné de* $\mathbb{R}$ *et soit f une fonction réelle continue sur* F *telle que $f(x)$ tende vers $+\infty$ lorsque $|x| \to +\infty$ (par valeurs $x \in \mathrm{F}$). La fonction f atteint son minimum sur l'ensemble* F.

Démonstration. Soit x_0 un point de F et posons $\mathrm{F}_0 = \{x \in \mathrm{F} : f(x) \leq f(x_0)\}$; cet ensemble F_0 est un fermé non vide. De plus il est borné (puisque f tend vers $+\infty$, il existe R tel que $f(y) > f(x_0)$ pour tout $y \in \mathrm{F}$ tel que $|y| > \mathrm{R}$, donc F_0 est borné par R), donc f atteint son minimum sur F_0 en un point x_1 et ce minimum est aussi le minimum de f sur l'ensemble F tout entier : si $z \in \mathrm{F}$, ou bien $z \in \mathrm{F}_0$ et on sait que $f(x_1) \leq f(z)$, ou bien $z \notin \mathrm{F}_0$ et alors $f(x_1) \leq f(x_0) < f(z)$.

Corollaire 6.1.3. *Tout ensemble* F *fermé non vide et majoré de* $\mathbb{R}$ *contient sa borne supérieure (il possède donc un plus grand élément).*

Démonstration. Si F est borné on connaît déjà le résultat. Sinon, on applique le corollaire précédent à la fonction $f(x) = -x$.

Théorème 6.1.4. *Pour toute suite décroissante* $(\mathrm{F}_n)_n$ *de fermés bornés non vides de* $\mathbb{R}$*, l'intersection* $\bigcap_n \mathrm{F}_n$ *est non vide.*

Démonstration. Pour tout $n \geq 0$ désignons par x_n le plus petit élément de F_n. On vérifie que la suite (x_n) est croissante (parce que $\mathrm{F}_{n+1} \subset \mathrm{F}_n$), et elle est majorée puisqu'elle est contenue dans l'ensemble borné F_0. Elle est donc convergente vers un certain nombre x. Pour tout n_0 fixé, on peut dire que x est la limite de la suite $(x_n)_{n \geq n_0}$ de points du fermé F_{n_0}, donc $x \in \mathrm{F}_{n_0}$ pour tout n_0, ce qui signifie que x est dans l'intersection de tous les F_n.

Définition 6.1.2. Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$ et soit f une fonction réelle définie sur l'ensemble A ; on dit que f est *uniformément continue* sur A si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tel que

$$\forall x, y \in \mathrm{A}, \quad \big(|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon\big).$$

Exemples. La fonction $x \to x^2$ n'est pas uniformément continue sur $\mathbb{R}$ (pour tout $\eta > 0$ donné, la fonction $(x + \eta/2)^2 - x^2 \geq \eta x$ tend vers $+\infty$ lorsque $x \to +\infty$). En revanche toute fonction de classe C^1 à dérivée bornée sur un intervalle I est uniformément continue sur I (appliquer la majoration des accroissements finis).

Si f est uniformément continue sur A, on définit son *module de continuité* ω_f, qui est une fonction définie sur $]0, +\infty[$ par la formule

$$\omega_f(\delta) = \sup\{|f(x) - f(y)| : x, y \in \mathrm{A},\ |x - y| < \delta\}.$$

Dire que f est uniformément continue signifie précisément que $\omega_f(\delta)$ tend vers 0 lorsque δ tend vers 0.

Théorème 6.1.5. *Toute fonction continue sur un fermé borné* F *(non vide) de* $\mathbb{R}$ *est uniformément continue.*

Démonstration. Par l'absurde, avec Bolzano-Weierstrass : si $f : \mathrm{F} \to \mathbb{R}$ n'est pas uniformément continue, il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $\delta > 0$, on puisse trouver deux points x, y de F tels que $|x - y| < \delta$ mais $|f(x) - f(y)| \geq \varepsilon$. On peut appliquer ceci en particulier pour chaque choix $\delta = 1/n$, pour tout $n \geq 1$. On obtient ainsi deux suites (x_n) et (y_n) de points de F telles que $|x_n - y_n| < 1/n$ et $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon$ pour tout $n \geq 1$. D'après Bolzano, on peut trouver une sous-suite (x_{n_k}) qui converge vers un point $x \in \mathrm{F}$. Puisque $(x_n - y_n)$ tend vers 0, il en résulte que (y_{n_k}) converge aussi vers x. En passant à la limite dans les relations précédentes on obtient $|f(x) - f(x)| \geq \varepsilon$, contradiction.

Ouverts de $\mathbb{R}$

Les notions de paragraphe sont importantes, mais elles seront reprises et développées dans le cadre général de $\mathbb{R}^p$. Le lecteur peut donc sauter directement au cas de $\mathbb{R}^p$ s'il le souhaite.

Définition 6.1.3. On dit qu'un sous-ensemble V de $\mathbb{R}$ est un *voisinage* d'un point $x \in \mathbb{R}$ s'il existe $r > 0$ tel que $]x - r, x + r[\subset \mathrm{V}$.

Par exemple, le segment $[0, 1]$ n'est pas un voisinage du point 0 (ni du point 1), mais c'est un voisinage de chacun des points x de l'intervalle *ouvert* $]0, 1[$.

Définition 6.1.4. On dit qu'un sous-ensemble Ω de $\mathbb{R}$ est *ouvert* si Ω est un voisinage de chacun de ses points, c'est à dire si pour tout point $x \in \Omega$, il existe $r > 0$ tel que $]x - r, x + r[\subset \Omega$.

Exemples.

1. $\emptyset$ et $\mathbb{R}$ sont ouverts dans $\mathbb{R}$.
2. Un intervalle $]a, b[$ est ouvert dans $\mathbb{R}$. L'intervalle $]a, b]$ n'est pas ouvert (ni fermé !).
3. Si ω est un ouvert de $\mathbb{R}$, et f une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, l'image inverse $\Omega = f^{-1}(\omega) = \{x \in \mathbb{R} : f(x) \in \omega\}$ est un ensemble ouvert de $\mathbb{R}$.

Proposition 6.1.2. Propriétés des ouverts. *L'intersection $\Omega_1 \cap \ldots \cap \Omega_n$ d'une famille finie d'ouverts $\Omega_1, \ldots, \Omega_n$ est un ouvert. La réunion d'une famille quelconque d'ouverts est un ouvert.*

Proposition 6.1.3. *Un ensemble $\mathrm{F} \subset \mathbb{R}$ est fermé si et seulement si son complémentaire est ouvert.*

La démonstration sera donnée dans le cas général de $\mathbb{R}^p$ plus loin (proposition 6.2.5).

Exemple d'ensemble fermé "compliqué" : l'ensemble triadique de Cantor. C'est un exemple d'ensemble qui est très difficile à "sentir" autrement qu'en regardant son complémentaire. On définit donc une suite d'ouverts contenus dans $[0, 1]$ en posant $\Omega_1 =]1/3, 2/3[$, puis

$$\Omega_k = \{x \in [0, 1] : 1/3 < 3^k x - [3^k x] < 2/3\}$$

pour tout $k \geq 1$, où $[y]$ désigne la partie entière de y (le lecteur fera un petit dessin, pour $k = 1, 2, 3$). L'ensemble Δ est le fermé complémentaire dans $[0, 1]$ de l'ensemble ouvert $\bigcup_{n \geq 1} \Omega_n$ (si on veut, on peut dire que Δ est l'ensemble des $x \in [0, 1]$ tels que $\sin(3^k \pi x) \geq 0$ pour tout entier $k \geq 1$).

Composantes d'un ouvert de $\mathbb{R}$

Lemme. *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}$ et soit $x \in \Omega$; ou bien $[x, +\infty[\subset \Omega$, ou bien il existe b tel que $x < b$, $[x, b[\subset \Omega$ et $b \notin \Omega$. De même à gauche, ou bien $]-\infty, x] \subset \Omega$, ou bien il existe a tel que $a < x$, $]a, x] \subset \Omega$ et $a \notin \Omega$. Tout ouvert de $\mathbb{R}$ est donc réunion d'intervalles ouverts deux à deux disjoints.*

Démonstration. On pose $\mathrm{A} = \{y > x : y \notin \Omega\}$. Si A est vide, on a $[x, +\infty[\subset \Omega$; sinon, on peut considérer le fermé F formé des points $y \geq x$ qui ne sont pas dans Ω (intersection du complémentaire de Ω avec le fermé $[x, +\infty[$). Ce fermé est non vide, et minoré par x. Il contient donc un plus petit élément b. On a alors $b \notin \Omega$ et $[x, b[\subset \Omega$.

Exercice. Montrer qu'un ensemble à la fois ouvert et fermé dans $\mathbb{R}$ est vide ou égal à $\mathbb{R}$ (ou encore : si $\mathbb{R}$ est la réunion $\mathrm{F}_1 \cup \mathrm{F}_2$ de deux fermés non vides, l'intersection $\mathrm{F}_1 \cap \mathrm{F}_2$ est un ensemble non vide).

Valeur d'adhérence d'une suite de nombres réels

Définition 6.1.5. Soit (x_n) une suite de nombres réels ; on dit que $y \in \mathbb{R}$ est une *valeur d'adhérence* de la suite (x_n) si pour tout entier $\mathrm{N} \geq 0$ et pour tout nombre réel $\varepsilon > 0$ il existe un entier $n \geq \mathrm{N}$ tel que $|x_n - y| < \varepsilon$.

Exemples.

1. La suite $x_n = n$ n'admet aucune valeur d'adhérence dans $\mathbb{R}$.
2. Si (x_n) converge vers $x \in \mathbb{R}$, la valeur x est valeur d'adhérence de la suite, et c'est la seule valeur d'adhérence de la suite.
3. La suite (x_n) définie par $x_n = (-1)^n$ pour tout entier $n \geq 0$ admet exactement deux valeurs d'adhérence, 1 et -1.
4. Si une sous-suite (x_{n_k}) de la suite (x_n) converge vers y, alors y est valeur d'adhérence de la suite (x_n).
5. Pour toute suite bornée (x_n), la valeur $\limsup_n x_n$ est valeur d'adhérence, et c'est la plus grande valeur d'adhérence de la suite ; de la même façon, $\liminf_n x_n$ est la plus petite valeur d'adhérence de la suite (x_n).

On va voir que l'exemple 4 est tout à fait général.

Proposition 6.1.4. *Le nombre y est valeur d'adhérence de la suite (x_n) si et seulement s'il existe une sous-suite de la suite (x_n) qui converge vers y.*

Démonstration. Dans la direction "si", c'est le contenu de l'exemple 4 qui précède. Inversement, supposons que y soit valeur d'adhérence. On va expliquer qu'on peut trouver une sous-suite (x_{n_k}) telle que $|x_{n_k} - y| < 2^{-k}$ pour tout entier $k \geq 0$. Si $n_0, \ldots, n_k$ sont déjà choisis on applique la définition de valeur d'adhérence avec $\varepsilon = 2^{-k-1}$ et $\mathrm{N} = n_k + 1$ pour trouver $n_{k+1} = n \geq \mathrm{N} > n_k$ tel que $|x_{n_{k+1}} - y| < 2^{-k-1}$.

Remarque. On retrouve Bolzano-Weierstrass en traduisant les informations précédentes. Si (x_n) est bornée, $x = \limsup_n x_n$ existe, x est une valeur d'adhérence de la suite (x_n), donc il existe une sous-suite qui converge vers x.

Exercice. Montrer que si la suite (x_n) n'a aucune valeur d'adhérence, on a $\lim |x_n| = +\infty$.

6.2. Topologie de l'espace $\mathbb{R}^p$ et des espaces vectoriels de dimension finie

Rappelons les notions géométriques usuelles dans l'espace : les points et les vecteurs, le produit scalaire, la norme et la distance. Etant donnés deux points P et Q de l'espace, on peut leur associer un vecteur $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$; étant donnés deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$, on sait définir leur produit scalaire, que nous noterons $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}$, et qui est un nombre réel. La *norme* du vecteur $\overrightarrow{u}$, notée $\|u\|$, est alors définie par la relation $\|u\|^2 = \overrightarrow{u}.\overrightarrow{u}$. La *distance* de deux points P et Q notée $d(\mathrm{P}, \mathrm{Q})$ est définie par $d(\mathrm{P}, \mathrm{Q}) = \|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\| = d(\mathrm{Q}, \mathrm{P})$.

Si on fixe un repère orthonormé $(\mathrm{O}, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ de l'espace, les points comme les vecteurs admettent une représentation par des éléments de $\mathbb{R}^3$, par l'intermédiaire de leurs coordonnées (ou de leurs composantes) dans ce repère. On se contentera donc en général dans ce cours de parler d'éléments de $\mathbb{R}^3$, qui seront selon les cas considérés comme des points ou comme des vecteurs. On est naturellement amené à généraliser toutes ces notions à $\mathbb{R}^p$, pour tout entier $p \geq 1$. On appellera selon les circonstances *points* ou *vecteurs* les éléments de $\mathbb{R}^p$. On pose pour $x = (x_1, \ldots, x_p) \in \mathbb{R}^p$ et $y = (y_1, \ldots, y_p) \in \mathbb{R}^p$

$$x \,.\, y = \sum_{i=1}^{p} x_i y_i,$$

$$\|x\| = \sqrt{x \,.\, x} = \Big(\sum_{i=1}^{p} x_i^2\Big)^{1/2}; \quad d(x, y) = \|x - y\| = \Big(\sum_{i=1}^{p} (x_i - y_i)^2\Big)^{1/2}.$$

On appelle la quantité $x \,.\, y$ le *produit scalaire* des deux vecteurs x et y de $\mathbb{R}^p$; on dit que $\|x\|$ est la *norme euclidienne* du vecteur x et $d(x, y)$ s'appelle la *distance (euclidienne)* entre les points x et y.

Inégalité de Cauchy-Schwarz

Etant donnés deux réels $u, v \geq 0$, on a $uv \leq (u^2 + v^2)/2$. On a donc pour tout $a > 0$

$$\Big|\sum_{i=1}^{p} x_i y_i\Big| \leq \sum_{i=1}^{p} |x_i|\,|y_i| = \sum_{i=1}^{p} (a\,|x_i|)\Big(\frac{|y_i|}{a}\Big) \leq \frac{a^2}{2} \sum_{i=1}^{p} x_i^2 + \frac{1}{2a^2} \sum_{i=1}^{p} y_i^2,$$

et on choisit $a^2 = \|y\|/\|x\|$ pour obtenir *l'inégalité de Cauchy-Schwarz*

$$|x \,.\, y| \leq \|x\|\,\|y\|.$$

Relation du parallélogramme. En additionnant les développements de $\|x+y\|^2$ et $\|x-y\|^2$ on obtient

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

La fonction $x \to \|x\|$ vérifie les trois propriétés suivantes (qui sont les propriétés générales d'une *norme* sur un espace vectoriel)

1. $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ pour tous $x, y \in \mathbb{R}^p$ (inégalité triangulaire pour une norme).
2. $\|\lambda x\| = |\lambda|\, \|x\|$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ et tout $x \in \mathbb{R}^p$.
3. $(\|x\| = 0) \Leftrightarrow (x = 0_{\mathbb{R}^p})$.

Démontrons l'inégalité triangulaire $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$. On a

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + 2x\,.\,y + \|y\|^2,$$

ce qui donne avec Cauchy-Schwarz $\|x+y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2\|x\|\,\|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2$, d'où l'inégalité triangulaire. On notera que l'inégalité triangulaire implique la relation $\big|\, \|x\| - \|y\| \,\big| \leq \|x-y\|$ pour tous vecteurs x, y.

