6. Compacité

Contenu du chapitre

6.1. Propriété de Bolzano-Weierstrass

Disons qu'un espace topologique X a la *propriété de Bolzano-Weierstrass* si toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de points de X admet (au moins) un point adhérent $x \in \mathrm{X}$: cela signifie que pour tout voisinage V de x et tout entier m, il existe un indice $n \geq m$ tel que $x_n \in \mathrm{V}$; puisque l'ensemble des indices est $\mathbb{N}$, ceci équivaut à dire que l'ensemble des indices n tels que $x_n \in \mathrm{V}$ est infini. On écrira en abrégé *propriété BW*.

Si l'ensemble X lui-même est infini, on peut formuler la propriété sous une forme encore plus classique : tout sous-ensemble infini $\mathrm{Y} \subset \mathrm{X}$ admet un *point d'accumulation*, c'est-à-dire un point $x \in \mathrm{X}$ tel que tout voisinage V de x contienne une infinité de points du sous-ensemble Y (si Y est infini, on peut trouver une suite $(y_n) \subset \mathrm{Y}$ de points deux à deux distincts, et tout point adhérent x à cette suite aura la propriété voulue).

Si X vérifie BW et si tout point de X admet une base dénombrable de voisinages, on peut alors pour tout point adhérent x de la suite (x_n), extraire une sous-suite convergente vers x. En particulier, un espace métrique (X, d) a la propriété BW si et seulement si toute suite (x_n) de points de X admet des sous-suites convergentes.

Historiquement, c'est cette propriété de Bolzano-Weierstrass qui a été dégagée la première, dans le cercle d'idées autour de la compacité ; Weierstrass l'enseignait à Berlin, avant 1870. Sur le rôle de Bolzano, mort en 1848, on pourra consulter le livre de P. Dugac, *Histoire de l'Analyse*, paru chez Vuibert en 2003. En tout cas on attribue à Bolzano d'avoir dégagé la notion qu'on appelle de nos jours *suite de Cauchy*.

Envisageons quelques conséquences faciles de la propriété BW, d'abord pour un espace topologique X arbitraire.

Si X *vérifie BW, l'intersection de toute suite décroissante* (F_n) *de fermés non vides de* X *est non vide* : on peut choisir $x_n \in \mathrm{F}_n$ puisque F_n est non vide, puis un point x adhérent à la suite (x_n), par BW ; on va voir que x est dans tous les F_n : sinon, il existerait un indice n_0 tel que x soit dans l'ouvert complémentaire $\mathrm{V} = \mathrm{F}_{n_0}^c$, et un entier $n \geq n_0$ tel que $x_n \in \mathrm{V}$, ce qui est impossible puisque $x_n \in \mathrm{F}_n \subset \mathrm{F}_{n_0}$, qui est disjoint de l'ouvert V qui contient x.

Si X *vérifie BW, toute fonction réelle continue sur* X *atteint son minimum en un point de* X. On peut toujours trouver une suite $(x_n) \subset \mathrm{X}$ telle que $(f(x_n))$ tende vers $\inf f(\mathrm{X})$, valeur $-\infty$ admise *a priori*. Les fermés $\mathrm{F}_n = \{x \in \mathrm{X} : f(x) \leq f(x_n)\}$ sont non vides et forment une suite décroissante ; en un point x de l'intersection (non vide), la fonction vérifie $f(x) \leq f(x_n)$ pour tout n, donc $f(x) = \inf f(\mathrm{X})$.

Il est clair qu'on a seulement utilisé les ensembles $\{f \leq c\}$; on dit qu'une fonction réelle f sur X est *semi-continue inférieurement* si l'ensemble $\{f \leq c\}$ est fermé pour tout c réel ; si $(f_i)_{i \in \mathrm{I}}$ est une famille de fonctions continues, bornée par un nombre M, la fonction $f = \sup_i f_i$ est une fonction réelle s.c.i. puisque

$$\{f \leq c\} = \bigcap_{i \in \mathrm{I}} \{f_i \leq c\}.$$

La preuve donnée ci-dessus pour les fonctions continues donne donc : *si* X *vérifie BW, toute fonction réelle s.c.i. sur* X *atteint son minimum en un point de* X. Mais une fonction continue f atteint aussi son *maximum* sur X, car $-f$ reste continue.

Envisageons d'autres conséquences faciles de la propriété BW, dans le cas d'un espace métrique (X, d). Tout d'abord, si x_0 est fixé dans X, la fonction continue $x \to d(x, x_0)$ atteint son maximum m sur X, ce qui montre que *tout espace métrique compact est borné* : si $d(x, x_0) \leq m$ pour tout x, le diamètre de X

$$\delta(\mathrm{X}) = \sup\{d(x, y) : x, y \in \mathrm{X}\}$$

est majoré par $2m$.

Si (X, d) *vérifie BW, il est complet.* En effet, toute suite de Cauchy (x_n) de points de X aura une sous-suite convergente vers un $x \in \mathrm{X}$, et il est facile d'en déduire que la suite de Cauchy tout entière converge alors vers x.

Si (X, d) *vérifie BW, on peut pour tout* $r > 0$ *trouver un sous-ensemble fini* $\mathrm{A} \subset \mathrm{X}$ *tel que* $\mathrm{X} = \bigcup_{a \in \mathrm{A}} \mathrm{B}(a, r)$.

Si X est vide on prétendra que $\mathrm{A} = \emptyset$ donne le résultat. Sinon, on définit le processus suivant dans X : on choisit $a_0 \in \mathrm{X}$; ensuite, tant que $\mathrm{U}_n = \bigcup_{j=0}^{n} \mathrm{B}(a_j, r)$ est différent de X on choisit $a_{n+1} \notin \mathrm{U}_n$; si ce processus peut continuer indéfiniment on aura trouvé une suite $(a_n) \subset \mathrm{X}$ telle que $d(a_m, a_n) \geq \varepsilon$ pour tous $m \neq n$; une telle suite ne peut pas avoir de sous-suite convergente, ce qui contredit notre hypothèse sur X. Il en résulte que pour tout $r > 0$, l'espace X peut être recouvert par une famille finie de boules de rayon r : pour un certain n, l'ensemble $\mathrm{A} = \{a_0, \ldots, a_n\}$ donne la solution.

Si (X, d) *vérifie BW, l'espace* X *est séparable.* Pour chaque n on peut trouver un ensemble fini $\mathrm{A}_n \subset \mathrm{X}$ tel que les boules de rayon 2^{-n} centrées aux points de A_n recouvrent X ; il est clair que l'ensemble $\mathrm{A} = \bigcup_n \mathrm{A}_n$ est dénombrable, et dense dans X.

Exercice : «packing» et recouvrement. On considère un espace métrique (X, d) et une partie $\mathrm{K} \subset \mathrm{X}$ qui vérifie BW. Pour tout $\varepsilon > 0$ désignons par $\mathrm{N}_{\mathrm{P}}(\mathrm{K}, \varepsilon)$ le max du nombre N de points $x_1, \ldots, x_{\mathrm{N}}$ de K qui sont à distances $\geq \varepsilon$, c'est-à-dire $d(x_i, x_j) \geq \varepsilon$ pour tous $i \neq j$. Notons $\mathrm{N}_{\mathrm{R}}(\mathrm{K}, \varepsilon)$ le min du nombre M tel que K puisse être recouvert par M boules ouvertes $\mathrm{B}(y_i, \varepsilon)$, $i = 1, \ldots, \mathrm{M}$. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$

$$\mathrm{N}_{\mathrm{R}}(\mathrm{K}, \varepsilon) \leq \mathrm{N}_{\mathrm{P}}(\mathrm{K}, \varepsilon) \leq \mathrm{N}_{\mathrm{R}}(\mathrm{K}, \varepsilon/2).$$

Indication. Si $\mathrm{N} = \mathrm{N}_{\mathrm{P}}(\mathrm{K}, \varepsilon)$ et si les points $x_1, \ldots, x_{\mathrm{N}}$ de K vérifient $d(x_i, x_j) \geq \varepsilon$ pour $i \neq j$, il est impossible d'ajouter un point supplémentaire vérifiant la propriété d'écartement, par la définition de N qui est maximal ; traduire cette impossibilité. Pour l'autre inégalité, si on pouvait recouvrir K par M boules ouvertes de rayon $\varepsilon/2$ avec $\mathrm{M} < \mathrm{N}$, l'une de ces boules devrait contenir deux points x_i et x_j : conclure.

On suppose maintenant que $\mathrm{X} = \mathbb{R}^n$ est muni d'une norme ; on prend pour d la distance déduite de cette norme, et pour K la boule unité B de cet espace normé. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\frac{1}{\varepsilon^n} \leq \mathrm{N}_{\mathrm{R}}(\mathrm{B}, \varepsilon) ; \quad \mathrm{N}_{\mathrm{P}}(\mathrm{B}, 2\varepsilon) \leq \frac{(1+\varepsilon)^n}{\varepsilon^n} .$$

Indications : si $\mathrm{M} = \mathrm{N}_{\mathrm{R}}(\mathrm{B}, \varepsilon)$, la boule unité B est couverte par M boules B_i de rayon ε ; si V désigne le volume de la boule unité, chaque boule B_i est de volume $\varepsilon^n\, \mathrm{V}$. Pour l'autre relation, soit N le cardinal d'une famille maximale de points (x_i) de B, dont les distances mutuelles sont $\geq 2\,\varepsilon$; alors les N boules $\mathrm{B}_i = \mathrm{B}(x_i, \varepsilon)$ sont disjointes et contenues dans la boule $\mathrm{B}(0, 1+\varepsilon)$.

Exemple 6.1.1 : un théorème de Riesz. *Si* E *est un espace vectoriel normé dont la boule unité peut être recouverte par un nombre fini de boules de rayon* $r < 1$, *alors* E *est de dimension finie.*

En particulier, si la boule unité fermée de E est compacte, l'espace E est de dimension finie (ce théorème de F. Riesz sert à dire que certains sous-espaces propres sont de dimension finie ; on y reviendra).

On peut toujours regarder l'espace E comme un espace vectoriel réel (au cas où il serait complexe). Supposons que A soit un ensemble fini tel que $\mathrm{B}_{\mathrm{E}} \subset \bigcup_{a \in \mathrm{A}} \mathrm{B}(a, r)$, et désignons par N le cardinal de A. On va montrer que la dimension de E est finie, précisément

$$\dim \mathrm{E} \leq \mathrm{D} := \frac{\ln \mathrm{N}}{\ln(1/r)}.$$

Dans le cas contraire, on peut trouver un $\mathbb{R}$-sous-espace Z de dimension finie $d > \mathrm{D}$ de E, et on peut supposer que $\mathrm{A} \subset \mathrm{Z}$, en agrandissant Z si nécessaire ; la boule unité de l'espace normé Z est couverte par N boules de rayon $r < 1$ centrées en des points de A, qui sont des points de Z ; on oublie désormais l'espace E et on raisonne dans Z. On va trouver une majoration de la dimension de Z, qui contredira notre hypothèse de « cas contraire ».

Munissons Z d'une mesure μ de Lebesgue en choisissant un isomorphisme de Z avec $\mathbb{R}^d$; les propriétés essentielles de cette mesure μ sont l'invariance par translation et le fait que $\mu(\lambda B) = \lambda^d \mu(B)$ pour tout $\lambda > 0$ et tout borélien $B \subset Z$ (si on réfléchit bien on peut voir que la deuxième propriété résulte de la première), et la finitude de μ sur les compacts de Z. Posons $V = \mu(B(0, 1))$, le volume de la boule unité. Il est clair que V est non nul (sinon μ serait nulle). Pour chaque $a \in A$, on a $\mu(B(a, r)) = r^d\, V$ par les propriétés de μ. Puisque les $B(a, r)$ recouvrent $B(0, 1)$ on a

$$V = \mu(B(0,1)) \le \sum_{a \in A} \mu(B(a,r)) = N\, r^d\, V$$

ce qui implique $Nr^d \ge 1$, donc $\ln N - d \ln(1/r) \ge 0$ et $d \le D$, contradiction.

6.1.a. *Propriété de recouvrement de Borel-Lebesgue*

Théorème. *Pour toute famille d'ouverts* $(U_i)_{i \in I}$ *qui recouvre un intervalle fermé borné* $[a, b]$*, on peut trouver une sous-famille finie de ces ouverts qui recouvre déjà l'intervalle.*

Cette propriété (limitée à une famille *dénombrable d'intervalles* ouverts) apparaît semble-t-il pour la première fois chez Émile Borel (thèse, 1894), comme un lemme servant à montrer une propriété du type théorie de la mesure : *si une suite* (I_n) *d'intervalles est telle que la somme de la série des longueurs est* < 1*, elle ne peut pas recouvrir l'intervalle* $[0, 1]$; en 1898, Borel formulera des axiomes pour la théorie de la mesure, pratiquement identiques à ceux que nous utilisons. La version moderne de la preuve de la propriété de recouvrement est sans doute due à Lebesgue (et d'autres : F. Riesz par exemple). Cette version de Lebesgue n'est qu'une transcription de l'idée de Borel, que Borel avait d'abord exprimée en terme de récurrence transfinie, et que Lebesgue a transcrite dans le langage plus consensuel de la borne supérieure.

Rappelons brièvement le principe de cette preuve : on considère la borne supérieure c de l'ensemble C des $x \in [a, b]$ tels que $[a, x]$ puisse être recouvert par un nombre fini des ouverts de la famille ; on montre que $c > a$, puis que $c \in C$ et que $c < b$ est impossible. On a donc $b = c \in C$, le résultat voulu.

Proposition 6.1.2. *Tout espace métrique* (X, d) *avec BW possède la propriété de recouvrement de Borel-Lebesgue.*

On commence par le lemme suivant.

Lemme 6.1.3 de recouvrement uniforme. *Pour tout recouvrement ouvert* $(U_i)_{i \in I}$ *d'un espace métrique* (X, d) *avec BW, il existe* $\rho > 0$ *tel que pour tout* $x \in X$*, la boule ouverte* $B(x, \rho)$ *soit contenue dans l'un des ouverts du recouvrement.*

Soit $(U_i)_{i \in I}$ un recouvrement ouvert de X ; si $U_i = X$ pour un indice i, le lemme est évident. On supposera donc $U_i \ne X$ pour tout i ; pour chaque ouvert U_i du recouvrement, on considère la fonction réelle continue $\varphi_i(x) = \mathrm{dist}(x, U_i^c)$. Puisque $U_i \ne X$, toutes ces fonctions sont bornées par le diamètre D (fini) de l'espace métrique (X, d). Donc

$\varphi = \sup_i \varphi_i$ est une fonction réelle s.c.i. sur X ; la propriété BW implique que φ atteint son min sur X, qui est > 0 par recouvrement (si le minimum est atteint en x_0, il existe U_{i_0} qui contient x_0, et $\varphi(x_0) \geq \varphi_{i_0}(x_0) > 0$ parce que U_{i_0} est ouvert). Il existe donc un $r > 0$ tel que $\varphi(x) \geq r$ pour tout $x \in \mathrm{X}$. Si on choisit $0 < \rho < r$, la définition de φ comme sup implique que pour tout $x \in \mathrm{X}$, il existe un indice $i_0 \in \mathrm{I}$ tel que $\varphi_{i_0}(x) > \rho$, ce qui signifie que la boule ouverte $\mathrm{B}(x, \rho)$ est contenue dans l'ouvert U_{i_0} du recouvrement.