Exercices.

1. Si $x \neq 0$, on a $\|x+y\| = \|x\| + \|y\|$ si et seulement s'il existe $\lambda \geq 0$ tel que $y = \lambda x$.
2. Si f est une fonction continue de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}^p$, montrer que

$$\|\int_0^1 f(t)\,dt\| \leq \int_0^1 \|f(t)\|\,dt$$

(utiliser des sommes de Riemann).

Propriétés de la distance

La fonction distance $(x,y) \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^p \to d(x,y) \in [0, +\infty[$ vérifie les trois propriétés suivantes :

1. $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$ pour tous $x, y, z \in \mathbb{R}^p$ (inégalité triangulaire pour une distance).
2. $d(x,y) = d(y,x)$ pour tous $x, y \in \mathbb{R}^p$.
3. $(d(x,y) = 0) \Leftrightarrow (x = y)$ pour tous $x, y \in \mathbb{R}^p$.

On remarquera que l'on a $|d(x,y) - d(x,z)| \leq d(y,z)$, pour tous les triplets x, y, z de points de $\mathbb{R}^p$, ce qui revient à dire que $\big|\|u\| - \|v\|\big| \leq \|u-v\|$ pour tous vecteurs $u, v \in \mathbb{R}^p$.

Le cas complexe

On introduit le *produit scalaire complexe* de deux vecteurs $x = (x_1, \ldots, x_p)$ et $y = (y_1, \ldots, y_p)$ de $\mathbb{C}^p$ en posant

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^p x_i \overline{y}_i.$$

On voit que $\langle x, x \rangle = \sum_{i=1}^p |x_i|^2$. On pose alors pour un vecteur $z = (z_1, \ldots, z_p) \in \mathbb{C}^p$, si $z_j = a_j + ib_j$, avec a_j, b_j réels pour $j = 1, \ldots, p$

$$\|z\| = \Big(\sum_{i=1}^p |z_i|^2\Big)^{1/2} = \Big(\sum_{i=1}^p a_i^2 + \sum_{i=1}^p b_i^2\Big)^{1/2}.$$

On remarquera, et c'est important, que si on identifie $\mathbb{C}^p$ avec $\mathbb{R}^{2p}$ de la façon habituelle, la norme de z dans $\mathbb{C}^p$ que nous venons de définir coïncide avec la norme dans $\mathbb{R}^{2p}$ de z considéré comme élément $\mathrm{Z} = (a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots, a_p, b_p)$ de $\mathbb{R}^{2p}$. On a aussi une inégalité de Cauchy-Schwarz dans le cas complexe, et l'inégalité triangulaire en résulte comme dans le cas de $\mathbb{R}^p$ (on peut aussi dire que c'est l'inégalité triangulaire dans $\mathbb{R}^{2p}$),

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\|\,\|y\|, \quad \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|.$$

Suites convergentes

Définition 6.2.1. On dit qu'une suite (x_n) de points (ou de vecteurs) de $\mathbb{R}^p$ *tend vers* le point (ou le vecteur) $x \in \mathbb{R}^p$ (ou *converge* vers x) si $d(x_n, x)$ (ou $\|x_n - x\|$) tend vers 0 quand n tend vers l'infini.

Proposition 6.2.1. Caractérisation de la convergence avec les coordonnées. *La suite $(x^{(n)})$ d'éléments de $\mathbb{R}^p$ converge vers $x = (x_1, \ldots, x_p) \in \mathbb{R}^p$ si et seulement si pour tout $i = 1, \ldots, p$ la suite numérique $(x_i^{(n)})$ converge vers x_i quand n tend vers l'infini.*

Lemme. *Si la suite de points (x_n) de $\mathbb{R}^p$ tend vers x, il en résulte que la distance $d(x_n, y)$ tend vers $d(x, y)$ pour tout $y \in \mathbb{R}^p$.*

Démonstration. Il suffit de noter que

$$|d(x_n, y) - d(x, y)| \leq d(x_n, x).$$

Il en résulte (en prenant $y = 0$) qu'une suite convergente (x_n) est bornée, puisque la suite $\|x_n\| = d(x_n, 0)$ est convergente ; il existe donc un nombre M tel que $\|x_n\| \leq \mathrm{M}$ pour tout entier $n \geq 0$. Entassons quelques propriétés faciles : si la suite de vecteurs (x_n) tend vers x, la suite (λx_n) tend vers λx pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$; si (x_n) tend vers x et (y_n) vers y, la somme $x_n + y_n$ tend vers $x + y$.

Fonctions continues

On peut envisager deux types de généralisation des fonctions réelles d'une variable réelle. L'une concerne les fonctions $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$. Ce cas est assez facile, il s'agit d'une fonction *vectorielle* d'une variable réelle, qui se ramène à l'étude de deux fonctions réelles de variables réelles, les deux fonctions coordonnées. L'autre cas est celui de fonctions $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Ce cas est vraiment nouveau et présente des difficultés supplémentaires. Il s'agit du cas des fonctions réelles de plusieurs variables.

Définition 6.2.2. Soit A un sous-ensemble non vide de $\mathbb{R}^p$, soient $f : \mathrm{A} \to \mathbb{R}$ et $a \in \mathrm{A}$; on dit que f est *continue au point* a si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tel que

$$\forall x \in \mathrm{A}, \quad \big(d(x, a) < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon\big).$$

Notons la propriété essentielle suivante, qui généralise immédiatement celle qui a été vue pour les fonctions d'une seule variable :

Proposition 6.2.2. *Si $f : \mathrm{A} \to \mathbb{R}$ est continue au point $a \in \mathrm{A}$ et si $(x_n) \subset \mathrm{A}$ tend vers le point a, on a alors $f(x_n) \to f(a)$. Réciproquement, si pour toute suite $(x_n) \subset \mathrm{A}$ qui tend vers $a \in \mathrm{A}$ on a $f(x_n) \to f(a)$, alors f est continue au point a.*

Démonstration. La première partie est facile et laissée au lecteur. Pour montrer la seconde, il revient au même de voir que si f *n'est pas* continue au point a, on peut trouver une suite $(x_n) \subset \mathrm{A}$ qui tend vers a mais telle que $f(x_n)$ ne tende pas vers $f(a)$; si f n'est pas continue au point a, il existe un $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $\delta > 0$, il existe un point $x \in \mathrm{A}$ tel que $d(x, a) < \delta$ mais $|f(x) - f(a)| \geq \varepsilon$. On peut appliquer cette affirmation pour toutes les valeurs $\delta = 1/n$, $n \geq 1$, et trouver ainsi une suite de points $(x_n) \subset \mathrm{A}$ telle que $d(x_n, a) < 1/n$ mais $|f(x_n) - f(x)| \geq \varepsilon$.

Exemples.

1. **Attention, pièges :** pour vérifier la continuité d'une fonction de deux variables en un point $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, il ne suffit pas de se déplacer vers le point (a, b) en suivant toutes les droites qui passent par ce point. Considérons la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x, y) = \frac{xy^2}{(x^2 - y)^2 + x^6 + y^6}$$

pour $(x, y) \neq (0, 0)$ et $f(0, 0) = 0$. On vérifie que la limite de $f(x, y)$ est égale à $f(0, 0) = 0$ si on tend vers 0 sur une droite (droite quelconque passant par 0 : petit exercice), mais qui n'est cependant pas continue au point $(0, 0)$. En effet, si on tend vers 0 en se déplaçant sur la parabole d'équation $y = x^2$, en prenant par exemple la suite $(1/n, 1/n^2)$, on voit que $f(1/n, 1/n^2) = n^7/(n^6 + 1)$ tend vers $+\infty$, donc f n'est pas continue à l'origine (elle n'est même pas bornée au voisinage de l'origine).

2. Considérons les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x, y) = \frac{x \sin(y^2)}{x^2 + y^2}, \quad g(x, y) = \frac{|x|^\alpha |y|^\alpha}{x^2 + y^2},$$

pour $(x, y) \neq (0, 0)$ et $f(0, 0) = g(0, 0) = 0$. La fonction f est continue en $(0, 0)$. La fonction g est continue en $(0, 0)$ si et seulement si $\alpha > 1$.

Soit A un sous-ensemble non vide de $\mathbb{R}^p$; une fonction f définie sur A, à valeurs réelles, est dite *lipschitzienne* s'il existe une constante M telle que pour tous $x, y \in$ A on ait

$$|f(x) - f(y)| \leq \mathrm{M}\, d(x, y).$$

Les fonctions lipschitziennes sont continues (et même uniformément continues) : c'est presque évident à partir de l'inégalité ci-dessus. Il suffit de prendre $\delta(\varepsilon) = \varepsilon/\mathrm{M}$ pour tout $\varepsilon > 0$.

Exemples.

1. Les fonctions f définies sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x_1, x_2) = x_1$, $f(x_1, x_2) = ax_1 + bx_2$ sont lipschitziennes sur $\mathbb{R}^2$. La fonction $f(x_1 x_2) = x_1 x_2$ est lipschitzienne sur tout disque borné de rayon r dans $\mathbb{R}^2$, mais pas lipschitzienne sur $\mathbb{R}^2$ tout entier.

2. Pour y fixé la fonction $x \to d(x, y)$ est lipschitzienne de constante 1. Plus généralement la distance à une partie C (non vide) de $\mathbb{R}^p$ est aussi une fonction lipschitzienne de constante 1. Elle est définie sur $\mathbb{R}^p$ par

$$d(x, \mathrm{C}) = \inf\{d(x, y) : y \in \mathrm{C}\}.$$

Il n'y a aucune difficulté pour définir la continuité lorsque l'espace des valeurs est lui aussi un espace vectoriel. Par exemple, se donner une application définie sur $\mathbb{R}^p$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^2$ revient tout simplement à se donner pour tout $x \in \mathbb{R}^p$ les deux coordonnées $f_1(x)$ et $f_2(x)$ de l'image $f(x) \in \mathbb{R}^2$, c'est à dire que la donnée de l'application f équivaut à la donnée de deux fonctions réelles définies sur $\mathbb{R}^p$. On va donner une définition de la continuité de f qui reviendra à dire que les deux fonctions coordonnées f_1 et f_2 sont continues.

Définition 6.2.3. Soit A un sous-ensemble non vide de $\mathbb{R}^p$, soient $f : \mathrm{A} \to \mathbb{R}^q$ et $a \in$ A ; on dit que f est *continue au point* a si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tel que

$$\forall x \in \mathrm{A}, \quad \big(d(x, a) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(a)) < \varepsilon\big).$$

On peut considérer les coordonnées $(f_1(x), \ldots, f_q(x))$ du point image $f(x) \in \mathbb{R}^q$. On vérifie facilement que f est continue au point a si et seulement si les q fonctions coordonnées $f_1, \ldots, f_q$ (à valeurs réelles) sont continues au point a.

Théorème 6.2.1. *Pour que $f : \mathrm{A} \to \mathbb{R}^q$ soit continue au point $a \in \mathrm{A}$, il faut et il suffit que pour toute suite $(x_n) \subset \mathrm{A}$ qui converge vers a, la suite $(f(x_n))$ converge vers $f(a)$.*

Démonstration. Il suffit de raisonner sur les fonctions coordonnées, ou bien d'adapter la démonstration du cas $q = 1$.

Si f et g sont deux fonctions continues au point a, la somme $f + g$ et le produit fg sont continues au point a. Les fonctions continues les plus simples sur $\mathbb{R}^p$ sont les fonctions coordonnées $x \to x_i$, pour $i = 1, \ldots, p$. A partir d'elles on obtient les polynômes dans les coordonnées. Par exemple, la fonction déterminant est une fonction continue sur $\mathrm{M}_p(\mathbb{C})$, puisque c'est une fonction polynomiale des coordonnées.

Théorème 6.2.2. Composition de fonctions continues. *On suppose $\mathrm{A}_1 \subset \mathbb{R}^p$, $\mathrm{A}_2 \subset \mathbb{R}^q$, et on se donne $f_1 : \mathrm{A}_1 \to \mathrm{A}_2$, continue au point $a_1 \in \mathrm{A}_1$ et $f_2 : \mathrm{A}_2 \to \mathbb{R}^n$, continue au point $a_2 = f_1(a_1)$. Alors $f_2 \circ f_1$ est continue au point a_1.*

Démonstration. Les deux continuités donnent deux "fonctions de contrôle" $\delta_1(\varepsilon)$ et $\delta_2(\varepsilon)$. On pose alors $\varepsilon_1 = \delta_2(\varepsilon)$ et $\delta = \delta_1(\varepsilon_1)$. Si $x \in \mathrm{A}_1$ et $d(x, a_1) < \delta = \delta_1(\varepsilon_1)$, on aura $d(f_1(x), f_1(a_1)) < \varepsilon_1 = \delta_2(\varepsilon)$, donc $d(f_2(f_1(x)), f_2(f_1(a_1))) < \varepsilon$.

A partir de quelques principes de base, on peut construire une grande quantité de fonctions continues par application répétée des opérations de composition. Voici deux de ces principes simples :

1. La fonction $x \to (x, x)$ est continue de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^p$.

2. Si $\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2$ sont deux sous-ensembles non vides de $\mathbb{R}^p$, si $f_1 : \mathrm{A}_1 \to \mathbb{R}^q$ est continue au point $a_1 \in \mathrm{A}_1$ et si la fonction $f_2 : \mathrm{A}_2 \to \mathbb{R}^q$ continue au point $a_2 \in \mathrm{A}_2$, la fonction $(x, y) \in \mathrm{A}_1 \times \mathrm{A}_2 \to (f_1(x_1), f_2(x_2)) \in \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}^q$ est continue au point (a_1, a_2).

Donnons un exemple d'application si $q = 1$. En composant les deux applications précédentes avec $(y_1, y_2) \to y_1 + y_2$, on voit que la somme de deux fonctions f_1 et f_2 continues au point a est continue au point a ; de même la fonction produit $f_1 f_2$ est continue au point a (ça n'est pas la démonstration la plus raisonnable, mais c'est une illustration du principe). Si $f : \mathrm{A} \to \mathbb{R}$ ne s'annule pas et est continue au point $a \in \mathrm{A}$, la fonction $1/f$ est continue au point a.

Limite d'une fonction en un point

On peut fonder l'étude de la continuité sur l'étude préalable de la notion de limite. Nous avons préféré donner directement la notion de continuité, et nous indiquons rapidement ici les propriétés des limites.

Définition 6.2.4. Soit A un sous-ensemble de $\mathbb{R}^p$; un point a est un *point adhérent* à l'ensemble A si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un point $x \in \mathrm{A}$ tel que $d(x, a) < \varepsilon$.

Définition 6.2.5. Soient A un sous-ensemble non vide de $\mathbb{R}^p$, a un point adhérent à A, f une application de A dans $\mathbb{R}^q$, et $b \in \mathbb{R}^q$; on dit que $f(x) \to b$ lorsque x tend vers a (par valeurs dans A) si pour toute proximité $\varepsilon > 0$ imposée entre $f(x)$ et b, il existe une condition de proximité $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ entre $x \in \mathrm{A}$ et a qui garantit que $d(f(x), b) < \varepsilon$,

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0,\ \forall x \in \mathrm{A},\ (d(x, a) < \delta \Rightarrow d(f(x), b) < \varepsilon).$$

La limite est unique. On note

$$b = \lim_{x \to a, x \in \mathrm{A}} f(x).$$

On voit que f est continue au point a si et seulement si $f(x)$ tend vers $f(a)$ quand x tend vers a. Mais inversement, si $a \notin \mathrm{A}$, on peut dire que $f(x)$ tend vers b quand $x \to a$ si la fonction $\widetilde{f}$ définie sur $\mathrm{A} \cup \{a\}$ en posant $\widetilde{f}(x) = f(x)$ pour $x \in \mathrm{A}$ et $\widetilde{f}(a) = b$ est continue au point a. Les résultats sur la continuité sont donc parallèles à ceux qui concernent la continuité, et nous passerons sur les démonstrations.

Caractérisation de la limite par les suites

Proposition 6.2.3. *On a $f(x) \to b$ quand $x \to a$, $x \in \mathrm{A}$ si et seulement si pour toute suite (x_n) de points de A tendant vers a, on a $f(x_n) \to b$.*

Si f_1 et f_2 sont définies sur A et tendent vers $b_1, b_2 \in \mathbb{R}^q$ lorsque x tend vers a, alors $(f_1 + f_2)(x)$ tend vers $b_1 + b_2$, $\lambda f_1(x)$ tend vers λb_1 lorsque $x \to a$.

Théorème 6.2.3. Composition de limites. *On suppose donnés $\mathrm{A} \subset \mathbb{R}^p$, $\mathrm{B} \subset \mathbb{R}^q$, un point a adhérent à A, $f : \mathrm{A} \to \mathrm{B}$ telle que $f(x) \to b$ lorsque $x \to a$, $x \in \mathrm{A}$ et $g : \mathrm{B} \to \mathbb{R}^s$ telle que $g(y) \to c \in \mathbb{R}^s$ lorsque $y \to b$, $y \in \mathrm{B}$. Alors*

$$\lim_{x \to a, x \in \mathrm{A}} g(f(x)) = c.$$

Norme sur les espaces de matrices : premier contact

Soit A une matrice réelle de taille 2×2,

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

On peut considérer que la donnée de A n'est rien d'autre que la donnée des quatre nombres réels a, b, c, d, c'est à dire d'un point de $\mathbb{R}^4$, et on peut choisir de définir la norme de la matrice A comme étant la norme de ce point de $\mathbb{R}^4$,

$$\|\mathrm{A}\|_2 = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}.$$

Il est clair qu'il s'agit d'une norme, et elle vérifie une propriété supplémentaire importante. On a $\|\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2\|_2 \leq \|\mathrm{A}_1\|_2 \|\mathrm{A}_2\|_2$ (exercice). En particulier, $\|\mathrm{A}^n\|_2 \leq \|\mathrm{A}\|_2^n$ pour tout entier $n \geq 1$ (mais pas pour $n = 0$: c'est un défaut de cette norme).

On considère plus généralement une matrice réelle ou complexe A de taille $p \times q$ comme un vecteur de $\mathbb{R}^{pq}$ ou $\mathbb{C}^{pq}$ et on calcule sa norme "euclidienne"

$$\|\mathrm{A}\|_2 = \Big(\sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{q} |a_{i,j}|^2 \Big)^{1/2}.$$

C'est la racine de la somme des carrés des normes des vecteurs ligne, ou bien la racine de la somme des carrés des normes des vecteurs colonne. On remarque que dans le cas d'une matrice qui est simplement un vecteur colonne $\mathrm{X} \in \mathrm{M}_{p,1}(\mathbb{C}) \simeq \mathbb{C}^p$, cette norme $\|\mathrm{X}\|_2$ est tout simplement la norme usuelle de $\mathbb{C}^p$. Montrons que

$$\|\mathrm{AB}\|_2 \leq \|\mathrm{A}\|_2 \, \|\mathrm{B}\|_2$$

lorsque le produit a un sens, c'est à dire si $\mathrm{A} \in \mathrm{M}_{p,q}(\mathbb{C})$ et $\mathrm{B} \in \mathrm{M}_{q,r}(\mathbb{C})$. On commence par le cas où $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} y_1 & \dots & y_q \end{pmatrix}$ est une matrice ligne et B une matrice colonne contenant les coefficients $(z_1, \dots, z_q)$. Dans ce cas la matrice AB est de taille 1×1, et sa norme est le module de son unique coefficient, donc

$$\|\mathrm{AB}\|_2 = |y_1 z_1 + \cdots + y_q z_q| \leq |y_1| \, |z_1| + \cdots + |y_q| \, |z_q| \leq$$

$$\leq (\sum_{i=1}^{q} |y_i|^2)^{1/2} (\sum_{i=1}^{q} |z_i|^2)^{1/2} = \|\mathrm{A}\|_2 \|\mathrm{B}\|_2.$$

On considère maintenant la matrice A de taille $p \times q$ comme formée des vecteurs ligne $a_1, \ldots, a_p$ et B comme matrice formée de vecteurs colonne $b_1, \ldots, b_r$. Le coefficient $c_{i,j}$ de la matrice produit $\mathrm{C} = \mathrm{AB}$ est égal au coefficient unique de la matrice $a_i b_j$ (qui est de taille 1×1)

$$|c_{i,j}| = \|a_i\, b_j\|_2 \leq \|a_i\|_2\, \|b_j\|_2.$$

Ensuite

$$\|\mathrm{C}\|_2^2 = \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{r} |c_{i,j}|^2 \leq \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{r} \|a_i\|^2 \|b_j\|^2 = \|\mathrm{A}\|_2^2\, \|\mathrm{B}\|_2^2,$$

ce qui achève la vérification. Cette inégalité s'applique en particulier lorsque $\mathrm{X} = \mathrm{B}$ est un vecteur colonne à q lignes. On obtient dans ce cas l'inégalité

$$\forall \mathrm{X} \in \mathbb{C}^q, \quad \|\mathrm{AX}\| \leq \|\mathrm{A}\|_2\, \|\mathrm{X}\|.$$

Cette majoration $\|\mathrm{AX}\| \leq \|\mathrm{A}\|_2\, \|\mathrm{X}\|$ n'est pas toujours très précise. Par exemple, si $\mathrm{A} = \mathrm{I}_p$, on voit que $\|\mathrm{A}\|_2 = \sqrt{p}$, ce qui nous donnera l'inégalité $\|\mathrm{AX}\| \leq \sqrt{p}\, \|\mathrm{X}\|$, alors qu'en fait $\|\mathrm{AX}\| = \|\mathrm{X}\|$! On définira plus loin une autre norme pour les matrices qui donnera une meilleure majoration.

Exercices.

1. Limite de produits de matrices. Si (A_n) tend vers A et (B_n) vers B et si les produits ont un sens, montrer que le produit $\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n$ tend vers AB.

2. Soient $t \to \mathrm{A}(t)$ et $t \to \mathrm{B}(t)$ deux fonctions à valeurs matrices définies sur un intervalle ouvert I ; on suppose que le produit $\mathrm{A}(t)\mathrm{B}(t)$ est défini, et on suppose que tous les coefficients des deux matrices sont dérivables sur I. Calculer la dérivée de la fonction produit $t \to \mathrm{A}(t)\mathrm{B}(t)$.

3. Série géométrique de matrices : si $\|\mathrm{A}\|_2 < 1$ est de taille $p \times p$, la suite

$$\mathrm{S}_n = \mathrm{I}_p + \mathrm{A} + \mathrm{A}^2 + \cdots + \mathrm{A}^n$$

converge vers l'inverse de $\mathrm{I}_p - \mathrm{A}$. On vérifie d'abord que $\mathrm{I}_p - \mathrm{A}$ est inversible ; sinon, il existerait un vecteur X non nul tel que $\mathrm{AX} = \mathrm{X}$, donc $\mathrm{A}^n\mathrm{X} = \mathrm{X}$ pour tout n, ce qui contredit le fait que $\mathrm{A}^n \to 0$. Ensuite, $(\mathrm{I}_p - \mathrm{A})\mathrm{S}_n = \mathrm{I}_p - \mathrm{A}^{n+1}$ tend vers I_p, d'où le résultat en multipliant par l'inverse de $\mathrm{I}_p - \mathrm{A}$.

Si A est une matrice carrée complexe, on définit son *rayon spectral* ρ_A comme le maximum des modules des valeurs propres de A. Par exemple, si $\mathrm{A} = \mathrm{R}$ est la matrice de la rotation d'angle $\pi/2$ dans $\mathbb{R}^2$, on a vu que les valeurs propres sont $\pm i$, par conséquent $\rho_\mathrm{R} = 1$.

Théorème 6.2.4. *Soit* $\mathrm{A} \in \mathrm{M}_p(\mathbb{C})$ *; la suite des puissances* (A^n) *tend vers* 0 *si et seulement si toutes les valeurs propres (complexes) de* A *sont de module* < 1*, c'est à dire si et seulement si* $\rho_\mathrm{A} < 1$.

On remarque bien que pour la matrice de rotation R, on a $\rho_\mathrm{R} = 1$ et les puissances ne tendent pas vers 0, donc le résultat est précis. On remarque ensuite que le cas d'une matrice diagonale, puis d'une diagonalisable, sont très faciles.

Démonstration. Dans une direction on suppose que la suite (A^n) tend vers 0, et on doit montrer que $\rho_\mathrm{A} < 1$; soit μ une valeur propre de A ; il existe $\mathrm{Z} \in \mathbb{C}^p$ non nul tel que $\mathrm{AZ} = \mu\mathrm{Z}$, donc $\mathrm{A}^n\mathrm{Z} = \mu^n\mathrm{Z}$ tend vers 0, donc $|\mu|^n$ tend vers 0 et $|\mu| < 1$.

Pour montrer l'autre direction, commençons par une matrice B qui n'a qu'une seule valeur propre μ, avec $|\mu| < 1$. Le polynôme caractéristique est $(\mu - \mathrm{X})^p$, donc $(\mathrm{B} - \mu\mathrm{I}_p)^p = 0$

d'après le théorème de Cayley-Hamilton. La matrice $\mathrm{N} = \mathrm{B} - \mu \mathrm{I}_p$ est nilpotente. Soit k le plus grand entier ≥ 0 tel que $\mathrm{N}^k \neq 0$ (il est possible que $k = 0$, c'est le cas diagonalisable). Grâce à la commutation de I_p et N on peut écrire la formule du binôme,

$$\mathrm{B}^n = (\mu \mathrm{I}_p + \mathrm{N})^n = \mu^n \mathrm{I}_p + n\mu^{n-1}\mathrm{N} + \cdots + \mathbf{C}_n^k \mu^{n-k}\mathrm{N}^k.$$

On vérifie que $\mathbf{C}_n^j \mu^n$ tend vers 0 quand $n \to +\infty$ (pour tout $j = 0, \ldots, k$) parce que $|\mu| < 1$, donc chacun des morceaux de la décomposition tend vers 0, donc B^n tend vers 0. Pour le cas général on décompose A en blocs caractéristiques.

Pourquoi s'intéresser à la suite (A^n) ? Une raison est l'étude des suites récurrentes

$$x_{n+1} = ax_n + bx_{n-1} + cx_{n-2}$$

(par exemple) que l'on ramène à l'étude d'une suite A^n si on introduit la suite de vecteurs $\mathrm{X}_n = (x_n, x_{n-1}, x_{n-2})$, qui vérifie l'équation $\mathrm{X}_{n+1} = \mathrm{AX}_n$ pour une matrice A facile à déterminer. Si on sait que $\rho_\mathrm{A} < 1$, on aura donc que $x_n \to 0$ pour toute donnée initiale.

Exercices. Montrer que $\rho_\mathrm{A} = \lim_n \|\mathrm{A}^n\|_2^{1/n}$.

(Difficile) Si A est une matrice carrée réelle à coefficients $a_{i,j} > 0$, ρ_A est valeur propre ; c'est la seule valeur propre de module ρ_A, et il lui correspond un vecteur propre x à coordonnées $x_i > 0$ (théorème de Perron–Frobenius).

Ouverts et fermés

Définition 6.2.6. On appelle *boule ouverte*, de centre $x \in \mathbb{R}^p$ et de rayon $r > 0$, l'ensemble $\mathrm{B}(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^p : d(y, x) < r\}$.

Définition 6.2.7. On appelle *voisinage* d'un point $a \in \mathbb{R}^p$ tout ensemble $\mathrm{V} \subset \mathbb{R}^p$ qui contient une boule ouverte de centre a et d'un certain rayon $r > 0$,

$$\exists r > 0, \quad a \in \mathrm{B}(a, r) \subset \mathrm{V}.$$

Remarque. Si W n'est pas un voisinage de a, il existe une suite (x_n) de points de $\mathbb{R}^p$ telle que $x_n \notin \mathrm{W}$ et $x_n \to a$. Ceci est en fait une caractérisation des voisinages.

Définition 6.2.8. On dit qu'un sous-ensemble Ω de $\mathbb{R}^p$ est *ouvert* dans $\mathbb{R}^p$ si Ω est un voisinage de chacun de ses points, c'est à dire si pour tout point $x \in \Omega$, il existe $r > 0$ tel que $\mathrm{B}(x, r) \subset \Omega$.

Exemples.

1. Les ensembles $\emptyset$ et $\mathbb{R}^p$ sont ouverts dans $\mathbb{R}^p$.
2. L'ensemble $\mathbb{R}$ est un ouvert de $\mathbb{R}$, mais la "droite réelle" du plan $\mathbb{R}^2$ n'est pas un ouvert de $\mathbb{R}^2$.
3. Toute boule ouverte est ouverte : si $\Omega = \mathrm{B}(x, r)$ et si $y \in \mathrm{B}(x, r)$, on voit que $\rho = r - d(y, x) > 0$ et $\mathrm{B}(y, \rho) \subset \Omega$.
4. Le complémentaire d'un ensemble réduit à un point est un ensemble ouvert.
5. Si f est une fonction réelle continue définie sur $\mathbb{R}^p$ et si ω est un ouvert de $\mathbb{R}$, l'image inverse $\Omega = f^{-1}(\omega) = \{x \in \mathbb{R}^p : f(x) \in \omega\}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^p$.

Proposition 6.2.4. Propriétés des ouverts. *Toute intersection* **finie** *d'ouverts est un ouvert. Toute réunion d'une famille d'ouverts est un ouvert.*

Ensembles fermés

Définition 6.2.9. On dit qu'un sous-ensemble F de $\mathbb{R}^p$ est *fermé* dans $\mathbb{R}^p$ si pour toute suite (x_n) de points de F qui converge dans $\mathbb{R}^p$ vers un point x, la limite x reste dans F.

Exemples.

1. L'ensemble vide est fermé.

2. Soit $f : \mathrm{F} \to \mathbb{R}$ une fonction continue définie sur une partie fermée F de $\mathbb{R}^p$; pour tout $c \in \mathbb{R}$, les deux ensembles $\{x \in \mathrm{F} : f(x) \leq c\}$ et $\{x \in \mathrm{F} : f(x) \geq c\}$ sont fermés. Plus généralement l'image inverse d'un fermé de $\mathbb{R}$ par une fonction continue est fermée.

Inversement, si l'image inverse $f^{-1}(\mathrm{L})$ de tout fermé L de $\mathbb{R}$ est fermée, alors f est continue sur F.

3. Toute boule fermée est un ensemble fermé. Un ensemble réduit à un point est fermé. Une sphère $\mathrm{S}(x, r) = \{y : d(x, y) = r\}$ est fermée.

4. Un ensemble peut très bien n'être ni ouvert ni fermé : $]a, b]$ par exemple n'est ni ouvert ni fermé dans $\mathbb{R}$.

Exercices.