Terminons la démonstration de la proposition 6.1.2 : soient $(\mathrm{U}_i)_{i \in \mathrm{I}}$ un recouvrement ouvert de X et $\rho > 0$ donné par le lemme ; il résulte de BW qu'on peut trouver un nombre fini de points x_k tels que $\mathrm{X} = \bigcup_{k=1}^{\mathrm{N}} \mathrm{B}(x_k, \rho)$; pour chaque indice k il existe d'après le lemme précédent un ouvert U_{i_k} du recouvrement tel que $\mathrm{B}(x_k, \rho) \subset \mathrm{U}_{i_k}$; alors cette famille finie $(\mathrm{U}_{i_k})_{k=1}^{\mathrm{N}}$ extraite du recouvrement contient les boules qui recouvrent X, donc $\mathrm{X} = \bigcup_{i=1}^{\mathrm{N}} \mathrm{U}_{i_k}$ (la démonstration précédente est encore écrite par Borel, vers 1905, mais il dit la tenir de R. Baire ; Borel l'a écrite dans le cas d'un intervalle, mais l'extension à un espace métrique est évidente).

6.1.b. *La notion de compacité*

Définition. On dit que l'espace topologique X est *compact* s'il est séparé et s'il a la propriété de sous-recouvrement fini : pour tout recouvrement $(\mathrm{U}_i)_{i \in \mathrm{I}}$ de X par des ouverts, il existe un sous-ensemble fini $\mathrm{J} \subset \mathrm{I}$ tel que $\mathrm{X} = \bigcup_{j \in \mathrm{J}} \mathrm{U}_j$.

Ceci équivaut à dire que X est séparé et qu'il a la *propriété d'intersection finie* pour les fermés, c'est-à-dire que toute famille $\mathcal{F}$ de fermés de X dont toutes les sous-familles finies ont une intersection non vide, a elle-même une intersection non vide. Ceci équivaut encore à dire que X est séparé et qu'on a intersection non vide pour les ordonnés filtrants décroissants de fermés non vides, c'est-à-dire les familles $(\mathrm{F}_i)_{i \in \mathrm{I}}$ de fermés non vides telles que pour tous $i, j \in \mathrm{I}$ il existe un indice $k \in \mathrm{I}$ tel que $\mathrm{F}_k \subset \mathrm{F}_i \cap \mathrm{F}_j$.

Proposition. *Si* K *est un espace topologique métrisable, il est compact si et seulement s'il a la propriété de Bolzano-Weierstrass.*

Démonstration. On a déjà vu le sens (Bolzano implique compact). Inversement, supposons (K, d) métrique compact et soit (x_n) une suite dans K ; pour tout $n \geq 0$ on pose $\mathrm{E}_n = \{x_n, x_{n+1}, \ldots\}$ et $\mathrm{F}_n = \overline{\mathrm{E}_n}$; la suite (F_n) est une suite décroissante de fermés non vides ; posons $\mathrm{Z} = \bigcap_n \mathrm{F}_n$, qui est non vide par compacité, et soit z un point quelconque de Z ; on voit que z est un point adhérent à la suite (x_n) : soit V un voisinage de z ; montrons que pour tout N, il existe $n \geq \mathrm{N}$ tel que $x_n \in \mathrm{V}$: puisque $z \in \mathrm{F}_\mathrm{N}$, le voisinage V doit rencontrer l'ensemble E_N dont F_N est l'adhérence, ce qui signifie précisément que V contient un point x_n avec $n \geq \mathrm{N}$.

Remarque. On peut exprimer le cas général de la compacité dans l'esprit de BW si on utilise des *suites généralisées* : un ensemble ordonné I est dit *filtrant* si pour tous $i, j \in \mathrm{I}$ il existe $k \in \mathrm{I}$ qui est plus grand que les deux, $i \leq k$ **et** $j \leq k$. On dira que $x \in \mathrm{X}$ est *adhérent à une suite généralisée* $(x_i)_{i \in \mathrm{I}}$ si pour tout voisinage V de x et tout $i \in \mathrm{I}$, il existe $j \in \mathrm{I}$ tel que $j \geq i$ et $x_j \in \mathrm{V}$. L'espace topologique séparé X est compact si et seulement s'il vérifie BW généralisé : pour tout ensemble ordonné filtrant I, toute suite généralisée $(x_i)_{i \in \mathrm{I}}$ de points de X admet un point adhérent dans X.

Rappel. Un sous-ensemble d'un compact X est compact si et seulement si c'est un fermé. Toute image continue d'un compact est compacte. Si f est une bijection continue d'un compact X sur un espace topologique séparé Y, c'est un homéomorphisme.

Pour un espace métrique, la fonction distance nous fournit gratuitement un ensemble riche de fonctions continues. Dans le cas d'un espace topologique compact non métrique, on a besoin de savoir construire des fonctions continues sur K (lemme d'Urysohn) ; on admettra le lemme qui suit.

Lemme 6.1.4 (Urysohn). *Si* F_0 *et* F_1 *sont deux fermés disjoints dans un espace topologique compact* K, *il existe une fonction continue* f *de* K *dans* $[0,1]$, *telle que* $f = 0$ *sur* F_0 *et* $f = 1$ *sur* F_1.

Dans le cas métrique, il suffit de poser

$$\forall x \in \mathrm{K}, \quad f(x) = \frac{\mathrm{dist}(x, \mathrm{F}_0)}{\mathrm{dist}(x, \mathrm{F}_0) + \mathrm{dist}(x, \mathrm{F}_1)},$$

et la compacité n'est pas utilisée.

6.1.c. *Métrique compact et métrique complet*

Rappelons qu'une partie A d'un espace topologique séparé X est dite *relativement compacte* dans X si son adhérence $\overline{\mathrm{A}}$ dans X est compacte.

Définition. Un espace métrique X est dit *précompact* si, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un recouvrement fini de X par des parties de diamètre $\leq \varepsilon$.

Une partie A de l'espace métrique X est précompacte si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un recouvrement fini de A par des boules de X de rayon ε (les centres peuvent être dans A ou pas ; si on peut recouvrir A avec N boules de rayon $\varepsilon/2$ centrées en des points de X, on pourra recouvrir A avec N boules de rayon ε centrées en des points de A).

Proposition 6.1.5. *Dans un espace métrique complet* (X, d), *une partie* A *a une adhérence compacte si et seulement si elle est précompacte.*

Un espace métrique est donc compact si et seulement s'il est précompact et complet.

Démonstration. Si l'adhérence de A est compacte, on a vu qu'on peut la recouvrir par un nombre fini de boules de rayon $< \varepsilon$, qui couvrent *a fortiori* l'ensemble A ; on va esquisser la démonstration de l'autre direction. Supposons A précompact et soit (x_n) une suite dans $\overline{\mathrm{A}}$; on va montrer d'abord que pour tout $\varepsilon > 0$ on peut trouver un ensemble infini $\mathrm{M} \subset \mathbb{N}$ tel que $\|x_m - x_{m'}\| < \varepsilon$ pour tous m, m' dans M. Par définition de l'adhérence on trouve d'abord $y_n \in \mathrm{A}$ tels que $d(x_n, y_n) < \varepsilon/4$. Puisque A peut être recouvert par une famille finie de boules de rayon $\varepsilon/4$, on peut trouver un sous-ensemble infini $\mathrm{M} \subset \mathbb{N}$ tels que les y_m pour $m \in \mathrm{M}$ tombent dans la même boule $\mathrm{B}(x, \varepsilon/4)$. Pour $m, m' \in \mathrm{M}$ on aura $d(y_m, y_{m'}) < \varepsilon/2$, donc $d(x_m, x_{m'}) < \varepsilon$.

On appliquera ce premier pas successivement avec $\varepsilon = 1/2, 1/4, \ldots, 2^{-k}$, etc... en prenant à chaque fois un sous-ensemble infini M_{k+1} du précédent M_k, puis on prendra une sous-suite diagonale $m_1 < m_2 < \ldots < m_k < \ldots$ d'indices définie ainsi : $m_1 = \min \mathrm{M}_1$ est le plus petit élément de M_1 ; pour tout $k \geq 1$, m_{k+1} est le plus petit élément de M_{k+1}

qui soit $> m_k$. Alors la sous-suite $(x_{m_k})_k$ est de Cauchy, donc convergente dans l'espace *complet* E. On conclut que $\overline{\mathrm{A}}$ est compact puisqu'il vérifie BW.

Revenons sur le caractère Cauchy de la sous-suite $(x_{m_k})_k$; pour tout k et tout entier $\ell \ge k$, on a $m_\ell \in \mathrm{M}_\ell \subset \mathrm{M}_k$, donc m_k et m_ℓ sont deux éléments de l'ensemble M_k, qui a été choisi de façon que

$$d(x_{m_k}, x_{m_\ell}) < 2^{-k}.$$

Exercice. Montrer que tout espace métrique complet non vide et sans point isolé contient un sous-ensemble homéomorphe à l'ensemble triadique de Cantor.

Exercice : régularité des mesures sur la tribu borélienne d'un polonais. Soit μ une probabilité sur la tribu borélienne d'un *espace polonais* X, c'est-à-dire un espace topologique X séparable dont la topologie provient d'une distance qui rend X complet ; montrer que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un compact $\mathrm{K} \subset \mathrm{X}$ tel que $\mu(\mathrm{K}) > 1 - \varepsilon$.

Soit d une distance qui définit la topologie de X et le rend complet ; on montre d'abord que pour tous $r > 0$ et $\alpha > 0$, il existe un fermé F de X qui est contenu dans une réunion finie de boules de rayon r, et qui est tel que $\mu(\mathrm{F}) > 1 - \alpha$.

Soit (x_n) une suite dense dans X ; posons $\mathrm{A}_n = \bigcup_{i=0}^n \overline{\mathrm{B}(x_i, r/2)}$. La suite (A_n) est croissante et recouvre X (parce que la suite (x_n) est dense) donc il existe n_0 tel que $\mu(\mathrm{A}_{n_0}) > 1 - \alpha$. Alors $\mathrm{F} = \mathrm{A}_{n_0}$ convient.

Pour conclure on applique ce qui précède avec $r = 2^{-k}$ et $\alpha = \varepsilon/2^{k+1}$, pour tout $k \ge 0$. On obtient ainsi une suite (F_k) de fermés telle que $\mu(\mathrm{F}_k) > 1 - 2^{-k-1}\varepsilon$ pour tout k, ce qui implique que si $\mathrm{K} = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} \mathrm{F}_k$, on aura $\mu(\mathrm{K}) > 1 - \varepsilon$. Par ailleurs, on voit que K est fermé et précompact dans l'espace complet X, donc K est compact.

6.2. Compacité dans le cas vectoriel normé

Dans le cas d'un sous-ensemble A d'un espace de Banach E, il est agréable de retenir un critère (qui sera noté **C**) qui utilise le caractère vectoriel de l'espace ambiant : pour que l'adhérence de A soit compacte dans l'espace de Banach E, il faut et il suffit que A vérifie les deux conditions suivantes :

C1 – l'ensemble A est borné ;

C2 – pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un sous-espace vectoriel $\mathrm{L}_\varepsilon \subset \mathrm{E}$ *de dimension finie* tel que tout point de A soit à une distance $\le \varepsilon$ de L_ε :

$$\forall x \in \mathrm{A}, \quad \mathrm{dist}(x, \mathrm{L}_\varepsilon) \le \varepsilon.$$

Il est évident que tout ensemble précompact vérifie les deux conditions précédentes. Inversement, supposons que $\mathrm{A} \subset \mathrm{E}$ soit borné par M et vérifie **C2**. Donnons $\varepsilon > 0$ et choisissons L de dimension finie qui vérifie **C2** avec la valeur $\varepsilon/2$. Considérons par ailleurs le compact

$$\mathrm{K} = \{y \in \mathrm{L} : \|y\| \le \mathrm{M} + \varepsilon\}$$

(fermé borné en dimension finie). Si on recouvre le compact K par un nombre fini de boules $\mathrm{B}(x_i, \varepsilon/2)$, les boules $\mathrm{B}(x_i, \varepsilon)$ recouvriront A, ce qui prouve la précompacité de l'ensemble A.

Exemple 6.2.1 : un cas particulier du théorème d'Ascoli. *L'ensemble* A *des fonctions* f *réelles sur* $[0,1]$ *telles que* $|f(y)-f(x)| \le |y-x|$ *pour tous* $x,y \in [0,1]$ *et* $f(0)=0$ *est un compact de* $\mathrm{C}([0,1])$.

Il est facile de voir que A est fermé pour la norme uniforme, et borné parce que $|f(x)| = |f(x)-f(0)| \le |x| \le 1$ pour tout $x \in [0,1]$. Pour tout entier $\mathrm{N} \ge 1$ désignons par $\mathrm{L_N}$ l'espace vectoriel des fonctions continues sur $[0,1]$, nulles en 0 et affines sur chaque intervalle $[(j-1)/\mathrm{N}, j/\mathrm{N}]$, $j=1,\ldots,\mathrm{N}$. On voit facilement que $\dim \mathrm{L_N} = \mathrm{N}$.

Si $f \in \mathrm{A}$ désignons par g l'unique élément de $\mathrm{L_N}$ tel que $g(j/\mathrm{N}) = f(j/\mathrm{N})$ pour tout $j=0,\ldots,\mathrm{N}$. Sur chaque intervalle $[(j-1)/\mathrm{N}, j/\mathrm{N}]$ la pente p_j de la fonction g est égale à

$$p_j = \frac{f(j/\mathrm{N}) - f((j-1)/\mathrm{N})}{1/\mathrm{N}}$$

qui vérifie donc $|p_j| \le 1$. On en déduit facilement que g est 1-lipschitzienne. On vérifie ensuite que $\|g-f\| \le 1/\mathrm{N}$: supposons que $x \in [(j-1)/\mathrm{N}, j/\mathrm{N}]$ avec par exemple $|x-j/\mathrm{N}| \le 1/(2\mathrm{N})$; on a $f(j/\mathrm{N}) = g(j/\mathrm{N})$, $|f(x)-f(j/\mathrm{N})| \le |x-j/\mathrm{N}|$, $|g(x)-g(j/\mathrm{N})| \le |x-j/\mathrm{N}|$, d'où le résultat.

On a ainsi montré que pour tout $\varepsilon > 0$, on peut trouver un sous-espace de dimension finie L de $\mathrm{C}([0,1])$ tel que $d(a,\mathrm{L}) < \varepsilon$ pour tout $a \in \mathrm{A}$: il suffit d'appliquer ce qui précède avec un entier N tel que $1/\mathrm{N} < \varepsilon$.

Remarque. Pour un espace métrique complet (X, d), la non-compacité équivaut à la propriété suivante : *il existe* $\delta > 0$ *et une suite infinie* δ*-écartée dans* X, c'est-à-dire une suite $(x_n) \subset \mathrm{X}$ telle que $d(x_m, x_n) \ge \delta$ pour tous $m \ne n$.

En effet, la propriété contraire conduit à la précompacité de X : pour chaque $\delta > 0$, le processus qui consiste à choisir dans X un point $x_n \notin \bigcup_{k=0}^{n-1} \mathrm{B}(x_k, \delta)$ doit nécessairement s'arrêter après un nombre fini d'étapes, c'est-à-dire que X peut être recouvert par un nombre fini de boules de rayon δ, et ce pour tout $\delta > 0$.

Exemples de non-compacité.