1. Montrer qu'un ensemble F formé des points d'une suite convergente (x_n) et de sa limite x est fermé.

2. Montrer que l'ensemble des matrices non inversibles est un fermé de $\mathrm{M}_p(\mathbb{C})$.

3. Recollement de deux fonctions continues. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 0$ si $x < 0$ et $f(x) = 1$ si $x \geq 0$; cette fonction est continue sur $\mathrm{A} =]-\infty, 0[$ et sur $\mathrm{B} = [0, +\infty[$, mais elle n'est pas continue sur $\mathrm{A} \cup \mathrm{B} = \mathbb{R}$. Cependant, si A et B sont **fermés** dans $\mathbb{R}^p$ et si $f : \mathrm{X} \to \mathbb{R}^q$ est continue sur $\mathrm{A} \subset \mathrm{X}$ et sur $\mathrm{B} \subset \mathrm{X}$, montrer qu'elle est continue sur $\mathrm{A} \cup \mathrm{B}$.

Proposition 6.2.5. *Un ensemble* F *est fermé dans* $\mathbb{R}^p$ *si et seulement si son complémentaire est ouvert.*

Démonstration. Soit Ω le complémentaire de F dans $\mathbb{R}^p$ et supposons que Ω soit un ensemble ouvert ; soit (x_n) une suite de points de F qui converge vers un point $x \in \mathbb{R}^p$. Si on avait $x \in \Omega$, il existerait puisque l'ensemble Ω est ouvert un nombre $r > 0$ tel que $\mathrm{B} = \mathrm{B}(x, r) \subset \Omega$, c'est à dire que B ne contiendrait aucun point de F. Ceci est impossible, puisque pour n assez grand on a $x_n \in \mathrm{F}$ et $d(x_n, x) < r$, donc $x_n \in \mathrm{B}$.

Inversement supposons Ω non ouvert. Il existe alors un point $x \in \Omega$ tel que pour tout $r > 0$, la boule $\mathrm{B}(x, r)$ ne soit pas contenue dans Ω. Pour tout $n \geq 1$, si on pose $r = 1/n$, cela signifie qu'il existe au moins un point $x_n \in \mathrm{B}(x, 1/n)$ qui n'est pas dans Ω, c'est à dire que $x_n \in \mathrm{F}$. Puisque $d(x_n, x) < 1/n$, on voit que la suite (x_n) de points de F converge vers le point x qui n'est pas dans F, donc F n'est pas fermé.

Proposition 6.2.6. *Toute intersection d'ensembles fermés est un ensemble fermé. Toute réunion* **finie** *de fermés est fermée.*

Points adhérents ; adhérence

Si A est un sous-ensemble de $\mathbb{R}^p$, on appelle *adhérence* de A, notée $\overline{\mathrm{A}}$, l'ensemble des points adhérents à l'ensemble A. Tout point de A est adhérent à A par définition, on a donc toujours $\mathrm{A} \subset \overline{\mathrm{A}}$.

Proposition 6.2.7. *Un point est adhérent à* A *si et seulement s'il est limite d'une suite de points de* A. *L'adhérence est fermée et c'est le plus petit fermé contenant* A.

Démonstration. Soit x un point adhérent à l'ensemble A ; pour tout entier $n \geq 1$, on peut trouver un point $x_n \in \mathrm{A}$ tel que $d(x, x_n) < 1/n$. On a ainsi une suite $(x_n) \subset \mathrm{A}$ qui converge vers x. Inversement si $(x_n) \subset \mathrm{A}$ converge vers x, toute boule ouverte $\mathrm{B}(x, r)$ de rayon $r > 0$ contient x_n pour n assez grand, donc toute boule ouverte de centre x rencontre l'ensemble A, donc $x \in \overline{\mathrm{A}}$.

Montrons que le complémentaire de $\overline{\mathrm{A}}$ est ouvert. Si x n'est pas adhérent à A il existe $r > 0$ tel que $\mathrm{B}(x, r)$ ne rencontre pas A. Pour tout $y \in \mathrm{B}(x, r)$ la boule $\mathrm{B}(y, r - d(y, x))$ est contenue dans $\mathrm{B}(x, r)$, donc ne rencontre pas A, donc y n'est pas adhérent. Autrement dit $\mathrm{B}(x, r)$ est contenue dans le complémentaire de l'adhérence $\overline{\mathrm{A}}$, qui est donc un voisinage de chacun de ses points x.

On vient de voir que $\overline{\mathrm{A}}$ est un ensemble fermé. Soit F un fermé contenant A, et soit x un point adhérent à A ; il existe donc une suite $(x_n) \subset \mathrm{A}$ qui converge vers X. Puisque $\mathrm{A} \subset \mathrm{F}$ et que F est fermé, il en résulte que $x \in \mathrm{F}$, donc F contient tous les points adhérents à A.

Exercices.

1. Montrer que $\overline{\mathrm{A} \cup \mathrm{B}} = \overline{\mathrm{A}} \cup \overline{\mathrm{B}}$.

2. On dit qu'un ensemble A est dense dans $\mathbb{R}^p$ si son adhérence est égale à $\mathbb{R}^p$ tout entier. Montrer que $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$. Montrer que le complémentaire d'un ensemble fini est dense dans $\mathbb{R}^p$. Montrer que les points à coordonnées rationnelles forment un ensemble dense dans $\mathbb{R}^p$.

3. Montrer que les matrices inversibles sont denses dans les matrices carrées.

4. Montrer que toute matrice carrée complexe A est limite d'une suite (A_n) de matrices diagonalisables (on pourra utiliser la triangulation). Montrer que si A_n tend vers A, chacun des coefficients du polynôme caractéristique de A_n tend vers le coefficient correspondant de A. En déduire le théorème de Cayley-Hamilton pour A à partir du cas diagonalisable (cas facile).

Topologie d'un espace vectoriel réel de dimension finie

Soit E un espace vectoriel réel de dimension finie, $\dim \mathrm{E} = p > 0$. Si on choisit une base $\mathbf{e} = (e_1, \ldots, e_p)$ de E, on peut décider de dire qu'une suite $(x^{(n)})$ de vecteurs de E tend vers 0_E si les coordonnées $\mathrm{X}_\mathbf{e}^{(n)}$ de $x^{(n)}$ dans la base $\mathbf{e}$ tendent vers 0, c'est à dire si

$$\|\mathrm{X}_\mathbf{e}^{(n)}\| \to 0$$

lorsque n tend vers l'infini. Cette définition n'est pas très satisfaisante, car elle semble dépendre de la base choisie. Mais on va voir que ce n'est pas le cas. En effet, si $\mathbf{f}$ est une autre base pour E, les coordonnées $\mathrm{X}_\mathbf{f}$ de x dans la nouvelle base se déduisent des anciennes par une matrice de changement de base, ce qui donne $\mathrm{X}_\mathbf{f} = \mathrm{P}\mathrm{X}_\mathbf{e}$, et d'après l'étude des normes de matrices,

$$\|\mathrm{X}_\mathbf{f}\| \leq \|\mathrm{P}\|_2 \, \|\mathrm{X}_\mathbf{e}\|,$$

ce qui entraîne que si les coordonnées dans la base $\mathbf{e}$ tendent vers 0, celles qui sont calculées dans la base $\mathbf{f}$ tendent aussi vers 0, et vice-versa. Ayant ainsi défini la convergence vers 0, on dira ensuite qu'une suite (x_n) de vecteurs de E tend vers $x \in \mathrm{E}$ si la suite $(x_n - x)$ tend vers 0. Etant donnée une base $\mathbf{e} = (e_1, \ldots, e_p)$ de E, on posera si $x = \sum_{i=1}^p x_i e_i \in \mathrm{E}$

$$\|x\|_\mathbf{e} = \Big(\sum_{i=1}^p |x_i|^2\Big)^{1/2}, \quad d_\mathbf{e}(x, y) = \|x - y\|_\mathbf{e}.$$

On se rappellera que si $\mathbf{f}$ est une autre base de E, il existe une constante K telle que pour tout vecteur $x \in \mathrm{E}$ on ait $\|x\|_\mathbf{f} \leq \mathrm{K}\|x\|_\mathbf{e}$, et pour tout $y \in \mathrm{E}$ on aura $d_\mathbf{f}(x, y) \leq \mathrm{K} d_\mathbf{e}(x, y)$. La notion de partie bornée de E a également un sens intrinsèque. On peut redéfinir toutes les notions de façon intrinsèque, ce que nous allons indiquer rapidement.

Définition 6.2.10. Soient $\mathrm{E}_1, \mathrm{E}_2$ deux espaces vectoriels réels de dimension finie, munis de bases $\mathbf{e}_1$ et $\mathbf{e}_2$ respectivement ; soit A un sous-ensemble non vide de E_1, soit $f : \mathrm{A} \to \mathrm{E}_2$ et $a \in \mathrm{A}$; on dit que f est *continue au point* a si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tel que

$$\forall x \in \mathrm{A}, \quad \big(d_{\mathbf{e}_1}(x,a) < \delta \Rightarrow d_{\mathbf{e}_2}(f(x), f(a)) < \varepsilon\big).$$

La définition ne dépend pas des bases $\mathbf{e}_1$ et $\mathbf{e}_2$ choisies. Si $\mathbf{f}_1$ est une autre base de l'espace E_1 et $\mathbf{f}_2$ une autre base de E_2, il existe une constante K telle que $d_{\mathbf{e}_1}(x,y) \leq \mathrm{K}\, d_{\mathbf{f}_1}(x,y)$ pour tout couple de vecteurs x, y de E_1 et $d_{\mathbf{f}_2}(x,y) \leq \mathrm{K}\, d_{\mathbf{e}_2}(x,y)$ pour tous $x, y \in \mathrm{E}_2$. Si la fonction f vérifie la propriété de continuité ci-dessus par rapport aux bases $\mathbf{e}_1$ et $\mathbf{e}_2$, considérons la fonction $\delta_{\mathbf{f}}(\varepsilon) = \delta(\varepsilon/\mathrm{K})/\mathrm{K} > 0$. Alors, pour tout $x \in \mathrm{A}$, la condition $d_{\mathbf{f}_1}(x,a) < \delta_{\mathbf{f}}(\varepsilon)$ entraîne $d_{\mathbf{e}_1}(x,a) < \delta(\varepsilon/\mathrm{K})$, donc $d_{\mathbf{f}_1}(f(x), f(a)) < \varepsilon/\mathrm{K}$, donc $d_{\mathbf{f}_2}(f(x), f(a)) < \varepsilon$.

On voit encore que $f : \mathrm{A} \to \mathrm{E}_2$ *est continue au point* $a \in \mathrm{A}$ *si et seulement si pour toute suite* $(x_n) \subset \mathrm{A}$ *qui tend vers* a, *on a* $f(x_n) \to f(a)$. On définit aussi la notion *d'application lipschitzienne* dans ce cadre des espaces de dimension finie : on dit que $f : \mathrm{A} \to \mathrm{E}_2$ est lipschitzienne sur $\mathrm{A} \subset \mathrm{E}_1$ s'il existe une constante C telle que pour tous $x, y \in \mathrm{A}$ on ait

$$d_{\mathbf{e}_2}(f(x), f(y)) \leq \mathrm{C}\, d_{\mathbf{e}_1}(x,y).$$

On vérifie facilement que la notion ne dépend pas des bases choisies. Nous allons voir que toutes les applications linéaires entre deux espaces vectoriels de dimension finie sont lipschitziennes, donc continues.

Proposition 6.2.8. *Soient* E_1 *et* E_2 *deux espaces vectoriels réels de dimension finie, soit* u *une application linéaire de* E_1 *dans* E_2 *; alors* u *est continue ; plus précisément, pour tout choix de bases* $\mathbf{e}_1$ *et* $\mathbf{e}_2$ *dans* E_1 *et* E_2, *il existe une constante* C *telle que*

$$\forall x \in \mathrm{E}_1, \quad \|u(x)\|_{\mathbf{e}_2} \leq \mathrm{C}\, \|x\|_{\mathbf{e}_1}.$$

Il en résulte que u *est lipschitzienne.*

Démonstration. Soit $\mathbf{e}_1 = (e_1, \ldots, e_p)$ une base de E_1 ; soit $x = \sum_{i=1}^p x_i e_i$, on a

$$\|u(x)\| \leq \sum_{i=1}^p |x_i|\, \|u(e_i)\|_{\mathbf{e}_2} \leq (\sum_{i=1}^p \|u(e_i)\|_{\mathbf{e}_2}^2)^{1/2} \|x\|_{\mathbf{e}_1},$$

ce qui donne le résultat voulu avec $\mathrm{C} = (\sum_{i=1}^p \|u(e_i)\|_{\mathbf{e}_2}^2)^{1/2}$. Ceci entraîne que u est lipschitzienne de constante C ; en effet, pour tous $x, y \in \mathrm{E}_1$ on a

$$d_{\mathbf{e}_2}(u(x), u(y)) = \|u(x) - u(y)\|_{\mathbf{e}_2} = \|u(x-y)\|_{\mathbf{e}_2} \leq \mathrm{C}\, \|x-y\|_{\mathbf{e}_1} = \mathrm{C}\, d_{\mathbf{e}_1}(x,y).$$

Ouverts et fermés

Soit maintenant E un espace vectoriel de dimension finie, et $\mathbf{e}$ une base de E. On posera $\mathrm{B}_{\mathbf{e}}(x,r) = \{y \in \mathrm{E} : d_{\mathbf{e}}(y,x) < r\}$. Cet ensemble dépend de la base choisie, mais on remarquera que si $\mathbf{f}$ est une autre base de E, il existe une constante K telle que $d_{\mathbf{e}} \leq \mathrm{K} d_{\mathbf{f}}$, ce qui entraîne que $\mathrm{B}_{\mathbf{f}}(x, r/\mathrm{K}) \subset \mathrm{B}_{\mathbf{e}}(x,r)$ pour tous $x \in \mathrm{E}$, $r > 0$.

Définition 6.2.11. On appelle *voisinage* d'un point $a \in \mathrm{E}$ tout ensemble $\mathrm{V} \subset \mathrm{E}$ qui contient une boule ouverte de centre a et d'un certain rayon $r > 0$,

$$\exists r > 0, \quad a \in \mathrm{B}_{\mathbf{e}}(a,r) \subset \mathrm{V}.$$

En utilisant la remarque qui précède cette définition, on vérifie que la définition ne dépend pas de la base **e** choisie pour E.

Définition 6.2.12. On dit qu'un sous-ensemble Ω de E est *ouvert* dans E si Ω est un voisinage de chacun de ses points, c'est à dire si pour tout point $x \in \Omega$, il existe $r > 0$ tel que $\mathrm{B}_{\mathbf{e}}(x, r) \subset \Omega$.

Proposition 6.2.9. Propriétés des ouverts. *Toute intersection finie d'ouverts est un ouvert. Toute réunion d'une famille d'ouverts est un ouvert.*

Définition 6.2.13. On dit qu'un sous-ensemble F de E est *fermé* dans E si pour toute suite (x_n) de points de F qui converge dans E vers un point x, la limite x reste dans F.

Proposition 6.2.10. *Un ensemble* F *est fermé si et seulement si son complémentaire est ouvert.*

Démonstration. Adapter celle qui a été donnée dans le cas des fermés de $\mathbb{R}^p$.

Proposition 6.2.11. *Toute intersection d'ensembles fermés est un ensemble fermé. Toute réunion* **finie** *de fermés est fermée.*

6.3. Compacité dans les espaces vectoriels de dimension finie

On considère dans cette section un espace vectoriel réel E de dimension finie. On supposera choisie une base de E, qui permet de définir une norme $\|x\|$ sur E en prenant la norme euclidienne de la suite des coordonnées. On a remarqué que les notions de convergence, d'ensemble borné, ne dépendent pas de la base choisie.

Définition 6.3.1. Un sous-ensemble K de E est *compact* si toute suite (x_n) de points de K admet une sous-suite qui converge dans E vers un point $x \in \mathrm{K}$.