1 : la boule unité d'un espace de Hilbert de dimension infinie ; dans un tel espace de Hilbert H on peut trouver une suite orthonormée $(e_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathrm{B_H}$; pour cette suite on aura $d(e_m, e_n) = \sqrt{2}$ quand $m \ne n$.

2 : la famille $(\tau_t f)_{t \in \mathbb{R}^d}$ des translatées d'une fonction $f \in \mathrm{L}_p(\mathbb{R}^d)$ non nulle, n'est pas relativement compacte dans $\mathrm{L}_p(\mathbb{R}^d)$, $1 \le p < +\infty$: on peut trouver un nombre $\mathrm{R} > 0$ tel que $\|f - \mathbf{1}_{\mathrm{B}(0,\mathrm{R})} f\|_p < \|f\|_p/4$; si on pose $f_0 = \mathbf{1}_{\mathrm{B}(0,\mathrm{R})}\, f$, si $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^d$ est un vecteur de norme 1 et si on pose $\mathbf{v}_k = 2k\mathrm{R}\,\mathbf{v}$ pour tout $k \ge 0$, on voit que toutes les translatées $f_k = \tau_{\mathbf{v}_k} f_0$ de f_0, pour $k \in \mathbb{N}$, sont portées par des ensembles deux à deux disjoints, à savoir les boules $\mathrm{B}_k = \mathrm{B}(\mathbf{v}_k, \mathrm{R})$; il en résulte que $\|f_k - f_\ell\|_p = 2^{1/p}\, \|f_0\|_p \ge \|f_0\|_p$ quand $k \ne \ell$. Ensuite,

$$\|\tau_{\mathbf{v}_k} f - \tau_{\mathbf{v}_\ell} f\|_p \ge \|f_k - f_\ell\|_p - \|\tau_{\mathbf{v}_k} f - \tau_{\mathbf{v}_k} f_0\|_p - \|\tau_{\mathbf{v}_\ell} f - \tau_{\mathbf{v}_\ell} f_0\|_p \ge$$

$$\frac{3}{4}\, \|f\|_p - 2\, \|f - f_0\|_p \ge \frac{1}{4}\, \|f\|_p = \delta > 0.$$

Définition : opérateurs compacts. On dit qu'une application linéaire continue T d'un espace de Banach E dans un espace de Banach F est *compacte* si l'adhérence de l'image $\mathrm{T}(\mathrm{B_E})$ de la boule unité $\mathrm{B_E}$ de l'espace E est compacte dans F.

On montre que l'ensemble $\mathcal{K}(\mathrm{E},\mathrm{F})$ des opérateurs compacts de E dans F est un sous-espace vectoriel fermé de $\mathcal{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$, et qui a de plus la propriété d'idéal. Le caractère vectoriel et fermé se montre facilement avec le critère **C** de compacité dans les Banach.

Exemples.

– Si T est de rang fini, T est compact ; si T est limite en norme d'opérateur d'une suite (T_n) d'opérateurs de rang fini, T est compact.

– Si $\mathrm{T} \in \mathcal{L}(\ell_p)$ est diagonal, défini par une suite tendant vers 0, alors T est compact : soit $\alpha = (a_n)_{n\geq 0}$ une suite de scalaires qui tend vers 0 ; l'opérateur diagonal T_α associe à chaque $x = (x_n)_{n\geq 0} \in \ell_p$ l'élément $\mathrm{T}_\alpha x$ de ℓ_p défini par

$$\forall n \geq 0, \quad (\mathrm{T}_\alpha x)_n = a_n x_n.$$

– L'opérateur P qui associe à chaque fonction continue f sur $[0,1]$ sa primitive nulle en 0 est un endomorphisme compact de $\mathrm{C}([0,1])$ (utiliser l'exemple 6.2.1).

6.2.a. *Partition de l'unité sur un espace topologique* X

C'est une famille $(\varphi_i)_{i\in\mathrm{I}}$ de fonctions réelles continues sur X, où I est un ensemble fini, telle que $0 \leq \varphi_i \leq 1$ pour chaque $i \in \mathrm{I}$ et $\sum_{i\in\mathrm{I}} \varphi_i(x) = 1$ pour tout $x \in \mathrm{X}$. On a parfois besoin d'une notion plus générale où la famille $(\varphi_i)_{i\in\mathrm{I}}$ est infinie ; on demande alors que la famille soit *localement finie*, c'est-à-dire que tout point $x \in \mathrm{X}$ possède un voisinage dans lequel toutes les fonctions sauf un nombre fini sont nulles. Avec cette condition il est évident que $\sum_{i\in\mathrm{I}} a_i\varphi_i$ est continue sur X, pour toutes les valeurs scalaires (ou vectorielles) $(a_i)_{i\in\mathrm{I}}$. On demande toujours que $\sum_{i\in\mathrm{I}} \varphi_i = 1$.

Sur un métrique compact (K, d) il est très facile de fabriquer une partition de l'unité, *subordonnée* à un recouvrement ouvert fini $(\mathrm{U}_i)_{i=1}^n$ donné de K, ce qui signifiera pour nous que l'on a une partition de l'unité $(\varphi_i)_{i=1}^n$ telle que $\varphi_i = 0$ en dehors de U_i pour chaque indice i (on peut demander plus, à savoir que le *support* de φ_i soit contenu dans l'ouvert U_i). On pose d'abord $\psi_i(x) = \mathrm{dist}(x, \mathrm{U}_i^c)$; la fonction ψ_i est continue ≥ 0, nulle hors de U_i, $\psi_i > 0$ sur U_i et $\psi = \sum_{i=1}^n \psi_i > 0$ parce que (U_i) est un recouvrement de K. On pose finalement $\varphi_i = \psi_i/\psi$.

Soit f une fonction continue sur un espace métrique compact (K, d) ; on rappelle que le *module de continuité* ω_f de la fonction f est défini par

$$\forall t > 0, \quad \omega_f(t) = \sup\{|f(x) - f(y)| : x, y \in \mathrm{K},\ d(x,y) \leq t\}.$$

La continuité uniforme de la fonction f continue sur K s'exprime exactement par le fait que $\lim_{t\to 0+} \omega_f(t) = 0$.

Proposition 6.2.2. *Soient* (K, d) *un espace métrique compact et* $\varphi_1, \ldots, \varphi_{\mathrm{N}}$ *une partition de l'unité subordonnée à un recouvrement fini de* K *par des boules ouvertes* $\mathrm{U}_i = \mathrm{B}(x_i, \delta)$*, où* $\delta > 0$ *et* $i = 1, \ldots, \mathrm{N}$ *; pour toute fonction continue* f *sur* K*, on a dans l'espace de Banach* C(K)

$$\mathrm{dist}(f, \mathrm{V}_{\mathrm{N}}) \le \omega_f(\delta)$$

où $\mathrm{V}_{\mathrm{N}} = \mathrm{Vect}(\varphi_1, \ldots, \varphi_{\mathrm{N}})$.

Démonstration. Considérons les fonctions $\varphi_1, \ldots, \varphi_{\mathrm{N}}$ données par l'énoncé et posons

$$g = \sum_{i=1}^{\mathrm{N}} f(x_i)\, \varphi_i \in \mathrm{V}_{\mathrm{N}}. \tag{1}$$

On a, puisque $\sum_{i=1}^{\mathrm{N}} \varphi_i(x) = 1$, l'égalité

$$f(x) - g(x) = \sum_{i=1}^{\mathrm{N}} (f(x) - f(x_i))\, \varphi_i(x).$$

Considérons un terme $t_i = (f(x) - f(x_i))\, \varphi_i(x)$ de la somme précédente ; si ce terme t_i est non nul, c'est que $\varphi_i(x) \ne 0$, donc $x \in \mathrm{U}_i = \mathrm{B}(x_i, \delta)$, donc $d(x, x_i) < \delta$ et $|f(x) - f(x_i)| \le \omega_f(\delta)$; ainsi, on a toujours $|t_i| \le \omega_f(\delta)\, \varphi_i(x)$, par conséquent

$$|f(x) - g(x)| \le \sum_{i=1}^{\mathrm{N}} |f(x) - f(x_i)|\, \varphi_i(x) \le \sum_{i=1}^{\mathrm{N}} \omega_f(\delta)\, \varphi_i(x) = \omega_f(\delta).$$

On a bien obtenu que $\|f - g\| \le \omega_f(\delta)$, donc $\mathrm{dist}(f, \mathrm{V}_{\mathrm{N}}) \le \omega_f(\delta)$.

Exemple. Considérons la « fonction triangle » φ, paire sur $\mathbb{R}$, telle que $\varphi(t) = 1 - t$ pour $0 \le t \le 1$ et $\varphi(t) = 0$ si $t > 1$, ce qui s'écrit encore

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \varphi(t) = \max(1 - |t|, 0).$$

Pour chaque entier $\mathrm{N} \ge 1$, considérons les $\mathrm{N} + 1$ fonctions $\varphi_j^{(\mathrm{N})}$ définies sur $[0, 1]$ par

$$\forall t \in [0, 1], \quad \varphi_j^{(\mathrm{N})}(t) = \varphi(\mathrm{N}t - j), \quad j = 0, \ldots, \mathrm{N} ;$$

ces fonctions donnent une partition de l'unité sur le compact $[0, 1]$; l'espace vectoriel $\mathrm{V}_{\mathrm{N}+1}$ qu'elles engendrent est l'espace des fonctions affines par morceaux, affines sur chaque intervalle $[j/\mathrm{N}, (j + 1)/\mathrm{N}]$, pour $j = 0, \ldots, \mathrm{N} - 1$; le passage d'une fonction continue f sur $[0, 1]$ à la fonction $g \in \mathrm{V}_{\mathrm{N}+1}$ de la proposition précédente est le passage de f à la fonction affine par morceaux g telle que $g(j/\mathrm{N}) = f(j/\mathrm{N})$ pour $j = 0, \ldots, \mathrm{N}$ (comparer à l'exemple 6.2.1).

Corollaire. *Lorsque* (K, d) *est un compact métrique, l'espace* C(K) *est séparable.*

Pour chaque valeur $\delta = 2^{-k}$, $k \ge 0$ on trouve un sous-espace vectoriel de dimension finie $\mathrm{V}_k \subset \mathrm{C}(\mathrm{K})$ tel que $\mathrm{dist}(f, \mathrm{V}_k) \le \omega_f(2^{-k})$, pour toute $f \in \mathrm{C}(\mathrm{K})$; il est alors clair que l'ensemble $\mathrm{W} = \bigcup_k \mathrm{V}_k$ est dense dans C(K) : en effet,

$$\mathrm{dist}(f, \mathrm{W}) \le \mathrm{dist}(f, \mathrm{V}_j)$$

pour tout j, donc $\mathrm{dist}(f, \mathrm{W}) \le \lim_j \omega_f(2^{-j}) = 0$; de plus ce sous-ensemble dense W est séparable, comme réunion dénombrable de sous-ensembles séparables, donc C(K) lui-même est séparable.

Remarque. Si K est un espace topologique compact, l'espace de Banach C(K) est séparable *si et seulement si* K est métrisable.

En effet, si (f_n) est une suite dense dans la boule unité B(C(K)), on posera

$$\forall x, y \in \mathrm{K}, \quad d(x, y) = \sum_{n \geq 0} 2^{-n} |f_n(x) - f_n(y)| \,;$$

on montrera que d est une distance sur K (il faut savoir construire des fonctions continues sur K, pour montrer que $d(x, y) \neq 0$ quand $x \neq y$: lemme d'Urysohn), et on verra que d définit la topologie de K.

6.2.b. *Théorème d'Ascoli*

Commençons par considérer un espace topologique compact K arbitraire.

Définition. On dit que l'ensemble de fonctions $\mathrm{A} \subset \mathrm{C(K)}$ est *équicontinu au point* $x \in \mathrm{K}$ si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un voisinage V de x dans K tel que

$$\forall y \in \mathrm{V},\ \forall f \in \mathrm{A}, \quad |f(y) - f(x)| < \varepsilon.$$

On dit que A est *équicontinu* (tout court) s'il est équicontinu en tout point x de K.

Si (K, d) est un espace métrique compact, l'ensemble $\mathrm{A} \subset \mathrm{C(K)}$ est équicontinu au point $x \in \mathrm{K}$ si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall y \in \mathrm{K},\ \forall f \in \mathrm{A}, \quad \big(d(y, x) < \delta \Rightarrow |f(y) - f(x)| < \varepsilon\big).$$

Dans le cas métrique, on dit que A est *uniformément équicontinu* si on peut trouver un δ qui ne dépend pas de x,

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ \forall x, y \in \mathrm{K},\ \forall f \in \mathrm{A}, \quad \big(d(y, x) < \delta \Rightarrow |f(y) - f(x)| < \varepsilon\big).$$

Exercice 6.2.3. Montrer, lorsque (K, d) est métrique compact, que l'équicontinuité d'un ensemble de fonctions $\mathrm{A} \subset \mathrm{C(K)}$ implique l'équicontinuité uniforme de A (comme on montre qu'une fonction continue sur le compact K est uniformément continue).

Indication. Pour tout $x \in \mathrm{K}$ l'équicontinuité de A donne un ouvert U_x de K, contenant x et tel que $|f(y) - f(x)| < \varepsilon$ pour toute $f \in \mathrm{A}$ et tout $y \in \mathrm{U}_x$; on applique la propriété de recouvrement uniforme du lemme 6.1.3 : il existe $r > 0$ tel que toute boule $\mathrm{B}(x, r)$ soit contenue dans l'un des ouverts U_x.

Dans la pratique, on voit en général directement que l'ensemble à étudier est *uniformément* équicontinu.

Remarque. Soit A un sous-ensemble de C(K), et introduisons l'ensemble Y des fonctions de A dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, muni de la distance

$$\mathrm{D}(\varphi_1, \varphi_2) = \min\big(1, \sup(|\varphi_1(f) - \varphi_2(f)| : f \in \mathrm{A})\big) \,;$$

pour chaque $x \in \mathrm{K}$, introduisons $\varphi_x \in \mathrm{Y}$ en posant $\varphi_x(f) = f(x)$ pour toute $f \in \mathrm{A}$; dire que A est équicontinu équivaut à dire que l'application $x \to \varphi_x$ est continue de K dans l'espace métrique Y. C'est une autre façon de résoudre l'exercice qui précède.

Théorème 6.2.4 (Ascoli). *Soit* K *un espace topologique compact ; un ensemble* A *de fonctions continues sur* K *est relativement compact dans* C(K) *si et seulement si* A *est* **borné** *dans* C(K) *et équicontinu.*

Démonstration. Le sens qui va de compact à l'équicontinuité est facile et laissé au lecteur. Le sens le plus intéressant est celui qui part d'un ensemble de fonctions $\mathrm{A} \subset \mathrm{C(K)}$, borné et équicontinu, et conclut que A est relativement compact dans C(K).

On va d'abord montrer le cas métrique. D'après le résultat de l'exercice 6.2.3, on peut supposer que A est uniformément équicontinu. On va utiliser le critère de précompacité **C**, qui est bien adapté au cas vectoriel. On sait déjà que A est borné, il reste à montrer la propriété d'approximation par des sous-espaces vectoriels de dimension finie. Soit $\varepsilon > 0$; on peut trouver $\delta > 0$ tel que $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ pour toute $f \in \mathrm{A}$ et tous $x, y \in \mathrm{K}$ tels que $d(x, y) \le \delta$. À l'évidence, cette propriété signifie que

$$\forall f \in \mathrm{A}, \quad \omega_f(\delta) \le \varepsilon,$$

et la proposition 6.2.2 nous donne $\mathrm{dist}(f, \mathrm{V_N}) \le \omega_f(\delta) \le \varepsilon$, où $\mathrm{V_N}$ est l'espace de dimension finie engendré par les fonctions $\varphi_1, \ldots, \varphi_\mathrm{N}$ d'une partition de l'unité subordonnée à un recouvrement de K par des boules de rayon δ, en nombre N.