Théorème 6.3.1. *Un sous-ensemble* K *de* E *est compact si et seulement s'il est fermé et borné.*

Démonstration. Supposons K compact, et vérifions d'abord que K est fermé. Soit donc (x_n) une suite de points de K, qui converge dans E vers un point x ; nous devons montrer que x appartient à K. Mais puisque K est compact, nous savons qu'il existe une sous-suite (x_{n_k}) de (x_n) qui converge vers un point $y \in \mathrm{K}$; puisque x_n tend vers x, la sous-suite (x_{n_k}) converge aussi vers x, ce qui implique que $y = x$, donc $x \in \mathrm{K}$, et on a montré que K est fermé. Montrons maintenant que K est borné. Sinon, on pourrait trouver dans K une suite (x_n) telle que $\|x_n\|$ tende vers $+\infty$. On aurait aussi $\lim_k \|x_{n_k}\| = +\infty$ pour toute sous-suite, ce qui impliquerait qu'aucune sous-suite ne pourrait converger, d'où une contradiction de la propriété de compacité qui montre que K doit être borné.

La partie réciproque est le théorème de Bolzano-Weierstrass dans un espace de dimension finie.

Bolzano-Weierstrass 6.3.2. *De toute suite bornée* (x_n) *dans un espace vectoriel de dimension finie* E *on peut extraire une sous-suite convergente.*

Démonstration. Donnons-la, pour simplifier, dans le cas $\mathrm{E} = \mathbb{R}^p$, en commençant par $\mathbb{R}^2$. Ecrivons $x_n = (a_n, b_n) \in \mathbb{R}^2$ pour tout n. Puisque la suite (x_n) est bornée, il en résulte que les deux suites réelles (a_n) et (b_n) sont bornées. D'après Bolzano-Weierstrass en une dimension (théorème 6.1.2), on peut d'abord extraire une sous-suite convergente (a_{n_k}) de la suite (a_n), de limite $a \in \mathbb{R}$. On considère maintenant la suite bornée $(b_{n_k})_k$, et on peut en extraire une sous-suite convergente $(b_{n_{k_j}})_j$, sous-suite de limite $b \in \mathbb{R}$. La sous-suite $(a_{n_{k_j}})_j$ reste convergente vers a, et au total la sous-suite $(x_{n_{k_j}})_j = (a_{n_{k_j}}, b_{n_{k_j}})_j$ converge dans $\mathbb{R}^2$ vers $x = (a, b) \in \mathbb{R}^2$. Pour passer de $\mathbb{R}^p$ à $\mathbb{R}^{p+1}$, on écrira $\mathbb{R}^{p+1} = \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}$, et

on adaptera la démonstration précédente, en utilisant l'hypothèse de récurrence selon laquelle le résultat d'extraction est vrai dans $\mathbb{R}^p$.

Terminons la démonstration du fait que tout fermé borné $\mathrm{K} \subset \mathrm{E}$ est compact. Soit (x_n) une suite de points de K ; puisque K est borné, la suite (x_n) est bornée, donc d'après Bolzano-Weierstrass, on peut trouver une sous-suite convergente $(x_{n_k})_k$, de limite $x \in \mathbb{R}^p$. Mais puisque la sous-suite est formée de points de K et que K est fermé, on a $x \in \mathrm{K}$, donc on a bien trouvé une sous-suite qui converge vers un point de K.

Attention. Ces résultats utilisent de façon essentielle le fait que la dimension est finie. La boule unité d'un espace normé de dimension infinie n'est jamais compacte.

Propriétés des fonctions continues sur un compact

Théorème 6.3.3. *Soient* K *un compact de* E *et* $f : \mathrm{K} \to \mathbb{R}^q$ *une application continue ; l'image* $f(\mathrm{K})$ *est une partie compacte de* $\mathbb{R}^q$.

Démonstration. Soit (y_n) une suite de points de $f(\mathrm{K})$; par définition de l'image de K par l'application f, on peut trouver $x_n \in \mathrm{K}$ tel que $y_n = f(x_n)$, et par compacité il existe une sous-suite $(x_{n_k})_k$ qui converge vers un point $x \in \mathrm{K}$. Puisque f est continue sur K, donc continue au point x, on sait que $y_{n_k} = f(x_{n_k})$ converge vers $y = f(x) \in f(\mathrm{K})$, et on a montré que $f(\mathrm{K})$ est compact.

Corollaire 6.3.1. *Si* f *est une fonction réelle définie et continue en tout point d'un compact non vide* $\mathrm{K} \subset \mathrm{E}$ *(où* E *est de dimension finie), elle est bornée et elle atteint son maximum et son minimum sur* K.

Démonstration. L'image $f(\mathrm{K}) \subset \mathbb{R}$ est compacte, donc bornée et fermée, et elle est non vide puisque K est non vide. Mais on sait qu'un fermé non vide et majoré de $\mathbb{R}$ possède un plus grand élément, donc il existe $\mathrm{M} \in f(\mathrm{K})$ qui est le plus grand élément de $f(\mathrm{K})$. Par définition de $f(\mathrm{K})$, il existe $x \in \mathrm{K}$ tel que $f(x) = \mathrm{M}$, et f atteint donc son maximum sur K au point x.

Corollaire 6.3.2. *Soit* F *un fermé non borné de* E *et soit* f *une fonction réelle continue sur* F *telle que* $f(x)$ *tende vers* $+\infty$ *lorsque* $\|x\| \to +\infty$ *(par valeurs* $x \in \mathrm{F}$*). La fonction* f *atteint son minimum sur l'ensemble* F.

Démonstration. La même que dans le cas de $\mathbb{R}$.

Exercice. Théorème de D'Alembert. On identifie $\mathbb{C}$ avec $\mathbb{R}^2$. Soit $\mathrm{P}(z)$ un polynôme de degré ≥ 1 ; il est facile de voir que la fonction continue $f(z) = |\mathrm{P}(z)|$ tend vers $+\infty$ quand $|z| \to +\infty$, donc cette fonction atteint son minimum sur $\mathbb{C}$ en un point z_0. Nous devons montrer que $f(z_0) = |\mathrm{P}(z_0)| = 0$, c'est à dire que z_0 est une racine de P. Dans le cas contraire, posons $\mathrm{Q}(h) = \mathrm{P}(z_0 + h)/\mathrm{P}(z_0)$. C'est un polynôme en h de degré ≥ 1, tel que $\mathrm{Q}(0) = 1$ et dont le module atteint son minimum en $h = 0$. Ecrivons

$$\mathrm{Q}(h) = 1 + a_k h^k + \cdots + a_n h^n,$$

avec $k > 0$ et $a_k \neq 0$. Posons $a_k = r\,\mathrm{e}^{i\theta}$, $r > 0$, et utilisons des points h tendant vers 0 de la forme

$$h_t = t\,\mathrm{e}^{-i(\theta+\pi)/k},$$

pour t réel > 0 petit. On voit que $a_k h_t^k = rt^k\,\mathrm{e}^{-i\pi} = -rt^k$ pour un tel choix de h_t. En prenant t assez petit pour que $rt^k < 1$, on aura

$$|\mathrm{Q}(h_t)| \leq (1 - rt^k) + t^{k+1}|\mathrm{B}(t)|,$$

où $\mathrm{B}(t)$ est une expression polynomiale qui reste bornée quand t tend vers 0. Il en résulte que $|\mathrm{Q}(h_t)| < 1$ pour $t > 0$ petit, une contradiction du fait que $1 = \mathrm{Q}(0) = |\mathrm{Q}(0)|$ était le minimum de $|\mathrm{Q}|$ sur $\mathbb{C}$.

Théorème 6.3.4. *Soit* K *un compact de* $\mathbb{R}^p$ *; toute application continue de* K *dans* $\mathbb{R}^q$ *est uniformément continue.*

Démonstration. Avec Bolzano-Weierstrass, comme en dimension 1.

6.4. Norme sur un espace vectoriel

On a déjà parlé dans le chapitre 2 de norme sur un espace vectoriel réel ou complexe.

Rappel. Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ (pas nécessairement de dimension finie) ; on dit qu'une fonction $\mathrm{N} : \mathrm{E} \to [0, +\infty[$ est une *norme* sur E si elle vérifie les trois propriétés suivantes :

1. $\mathrm{N}(x + y) \leq \mathrm{N}(x) + \mathrm{N}(y)$ pour tous vecteurs $x, y \in \mathrm{E}$ (inégalité triangulaire).
2. $\|\lambda x\| = |\lambda| \, \mathrm{N}(x)$ pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$ et tout $x \in \mathrm{E}$.
3. Pour tout vecteur $x \in \mathrm{E}$,

$$(\mathrm{N}(x) = 0) \Leftrightarrow (x = 0_{\mathrm{E}}).$$

Il résulte de la première propriété l'inégalité importante $\big|\mathrm{N}(x) - \mathrm{N}(y)\big| \leq \mathrm{N}(x - y)$. Etant donnée une norme N sur E, si x et y sont deux vecteurs de E, on utilise la quantité $d(x, y) = \mathrm{N}(x - y)$ pour définir une distance sur E. On dit donc que (x_n) converge vers x pour la norme N si $\lim_n d(x_n, x) = 0$. Cette notion de convergence a les propriétés suivantes :

1. Si (x_n) tend vers x, la suite numérique $(\mathrm{N}(x_n))$ tend vers $\mathrm{N}(x)$.
2. Si (x_n) tend vers x et (y_n) vers y, la suite $(\lambda x_n + \mu y_n)$ tend vers $\lambda x + \mu y$ pour tous scalaires λ, μ.

En effet,

$$d(\lambda x_n + \mu y_n, \lambda x + \mu y) = \mathrm{N}(\lambda x_n + \mu y_n) - (\lambda x + \mu y)) =$$
$$= \mathrm{N}(\lambda(x_n - x) + \mu(y_n - y)) \leq |\lambda| \, \mathrm{N}(x_n - x) + |\mu| \, \mathrm{N}(y_n - y),$$

quantité qui tend bien vers zéro. Lorsque E est de dimension finie, toute norme N sur E est lipschitzienne, donc continue. En effet, en désignant par (e_i) une base de E,

$$\mathrm{N}(x) \leq \sum_{i=1}^{p} |x_i| \, \mathrm{N}(e_i) \leq \Big(\sum_{i=1}^{p} \mathrm{N}(e_i)^2\Big)^{1/2} \Big(\sum_{i=1}^{p} |x_i|^2\Big)^{1/2} = \mathrm{C} \, \|x\|_{\mathbf{e}}.$$

Il en résulte que

$$|\mathrm{N}(x) - \mathrm{N}(y)| \leq \mathrm{N}(x - y) \leq \mathrm{C} \, \|x - y\|_{\mathbf{e}}.$$

Quelques normes utiles sur $\mathbb{R}^p$

On pose pour tout $x \in \mathbb{R}^p$

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{p} |x_i|, \quad d_1(x, y) = \sum_{i=1}^{p} |x_i - y_i|$$
$$\|x\|_\infty = \max_{i=1,\ldots,p} |x_i|, \quad d_\infty(x, y) = \max_{i=1,\ldots,p} |x_i - y_i|,$$

et plus généralement, pour tout $q \in [1, +\infty[$,

$$\|x\|_q = \Big(\sum_{i=1}^{p} |x_i|^q\Big)^{1/q}, \quad d_q(x, y) = \Big(\sum_{i=1}^{p} |x_i - y_i|^q\Big)^{1/q}.$$

Exercice. Etant donné une norme N sur E, on appelle *boule unité* (fermée) de E l'ensemble $\{x \in \mathrm{E} : \mathrm{N}(x) \leq 1\}$. Déterminer les boules unité pour les normes $\|x\|_1$ et $\|x\|_\infty$ en deux ou trois dimensions.

Définition 6.4.1. Soit E un espace vectoriel réel ; on dit que deux normes N_1 et N_2 sur E sont *équivalentes* s'il existe deux constantes C_1 et C_2 telles que

$$\forall x \in \mathrm{E}, \quad \mathrm{N}_2(x) \leq \mathrm{C}_1\, \mathrm{N}_1(x) \quad \text{et} \quad \mathrm{N}_1(x) \leq \mathrm{C}_2\, \mathrm{N}_2(x).$$

Les normes $\|x\|_1$, $\|x\|$ (euclidienne) et $\|x\|_\infty$ sont équivalentes sur $\mathbb{R}^p$. On a en effet pour tout $x \in \mathbb{R}^p$ les inégalités

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \|x\|_1\,; \quad \|x\|_1 \leq \sqrt{p}\,\|x\|_2\,; \quad \|x\|_2 \leq \sqrt{p}\,\|x\|_\infty.$$

Il en résulte que la notion de limite d'une suite de points (ou de vecteurs) est la même pour toutes ces normes. On verra en fait un peu plus loin que toutes les normes sur $\mathbb{R}^p$ sont équivalentes.

Proposition 6.4.1. *Soit* E *un espace vectoriel de dimension finie, muni de l'une des normes* $\|.\|_\mathrm{E}$ *du paragraphe précédent, et soit* u *une application linéaire de* E *dans un espace vectoriel normé* F *; alors* u *est continue ; de plus, il existe une constante* C *telle que*

$$\forall x \in \mathrm{E}, \quad \|u(x)\|_\mathrm{F} \leq \mathrm{C}\,\|x\|_\mathrm{E}.$$

Il en résulte que u *est lipschitzienne de* E *dans* F.

Démonstration. Recopier celle de la proposition 6.2.8.

Norme "naturelle" sur $\mathcal{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$*, pour* E*,* F *normés*

On vient de voir que pour toute application linéaire u d'un espace vectoriel normé de dimension finie E dans un autre espace normé F, il existe une constante C telle que $\|u(x)\|_\mathrm{F} \leq \mathrm{C}\,\|x\|_\mathrm{E}$ pour tout $x \in \mathrm{E}$. Introduisons la plus petite constante C possible en posant

$$\|u\| = \sup\{\|u(x)\|_\mathrm{F} : x \in \mathrm{E},\ \|x\|_\mathrm{E} \leq 1\}.$$

On vérifie que $u \to \|u\|$ est une norme sur $\mathcal{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$ et que

$$\forall x \in \mathrm{E}, \quad \|u(x)\|_\mathrm{F} \leq \|u\|\,\|x\|_\mathrm{E}.$$

Bien entendu, cette norme dépend des normes données au départ sur E et F. Cette norme n'est pas euclidienne, même si les deux espaces normés sont euclidiens (on peut montrer que si $\dim \mathrm{E} \geq 2$ et $\dim \mathrm{F} \geq 2$, la norme sur $\mathcal{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$ ne vérifie pas la relation du parallélogramme).

Si on donne une norme N sur $\mathbb{R}^p$ (ou $\mathbb{C}^p$), on peut appliquer ce qui vient d'être dit aux matrices de taille $p \times p$, considérées comme applications linéaires de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^p$ (ou de $\mathbb{C}^p$ dans $\mathbb{C}^p$). A chaque norme N sur $\mathbb{K}^p$ correspond donc une norme sur $\mathrm{M}_p(\mathbb{K}) \simeq \mathcal{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^p)$. Comparons cette norme avec la norme $\|.\|_2$ introduite précédemment pour les matrices, dans le cas où $\mathrm{E} = \mathrm{F} = \mathbb{R}^p$ est muni de la norme euclidienne usuelle. On a déjà vu que $\|\mathrm{AX}\| \leq \|\mathrm{A}\|_2\,\|\mathrm{X}\|$, donc $\|\mathrm{A}\| \leq \|\mathrm{A}\|_2$. Pour tout vecteur de base e_j on a $\|u(e_j)\| \leq \|u\|$, donc la norme de chaque colonne de la matrice est majorée par $\|u\|$. Il en résulte que $\|u\|_2 \leq \sqrt{p}\,\|u\|$. C'est la meilleure inégalité possible, comme le montre le cas de la matrice identité.