Dans le cas d'un compact arbitraire, on utilise la conséquence suivante du lemme d'Urysohn 6.1.4 : pour tout point $x \in \mathrm{K}$ et tout ouvert V contenant x, il existe une fonction réelle continue $\psi \ge 0$ sur K telle que $\psi(x) > 0$ et $\psi = 0$ hors de V. Étant donné $\varepsilon > 0$ on trouvera pour tout $x \in \mathrm{K}$ une fonction continue $\psi_x \ge 0$, telle que l'ouvert $\mathrm{U}_x = \{\psi_x > 0\}$ contienne x et soit assez petit pour que $|f(y) - f(x)| < \varepsilon$ pour tout $y \in \mathrm{U}_x$ et $f \in \mathrm{A}$. Par compacité on passe à un recouvrement fini $\mathrm{U}_{x_1}, \ldots, \mathrm{U}_{x_\mathrm{N}}$, on construit une partition de l'unité $\varphi_1, \ldots, \varphi_\mathrm{N}$ à partir des ψ_{x_j} : on pose $\varphi_j = \psi_{x_j}/\psi$, où $\psi = \sum_{j=1}^{\mathrm{N}} \psi_{x_j} > 0$. On montre enfin que la fonction $g \in \mathrm{V_N}$ définie par la formule (1) vérifie encore $\|g - f\|_\infty \le \varepsilon$.

Exercice. On suppose que K est une fonction réelle ou complexe, continue sur le triangle fermé $\{(x, t) : 0 \le t \le x \le 1\}$. On définit un opérateur linéaire continu T de $\mathrm{L}_1([0, 1])$ dans $\mathrm{C}([0, 1])$ en posant pour toute $f \in \mathrm{L}_1([0, 1])$

$$\forall x \in [0, 1], \quad (\mathrm{T}f)(x) = \int_0^x \mathrm{K}(x, t) f(t)\, dt.$$

Pour tout q tel que $1 \le q \le +\infty$ on désigne par $\mathrm{T}_q \in \mathcal{L}\bigl(\mathrm{L}_q([0, 1]), \mathrm{C}([0, 1])\bigr)$ la restriction de T à $\mathrm{L}_q([0, 1])$; montrer que T_q est compact de $\mathrm{L}_q([0, 1])$ dans $\mathrm{C}([0, 1])$ pour tout $q > 1$, mais que T_1 n'est pas compact en général.

Remarque. Une forme d'Ascoli sur $\mathbb{R}^d$: on peut utiliser les translations pour exprimer l'équicontinuité uniforme d'un ensemble de fonctions définies sur $\mathbb{R}^d$; si $t \in \mathbb{R}^d$, la translatée $\tau_t f = f_t$ de la fonction f est définie par $f_t(x) = f(x - t)$; si un ensemble de fonctions A définies sur $\mathbb{R}^d$ est uniformément équicontinu, à tout $\varepsilon > 0$ on peut associer $\delta > 0$ tel que

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^d, \quad \Bigl(\|x - y\| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon\Bigr)$$

pour toute $f \in \mathrm{A}$; si v est un vecteur de norme $< \delta$, on a en posant $y = x - v$

$$|f(x) - f_v(x)| = |f(x) - f(x - v)| < \varepsilon,$$

donc $\|f-f_v\| \leq \varepsilon$, et réciproquement cette propriété équivaut à l'équicontinuité uniforme.

Si A est un ensemble de fonctions continues à support dans un même compact de $\mathbb{R}^d$, borné en norme uniforme, et si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que pour tout vecteur $t \in \mathbb{R}^d$,

$$\big(|t| < \delta\big) \Rightarrow \big(\forall f \in \mathrm{A},\ \|\tau_t f - f\| < \varepsilon\big)$$

alors A est relativement compact dans l'espace $\mathrm{C}_0(\mathbb{R}^d)$, l'espace des fonctions scalaires continues qui tendent vers 0 à l'infini.

Si on enlève la restriction de même support il faut ajouter que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un compact $\mathrm{K} \subset \mathbb{R}^d$ tel que $\|f - \mathbf{1}_{\mathrm{K}} f\| < \varepsilon$ pour toute $f \in \mathrm{A}$ (équicontinuité de l'ensemble A au point à l'infini du compactifié d'Alexandrov).

Théorème. *On suppose que* A *est un ensemble de fonctions de* $\mathrm{C}_0(\mathbb{R}^d)$*, possédant les trois propriétés suivantes*

1. *l'ensemble* A *est borné en norme uniforme,*
2. *pour tout* $\varepsilon > 0$ *il existe* $\delta > 0$ *tel que*

$$\forall t \in \mathbb{R}^d, \quad \big(|t| < \delta\big) \Rightarrow \big(\forall f \in \mathrm{A},\ \|\tau_t f - f\|_\infty < \varepsilon\big),$$

3. *pour tout* $\varepsilon > 0$ *il existe un compact* $\mathrm{K} \subset \mathbb{R}^d$ *tel que* $\|f - \mathbf{1}_{\mathrm{K}} f\|_\infty < \varepsilon$.

Alors A *est relativement compact dans* $\mathrm{C}_0(\mathbb{R}^d)$.

Preuve. On peut considérer les fonctions de $\mathrm{C}_0(\mathbb{R}^d)$ comme des fonctions continues sur le compactifié d'Alexandrov X de $\mathbb{R}^d$; la condition **2** donne l'équicontinuité de A en tout point $x \in \mathbb{R}^d$, et la condition **3** donne l'équicontinuité au point à l'infini ; le résultat découle d'Ascoli appliqué à C(X).

6.2.c. *Compacité dans* $\mathrm{L}_p(\mathbb{R}^d)$

Théorème 6.2.5. *On suppose que* A *est un ensemble de fonctions de* $\mathrm{L}_p(\mathbb{R}^d)$, $1 \leq p < +\infty$*, possédant les trois propriétés suivantes*

1. *l'ensemble* A *est borné en norme* L_p*,*
2. *pour tout* $\varepsilon > 0$ *il existe* $\delta > 0$ *tel que*

$$\forall t \in \mathbb{R}^d, \quad \big(|t| < \delta\big) \Rightarrow \big(\forall f \in \mathrm{A},\ \|\tau_t f - f\|_p < \varepsilon\big),$$

3. *pour tout* $\varepsilon > 0$ *il existe un compact* $\mathrm{K} \subset \mathbb{R}^d$ *tel que* $\|f - \mathbf{1}_{\mathrm{K}} f\|_p < \varepsilon$.

Alors A *est relativement compact dans* $\mathrm{L}_p(\mathbb{R}^d)$ *(et réciproquement).*

On trouvera dans Hirsch et Lacombe (chapitre 4, Espaces L_p, théorème 3.8) une preuve qui ramène le problème pour L_p au théorème d'Ascoli, en convolant toutes les fonctions de A avec une fonction lisse à support compact, ≥ 0 et d'intégrale 1, de support suffisamment proche de 0. On va suivre une voie plus directe. Disons un mot de la réciproque : si $\overline{\mathrm{A}}$ est compact, il est borné ; un singleton $\mathrm{A} = \{f_0\}$ vérifie **2** et **3** (chapitre 3, section 3.4.a), un ensemble fini de fonctions aussi, et un compact aussi, par approximation par un ensemble fini de fonctions.

On va montrer que les propriétés **2** et **3** impliquent que l'ensemble A peut être approché en norme L_p par des sous-espaces vectoriels de dimension finie. Soit $\varepsilon > 0$ donné ; on choisit d'abord grâce à la propriété **3** un compact $\mathrm{K} \subset \mathbb{R}^d$ tel que

$$\|f - \mathbf{1}_{\mathrm{K}} f\|_p^p = \int_{\mathrm{K}^c} |f(x)|^p \, dx < (\varepsilon/2)^p$$

pour toute $f \in \mathrm{A}$, puis par **2** un $r > 0$ tel que pour tout $t \in \mathbb{R}^d$ satisfaisant $|t| < 2r$ on ait $\|f - f_t\|_p < \varepsilon/2^{d+1}$ pour toute $f \in \mathrm{A}$. On choisit alors un recouvrement fini de K par des boules $\mathrm{B}_i = \mathrm{B}(x_i, r)$, avec $i = 1, \ldots, \mathrm{N}$. On va approcher A par un sous-espace vectoriel $\mathrm{V}_\mathrm{N} \subset \mathrm{L}_p(\mathbb{R}^d)$, de dimension N.

On va mimer la formule (1), qui permettait la construction d'une fonction continue $g = \sum_{i=1}^{\mathrm{N}} f(x_i)\varphi_i$ proche d'une fonction continue f, construction qui a été faite au moyen d'une partition de l'unité (φ_i) subordonnée aux boules $\mathrm{B}(x_i, r)$. Une première différence pour le cas de L_p est que la valeur $f(x_i)$ n'a pas de sens pour une fonction $f \in \mathrm{L}_p$; on remplacera $f(x_i)$ par la moyenne de f sur la boule $\mathrm{B}_i = \mathrm{B}(x_i, r)$,

$$\widetilde{f}_i = \frac{1}{b} \int_{\mathrm{B}_i} f(y) \, dy$$

où $b = |\mathrm{B}_i|$ désigne le volume d'une boule de rayon r dans $\mathbb{R}^d$; une autre différence est qu'on n'a plus besoin de fonctions continues : on désignera par φ_i l'indicatrice d'un ensemble $\mathrm{C}_i \subset \mathrm{B}_i$, où les ensembles (C_i) sont choisis mesurables, disjoints et tels que $\bigcup_{i=1}^{\mathrm{N}} \mathrm{C}_i = \mathrm{K}$ (prendre par exemple $\mathrm{C}_{j+1} = (\mathrm{K} \cap \mathrm{B}_{j+1}) \setminus \bigcup_{i=1}^{j} \mathrm{B}_i$ pour $1 \le j < \mathrm{N}$ et $\mathrm{C}_1 = \mathrm{K} \cap \mathrm{B}_1$). On pose finalement $\mathrm{V}_\mathrm{N} = \mathrm{Vect}(\mathbf{1}_{\mathrm{C}_1}, \ldots, \mathbf{1}_{\mathrm{C}_\mathrm{N}})$, sous-espace vectoriel de dimension $\le \mathrm{N}$ dans $\mathrm{L}_p(\mathbb{R}^d)$. On va montrer que toute $f \in \mathrm{A}$ est proche de V_N, au sens de la norme L_p.

Pour toute $f \in \mathrm{A}$, on considère $g \in \mathrm{V}_\mathrm{N}$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}^d, \quad g(x) = \sum_{i=1}^{\mathrm{N}} \widetilde{f}_i \, \mathbf{1}_{\mathrm{C}_i}(x).$$

Si $x \in \mathrm{K}$, on a $x \in \mathrm{C}_i$ pour un $i = 1, \ldots, \mathrm{N}$ et $g(x) = \widetilde{f}_i$; on a alors par Jensen appliqué à la probabilité $b^{-1}\mathbf{1}_{\mathrm{B}_i}(y) \, dy$ et à la fonction convexe $t \to |f(x) - t|^p$

$$|f(x) - g(x)|^p = |f(x) - \widetilde{f}_i|^p = \Bigl|f(x) - b^{-1} \int_{\mathrm{B}_i} f(y) \, dy\Bigr|^p \le b^{-1} \int_{\mathrm{B}_i} |f(x) - f(y)|^p \, dy.$$

Si $x \in \mathrm{C}_i \subset \mathrm{B}_i$, on a $d(x, x_i) < r$ donc $\mathrm{B}_i = \mathrm{B}(x_i, r) \subset \mathrm{B}(x, 2r)$ et par conséquent

$$|g(x) - f(x)|^p \le b^{-1} \int_{\mathrm{B}(x,2r)} |f(x) - f(y)|^p \, dy = b^{-1} \int_{\mathrm{B}(0,2r)} |f(x) - f(x-t)|^p \, dt.$$

Cette relation est vraie pour tout $x \in \mathrm{K}$, et par Fubini

$$\int_{\mathrm{K}} |f(x) - g(x)|^p \, dx \le b^{-1} \int_{\mathrm{B}(0,2r)} \Bigl(\int_{\mathrm{K}} |f(x) - f(x-t)|^p \, dx \Bigr) \, dt \le$$

$$b^{-1} \int_{\mathrm{B}(0,2r)} \|f - f_t\|_p^p \, dt \le \frac{|\mathrm{B}(0,2r)|}{|\mathrm{B}(0,r)|} \, (\varepsilon/2^{d+1})^p = 2^d \, (\varepsilon/2^{d+1})^p \le (\varepsilon/2)^p.$$

Pour finir, on a puisque g est nulle hors de K

$$\int_{\mathrm{K}^c} |f(x) - g(x)|^p \, dx = \int_{\mathrm{K}^c} |f(x)|^p \, dx \le (\varepsilon/2)^p$$

si bien que $\|f - g\|_p \le (\varepsilon/2) + (\varepsilon/2)$. On a ainsi montré que $d(f, \mathrm{V}_\mathrm{N}) \le \varepsilon$ pour toute fonction $f \in \mathrm{A}$ (la distance étant calculée en norme L_p).

6.2.d. *L'injection de* $\mathrm{H}_0^1(\Omega)$ *dans* $\mathrm{L}_2(\mathbb{R}^d)$

Si φ est une fonction C^∞ dans un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, à support compact contenu dans Ω (c'est-à-dire un élément de $\mathcal{D}(\Omega)$), on la prolongera en une fonction $\mathrm{E}(\varphi)$ définie sur $\mathbb{R}^d$ en posant simplement $\mathrm{E}(\varphi)(x) = \varphi(x)$ si $x \in \Omega$ et $\mathrm{E}(\varphi)(x) = 0$ si $x \notin \Omega$. Il est clair que $\mathrm{E}(\varphi)$ est C^∞ sur $\mathbb{R}^d$. La norme de l'espace de Sobolev $\mathrm{H}^1(\Omega)$ est définie, pour une fonction de $\mathcal{D}(\Omega)$, par la formule

$$\|\varphi\|_{\mathrm{H}^1}^2 = \int_\Omega \big(|\varphi(x)|^2 + |(\nabla\varphi)(x)|^2 \big) \, dx$$

où $(\nabla\varphi)(x)$ désigne le vecteur gradient de φ au point $x \in \mathbb{R}^d$ et $|(\nabla\varphi)(x)|$ la norme euclidienne de ce vecteur gradient. On a

$$\int_{\mathbb{R}^d} |\mathrm{E}(\varphi)(x)|^2 \, dx = \int_\Omega |\varphi(x)|^2 \, dx \le \|\varphi\|_{\mathrm{H}^1}^2 \tag{2}$$

pour toute $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. On dit que f appartient à $\mathrm{H}_0^1(\Omega)$ s'il existe une suite $(\varphi_n) \subset \mathcal{D}(\Omega)$ telle que φ_n tende vers f dans $\mathrm{L}_2(\Omega)$, et que les dérivées partielles $\mathrm{D}_j\varphi_n$, $j = 1, \ldots, d$, convergent aussi dans $\mathrm{L}_2(\Omega)$ vers des limites g_j ; la boule unité de $\mathrm{H}_0^1(\Omega)$ est formée des f pour lesquelles on peut prendre $\|\varphi_n\|_{\mathrm{H}^1} \le 1$ pour tout n ; on y reviendra plus loin en 6.5.b. Il est clair que l'application E définie sur $\mathcal{D}(\Omega)$ est continue de la norme $\mathrm{H}^1(\Omega)$ vers $\mathrm{L}_2(\mathbb{R}^d)$, donc elle se prolonge en application continue de $\mathrm{H}_0^1(\Omega)$ dans $\mathrm{L}_2(\mathbb{R}^d)$. Il s'agit moralement de l'injection canonique du premier espace dans le second. On a alors

Théorème 6.2.6. *Soit* $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ *un ouvert* **borné** *; l'ensemble des fonctions*

$$\mathrm{A} = \{\mathrm{E}(\varphi) : \varphi \in \mathcal{D}(\Omega),\ \|\varphi\|_{\mathrm{H}_1} \le 1\}$$

est relativement compact dans $\mathrm{L}_2(\mathbb{R}^d)$ *; il en résulte que l'injection de* $\mathrm{H}_0^1(\Omega)$ *dans* $\mathrm{L}_2(\mathbb{R}^d)$ *est un opérateur compact.*

Preuve. On va appliquer à l'ensemble A le théorème 6.2.5 sur la relative compacité dans $\mathrm{L}_p(\mathbb{R}^d)$ d'un ensemble de fonctions, ici avec $p = 2$. Ce théorème comprend trois clauses dont deux sont évidentes ici. Tout d'abord, A est borné dans $\mathrm{L}_2(\mathbb{R}^d)$ d'après (2) ; ensuite, toutes les fonctions $\mathrm{E}(\varphi)$ sont à support dans le compact fixé $\mathrm{K} = \overline{\Omega}$ (c'est ici qu'intervient l'hypothèse Ω *borné*). Il reste à voir la clause sur l'équicontinuité des translations.

On montre que $\|f_v - f\|_2 \le |v|$ pour toute fonction $f \in \mathrm{A}$ et tout vecteur $v \in \mathbb{R}^d$. Pour cela on écrit

$$f(x+v) - f(x) = \int_0^1 (\nabla f)(x+sv) \cdot v \, ds,$$

puis avec Cauchy-Schwarz suivi de Jensen

$$\big(f(x+v) - f(x)\big)^2 = \Big(\int_0^1 (\nabla f)(x+sv) \cdot v \, ds\Big)^2 \le$$

$$\Big(\int_0^1 |(\nabla f)(x+sv)| \, |v| \, ds\Big)^2 \le |v|^2 \int_0^1 |(\nabla f)(x+sv)|^2 \, ds.$$

Par Fubini on obtiendra

$$\|f_v - f\|_2^2 = \|f_{-v} - f\|_2^2 = \int_{\mathbb{R}^d} \big(f(x+v) - f(x)\big)^2 \, dx \le |v|^2 \int_0^1 \int_{\mathbb{R}^d} |(\nabla f)(x+sv)|^2 \, dx \, ds =$$

$$|v|^2 \int_0^1 \big\| \, |\nabla f| \, \big\|_{\mathrm{L}_2}^2 \, ds = |v|^2 \, \big\| \, |\nabla f| \, \big\|_2^2 \le \|v\|^2.$$

En résumé,

$$\forall f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d), \quad \|f - f_v\|_2^2 \le |v|^2 \, \big\| \, |\nabla f| \, \big\|_2^2. \tag{3}$$

Utilité du résultat précédent

On montrera que pour toute fonction $f \in \mathrm{L}_2(\Omega)$ il existe une unique fonction $u \in \mathrm{H}_0^1(\Omega)$ qui vérifie $\Delta u = f$ au sens des distributions. On définit ainsi une application linéaire T de $\mathrm{L}_2(\Omega)$ dans $\mathrm{H}_0^1(\Omega)$, par $\mathrm{T}f = u$. Alors $\mathrm{E} \circ \mathrm{T}$ ou bien $\mathrm{T} \circ \mathrm{E}$ apparaissent comme des endomorphismes compacts d'un espace de Hilbert, et de plus ils sont hermitiens, ce qui permet de les diagonaliser dans une base hilbertienne.

6.3. Produit de compacts

6.3.a. *Topologie produit, théorème de Tykhonov*

Commençons par un cas particulier, celui de $\mathrm{X} = [0,1]^{\mathrm{I}}$ (le cas considéré par Tykhonov en 1930) ; l'ensemble X est l'ensemble de toutes les applications f de I dans $[0,1]$; un voisinage élémentaire $\mathrm{V}(f, \mathrm{J}, \varepsilon)$ de f dans l'espace produit X est défini à partir d'un sous-ensemble fini J de I et d'un $\varepsilon > 0$, en posant

$$\mathrm{V}(f, \mathrm{J}, \varepsilon) = \{g : \forall j \in \mathrm{J}, \ |g(j) - f(j)| < \varepsilon\}.$$

Un ensemble $\mathrm{U} \subset \mathrm{X}$ est dit ouvert si pour tout $f \in \mathrm{U}$, il existe un voisinage élémentaire $\mathrm{V}(f, \mathrm{J}, \varepsilon)$ de f tel que $\mathrm{V}(f, \mathrm{J}, \varepsilon) \subset \mathrm{U}$. Dans ce cas particulier la topologie produit porte aussi un autre nom : c'est la *topologie de la convergence simple* sur l'ensemble I.

La topologie produit sur $\mathrm{X} = \prod_{i \in \mathrm{I}} \mathrm{X}_i$ est définie de manière analogue ; un élément $x = (x_i)_{i \in \mathrm{I}}$ de X est une application $i \in \mathrm{I} \to x_i \in \mathrm{X}_i$. Pour définir un voisinage élémentaire de x, on choisit un ensemble fini $\mathrm{J} \subset \mathrm{I}$, et pour chaque $j \in \mathrm{J}$ un voisinage V_j de x_j dans X_j ; on introduit finalement un voisinage élémentaire de x, défini à partir de J et des $(\mathrm{V}_j)_{j \in \mathrm{J}}$, par la formule

$$\mathrm{V} = \{y = (y_i)_{i \in \mathrm{I}} \in \mathrm{X} : \forall j \in \mathrm{J}, \ y_j \in \mathrm{V}_j\}.$$

Théorème 6.3.1 : théorème de Tykhonov. *Tout produit* $\mathrm{X} = \prod_{i \in \mathrm{I}} \mathrm{X}_i$ *d'une famille* $(\mathrm{X}_i)_{i \in \mathrm{I}}$ *de compacts est compact.*

La démonstration de ce théorème utilise l'axiome du choix, puisqu'il n'y a pas d'autre façon de traiter un produit quelconque $\prod_{i \in \mathrm{I}} \mathrm{X}_i$ (imaginez qu'on veuille seulement dire que le produit est non vide lorsque tous les X_i sont non vides : c'est l'axiome du choix qui le garantit).

Lorsque E est un espace de Banach, son dual topologique E^* est un espace de fonctions scalaires sur E ; on peut donc le munir de la topologie de la convergence simple sur E, que l'on appelle la *topologie de la convergence* $*$*-faible* sur E^*. Soit D le compact des scalaires de module ≤ 1 ; les éléments de la boule unité de E^* forment un sous-ensemble de $\mathrm{D}^{\mathrm{B(E)}}$, ensemble fermé pour la convergence simple. On en déduit facilement le corollaire qui suit.

Corollaire. *Pour tout espace de Banach* E*, la boule unité du dual* E^* *est* $*$*-faiblement compacte.*

Exercice. Contre-exemple à l'extraction de sous-suites convergentes ; désignons par K le disque unité fermé de $\mathbb{C}$; montrer que la suite (f_n) dans le compact $\mathrm{K}^{[0,2\pi]}$ définie par $f_n(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}nt}$ n'admet aucune sous-suite simplement convergente.

Indication. Si une sous-suite (f_{n_k}) convergeait simplement vers une fonction f, on aurait par convergence dominée de $|f_{n_k} - f|^2$ vers 0 la convergence de la suite en norme $\mathrm{L}_2(0, 2\pi)$, donc la suite serait de Cauchy dans L_2, ce qui est impossible puisque $\|f_{n_j} - f_{n_k}\|_2 = \sqrt{2}$ chaque fois que $j \ne k$ (on a muni $[0, 2\pi]$ de la probabilité $dx/(2\pi)$).

On peut transformer cet exemple en un exemple de suite sans sous-suite $*$-faiblement convergente dans la boule unité du dual d'un Banach E, à savoir le dual E^* de l'espace des mesures $\mathrm{E} = \mathrm{M}(\mathbb{T})$. Pour chaque fonction f_n de la suite précédente, on introduit une forme linéaire ℓ_n sur E en posant $\ell_n(\mu) = \int f_n \, d\mu$. Comme l'espace E contient toutes les mesures de Dirac δ_t, la convergence $*$-faible d'une sous-suite (ℓ_{n_k}) dans E^* muni de la topologie $*$-faible implique la convergence simple de la sous-suite correspondante (f_{n_k}), convergence impossible d'après ce qui précède.

Proposition. *Tout produit dénombrable de compacts métrisables vérifie Bolzano, donc est compact.*

La démonstration emploie la technique de la suite diagonale, comme dans la démonstration de la proposition 6.1.5 : soit $(x^{(n)})$ une suite dans l'espace produit dénombrable $\mathrm{X} = \prod_{k \in \mathbb{N}} \mathrm{X}_k$; en appliquant BW à chaque métrique compact X_k, on construit une suite décroissante de sous-ensembles infinis M_k de $\mathbb{N}$, telle que pour chaque indice $k \in \mathbb{N}$, la sous-suite $(x_k^{(m)})_{m \in \mathrm{M}_k}$ de points de X_k converge dans X_k vers une limite y_k. On introduit comme avant l'ensemble diagonal M et on montre que la sous-suite $(x^{(m)})_{m \in \mathrm{M}}$ converge dans X vers le point $y = (y_k)_{k \in \mathbb{N}}$.

Exemple. Ensemble triadique de Cantor. L'ensemble triadique a été introduit par Cantor comme ensemble des points x de $[0, 1]$ qui peuvent s'exprimer en base trois sous la forme d'un développement, peut-être impropre,

$$x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\varepsilon_n}{3^n},$$

où $\varepsilon_n = 0$ ou 2 (mais jamais 1) ; cette absence des 1 revient à extraire de $[0,1]$ les « tiers-médians ». L'application de $\mathrm{X} = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ dans Δ définie par

$$\forall \mathbf{u} = (u_k)_{k\geq 0} \in \mathrm{X}, \quad \varphi(\mathbf{u}) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{u_k}{3^{k+1}}$$

est un homéomorphisme de X sur Δ.

Exercice. On considère l'espace de Hilbert réel $\mathrm{H} = \ell_2(\mathbb{N})$. On se donne une suite de nombres $c_n > 0$ telle que $\sum c_n^2 < +\infty$, et on considère

$$\mathrm{C} = \{x = (x_n)_{n\geq 0} \in \mathrm{H} : \forall n \geq 0,\ |x_n| \leq c_n\}.$$

Montrer que C est compact. Montrer que l'application φ de $\mathrm{K} = [-1,1]^{\mathbb{N}}$ (muni de la topologie produit) dans H, définie par

$$\forall y = (y_n) \in \mathrm{K}, \quad \varphi(y) = \sum_{n=0}^{\infty} y_n c_n \mathbf{e}_n$$

est un homéomorphisme de K sur C (on a noté $(\mathbf{e}_n)$ la base hilbertienne canonique de l'espace H).

On appelle souvent cet ensemble, sous une forme ou l'autre, le *cube de Hilbert*.

6.3.b. *Suites faiblement convergentes dans un espace de Hilbert*

On dit qu'une suite (x_n) dans un espace de Hilbert H réel ou complexe est *faiblement convergente* vers $x \in \mathrm{H}$ si $\lim_n \langle x_n, y\rangle = \langle x, y\rangle$ pour tout vecteur $y \in \mathrm{H}$. Cela revient à dire que pour toute forme linéaire continue ℓ sur H, on a $\lim_n \ell(x_n) = \ell(x)$. Cette deuxième forme de la définition s'étend à tous les espaces de Banach.

Si (x_n) est faiblement convergente dans un espace de Banach, elle est bornée, d'après le théorème de Banach-Steinhaus. En effet, la suite d'applications (T_n) sur le Banach E^*, à valeurs dans $\mathbb{K}$, définies par $\mathrm{T}_n(\ell) = \ell(x_n)$ est simplement bornée, donc uniformément bornée. Or $\|\mathrm{T}_n\| = \|x_n\|$ par Hahn-Banach (dans le cas Hilbert on n'a pas besoin de Hahn-Banach : il suffit de considérer $\mathrm{T}_n(x_n) = \|x_n\|^2$).

Proposition 6.3.2. *Toute suite bornée dans un espace de Hilbert admet des sous-suites faiblement convergentes. De plus la norme de la limite faible est inférieure ou égale à la liminf des normes.*

Soit F le sous-espace vectoriel fermé engendré par la suite (x_n) ; supposons $\sup_n \|x_n\| \leq 1$ pour fixer les idées. L'espace F est séparable, soit (d_k) un ensemble dénombrable dense dans F ; posons $\ell_n(y) = \langle y, x_n\rangle$ pour tout vecteur $y \in \mathrm{F}$; par Cauchy-Schwarz, on a $\|\ell_n\| \leq 1$.

Pour chaque k fixé, considérons le compact D_k formé des scalaires de module $\leq \|d_k\|$; pour chaque n, la suite $(\ell_n(d_k))_k$ est un élément du compact $\prod_k \mathrm{D}_k$. Par la compacité du produit $\prod_k \mathrm{D}_k$, on peut trouver une sous-suite (n_j) d'indices telle que $\lim_j \ell_{n_j}(d_k) = \mathrm{L}(d_k)$ existe pour tout k.