Composition d'applications. Il résulte de ce qui précède l'inégalité

$$\|v \circ u\| \leq \|v\| \, \|u\|.$$

pour toutes applications linéaires telles que la composition ait un sens. Dans le cas d'endomorphismes, on en déduit la propriété très importante

$$\|u^k\| \leq \|u\|^k$$

pour tout entier $k \geq 0$.

Equivalence des normes en dimension finie

On va montrer maintenant un résultat général sur l'équivalence des normes sur un espace de dimension finie. Soit E un espace vectoriel de dimension finie > 0 ; on choisit une base $\mathbf{e} = (e_1, \ldots, e_p)$ de E. Supposons donnée une norme N sur E. On a déjà vu qu'elle est lipschitzienne par rapport à la norme $\|.\|_{\mathbf{e}}$, c'est à dire qu'il existe C tel que $\mathrm{N}(x) \leq \mathrm{C} \, \|x\|_{\mathbf{e}}$ pour tout $x \in \mathrm{E}$. Il en résulte que N est continue sur E. On remarque ensuite que

$$\mathrm{S} = \{x \in \mathrm{E} : \|x\|_{\mathbf{e}} = 1\}$$

est fermé, borné donc compact, et non vide. La fonction continue N atteint donc son minimum m en un point $x_0 \in \mathrm{S}$. On a $x_0 \neq 0$ puisque $\|x_0\|_{\mathbf{e}} = 1$, donc $m = \mathrm{N}(x_0) > 0$ par les axiomes des normes. Pour un x quelconque non nul, on obtient en considérant le vecteur $x' = x/\|x\|_{\mathbf{e}} \in \mathrm{S}$

$$\mathrm{N}(x') \geq m,$$

qui donne $\|x\|_{\mathbf{e}} \leq m^{-1}\mathrm{N}(x)$. On vient donc de voir que la norme N est équivalente à la norme $\|.\|_{\mathbf{e}}$. Si on recommence le même travail avec une deuxième norme N_2 sur E, on en déduira que N_2 est équivalente à N. On a donc obtenu :

Théorème 6.4.1. *Si* E *est un espace vectoriel de dimension finie, toutes les normes sur* E *sont équivalentes.*

L'équivalence est très facile à démontrer si on sait que pour toute coordonnée x_i, il existe une constante C telle que $|x_i| \leq \mathrm{C}\,\mathrm{N}(x)$ pour tout $x \in \mathrm{E}$. C'est le cas pour les normes usuelles sur $\mathbb{R}^p$, pour lequel l'appel à la compacité est inutile.

Remarque. Le théorème d'équivalence des normes est faux en dimension infinie.

6.5. Séries de vecteurs dans $\mathbb{R}^p$, séries de matrices

Définition 6.5.1. Soit E un espace vectoriel normé ; on dit qu'une suite (x_n) de points de E est une suite de Cauchy si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe N tel pour tous $m, n \geq \mathrm{N}$ on ait $d(x_m, x_n) < \varepsilon$.

On dit que l'espace E est *complet* si toute suite de Cauchy dans E admet une limite dans E.

Théorème 6.5.1. *L'espace* $\mathbb{R}^p$ *est complet. Plus généralement, tout espace vectoriel* E *de dimension finie est complet.*

Démonstration. Avec les coordonnées. Ecrivons la démonstration pour $p = 2$ pour simplifier. Supposons que (x_n) soit une suite de Cauchy dans $\mathbb{R}^2$, avec $x_n = (a_n, b_n)$, $a_n, b_n \in \mathbb{R}$. L'inégalité $|a_m - a_n| \leq d(x_m, x_n)$ montre que la suite (a_n) est une suite de Cauchy de nombres réels, donc la suite (a_n) converge dans $\mathbb{R}$ vers une limite a, et de même la suite (b_n) converge vers $b \in \mathbb{R}$. On sait alors que la suite (x_n) converge dans $\mathbb{R}^2$ vers $x = (a, b)$.

Définition 6.5.2. Soient $u_0, u_1, \ldots, u_n, \ldots$ des vecteurs d'un espace vectoriel réel ou complexe E de dimension finie ; on dit que la série de vecteurs $\sum u_n$ est convergente si la suite (U_n) des sommes partielles définie par

$$\mathrm{U}_n = u_0 + \cdots + u_n$$

converge dans E vers un vecteur U. On définit alors la somme de la série par

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \mathrm{U} = \lim_{n\to+\infty} \mathrm{U}_n \in \mathrm{E}.$$

Si on passe aux coordonnées dans une base de E, on voit que la série de vecteurs $\sum u_n$ converge dans E si et seulement si les p séries coordonnées convergent, et que la $j$ième coordonnée du vecteur $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ est égale à la somme de la série des $j$ièmes coordonnées des vecteurs u_n.

Séries normalement convergentes de vecteurs dans un espace vectoriel E de dimension finie : *si $\sum \|u_n\| < +\infty$, la série des vecteurs $\sum u_n$ converge dans* E.

En effet, si on pose $\mathrm{U}_n = u_0 + \cdots + u_n \in \mathrm{E}$ et $\mathrm{V}_n = \|u_0\| + \cdots + \|u_n\| \in \mathbb{R}$, on aura si $m < n$

$$\|\mathrm{U}_n - \mathrm{U}_m\| \leq \|u_{m+1}\| + \cdots + \|u_n\| \leq \mathrm{V}_n - \mathrm{V}_m.$$

On sait que (V_n) converge par hypothèse, donc elle est de Cauchy, donc (U_n) est aussi une suite de Cauchy, mais dans E. On peut aussi démontrer facilement le résultat en passant aux coordonnées. Dans le cas particulier des séries de matrices, on obtient le principe suivant :

si $\sum \|\mathrm{A}_n\| < +\infty$, la série de matrices $\sum \mathrm{A}_n$ converge dans $\mathrm{M}_p(\mathbb{C})$.

Si $\sum \|u^{(n)}\| < +\infty$, les séries des coordonnées dans une base quelconque de E vérifient $\sum |u_i^{(n)}| < +\infty$ pour $i = 1, \ldots, p = \dim \mathrm{E}$, donc on peut calculer leur somme en faisant des regroupements par paquets, d'après le théorème 1.5.3. En appliquant ce principe à chaque coordonnée, on voit que pour toute série $\sum u_n$ de vecteurs d'un espace de dimension finie E, telle que $\sum \|u_n\| < +\infty$, on a pour toute partition (A_k) de l'ensemble des entiers $\mathbb{N}$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{k=0}^{+\infty} \Big(\sum_{n\in \mathrm{A}_k} u_n \Big).$$

Exercice (difficile). Montrer que l'ensemble des sommes des permutées d'une série simplement convergente de vecteurs de E (celles des permutées qui sont restées convergentes) est un sous-espace affine de E.

Inversibilité et condition de norme

Proposition 6.5.1. *Soit* E *un espace normé de dimension finie ; si h est un endomorphisme de* E *tel que $\|h\| < 1$, l'endomorphisme $u = \mathrm{Id}_\mathrm{E} - h$ est inversible et de plus*

$$\|(\mathrm{Id}_\mathrm{E} - h)^{-1}\| \leq (1 - \|h\|)^{-1}.$$

Démonstration. On écrit dans l'espace normé de dimension finie $\mathcal{L}(\mathrm{E},\mathrm{E})$ la série normalement convergente

$$v = \sum_{n=0}^{\infty} h^n$$

et on vérifie que v est l'inverse de $\mathrm{Id}_{\mathrm{E}} - h$.

Si A est une matrice de taille $p \times p$ telle que $\|\mathrm{A}\| < 1$, où la norme de matrice est calculée à partir d'une norme donnée sur $\mathbb{C}^p$ comme on l'a expliqué précédemment, on a de la même façon

$$(\mathrm{I}_p - \mathrm{A})^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{A}^n.$$

L'inverse de la matrice $\mathrm{I}_p - \mathrm{A}$ se calcule encore par la série géométrique si on sait seulement que toutes les valeurs propres complexes de A sont de module < 1 (c'est à dire quand $\rho_{\mathrm{A}} < 1$). En effet dans ce cas on sait d'abord que $\mathrm{I}_p - \mathrm{A}$ est inversible, et on a vu que la suite (A^n) tend vers 0, et on a en notant B l'inverse de $\mathrm{I}_p - \mathrm{A}$

$$\mathrm{I}_p + \mathrm{A} + \cdots + \mathrm{A}^n = \mathrm{B}(\mathrm{I}_p - \mathrm{A}^{n+1}) \to \mathrm{B}.$$

Exponentielle de matrice

Posons $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On suppose donnée une norme sur $\mathbb{K}^p$ (par exemple la norme euclidienne si on veut, mais cela n'a pas d'importance), et on en déduit une norme sur $\mathrm{M}_p(\mathbb{K}) \simeq \mathcal{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^p)$ comme rappelé ci-dessus. Etant donnée une matrice A de taille $p \times p$, la série

$$\sum \left\| \frac{\mathrm{A}^n}{n!} \right\| \leq \sum \frac{\|\mathrm{A}\|^n}{n!}$$

est convergente, ce qui permet de poser

$$\mathrm{e}^{\mathrm{A}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\mathrm{A}^n}{n!}.$$

On voit que $\| \mathrm{e}^{\mathrm{A}} \| \leq \mathrm{e}^{\|\mathrm{A}\|}$.

Exemples.

1. Si A est diagonale, e^{A} est la matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont les $\mathrm{e}^{a_{i,i}}$; si A est diagonale par blocs, e^{A} est diagonale par blocs et les blocs diagonaux de e^{A} sont les exponentielles des blocs diagonaux de A.
2. Si R est la matrice de la rotation d'angle $\pi/2$ dans $\mathbb{R}^2$, la matrice $\mathrm{e}^{t\mathrm{R}}$ est la matrice de la rotation d'angle t.

On va s'intéresser à la fonction exponentielle de matrice $t \to \mathrm{e}^{t\mathrm{A}}$, lorsque t varie dans $\mathbb{R}$. On peut noter que $\mathrm{e}^{t\mathrm{I}_p} = \mathrm{e}^t\, \mathrm{I}_p$ pour tout t réel (ou complexe) ; en particulier, si 0_p désigne la matrice nulle de taille $p \times p$, on a

$$\mathrm{e}^{0_p} = \mathrm{I}_p.$$

Pour tout entier $n \geq 0$, désignons par $\mathrm{A}_{i,j}^{(n)}$ le coefficient (i,j) de la matrice A^n. On a alors $|\mathrm{A}_{i,j}^{(n)}| \leq \|\mathrm{A}^n\|_2 \leq \|\mathrm{A}\|_2^n$ pour tout $n \geq 1$, ce qui montre que les p^2 séries coefficients

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{n!}\, \mathrm{A}_{i,j}^{(n)}$$

de la matrice $\mathrm{e}^{t\mathrm{A}}$ convergent pour tout $t \in \mathbb{R}$. Les coefficients de la matrice $\mathrm{e}^{t\mathrm{A}}$ sont donc des séries entières de la variable t, de rayon de convergence infini, qui sont par conséquent dérivables sur $\mathbb{R}$, avec pour dérivée

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}\, \mathrm{A}_{i,j}^{(n)}.$$

Ces coefficients sont les coefficients de la matrice somme de la série (de matrices) dérivée $\sum t^{n-1}\mathrm{A}^n/(n-1)!$, donc

$$\frac{d}{dt}\,\mathrm{e}^{t\mathrm{A}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{n!}\,\mathrm{A}^{n+1}$$

ce qui donne

$$(**) \qquad \frac{d}{dt}\,\mathrm{e}^{t\mathrm{A}} = \mathrm{A}\,\mathrm{e}^{t\mathrm{A}} = \mathrm{e}^{t\mathrm{A}}\,\mathrm{A}.$$

Proposition 6.5.2. *Si les matrices* A *et* B *commutent, on a*

$$\mathrm{e}^{\mathrm{A}+\mathrm{B}} = \mathrm{e}^{\mathrm{A}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{B}}\,.$$

En particulier, la matrice e^{A} *est inversible et son inverse est* $\mathrm{e}^{-\mathrm{A}}$.

Démonstration. On remarque que si $\mathrm{AB} = \mathrm{BA}$,

$$(*) \qquad \mathrm{B}\,\mathrm{e}^{\mathrm{A}} = \lim_n \mathrm{B}(\mathrm{I}_p + \cdots + \frac{\mathrm{A}^n}{n!}) = \lim_n (\mathrm{I}_p + \cdots + \frac{\mathrm{A}^n}{n!})\mathrm{B} = \mathrm{e}^{\mathrm{A}}\,\mathrm{B}$$

On introduit la fonction $t \to \mathrm{M}(t)$ à valeurs matrices définie par

$$\mathrm{M}(t) = \mathrm{e}^{t\mathrm{A}+t\mathrm{B}}\,\mathrm{e}^{-t\mathrm{A}}\,\mathrm{e}^{-t\mathrm{B}},$$

dont on montre que la dérivée est nulle, grâce aux propriétés $(*)$ et $(**)$ ci-dessus. En écrivant que $\mathrm{M}(1) = \mathrm{M}(0)$, on obtient la relation

$$\mathrm{e}^{\mathrm{A}+\mathrm{B}}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{A}}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{B}} = \mathrm{I}_p.$$

En appliquant ceci à $\mathrm{B} = -\mathrm{A}$, on trouve $\mathrm{e}^{\mathrm{A}}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{A}} = \mathrm{I}_p$, ce qui permet de transformer la relation précédente en $\mathrm{e}^{\mathrm{A}+\mathrm{B}} = \mathrm{e}^{\mathrm{B}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{A}}$.

Remarque. On aurait pu aussi démontrer ce résultat par sommation par paquets, comme dans le cas complexe (chapitre 1).

Calcul pratique d'exponentielles de matrices

On se sert de la théorie de la réduction des matrices complexes, qui utilise la décomposition de $\mathbb{C}^p$ en sous-espaces caractéristiques de la matrice A et la triangulation des blocs caractéristiques. On sait ainsi que la matrice A peut s'écrire $\mathrm{A} = \mathrm{VMV}^{-1}$, où V est inversible, et où M est une matrice diagonale par blocs, chaque bloc diagonal étant une matrice triangulaire T_α, avec une valeur constante $\lambda_\alpha \in \mathbb{C}$ sur la diagonale (λ_α est l'une des valeurs propres (complexes) de la matrice A). On obtient alors $\mathrm{e}^{t\mathrm{A}} = \mathrm{V}\mathrm{e}^{t\mathrm{M}}\,\mathrm{V}^{-1}$, et $\mathrm{e}^{t\mathrm{M}}$ est diagonale par blocs, chaque bloc étant égal à $\mathrm{e}^{t\mathrm{T}_\alpha}$. Il reste à expliquer l'allure de $\mathrm{e}^{t\mathrm{T}}$, où T est l'un quelconque de ces blocs diagonaux de M, de taille $p \times p$. On peut

écrire $\mathrm{T} = \lambda \mathrm{I}_p + \mathrm{N}$, où N est nilpotente, ce qui donnera puisque $\lambda \mathrm{I}_p$ commute avec N et que $\mathrm{N}^p = 0$

$$\mathrm{e}^{t\mathrm{T}} = \mathrm{e}^{t\lambda \mathrm{I}_p}\, \mathrm{e}^{t\mathrm{N}} = \mathrm{e}^{t\lambda}\big(\mathrm{I}_p + t\mathrm{N} + \frac{t^2}{2!}\mathrm{N}^2 + \cdots + \frac{t^{p-1}}{(p-1)!}\mathrm{N}^{p-1}\big).$$

Si T a la forme de Jordan on obtient une information un peu plus précise.