On montre ensuite que $\mathrm{L}(y) = \lim_j \ell_{n_j}(y)$ existe pour tout $y \in \mathrm{F}$. Pour cela on montre que la suite $(\ell_{n_j}(y))_j$ est de Cauchy, en l'approchant uniformément par la suite convergente $(\ell_{n_j}(d_k))_j$, où d_k est choisi tel que $\|y - d_k\| < \varepsilon/3$. Alors $y \to \mathrm{L}(y)$ est une forme linéaire continue sur l'espace de Hilbert F, qui peut être représentée par un vecteur $x \in \mathrm{F}$. Les résultats obtenus se traduisent par

$$\forall y \in \mathrm{F}, \quad \lim_j \langle x_{n_j}, y\rangle = \langle x, y\rangle.$$

Supposons maintenant que z soit un vecteur quelconque de H ; on peut écrire $z = y_1 + y_2$, avec $y_1 \in \mathrm{F}$ et $y_2 \in \mathrm{F}^\perp$. Alors $\langle x_{n_j}, y_2\rangle = 0$ pour tout j, et $\langle x, y_2\rangle = 0$. On a donc

$$\lim_j \langle x_{n_j}, z\rangle = \lim_j \langle x_{n_j}, y_1\rangle = \langle x, y_1\rangle = \langle x, z\rangle.$$

Pour finir, on remarque que $\|x\| \le \sup_n \|x_n\| \le 1$. Il suffit de noter que

$$\|x\|^2 = \langle x, x\rangle = \lim_j \langle x_{n_j}, x\rangle \le \|x\|.$$

Exemple. Soit $k(x, y)$ une fonction réelle de carré intégrable sur $[0, 1]^2$; posons

$$\forall f \in \mathrm{L}_2(0, 1), \quad (\mathrm{T}_k f)(x) = \int_0^1 k(x, y) f(y)\, dy.$$

On montrera plus loin que cette formule définit un endomorphisme T_k de $\mathrm{L}_2(0, 1)$. On va montrer que cet opérateur est compact, en utilisant la convergence faible. Désignons par E l'ensemble des points $x \in [0, 1]$ tels que

$$\int_0^1 k(x, y)^2\, dy < +\infty\,;$$

par Fubini, $[0, 1] \setminus \mathrm{E}$ est de mesure nulle. Pour tout $x \in \mathrm{E}$, c'est-à-dire pour presque tout x, la fonction k_x définie par $k_x(y) = k(x, y)$ est dans $\mathrm{L}_2(0, 1)$, et on a pour $x \in \mathrm{E}$

$$(\mathrm{T}_k f)(x) = \langle f, k_x\rangle\,;$$

si (f_n) est une suite dans la boule unité de $\mathrm{L}_2(0, 1)$, on peut extraire une sous-suite (f_{n_j}) faiblement convergente vers une fonction f de la boule unité de $\mathrm{L}_2(0, 1)$; on a pour $x \in \mathrm{E}$

$$\varphi_j(x) := \bigl|(\mathrm{T}_k f_{n_j})(x) - (\mathrm{T}_k f)(x)\bigr|^2 = \bigl|\langle f_{n_j} - f, k_x\rangle\bigr|^2 \le 4\, \|k_x\|_2^2\,;$$

cette fonction $x \to \|k_x\|_2^2$ est une fonction intégrable fixe, majorant de la suite (φ_j) qui tend presque partout vers 0 : d'après le théorème de convergence dominée, $\int_0^1 \varphi_j(x)\, dx$ tend vers 0, ce qui signifie que la sous-suite $(\mathrm{T}_k f_{n_j})$ converge dans $\mathrm{L}_2(0, 1)$ vers $\mathrm{T}_k f$. On a ainsi montré que toute suite dans l'image par T_k de la boule unité admet des sous-suites convergentes, donc T_k est un opérateur compact.

On peut démontrer avec des idées analogues à celles de la preuve de la proposition 6.3.2 le résultat qui suit. Un ingrédient supplémentaire est le fait que si le dual (topologique) E^* d'un Banach E est séparable, alors E est séparable ; il en résulte que le dual d'un réflexif séparable est séparable. On rappelle encore qu'un espace de Banach E est dit réflexif si toute forme linéaire continue ℓ sur son dual E^* peut se représenter par un vecteur $x \in \mathrm{E}$ de la façon suivante

$$\forall x^* \in \mathrm{E}^*, \quad \ell(x^*) = x^*(x).$$

Proposition. *Toute suite bornée dans un espace de Banach réflexif admet des sous-suites faiblement convergentes.*

Remarque 6.3.3. Si E est un Hilbert (ou plus généralement un espace réflexif) et $\mathrm{T} \in \mathcal{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$, l'image de la boule unité fermée $\mathrm{B_E}$ est toujours fermée dans F. Si $(x_n) \subset \mathrm{B_E}$ et $\mathrm{T}x_n \rightarrow y$, on extrait une sous-suite faiblement convergente (x_{n_k}) de limite faible $x \in \mathrm{B_E}$. Alors $\mathrm{T}x_{n_k}$ tend faiblement vers $\mathrm{T}x$ (facile) et par unicité de la limite faible (Hahn-Banach) on en déduit que $y = \mathrm{T}x$ est dans $\mathrm{T}(\mathrm{B_E})$.

6.4. Opérateurs hermitiens compacts

Soit H un espace de Hilbert, réel ou complexe ; un opérateur $\mathrm{A} \in \mathcal{L}(\mathrm{H})$ est dit *hermitien* ou *autoadjoint* si

$$\forall x, y \in \mathrm{H}, \quad \langle \mathrm{A}x, y \rangle = \langle x, \mathrm{A}y \rangle.$$

Si on utilise l'opérateur adjoint A^*, cela se traduit par $\mathrm{A}^* = \mathrm{A}$. Sous la première forme, il est clair que la restriction A_1 d'un hermitien à un sous-espace stable H_1 est encore un hermitien de $\mathcal{L}(\mathrm{H}_1)$. On remarque que la quantité $\langle \mathrm{A}x, x \rangle$ est réelle, même si l'espace H est complexe car

$$\langle \mathrm{A}x, x \rangle = \overline{\langle x, \mathrm{A}x \rangle} = \overline{\langle \mathrm{A}x, x \rangle}.$$

Lemme 6.4.1. *Pour tout opérateur* $\mathrm{T} \in \mathcal{L}(\mathrm{H})$ *on a*

$$\ker \mathrm{T} = (\operatorname{im} \mathrm{T}^*)^{\perp}.$$

Rappelons la preuve ; la propriété

$$\forall y \in \mathrm{H}, \quad \langle z, \mathrm{T}^* y \rangle = 0,$$

qui dit que le vecteur z est orthogonal à l'image de T^* équivaut à

$$\forall y \in \mathrm{H}, \quad \langle \mathrm{T}z, y \rangle = 0$$

qui signifie que $\mathrm{T}z = 0$.

Lemme 6.4.2. *Pour tout opérateur* $\mathrm{T} \in \mathcal{L}(\mathrm{H})$*, si un sous-espace vectoriel* $\mathrm{F} \subset \mathrm{H}$ *est stable par* T*, alors* $\mathrm{F}^{\perp}$ *est stable par l'adjoint* T^**,*

$$\big(\mathrm{T}(\mathrm{F}) \subset \mathrm{F}\big) \Rightarrow \big(\mathrm{T}^*(\mathrm{F}^{\perp}) \subset \mathrm{F}^{\perp}\big).$$

Soit y un vecteur de $\mathrm{F}^{\perp}$, montrons que son image $\mathrm{T}^* y$ est dans $\mathrm{F}^{\perp}$, c'est-à-dire orthogonale à tout vecteur $x \in \mathrm{F}$:

$$\langle \mathrm{T}^* y, x \rangle = \langle y, \mathrm{T}x \rangle = 0$$

puisque $\mathrm{T}x \in \mathrm{F}$.

6.4.a. *Diagonalisation des opérateurs hermitiens compacts*

Lemme 6.4.3. *Si* $\mathrm{H} \neq \{0\}$ *est un espace de Hilbert réel ou complexe, si* $\mathrm{A} \in \mathcal{L}(\mathrm{H})$ *est hermitien et compact, alors* $\lambda = \|\mathrm{A}\|$ *ou bien* $\lambda = -\|\mathrm{A}\|$ *est valeur propre de* A*.*

Preuve. Le cas $\mathrm{A} = 0$ est évident, on supposera $\mathrm{A} \neq 0$. On a vu à la remarque 6.3.3 que l'image $\mathrm{K} = \mathrm{A}(\mathrm{B_H})$ est fermée, et elle est relativement compacte par définition des opérateurs compacts, donc K est compact dans H. On pose $\mathrm{T} = \mathrm{A}^2 = \mathrm{A}^*\mathrm{A}$; on remarque que

$$\forall x \in \mathrm{H}, \quad \langle \mathrm{T}x, x\rangle = \langle \mathrm{A}^*\mathrm{A}x, x\rangle = \langle \mathrm{A}x, \mathrm{A}x\rangle = \|\mathrm{A}x\|^2$$

de sorte que si on pose $r = \|\mathrm{A}\| > 0$, on a

$$r^2 = \|\mathrm{A}\|^2 = \sup\{\langle \mathrm{T}x, x\rangle : \|x\| \leq 1\} = \max\{\|y\|^2 : y \in \mathrm{K}\},$$

le dernier max étant atteint puisque $y \to \|y\|^2$ est une fonction continue sur le compact K. Soit $y_0 = \mathrm{A}x_0$ un point de K où le maximum est atteint ; puisque $r > 0$, le vecteur x_0 n'est pas nul, donc de norme un (sinon on trouverait mieux en prenant le vecteur $x' = \|x_0\|^{-1}x_0$). On va montrer que pour tout vecteur $v \perp x_0$ de norme un, on a $\mathrm{T}x_0 \perp v$, ce qui impliquera que $\mathrm{T}x_0 = r^2\, x_0$. En effet, si on pose $x_\theta = \cos(\theta)x_0 + \sin(\theta)v$ on aura $x_\theta \in \mathrm{B_H}$ pour tout θ, donc

$$\langle \mathrm{T}x_\theta, x_\theta\rangle = \|\mathrm{A}x_\theta\|^2 \leq \|\mathrm{A}x_0\|^2 = \langle \mathrm{T}x_0, x_0\rangle$$

pour tout θ ; la fonction de θ précédente admet donc un maximum pour $\theta = 0$, et le calcul de la dérivée en θ donne au point $\theta = 0$ l'égalité

$$\mathrm{Re}\,\langle \mathrm{T}x_0, v\rangle = 0\,;$$

si l'espace est complexe, on applique aussi au vecteur $\mathrm{i}v$ et on déduit dans tous les cas que $\langle \mathrm{T}x_0, v\rangle = 0$, le résultat annoncé : $\mathrm{T}x_0$ est orthogonal à tout vecteur v orthogonal à x_0, soit $\mathrm{T}x_0 \in x_0^{\perp\perp} = \mathbb{K}x_0$; on a donc $\mathrm{T}x_0 = \lambda x_0$ pour un certain λ et

$$r^2 = \langle \mathrm{T}x_0, x_0\rangle = \langle \lambda x_0, x_0\rangle = \lambda$$

est valeur propre de $\mathrm{T} = \mathrm{A}^2$. On a

$$(\mathrm{T} - r^2\,\mathrm{Id})\, x_0 = (\mathrm{A} - r\,\mathrm{Id})(\mathrm{A} + r\,\mathrm{Id})\, x_0 = 0\,;$$

si $(\mathrm{A} + r\,\mathrm{Id})\, x_0 = 0$, c'est que $-r$ est valeur propre de A ; sinon $x_1 = (\mathrm{A} + r\,\mathrm{Id})\, x_0$ est un vecteur non nul annulé par $\mathrm{A} - r\,\mathrm{Id}$, et c'est r qui est valeur propre de A.

Remarque. Même en dimension finie, la fin de l'argument donne un moyen raisonnable pour trouver des vecteurs propres des matrices hermitiennes (peut se caser dans la leçon « application de la compacité à l'Analyse ») : si A est une matrice réelle symétrique de taille $n \times n$, on considère la fonction continue $\varphi(x) = \mathrm{A}x \cdot x$ sur la sphère unité de $\mathbb{R}^n$; par compacité, il existe un maximum en un point x_0 de la sphère ; le raisonnement précédent montre que x_0 est vecteur propre de la matrice A. La méthode marche aussi pour les matrices hermitiennes complexes, moyennant une modification simple.

Corollaire : diagonalisation des hermitiens compacts. *Si* $\mathrm{H} \neq \{0\}$ *est un espace de Hilbert réel ou complexe, si* $\mathrm{A} \in \mathcal{L}(\mathrm{H})$ *est hermitien et compact, il existe une base hilbertienne de* H *formée de vecteurs propres de* A.

Preuve. Désignons par $\mathcal{U}$ la classe des parties $\mathrm{U} \subset \mathrm{H}$, formées de vecteurs de norme un, vecteurs propres de A, et telles que $x, y \in \mathrm{U}$ et $x \neq y$ implique $x \perp y$. Il est clair que l'ensemble $\mathcal{U}$ muni de l'ordre de l'inclusion est inductif. Soit U_0 un élément maximal de l'ensemble $\mathcal{U}$; puisque les vecteurs de U_0 sont des vecteurs propres de A, il est clair que $\mathrm{F} = \mathrm{Vect}\,\mathrm{U}_0$ est stable par A ; on déduit du lemme 6.4.2 que $\mathrm{F}^\perp$ est stable également. Si on avait $\mathrm{H}_1 = \mathrm{F}^\perp \neq \{0\}$, il existerait par le lemme 6.4.3 un vecteur propre pour la restriction $\mathrm{A}_1 \in \mathcal{L}(\mathrm{H}_1)$ de A à H_1 (parce que A_1 est encore hermitien et compact), c'est-à-dire en particulier un vecteur non nul v, que l'on peut choisir de norme un, tel que $\mathrm{A}v \in \mathbb{K}\,v$; de plus, le fait que $v \perp \mathrm{F}$ montre que $v \notin \mathrm{U}_0$. Alors $\mathrm{U}_0 \cup \{v\}$ serait un ensemble appartenant à $\mathcal{U}$, et qui contredirait la maximalité de U_0. On doit donc avoir $\mathrm{F}^\perp = \{0\}$, ce qui signifie que F est dense dans H, et que la famille U_0 est une base hilbertienne de H.

Proposition 6.4.4. *Si* A *est hermitien et compact, on peut ranger ses valeurs propres non nulles, comptées avec leur multiplicité, dans une suite tendant vers* 0.

Preuve. Il revient au même de dire que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un majorant N_ε pour le cardinal de toute famille finie $x_1, \ldots, x_n$ de vecteurs propres de norme un, deux à deux orthogonaux et tels que $\mathrm{A}x_i = \lambda_i x$ pour un λ_i tel que $|\lambda_i| \geq \varepsilon$.

Puisque $\mathrm{K} = \mathrm{A}(\mathrm{B_H})$ est compact, il existe pour tout $\delta > 0$ un entier $\mathrm{N} = \mathrm{N_P}(\mathrm{K}, \delta)$ tel que toute famille de points de K, qui sont δ-écartés, comporte au plus N éléments. Si $x_1, \ldots, x_\mathrm{M}$ sont des vecteurs propres deux à deux orthogonaux de norme un tels que $\mathrm{A}x_i = \lambda_i x_i$ avec $|\lambda_i| \geq \varepsilon$, on aura pour $i \neq j$

$$\|\mathrm{A}x_i - \mathrm{A}x_j\|^2 = \|\lambda_i\, x_i - \lambda_j\, x_j\|^2 = |\lambda_i|^2 + |\lambda_j|^2 \geq 2\,\varepsilon^2$$

ce qui montre que nous avons M points de K qui sont $\varepsilon\sqrt{2}$ écartés, donc $\mathrm{M} \leq \mathrm{N_P}(\mathrm{K}, \varepsilon\sqrt{2})$.

On peut donner une démonstration plus constructive du corollaire de diagonalisation, que nous avons obtenu rapidement avec Zorn. On supposera que H est un espace de Hilbert de dimension infinie. On a vu que si A est hermitien et compact sur un Hilbert non nul, il admet une valeur propre réelle de valeur absolue égale à $\|\mathrm{A}\|$. On utilise la procédure itérative suivante : on suppose donnés n vecteurs propres orthogonaux $x_0, \ldots, x_{n-1}$ de norme un, tels que pour chaque $k = 1, \ldots, n-1$ on ait, en posant $\mathrm{F}_k = \mathrm{Vect}(x_0, \ldots, x_{k-1})$ et $\mathrm{H}_k = \mathrm{F}_k^\perp$, que le vecteur $x_k \in \mathrm{H}_k$ vérifie $\mathrm{A}x_k = \lambda_k x_k$, avec $|\lambda_k| = \|\mathrm{A}_k\|$, où A_k désigne la restriction de A au sous-espace stable H_k.