Conséquence. Si toutes les valeurs propres (réelles ou complexes) de la matrice A sont de partie réelle < 0, la matrice $\mathrm{e}^{t\mathrm{A}}$ tend vers 0 lorsque $t \to +\infty$ (on peut démontrer que c'est si et seulement si).

6.6. Espaces métriques. Espaces complets

Définition 6.6.1. Un *espace métrique* est la donnée d'un couple (X, d), où X est un ensemble muni d'une distance d, qui est une application $d : \mathrm{X} \times \mathrm{X} \to [0, +\infty[$ vérifiant les trois axiomes des distances indiqués précédemment :

1. $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ pour tous $x, y, z \in \mathrm{X}$ (inégalité triangulaire pour une distance).
2. $d(x, y) = d(y, x)$ pour tous $x, y \in \mathrm{X}$.
3. $(d(x, y) = 0) \Leftrightarrow (x = y)$ pour tous $x, y \in \mathrm{X}$.

Exemples.

1. Sur $\mathbb{R}$ la distance habituelle est $d(x, y) = |x - y|$. Sur $\mathbb{R}^p$, on a la distance euclidienne par exemple.
2. Il est souvent utile d'introduire des distances qui n'ont pas immédiatement une signification géométrique. La remarque suivante est utile dans cette optique. Si (Y, δ) est un espace métrique et si $f : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ est une application injective, on peut définir une distance sur X par la formule $d(x, x') = \delta(f(x), f(x'))$, pour tous $x, x' \in \mathrm{X}$.
3. Un exemple de distance sur $\mathrm{X} = \mathbb{N} \cup \{+\infty\} = \overline{\mathbb{N}}$: on pose $d(m, n) = |2^{-m} - 2^{-n}|$ pour m, n entiers et $d(n, +\infty) = 2^{-n}$. Cette distance revient à identifier $\overline{\mathbb{N}}$ avec le sous-ensemble $\{2^{-n} : n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$ de $\mathbb{R}$. C'est une application de la remarque précédente à l'injection f de $\overline{\mathbb{N}}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(n) = 2^{-n}$ pour tout entier $n \geq 0$, et $f(+\infty) = 0$.
4. Sur $[0, 1[$, posons $d(x, y) = \min\{|x - y|, |x + 1 - y|, |x - 1 - y|\}$. C'est une distance, qui revient à identifier $[0, 1[$ à un cercle de longueur 1, muni de la distance qui est la longueur du plus court parcours sur le cercle entre deux points (on pourrait introduire l'injection de $[0, 1[$ dans le cercle du plan complexe définie par $f(x) = \mathrm{e}^{2\pi i x}$).

Suites convergentes

Définition 6.6.2. Soit (X, d) un espace métrique ; on dit qu'une suite (x_n) de points de (X, d) *tend vers* le point $x \in \mathrm{X}$ (ou *converge* vers x) si $d(x_n, x)$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini.

Continuité d'applications entre deux espaces métriques

Définition 6.6.3. Soient $(\mathrm{X}, d_\mathrm{X})$ et $(\mathrm{Y}, d_\mathrm{Y})$ deux espaces métriques ; soit f une application de $(\mathrm{X}, d_\mathrm{X})$ dans $(\mathrm{Y}, d_\mathrm{Y})$; elle est continue de $(\mathrm{X}, d_\mathrm{X})$ dans $(\mathrm{Y}, d_\mathrm{Y})$ au point $a \in \mathrm{X}$ si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tel que

$$\forall x \in \mathrm{X}, \Big(d_\mathrm{X}(x, a) < \delta \Rightarrow d_\mathrm{Y}(f(x), f(a)) < \varepsilon\Big).$$

Exemple. Dire que (x_n) est une suite de nombres réels qui converge vers x équivaut à dire que la fonction $\mathrm{X} : (\overline{\mathbb{N}}, d) \to \mathbb{R}$ définie par $\mathrm{X}(n) = x_n$ et $\mathrm{X}(+\infty) = x$ est continue au point $+\infty \in \overline{\mathbb{N}}$ (en notant $(\overline{\mathbb{N}}, d)$ l'espace métrique défini ci-dessus).

Proposition 6.6.1. *La fonction $f : \mathrm{X} \to \mathrm{Y}$ est continue au point $a \in \mathrm{X}$ si et seulement si pour toute suite (x_n) tendant vers a dans $(\mathrm{X}, d_\mathrm{X})$ (c'est à dire que $d_\mathrm{X}(x_n, a) \to 0$), la suite $(f(x_n))$ tend vers $f(a)$ dans $(\mathrm{Y}, d_\mathrm{Y})$.*

Suites de Cauchy. Espace métrique complet

Définition 6.6.4. Soit (x_n) une suite dans (X, d) ; on dit que (x_n) est une suite de Cauchy si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe N tel pour tous $m, n \geq \mathrm{N}$ on ait $d(x_m, x_n) < \varepsilon$.

On remarque que toute suite convergente est de Cauchy. On dit que l'espace métrique (X, d) est complet si toute suite de Cauchy dans X admet une limite dans X.

Convergence uniforme des suites de fonctions

On va interpréter les résultats du chapitre 2 dans le langage de cette section. On a défini au chapitre 2 une norme $\|f\|_{u,\mathrm{X}}$ sur l'espace vectoriel $\mathrm{B}(\mathrm{X})$ des fonctions complexes bornées sur X, la norme uniforme de f.

Proposition 6.6.2. *Soit (f_n) une suite de Cauchy de fonctions complexes bornées définies sur X ; il existe une fonction $f \in \mathrm{B}(\mathrm{X})$ telle que (f_n) converge uniformément sur X vers f. En d'autres termes, l'espace $\mathrm{B}(\mathrm{X})$ muni de la norme $\|.\|_{u,\mathrm{X}}$ est complet.*

Démonstration. Pour tout $\varepsilon > 0$ donné, il existe N tel que $\|f_m - f_n\| < \varepsilon$ pour tous les entiers m, n plus grands que N. Pour tout $x \in \mathrm{X}$, on a alors

$$|f_m(x) - f_n(x)| \leq \|f_m - f_n\|,$$

donc la suite $(f_n(x))$ est une suite de Cauchy de nombres complexes, qui converge donc vers une limite que l'on appelle $f(x)$. En passant à la limite dans l'inégalité large ci dessus, lorsque m tend vers $+\infty$ (en gardant n fixé) on obtient

$$|f(x) - f_n(x)| \leq \varepsilon,$$

pour tout $x \in \mathrm{X}$, donc $\|f - f_n\| \leq \varepsilon$ pour n assez grand.

Exercice. Soit A un sous-ensemble non vide de $\mathbb{R}^p$, et $x_0 \in \mathbb{R}^p$ un point adhérent à A ; montrer que le théorème d'interversion des limites implique que l'ensemble F des fonctions $f \in \mathrm{B}(\mathrm{A})$ qui tendent vers une limite quand x tend vers x_0 est un sous-ensemble fermé de $\mathrm{B}(\mathrm{A})$.

Suites de fonctions continues

Soient A un sous-ensemble non vide de $\mathbb{R}^p$; désignons par $\mathrm{C}_b(\mathrm{A})$ le sous-espace vectoriel de $\mathrm{B}(\mathrm{A})$ formé des fonctions complexes continues et bornées sur A.

Théorème 6.6.1. *L'espace vectoriel $\mathrm{C}_b(\mathrm{A})$, muni de la norme $\|.\|_{\mathrm{B}(\mathrm{A})}$, est un espace complet.*

Démonstration. Ce résultat est une conséquence immédiate du théorème sur la continuité d'une limite uniforme de fonctions continues (théorème 2.1.2).

Inégalité de Cauchy-Schwarz dans un cas plus général. Séries de Fourier

Soit E un espace vectoriel réel et soit φ une forme bilinéaire *symétrique* et *positive* sur E, c'est à dire que

$$\forall x, y \in \mathrm{E},\ \varphi(x, y) = \varphi(y, x)\,;\quad \forall x \in \mathrm{E},\ \varphi(x, x) \geq 0.$$

Soient $x, y \in \mathrm{E}$; on a donc $\varphi(tx + y, tx + y) \geq 0$ pour tout réel t. En développant on obtient un trinôme réel $t^2\varphi(x, x) + 2t\varphi(x, y) + \varphi(y, y)$, qui est ≥ 0 pour tout $t \in \mathbb{R}$, donc son discriminant est ≤ 0, ce qui donne l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\big(\varphi(x, y)\big)^2 \leq \varphi(x, x)\,\varphi(y, y).$$

Exemple. Considérons la forme bilinéaire

$$\varphi(f, g) = \int_a^b f(t)g(t)\,dt$$

définie pour tout couple de fonctions Riemann-intégrables réelles sur $[a,b]$. Il est clair que φ est bilinéaire, symétrique et positive. On obtient donc

$$|\int_a^b f(t)g(t)\,dt| \leq (\int_a^b f(t)^2\,dt)^{1/2}(\int_a^b g(t)^2\,dt)^{1/2}.$$

Dans le cas de fonctions à valeurs complexes, on posera plutôt

$$\langle f,g\rangle = \int_a^b f(t)\overline{g(t)}\,dt,$$

et on aura encore

$$|\langle f,g\rangle| \leq \int_a^b |f(t)||g(t)|\,dt \leq (\int_a^b |f(t)|^2\,dt)^{1/2}(\int_a^b |g(t)|^2\,dt)^{1/2}.$$

Application : inégalité de Bessel pour les coefficients de Fourier

Soit f une fonction 2π-périodique, réelle ou complexe, et Riemann-intégrable sur $[0,2\pi]$ (la fonction f est donc bornée par hypothèse). On définit les coefficients de Fourier de la fonction f, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, par la formule

$$\widehat{f}(n) = c_n = \int_0^{2\pi} f(t)\,\mathrm{e}^{-int}\,\frac{dt}{2\pi} = \langle f, \mathrm{e}^{in(.)}\rangle.$$

On définit les sommes partielles de la série de Fourier de f,

$$\mathrm{S_N}(x) = \sum_{n=-\mathrm{N}}^{\mathrm{N}} c_n\,\mathrm{e}^{inx},$$

et on voit facilement que

$$\int_0^{2\pi} f(t)\overline{\mathrm{S_N}(t)}\,\frac{dt}{2\pi} = \int_0^{2\pi} f(t)(\sum_{n=-\mathrm{N}}^{\mathrm{N}} \overline{c}_n\,\mathrm{e}^{-int})\,\frac{dt}{2\pi} = \sum_{n=-\mathrm{N}}^{\mathrm{N}} |c_n|^2.$$

De même,

$$\int_0^{2\pi} \mathrm{S_N}(t)\overline{\mathrm{S_N}(t)}\,\frac{dt}{2\pi} = \sum_{n=-\mathrm{N}}^{\mathrm{N}} |c_n|^2.$$

On obtient alors avec l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour les intégrales la relation

$$\sum_{n=-\mathrm{N}}^{\mathrm{N}} |c_n|^2 = \int_0^{2\pi} f(t)\overline{\mathrm{S_N}(t)}\,\frac{dt}{2\pi} \leq (\int_0^{2\pi} |\mathrm{S_N}(t)|^2\,\frac{dt}{2\pi})^{1/2}(\int_0^{2\pi} |f(t)|^2\,\frac{dt}{2\pi})^{1/2} =$$

$$= (\sum_{n=-\mathrm{N}}^{\mathrm{N}} |c_n|^2)^{1/2}\,(\int_0^{2\pi} |f(t)|^2\frac{dt}{2\pi})^{1/2},$$

ce qui donne finalement l'inégalité

$$(\sum_{n=-\mathrm{N}}^{\mathrm{N}} |c_n|^2)^{1/2} \leq (\int_0^{2\pi} |f(t)|^2\,\frac{dt}{2\pi})^{1/2},$$

et en passant à la limite quand $\mathrm{N} \to +\infty$, on obtient *l'inégalité de Bessel*

$$(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2)^{1/2} \leq (\int_0^{2\pi} |f(t)|^2\,\frac{dt}{2\pi})^{1/2}.$$

Conséquence. On obtient comme conséquence immédiate le fait que les coefficients de Fourier tendent vers 0,

$$\lim_{|n|\to+\infty} c_n = \lim_{|n|\to+\infty} \widehat{f}(n) = 0.$$

Exercice. Généraliser le résultat de la ligne précédente au cas où f n'est plus supposée bornée, mais où on suppose seulement que $\int_0^{2\pi} |f(t)|\,dt$ est une intégrale généralisée convergente.

Théorème 6.6.2. *On suppose que f est 2π-périodique et intégrable Riemann sur $[0, 2\pi]$. Pour tout point x tel que f soit dérivable au point x, on a*

$$f(x) = \lim_{\mathrm{N}\to+\infty} \mathrm{S_N}(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(n)\,\mathrm{e}^{inx}\,.$$

Démonstration. Par translation on peut se ramener au cas où $x = 0$, et en ajoutant une constante, au cas où $f(0) = 0$. On doit donc montrer dans ce cas que $\mathrm{S_N}(0)$ tend vers $0 = f(0)$ quand N tend vers $+\infty$. On introduit pour tout entier $\mathrm{N} \geq 1$ la fonction $\mathrm{K_N}$ définie par

$$\mathrm{K_N}(\theta) = \mathrm{e}^{-i\mathrm{N}\theta} + \cdots + \mathrm{e}^{i\mathrm{N}\theta} = \mathrm{e}^{-i\mathrm{N}\theta}\,\frac{1-\mathrm{e}^{(2\mathrm{N}+1)i\theta}}{1-\mathrm{e}^{i\theta}},$$

et on constate que

$$\mathrm{S_N}(0) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\mathrm{K_N}(t)\,\frac{dt}{2\pi} = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(t)}{1-\mathrm{e}^{it}}\,(\mathrm{e}^{-i\mathrm{N}t} - \mathrm{e}^{i(\mathrm{N}+1)t})\,\frac{dt}{2\pi}.$$

On introduit la fonction $g(t) = f(t)/(1-\mathrm{e}^{it})$. Puisque f est supposée dérivable au point 0, cette fonction g se prolonge en fonction bornée sur $[-\pi, \pi]$, donc l'expression précédente est égale à $\widehat{g}(\mathrm{N}) - \widehat{g}(-\mathrm{N}-1)$, quantité qui tend vers 0 quand $\mathrm{N} \to +\infty$ d'après les résultats précédents.

Remarque. On a un tout petit peu triché, car la définition de la convergence d'une série $\sum_{-\infty}^{+\infty}$ demande de montrer la convergence séparément de $\sum_{n=0}^{+\infty}$ et $\sum_{n=-\infty}^{0}$. Exercice : réparer cet accroc.

Exercice. Généraliser au cas où $\int_0^{2\pi} |f(t)|\,dt$ est une intégrale généralisée convergente, et où x est un point tel que $|f(x+h) - f(x)| \leq \mathrm{M}|h|^\gamma$ pour h assez petit, avec $\gamma > 0$.