Expliquons le pas de récurrence ; considérons $\mathrm{F}_n = \mathrm{Vect}(x_0, \ldots x_{n-1})$. Puisque les vecteurs sont propres, il est clair que F_n est stable par A, donc $\mathrm{H}_n = \mathrm{F}_n^\perp$ est stable aussi. La restriction $\mathrm{A}_n \in \mathcal{L}(\mathrm{H}_n)$ est un opérateur hermitien et compact, sur un espace non nul puisque $\mathrm{F}_n \neq \mathrm{H}$ (l'espace H est de dimension infinie). Il existe donc un vecteur de norme un $x_n \in \mathrm{H}_n$ tel que $\mathrm{A}x_n = \lambda_n x_n$ et $|\lambda_n| = \|\mathrm{A}_n\|$.

Puisque la suite H_n est décroissante il est clair que $(\|\mathrm{A}_n\|)$ est décroissante, et elle tend vers 0 d'après la proposition 6.4.4. On désigne maintenant par F_∞ l'adhérence du sous-espace vectoriel $\bigcup_n \mathrm{F}_n$, et on pose $\mathrm{H}_\infty = \mathrm{F}_\infty^\perp$. Alors F_∞ et H_∞ sont stables par A, et on a $\|\mathrm{A}_\infty\| \leq \|\mathrm{A}_n\|$ pour tout n, donc $\|\mathrm{A}_\infty\| = 0$. Cela signifie que l'opérateur A est nul sur H_∞, et la diagonalisation de A est terminée, en ajoutant dans le cas $\mathrm{H}_\infty \neq \{0\}$

une base orthonormée de H_∞, dont les vecteurs sont vecteurs propres de A pour la valeur propre 0 (le sous-espace H_∞ est le noyau de A).

6.4.b. *Opérateurs normaux compacts*

Soit H un espace de Hilbert complexe ; on dit que $T \in \mathcal{L}(H)$ est *normal* si T commute avec son adjoint, $T\,T^* = T^*T$.

Théorème. *Soient* H *un espace de Hilbert* **complexe** *et* $T \in \mathcal{L}(H)$ *un opérateur normal et compact ; il existe une base hilbertienne de* H *formée de vecteurs propres de* T.

Preuve. On introduit l'opérateur hermitien compact $A = T^*T$. On note que $\langle Ax, x\rangle = \langle Tx, Tx\rangle = \|Tx\|^2$, ce qui montre que A est hermitien *positif* et que $\ker A \subset \ker T$. Tous les vecteurs propres de A pour la valeur propre éventuelle 0 sont donc aussi vecteurs propres de T.

Considérons ensuite une valeur propre non nulle r de A. On a $r > 0$ puisque A est hermitien positif. Ensuite, l'espace propre $E_r = \ker(A - r\,\mathrm{Id})$ est de dimension finie parce que A est compact et $r \neq 0$ (proposition 6.4.4, ou bien théorème de Riesz de 6.1.1), et E_r est stable par T parce que $TA = AT$ à cause de la normalité de T. On est ramené à un lemme en dimension finie.

Lemme 6.4.5. *Tout endomorphisme normal d'un espace hermitien (complexe)* E *de dimension finie est diagonalisable dans une base orthonormée.*

Preuve. Dans tout sous-espace non nul invariant par T il y a des vecteurs propres de T, puisque l'espace vectoriel est complexe et de dimension finie non nulle. Puisque T^* commute avec T, les sous-espaces propres de T sont stables par T^* ; si F désigne la somme des sous-espaces propres de T, alors F est stable par T^* donc $F^\perp$ est stable par T. Mais on ne peut pas trouver un nouveau vecteur propre dans $F^\perp$, puisqu'ils sont tous dans F. Il en résulte que $F^\perp = \{0\}$ et donc $F = E$: l'opérateur T est diagonalisable.

De plus, les sous-espaces propres d'un opérateur normal sont deux à deux orthogonaux : on remarque que si S est normal, on a

$$\|Sx\|^2 = \langle Sx, Sx\rangle = \langle S^*Sx, x\rangle = \langle SS^*x, x\rangle = \|S^*x\|^2$$

ce qui montre en particulier que $\ker S = \ker S^*$. Ceci appliqué à l'opérateur normal $S = T - \lambda\,\mathrm{Id}$ montre que le sous-espace propre de T pour la valeur propre λ est égal au sous-espace propre de T^* pour $\overline{\lambda}$, car $S^* = T^* - \overline{\lambda}\,\mathrm{Id}$. Supposons alors que $Tx = \lambda x$ et $Ty = \mu y$, $\lambda \neq \mu$; on écrit

$$\lambda\langle x, y\rangle = \langle Tx, y\rangle = \langle x, T^*y\rangle = \langle x, \overline{\mu}y\rangle = \mu\langle x, y\rangle$$

ce qui implique $\langle x, y\rangle = 0$.

Remarque. Le lemme est faux pour un espace réel : la rotation d'angle $\pi/2$ dans $\mathbb{R}^2$ commute avec son adjoint, mais n'a pas de vecteur propre $v \in \mathbb{R}^2$.

Revenons à la dimension infinie. On obtient finalement une base hilbertienne de H formée de vecteurs propres de l'opérateur normal T en réunissant une base orthonormée du noyau de T, et des bases orthonormées finies pour chaque sous-espace propre E_r de $A = T^*T$, formées de vecteurs propres de T, et obtenues par le lemme précédent.

6.4.c. *Opérateurs de Hilbert-Schmidt*

Lemme 6.4.6. *Soient* $\mathrm{H}_1, \mathrm{H}_2$ *deux espaces de Hilbert,* $\mathrm{T} \in \mathcal{L}(\mathrm{H}_1, \mathrm{H}_2)$ *et* $(e_i)_{i\in \mathrm{I}}$ *une base hilbertienne de* H_1 *; la quantité*

$$\sum_{i\in\mathrm{I}} \|\mathrm{T}e_i\|^2_{\mathrm{H}_2},$$

finie ou infinie, ne dépend pas de la base hilbertienne choisie pour H_1*.*

Preuve. Si $(f_j)_{j\in\mathrm{J}}$ est une base hilbertienne de H_2, on a pour chaque $i \in \mathrm{I}$

$$\|\mathrm{T}e_i\|^2_{\mathrm{H}_2} = \sum_{j\in\mathrm{J}} |\langle \mathrm{T}e_i, f_j\rangle|^2$$

ce qui implique

$$\sum_{i\in\mathrm{I}} \|\mathrm{T}e_i\|^2_{\mathrm{H}_2} = \sum_{i\in\mathrm{I}}\sum_{j\in\mathrm{J}} |\langle \mathrm{T}e_i, f_j\rangle|^2 = \sum_{j\in\mathrm{J}}\sum_{i\in\mathrm{I}} |\langle e_i, \mathrm{T}^* f_j\rangle|^2 = \sum_{j\in\mathrm{J}} \|\mathrm{T}^* f_j\|^2_{\mathrm{H}_1}.$$

L'interversion dans ces familles sommables ne pose pas de problème car tous les termes sont ≥ 0. La dernière expression ne dépend évidemment pas de la base $(e_i)_{i\in\mathrm{I}}$!

On dit que T est un *opérateur de Hilbert-Schmidt* si

$$\|\mathrm{T}\|_{\mathrm{HS}} = \Big(\sum_{i\in\mathrm{I}} \|\mathrm{T}e_i\|^2\Big)^{1/2} < +\infty.$$

On obtient un cas particulier de calcul de la norme de Hilbert-Schmidt dans le cas de la dimension finie, lorsque $\mathrm{H}_1 = \mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{C}^n$, muni de sa structure euclidienne ou hermitienne usuelle, et $\mathrm{H}_2 = \mathbb{R}^m$ ou $\mathbb{C}^m$. Dans ce cas un opérateur A est donné par une matrice $(a_{i,j})$ de taille $m \times n$; le carré de la norme de l'image du $j$ème vecteur de la base canonique de H_1 est la norme euclidienne de la $j$ème colonne de la matrice, et

$$\|\mathrm{A}\|^2_{\mathrm{HS}} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} |a_{i,j}|^2. \tag{4}$$

On peut étendre cette remarque au cas de $\mathrm{T} \in \mathcal{L}(\ell_2)$, représenté par une matrice infinie $a_{i,j} = \langle \mathrm{T}e_j, e_i\rangle$, $i, j \geq 0$. C'était d'ailleurs le point de vue de départ de Hilbert sur la question.

Remarque. Si $x_1, \ldots, x_n$ sont des vecteurs deux à deux orthogonaux de norme ≤ 1 dans H_1, la même démonstration que dans le lemme 6.4.6 ci-dessus mène à

$$\sum_{i=1}^{n} \|\mathrm{T}x_i\|^2 \leq \|\mathrm{T}\|^2_{\mathrm{HS}}.$$

En effet on a alors $\sum_{i=1}^n |\langle x_i, y\rangle|^2 \leq \|y\|^2$ pour tout $y \in \mathrm{H}_1$ (remplacer les vecteurs x_i non nuls par $x'_i = \|x_i\|^{-1} x_i$ et considérer la projection orthogonale de y sur $\mathrm{Vect}(x'_i)$), donc

$$\sum_{i=1}^{n} \|\mathrm{T}x_i\|^2_{\mathrm{H}_2} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j\in\mathrm{J}} |\langle \mathrm{T}x_i, f_j\rangle|^2 = \sum_{j\in\mathrm{J}}\sum_{i=1}^{n} |\langle x_i, \mathrm{T}^* f_j\rangle|^2 \leq \sum_{j\in\mathrm{J}} \|\mathrm{T}^* f_j\|^2_{\mathrm{H}_1} = \|\mathrm{T}\|^2_{\mathrm{HS}}.$$

Proposition 6.4.7. *Les opérateurs de Hilbert-Schmidt sont compacts.*

Preuve. On va approcher l'ensemble borné $\mathrm{A} = \mathrm{T}(\mathrm{B}_{\mathrm{H}_1}) \subset \mathrm{H}_2$ par un sous-espace vectoriel $\mathrm{V}_2 \subset \mathrm{H}_2$ de dimension finie. Soit $\varepsilon > 0$ donné, et choisissons $\mathrm{I}_0 \subset \mathrm{I}$ fini tel que

$$\sum_{i \in \mathrm{I}_0} \|\mathrm{T}e_i\|^2 > \|\mathrm{T}\|_{\mathrm{HS}}^2 - \varepsilon^2 \,;$$

considérons le sous-espace vectoriel $\mathrm{V}_2 = \mathrm{Vect}(\mathrm{T}e_i, i \in \mathrm{I}_0)$. Soit $x \in \mathrm{H}_1$ un vecteur de norme ≤ 1 ; écrivons $x = x_1 + x_2$ avec $x_1 \in \mathrm{V}_1 = \mathrm{Vect}(e_i, i \in \mathrm{I}_0)$ et $x_2 \perp \mathrm{V}_1$, $\|x_2\| \leq 1$; alors $\mathrm{T}x_1 \in \mathrm{V}_2$ donc $\mathrm{dist}(\mathrm{T}x, \mathrm{V}_2) \leq \|\mathrm{T}x_2\|$. D'après la remarque précédente on a

$$\|\mathrm{T}\|_{\mathrm{HS}}^2 - \varepsilon^2 + \|\mathrm{T}x_2\|^2 < \sum_{i \in \mathrm{I}_0} \|\mathrm{T}e_i\|^2 + \|\mathrm{T}x_2\|^2 \leq \|\mathrm{T}\|_{\mathrm{HS}}^2,$$

donc $\|\mathrm{T}x_2\| \leq \varepsilon$. Ainsi, $\mathrm{dist}(y, \mathrm{V}_2) \leq \varepsilon$ pour tout $y = \mathrm{T}x \in \mathrm{A}$.

Opérateurs de Hilbert-Schmidt à noyau

On considère deux espaces mesurés $(\mathrm{X}, \mathcal{A}, \mu)$ et $(\mathrm{Y}, \mathcal{B}, \nu)$, avec des mesures σ-finies pour ne pas avoir de problème avec Fubini. À toute fonction $k \in \mathrm{L}_2(\mathrm{X} \times \mathrm{Y}, \mu \otimes \nu)$ on veut associer un opérateur linéaire borné T_k de $\mathrm{L}_2(\mathrm{Y}, \nu)$ dans $\mathrm{L}_2(\mathrm{X}, \mu)$, défini pour toute $f \in \mathrm{L}_2(\mathrm{Y}, \nu)$ par la formule

$$(\mathrm{T}_k f)(x) = \int_{\mathrm{Y}} k(x,t)\, f(t)\, d\nu(t).$$

On va montrer que T_k est bien défini, et agit continûment de $\mathrm{L}_2(\mathrm{Y}, \nu)$ dans $\mathrm{L}_2(\mathrm{X}, \mu)$: d'après Fubini positif, la fonction g définie sur X par

$$g(x) := \int_{\mathrm{Y}} |k(x,t)|\, |f(t)|\, d\nu(t)$$

est mesurable, et avec Cauchy-Schwarz, on a

$$g(x)^2 \leq \Bigl(\int_{\mathrm{Y}} |k(x,t)|\, |f(t)|\, d\nu(t)\Bigr)^2 \leq \Bigl(\int_{\mathrm{Y}} |k(x,t)|^2\, d\nu(t)\Bigr) \Bigl(\int_{\mathrm{Y}} |f(t)|^2\, d\nu(t)\Bigr)$$

ce qui donne en réintégrant

$$\int_{\mathrm{X}} g(x)^2\, d\mu(x) \leq \Bigl(\int_{\mathrm{X} \times \mathrm{Y}} |k(x,t)|^2\, d\mu(x)\, d\nu(t)\Bigr) \Bigl(\int_{\mathrm{Y}} |f(t)|^2\, d\nu(t)\Bigr) < +\infty.$$

On trouve *a posteriori* que l'intégrale qui définit $(\mathrm{T}_k f)(x)$ est absolument convergente pour μ-presque tout x ; de plus, pour tout $\mathrm{A} \subset \mathrm{X}$ de mesure finie,

$$\int_{\mathrm{A}} |g(x)|\, d\mu(x) \leq \mu(\mathrm{A})^{1/2} \|g\|_{\mathrm{L}_2(\mu)} < +\infty$$

ce qui signifie que $1_{\mathrm{A}}(x) k(x,t) f(t)$ est intégrable sur le produit $\mathrm{X} \times \mathrm{Y}$; d'après le théorème de Fubini, la fonction $\mathrm{T}_k f$ est mesurable sur A ; comme on peut recouvrir X par une suite $(\mathrm{A}_n) \subset \mathrm{X}$ d'ensembles de mesure finie, $\mathrm{T}_k f$ est mesurable ; on voit pour finir que $\|\mathrm{T}_k\| \leq \|k\|_2$.