Index

Adhérence 122
Application identique 68
Application linéaire 67
Base canonique de $\mathbb{K}^n$ 67
Base d'un espace vectoriel 71
Base d'une somme directe 73
Base duale 71
Base incomplète (théorème de la) 71
Bézout (théorème de) 104
Bolzano-Weierstrass dans $\mathbb{R}$ (théorème de) 109
Bolzano-Weierstrass général (théorème de) 125
Borné (ensemble) 2
Borne inférieure, borne supérieure 3
Boule ouverte dans $\mathbb{R}^p$ 121
Boule unité (d'une norme) 128
Calcul de déterminants par blocs 81
Calcul du rayon de convergence 49
Calcul matriciel par blocs 74
Calcul pratique d'exponentielles de matrices 132
Caractéristique (polynôme) 88
Cauchy-Schwarz (inégalité de) 114, 134
Cayley-Hamilton (théorème de) 102
Changement de base 74
Changement de l'ordre des termes d'une série numérique 21
Classes $\mathrm{O}_a(f)$, $\mathrm{O}(x^n)$ 56
Coefficient du binôme généralisé 64
Coefficients de Fourier 44
Combinaison linéaire 70
Commutables (endomorphismes) 82, 89, 92, 98
Compacité dans les espaces vectoriels de dimension finie 125
Compagnon (matrice) 89, 95, 99
Comparaison séries-intégrales 17
Complet (espace) 10, 129, 134
Complet (espace métrique) 134
Complet (espace normé) 129
Composition de limites 119
Constante d'Euler 18
Construction des nombres réels 4
Continue (fonction sur $\mathbb{R}^p$) 116, 124
Continuité 110, 116, 118, 124, 126, 133
Continuité de la somme d'une série de fonctions 40
Continuité des applications linéaires 124
Continuité uniforme 112, 127
Convergence de suites complexes 8
Convergence des séries de Fourier 136
Convergence des suites de Cauchy 10
Convergence normale d'une série de fonctions 35
Convergence simple d'une suite de fonctions 27
Convergence uniforme d'une suite de fonctions 29, 134
Convergence uniforme des dérivées 31
Convergence uniforme et intégrale 32
Convergence uniforme et interversion de limites 30

Coordonnées dans une base 71
Correspondance séries-suites 13
Coupures (dans $\mathbb{Q}$ ou $\mathbb{R}$) 1
Critère de Cauchy pour la convergence des séries 19
Critère $\sum 2^n u_{2^n}$ 17
Critères de convergence des séries numériques 16, 18
Critères de diagonalisabilité 94, 106
d'Alembert (théorème de) 90, 126
Dérivation des séries de fonctions 41
Dérivation des séries entières 51
Dérivées successives d'une série entière 52
Déterminant 77
Déterminant d'un endomorphisme 85
Déterminant d'une matrice triangulaire 81
Déterminant dans une base 79
Déterminant des matrices 80
Déterminant par blocs (calcul de) 81
Développement décimal 15
Développement décimal impropre 15
Développement du déterminant d'une matrice suivant une ligne 80
Développement en série d'une fonction de fonction 62
Développement en série entière de $(1+x)^\alpha$ 64
Développement en série entière des fonctions usuelles 59
Diagonale par blocs (matrice) 76
Diagonalisabilité et polynôme minimal 106
Diagonalisable (endomorphisme) 93
Dichotomie (démonstration par) 109
Dimension d'un espace vectoriel 72
Dimension d'une somme directe 73
Disque de convergence 48
Distance (générale) 133
Distance de la convergence uniforme 27
Distance euclidienne 114
Division euclidienne 103
Droite achevée $\overline{\mathbb{R}}$ 5
Dual d'un espace vectoriel 68
Ecart de la convergence uniforme 27
Endomorphisme 68, 85
Endomorphisme diagonalisable 93
Ensemble compact 125
Ensemble de Cantor 113
Ensemble fermé dans $\mathbb{R}^p$ 121, 125
Ensemble majoré 2
Equation de la chaleur 44
Equivalence de normes 128, 129
Equivalentes (suites) 6, 15
Espace des matrices à coefficients dans $\mathbb{K}$ 73
Espace métrique 133
Espace métrique complet 134
Espace vectoriel sur un corps $\mathbb{K}$ 67
Exercices sur les séries numériques 26
Exponentielle complexe 22, 54
Exponentielle de matrice 131
Fermé (sous-ensemble de $\mathbb{R}$) 110
Fermé (sous-ensemble de $\mathbb{R}^p$) 121, 125
Fonction continue sur $\mathbb{R}^p$ 116, 124

Fonction continue sur un compact 126
Fonction développable en série entière 58
Fonction lipschitzienne 117
Fonction uniformément continue 112
Fonction zeta (fonction ζ) 36, 40
Forme linéaire 68
Forme linéaire alternée 77
Formes linéaires coordonnées 71
Formule de Stirling 18
Générateur (système de vecteurs) 70
Générateur unitaire d'un idéal de polynômes 103
Idéal de polynômes 102
Image d'une application linéaire 69
Indépendance linéaire et changement de corps de base 82
Inégalité de Bessel pour les coefficients de Fourier 135
Inégalité de Cauchy-Schwarz 114, 134
Inégalité de Cauchy-Schwarz générale 134
Inégalité triangulaire 28, 115, 133
Injectivité (application linéaire) 69
Intégrale dépendant d'un paramètre (continuité) 34
Intégrale généralisée dépendant d'un paramètre (continuité) 46
Intégration des séries entières 54
Intégration et séries de fonctions normalement convergentes 42
Interversion de limites 30
Interversion des limites pour une série normalement convergente 37
Isomorphisme d'espaces vectoriels 69
Jordan (matrice de) 105
Libre (système de vecteurs) 70
Limite d'une fonction en un point 7, 30
Limite d'une fonction en un point $a \in \mathbb{R}^p$ 118
Limite d'une suite de points de $\mathbb{R}^p$ 116
Limite des suites numériques 5
Limite infinie 6
Limite simple d'une suite de fonctions 27
Limite supérieure d'une suite bornée de nombres réels 8, 113
Limite uniforme de fonctions continues 31
Lipschitzienne (fonction, application) 117, 124
Logarithme complexe 55
Majorant 2
Matrice compagnon d'un polynôme 89, 101, 105
Matrice d'une application linéaire 73
Matrice de Jordan 91, 105
Matrice de passage 74
Matrice diagonale par blocs 76
Matrice identité 74
Matrice triangulaire par blocs 76
Minorant 2
Module de continuité 112
Norme euclidienne 114
Norme naturelle sur $\mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$ 128
Norme sur les espaces de matrices 119
Norme sur un espace vectoriel 28, 127
Norme uniforme sur l'espace des fonctions bornées 27, 29, 134
Noyau d'une application linéaire 69
$\mathrm{O}_a(f)$, $\mathrm{O}(x^n)$ (classes de fonctions) 56
Opérations sur les nombres réels 3

Opérations sur les séries entières 51
Ouvert de $\mathbb{R}$ 112
Ouvert de $\mathbb{R}^p$ 121, 125
Partie entière (d'un nombre réel) 6, 113
Passage à la limite des inégalités 7
Point adhérent 30
Point adhérent dans $\mathbb{R}^p$ 118
Polynôme caractéristique 88
Polynôme d'endomorphisme 98
Polynôme minimal d'un endomorphisme, d'une matrice 104, 107
Polynôme minimal et diagonalisation 106
Polynôme unitaire 102
Présentation des nombres réels 1
Produit d'applications linéaires et produit de matrices 74
Produit d'espaces vectoriels 68
Produit de séries entières 51
Produit de séries numériques 21
Produit scalaire 114
Projections d'un produit sur les facteurs 68
Propriétés des fonctions continues sur un compact 126
Propriétés des fonctions continues sur un fermé borné de $\mathbb{R}$ 110
Rayon de convergence 48
Rayon spectral 120
Réduction des endomorphismes 85
Réduction réelle d'une matrice diagonalisable sur $\mathbb{C}$ 94
Règle $n^\alpha u_n$ 18
Relation du parallélogramme 115
Reste d'une série numérique 17
Restriction d'un endomorphisme 90
Série à termes complexes 12
Série à termes positifs 14
Série absolument convergente 19
Série alternée 24
Série convergente 12
Série de Bertrand 17
Série de fonctions normalement convergente 35
Série de Fourier 44, 135
Série de matrices 129
Série de Riemann 18
Série de Taylor 14, 58
Série de vecteurs dans $\mathbb{R}^p$ 129
Série divergente 12
Série entière 47
Série géométrique 14
Série harmonique alternée 19
Série majorante 35
Série numérique double 21, 39
Série produit 21
Série semi-convergente 23
Séries alternées de fonctions 45
Séries entières et développements limités 56
Séries entières solutions d'équations différentielles 63
Signature d'une permutation 78
Sommation par paquets des séries 19
Somme d'une série numérique 12
Somme de sous-espaces vectoriels 68

Somme directe de sous-espaces vectoriels 72, 92
Sous-ensemble fermé de $\mathbb{R}$ 110
Sous-espace caractéristique 95, 107
Sous-espace propre d'un endomorphisme 92
Sous-espace stable 76, 89, 96, 100, 107
Sous-espace stable engendré par un vecteur 100
Sous-espace vectoriel 67
Sous-espace vectoriel engendré 70
Sous-espaces caractéristiques et triangulation 97
Sous-suite 8, 109
Stable (sous-espace) 76, 89, 96, 100, 107
Suite convergente dans $\mathbb{R}^p$ 116
Suite convergente de nombres réels 5
Suite croissante et majorée 7
Suite de Cauchy 9, 129, 134
Suite de Cauchy dans $\mathbb{R}^p$ 129
Suites équivalentes 6, 15
Suites et séries de fonctions 27
Système générateur 70
Système libre de vecteurs 70
Terme général d'une série numérique 12
Théorème de comparaison pour les séries à termes positifs 15
Topologie d'un espace vectoriel réel de dimension finie 123
Topologie de $\mathbb{R}$ 109
Topologie de $\mathbb{R}^p$ et des espaces vectoriels de dimension finie 114
Trace d'un endomorphisme, d'une matrice 88
Transformation d'Abel 25
Transformation d'Abel et convergence uniforme 45
Triangulaire par blocs (matrice) 76
Triangulation 96, 97
Triangulation d'une matrice réelle 97
Triangulation et sous-espaces caractéristiques 97
Unitaire (polynôme) 102
Valeur d'adhérence d'une suite de nombres réels 9, 113
Valeur propre 87
Valeurs propres (complexes) d'une matrice 91
Vecteur propre 87
Voisinage d'un point de $\mathbb{R}$ 56, 112
Voisinage d'un point de $\mathbb{R}^p$ 121, 124

Index des notations

$\mathrm{A} \setminus \mathrm{B}$: différence ensembliste . . . 1
$\sup \mathrm{A}$: borne supérieure . . . 3
$\inf \mathrm{A}$: borne inférieure . . . 3
$\overline{\mathbb{R}}$: droite achevée . . . 5
(x_n) : suite numérique . . . 5
$[x]$: partie entière . . . 6
$\lim_n x_n$: limite d'une suite numérique . . . 6
$\lim_{x \to a, x \in \mathrm{I}} f(x)$: limite d'une fonction . . . 7
$\mathrm{Re}\, z$: partie réelle d'un nombre complexe . . . 8
$\mathrm{Im}\, z$: partie imaginaire d'un nombre complexe . . . 8
$\limsup_n x_n$: limite supérieure d'une suite numérique . . . 9
$\liminf_n x_n$: limite inférieure d'une suite numérique . . . 9
$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$: somme d'une série numérique . . . 12
$\sum u_n$, $\sum (u_n)_{n \geq 0}$: série numérique . . . 12
$u_0 + u_1 + \cdots + u_n + \cdots$: somme d'une série numérique . . . 12
$x_n \sim y_n$: suites équivalentes . . . 15
$\mathrm{R}_n = \sum_{m=0}^{+\infty} u_m - \mathrm{U}_n = u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots$: reste d'une série numérique . . . 17
$\chi_{\mathrm{A}}(n)$: fonction caractéristique . . . 20
$\mathrm{e}^z, z \in \mathbb{C}$: exponentielle complexe . . . 23
$\mathrm{ch}(z), \mathrm{sh}(z), z \in \mathbb{C}$: . . . 23
$\|f\|_{u,\mathrm{X}}$: norme uniforme . . . 27
$d_{u,\mathrm{X}}(f, g)$: distance (ou écart) de la convergence uniforme . . . 27
$\|x\|$: norme d'un vecteur . . . 28
0_{E} : vecteur nul . . . 28
$\sum_n u_n()$: série de fonctions . . . 35
$\zeta(x)$: fonction zeta . . . 36
$\mathrm{O}_a(f)$, $\mathrm{O}(x^n)$: classes "Grand O" . . . 56
$\binom{\alpha}{n}$: coefficient du binôme généralisé . . . 64
$\mathbb{K}$: corps de base . . . 67
$\mathbf{e}_1, \ldots \mathbf{e}_n$: base canonique de $\mathbb{K}^n$ . . . 67
0_{E} : vecteur nul de l'espace vectoriel E . . . 67
$\mathrm{F}_1 + \mathrm{F}_2$, $\mathrm{F}_1 + \cdots + \mathrm{F}_n$: somme de sous-espaces vectoriels . . . 68
Id_{E} : application identique de l'espace vectoriel E . . . 68
$\mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$: espace des applications linéaires de E dans F . . . 68
E^* : dual de l'espace vectoriel E . . . 68
$\ker u$: noyau de l'application linéaire u . . . 69
$[x_1, \ldots, x_n]$: sous-espace vectoriel engendré . . . 70
e_j^* : forme linéaire coordonnée dans la base $\mathbf{e}$ . . . 71
$\dim \mathrm{E}$: dimension de l'espace vectoriel E . . . 72
$\mathrm{F}_1 \oplus \mathrm{F}_2$, $\mathrm{F}_1 \oplus \cdots \oplus \mathrm{F}_n$: sommes directes de sous-espaces vectoriels . . . 72
$\mathrm{M}_{n,m}(\mathbb{K})$, $\mathrm{M}_n(\mathbb{K})$: espace des matrices à coefficients dans $\mathbb{K}$ . . . 73
$\mathrm{mat}(u, \mathbf{e}, \mathbf{f})$: matrice de u par rapport aux bases $\mathbf{e}$ et $\mathbf{f}$ . . . 73
I_n : matrice identité de taille $n \times n$ . . . 74

S_n : ensemble des permutations de $\{1, \ldots, n\}$ 78
$\varepsilon(\sigma)$: signature de la permutation σ 78
$\det_{\mathbf{e}}$: déterminant dans la base $\mathbf{e}$ 79
$\mathcal{L}(\mathrm{E})$: algèbre des endomorphismes de E 85
$\mathrm{mat}_{\mathbf{e}}(u)$: matrice de u dans la base $\mathbf{e}$ 86
$\det u$: déterminant de l'endomorphisme u 86
χ_u : polynôme caractéristique de u 88
$\operatorname{tr} u$, $\operatorname{tr} \mathrm{A}$: trace d'un endomorphisme u, d'une matrice A 88
χ_{A} : polynôme caractéristique de la matrice A 89
$\mathrm{M}(\mathrm{P})$: matrice compagnon du polynôme P 89
$\mathrm{A}^{\mathbb{C}}$: endomorphisme complexe associé à la matrice A 91
E_μ : sous-espace propre d'un endomorphisme 92
$\mathrm{P}(u)$: polynôme en l'endomorphisme u 99
m_u : polynôme minimal de l'endomorphisme u 104
m_{A} : polynôme minimal de la matrice A 104
$\min f(\mathrm{X})$: minimum de f sur X 111
$\max f(\mathrm{X})$: maximum de f sur X 111
$x \,.\, y$: produit scalaire de x et y 114
$\|x\|$: norme euclidienne 114
$d(x, y)$: distance entre x et y 114
$\|\mathrm{A}\|_2$: norme euclidienne de la matrice A 119
ρ_{A} : rayon spectral de la matrice A 120
$\mathrm{B}(x, r)$: boule ouverte de centre x et de rayon r 121
e^{A} : exponentielle de la matrice A 131