Si $(g_n)_{n\geq 0}$ est une base hilbertienne de $\mathrm{L}_2(\mathrm{Y},\nu)$, on peut montrer que toute fonction $\mathrm{L}\in\mathrm{L}_2(\mathrm{X}\times\mathrm{Y})$ peut s'exprimer sous la forme d'une série convergente dans $\mathrm{L}_2(\mathrm{X}\times\mathrm{Y})$,

$$\mathrm{L}=\sum_{n\geq 0}\varphi_n\otimes\overline{g_n}$$

où $\varphi_n\in\mathrm{L}_2(\mathrm{X},\mu)$ et où la notation $\varphi_n\otimes\overline{g_n}$ représente la fonction $(x,t)\to\varphi_n(x)\overline{g_n(t)}$. On constate que les $\varphi_n\otimes\overline{g_n}$ sont deux à deux orthogonales, ce qui entraîne que

$$\|\mathrm{L}\|^2_{\mathrm{L}_2(\mathrm{X}\times\mathrm{Y})}=\sum_{n\geq 0}\|\varphi_n\|^2_{\mathrm{L}_2(\mathrm{X})}.$$

Proposition 6.4.8. *L'opérateur* T_k *est de Hilbert-Schmidt, et* $\|\mathrm{T}_k\|_{\mathrm{HS}}=\|k\|_2$.

Il faut voir ce résultat comme une généralisation de la relation (4).

Preuve. Si on écrit suivant la remarque précédente, au sens de la convergence dans $\mathrm{L}_2(\mathrm{X}\times\mathrm{Y},\mu\otimes\nu)$,

$$k(x,t)\sim\sum_{n=0}^{+\infty}\varphi_n(x)\overline{g_n(t)},$$

on constate que $\mathrm{T}_k(g_p)=\varphi_p$, donc

$$\|\mathrm{T}_k\|^2_{\mathrm{HS}}=\sum_{p=0}^{+\infty}\|\mathrm{T}_k(g_p)\|^2=\sum_{p=0}^{+\infty}\|\varphi_p\|^2=\|k\|_2^2<+\infty.$$

Pour vérifier que $\mathrm{T}_k(g_p)=\varphi_p$, il suffit de voir que $\langle\mathrm{T}_kg_p,h\rangle=\langle\varphi_p,h\rangle$ pour toute fonction $h\in\mathrm{L}_2(\mathrm{X},\mu)$. Or on a avec Fubini

$$\int_{\mathrm{X}}(\mathrm{T}_kg_p)(x)\overline{h(x)}\,d\mu(x)=\int\!\!\int k(x,t)\overline{h(x)}g_p(t)\,d\mu(x)\,d\nu(t)=\langle k,h\otimes\overline{g_p}\rangle_{\mathrm{L}_2(\mathrm{X}\times\mathrm{Y})}=$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\langle\varphi_n\otimes\overline{g_n},h\otimes\overline{g_p}\rangle_{\mathrm{L}_2(\mathrm{X}\times\mathrm{Y})}=\langle\varphi_p,h\rangle_{\mathrm{L}_2(\mathrm{X})}.$$

On a donc vérifié que la norme Hilbert-Schmidt de T_k est *égale* à la norme L_2 du noyau k dans l'espace $\mathrm{L}_2(\mathrm{X}\times\mathrm{Y},\mu\otimes\nu)$. En particulier, l'application $k\to\mathrm{T}_k$ est injective : si l'opérateur T_k est l'opérateur nul, le noyau k est nul $\mu\otimes\nu$-presque partout sur $\mathrm{X}\times\mathrm{Y}$.

Remarque. On peut montrer que tout opérateur de Hilbert-Schmidt de $\mathrm{L}_2(\mathrm{Y})$ dans $\mathrm{L}_2(\mathrm{X})$ est un opérateur à noyau T_k pour une certaine fonction $k\in\mathrm{L}_2(\mathrm{X}\times\mathrm{Y},\mu\otimes\nu)$.

Exercice. Montrer que la composition $\mathrm{T}_{k_1} \circ \mathrm{T}_{k_2}$ de deux opérateurs de Hilbert-Schmidt $\mathrm{T}_{k_1} \in \mathcal{L}(\mathrm{L}_2(\mathrm{X}), \mathrm{L}_2(\mathrm{W}))$ et $\mathrm{T}_{k_2} \in \mathcal{L}(\mathrm{L}_2(\mathrm{Y}), \mathrm{L}_2(\mathrm{X}))$ est un opérateur T_k, avec

$$k(w, y) = \int_{\mathrm{X}} k_1(w, x) k_2(x, y) \, d\mu(x).$$

On pourra noter l'analogie avec la formule du produit des matrices.

On peut vérifier que l'adjoint de T_k est l'opérateur de noyau $k^*(t, x) = \overline{k(x, t)}$. Supposons que $\mathrm{X} = \mathrm{Y}$, $\mu = \nu$ et que k soit un *noyau hermitien*, c'est-à-dire que $k(t, x) = \overline{k(x, t)}$ pour tous $(x, t) \in \mathrm{X}^2$; il existe alors une base orthonormée (f_n) de $\mathrm{L}_2(\mathrm{X}, \mu)$ formée de vecteurs propres de l'opérateur hermitien compact T_k, c'est-à-dire telle que $\mathrm{T}_k(f_n) = \lambda_n f_n$ pour tout $n \geq 0$. On peut voir que

$$k(x, t) \sim \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda_n f_n(x) \overline{f_n(t)}$$

en constatant que l'expression de droite définit une fonction $\mathrm{L}(x, t)$ de carré intégrable sur $\mathrm{X} \times \mathrm{Y}$, puis en montrant que $\mathrm{T_L} = \mathrm{T}_k$, parce que $\mathrm{T_L} f_n = \mathrm{T}_k f_n$ pour tout n.

Appendice : sur l'espace $\mathrm{L}_2(\mathrm{X} \times \mathrm{Y})$

On va supposer $\mathrm{L}_2(\mathrm{X}, \mu)$ et $\mathrm{L}_2(\mathrm{Y}, \nu)$ séparables ; on désignera par $(g_n)_{n \geq 0}$ une base hilbertienne de $\mathrm{L}_2(\mathrm{Y}, \nu)$.

Proposition. *Toute fonction* $k \in \mathrm{L}_2(\mathrm{X} \times \mathrm{Y}, \mu \otimes \nu)$ *se représente sous la forme d'une série*

$$k = \sum_{n=0}^{+\infty} \varphi_n \otimes g_n$$

convergente dans $\mathrm{L}_2(\mathrm{X} \times \mathrm{Y}, \mu \otimes \nu)$*, où* (φ_n) *est la suite d'éléments de* $\mathrm{L}_2(\mathrm{X}, \mu)$ *définie par*

$$\varphi_n(x) = \int_{\mathrm{Y}} k(x, t) \overline{g_n(t)} \, d\nu(t).$$

On va d'abord montrer que l'ensemble des fonctions $\varphi \otimes g_n$, où φ varie dans $\mathrm{L}_2(\mathrm{X})$ et n dans $\mathbb{N}$, est total dans $\mathrm{L}_2(\mathrm{X} \times \mathrm{Y})$. Soit $(\varphi_j)_{j \geq 0}$ une suite dense dans $\mathrm{L}_2(\mathrm{X})$, et considérons une fonction $h \in \mathrm{L}_2(\mathrm{X} \times \mathrm{Y})$ qui soit orthogonale à toutes les $\varphi_j \otimes g_n$; pour chaque j posons

$$f_j(t) = \int_{\mathrm{X}} h(x, t) \overline{\varphi_j(x)} \, d\mu(x) \, ;$$

par Fubini et par l'hypothèse sur h on a

$$\langle f_j, g_n \rangle = \int_{\mathrm{Y}} f_j(t) \overline{g_n(t)} \, d\nu(t) = \langle h, \varphi_j \otimes g_n \rangle = 0.$$

Ceci étant vrai pour tout n, on en déduit que f_j est le vecteur nul de $\mathrm{L}_2(\mathrm{Y})$, donc $f_j(t) = 0$ pour ν-presque tout $t \in \mathrm{Y}$; puisque j varie dans un ensemble dénombrable, on peut trouver un ensemble ν-négligeable $\mathrm{N} \subset \mathrm{Y}$ tel que pour $t_0 \notin \mathrm{N}$, on ait $f_j(t_0) = 0$

pour tout j, ce qui signifie que pour cette valeur fixée t_0, la fonction $x \to h(x,t_0)$ est orthogonale à toutes les fonctions φ_j ; puisque cet ensemble est dense, il en résulte que $h(x,t_0) = 0$ μ-presque partout ; une nouvelle invocation de Fubini montre que $h(x,t) = 0$ pour $\mu \otimes \nu$-presque tout couple (x,t), donc $h = 0$.

On remarque ensuite que pour tout n, l'application $\varphi \in \mathrm{L}_2(\mathrm{X}) \to \varphi \otimes g_n$ est une isométrie linéaire de $\mathrm{L}_2(\mathrm{X})$ dans $\mathrm{L}_2(\mathrm{X} \times \mathrm{Y})$. Il en résulte que son image F_n est un sous-espace fermé. On voit facilement que $\mathrm{F}_m \perp \mathrm{F}_n$ lorsque $m \neq n$,

$$\langle \varphi \otimes g_m, \psi \otimes g_n \rangle = \int \varphi(x) g_m(t) \overline{\psi(x) g_n(t)} \, d\mu(x) \, d\nu(t) =$$

$$\Bigl(\int_{\mathrm{X}} \varphi(x) \overline{\psi(x)} \, d\mu(x) \Bigr) \Bigl(\int_{\mathrm{Y}} g_m(t) \overline{g_n(t)} \, d\nu(t) \Bigr) = 0.$$

On a donc une somme de sous-espaces fermés orthogonaux, et la première partie montre que $\sum_{n \geq 0} \mathrm{F}_n$ est dense dans $\mathrm{L}_2(\mathrm{X} \times \mathrm{Y})$.

Pour finir soit k une fonction quelconque dans $\mathrm{L}_2(\mathrm{X} \times \mathrm{Y})$; pour tout $n \geq 0$ soit $\varphi_n \otimes g_n$ la projection orthogonale de k sur F_n ; alors φ_n est donnée par

$$\varphi_n(x) = \int_{\mathrm{Y}} k(x,y) \overline{g_n(y)} \, d\nu(y) \, ;$$

il est facile de vérifier que $\sum_{n=0}^{\mathrm{N}} \varphi_n \otimes g_n$ est la projection orthogonale de k sur $\mathrm{G}_\mathrm{N} = \sum_{n=0}^{\mathrm{N}} \mathrm{F}_n$; d'après la densité de $\bigcup_\mathrm{N} \mathrm{G}_\mathrm{N}$ la distance de k à G_N tend vers 0, c'est-à-dire que

$$\lim_{\mathrm{N}} \|k - \sum_{n=0}^{\mathrm{N}} \varphi_n \otimes g_n\| = 0,$$

ou encore

$$k = \sum_{n=0}^{+\infty} \varphi_n \otimes g_n.$$

6.4.d. *Un exemple détaillé de diagonalisation*

On étudie l'opérateur T agissant sur toute fonction $f \in \mathrm{L}_2(0,\pi)$ par la formule

$$\forall x \in [0,\pi], \quad (\mathrm{T}f)(x) = \sin(x/2) \int_0^x \cos(y/2) f(y) \, dy + \cos(x/2) \int_x^\pi \sin(y/2) f(y) \, dy.$$

On repère tout de suite qu'il s'agit d'un opérateur à noyau T_k, avec

$$\begin{aligned} k(x,y) &= \sin(x/2)\cos(y/2) \quad \text{si} \quad 0 \leq y \leq x \leq \pi, \\ k(x,y) &= \sin(y/2)\cos(x/2) \quad \text{si} \quad 0 \leq x \leq y \leq \pi. \end{aligned}$$

Le noyau est continu sur $[0,\pi]^2$, il est de plus réel et symétrique, donc possède la symétrie hermitienne et $\mathrm{T} = \mathrm{T}_k$ est un opérateur hermitien et compact de l'espace de Hilbert $\mathrm{H} = \mathrm{L}_2(0,\pi)$ (pour la mesure de Lebesgue).

Une première remarque est que $\mathrm{T}f$ est une fonction continue, pour toute $f \in \mathrm{H}$; c'est clair sur la formule de définition avec des intégrales fonctions de leur borne (ajouter un zeste de convergence dominée). Mais si f est déjà continue, on peut dire beaucoup plus : on sait depuis le DEUG que $\mathrm{T}f$ est alors dérivable, et

$$\begin{aligned}(\mathrm{T}f)'(x) =& \frac{1}{2}\cos(x/2)\int_0^x \cos(y/2)f(y)\,dy + \sin(x/2)\cos(x/2)f(x)\\ &- \frac{1}{2}\sin(x/2)\int_x^\pi \sin(y/2)f(y)\,dy - \cos(x/2)\sin(x/2)f(x)\,;\end{aligned}$$

il y a un petit miracle, puisque la formule

$$2\,(\mathrm{T}f)'(x) = \cos(x/2)\int_0^x \cos(y/2)f(y)\,dy - \sin(x/2)\int_x^\pi \sin(y/2)f(y)\,dy \tag{5}$$

montre que $(\mathrm{T}f)'$ a une expression similaire à celle de $\mathrm{T}f$, ce qui permet, toujours lorsque f est continue, de dériver une fois de plus,

$$\begin{aligned}2\,(\mathrm{T}f)''(x) = &-\frac{1}{2}\sin(x/2)\int_0^x \cos(y/2)f(y)\,dy + \cos^2(x/2)f(x)\\ &- \frac{1}{2}\cos(x/2)\int_x^\pi \sin(y/2)f(y)\,dy + \sin^2(x/2)f(x)\end{aligned}$$

ce qui donne

$$4\,(\mathrm{T}f)''(x) = -(\mathrm{T}f)(x) + 2\,f(x).$$

On voit donc que $g = \mathrm{T}f$ est une fonction de classe C^2 qui vérifie l'équation différentielle $4g'' + g = 2f$. De plus l'équation (5) sur $g' = (\mathrm{T}f)'$ montre que $g'(0) = 0$ et $g'(\pi) = 0$.

Lemme. *Si f est continue sur $[0,\pi]$, la fonction $g = \mathrm{T}f$ est solution de l'équation différentielle $4g'' + g = 2f$, et vérifie la condition aux limites $g'(0) = g'(\pi) = 0$. Une telle solution, vérifiant ces conditions aux limites, est unique.*

Montrons qu'il n'y a qu'une seule solution de l'équation différentielle vérifiant ces conditions aux limites : en effet, la différence h de deux solutions g_1 et g_2 vérifierait $4h''+h = 0$ et $h'(0) = 0$, $h'(\pi) = 0$. On sait que la solution générale de l'équation différentielle $4h'' + h = 0$ est de la forme $h(x) = \mathrm{A}\cos(x/2) + \mathrm{B}\sin(x/2)$, et les conditions aux limites donnent $\mathrm{A} = \mathrm{B} = 0$, donc $h = 0$ et $g_1 = g_2$.

Ainsi, toute fonction g de classe C^2 telle que $g'(0) = g'(\pi) = 0$ est dans l'image de l'opérateur T ; en effet, la fonction $f = 2g'' + \frac{1}{2}\,g$ est continue, et g vérifie évidemment l'équation différentielle du lemme précédent, avec les bonnes conditions aux limites, donc $g = \mathrm{T}f$ est dans l'image de T. En particulier, les fonctions C^∞ à support contenu dans $]0,\pi[$ sont dans l'image de T ; comme elles forment un sous-espace vectoriel dense dans $\mathrm{L}_2(0,\pi)$, on en déduit que l'image de T est dense, donc T est injectif puisqu'il est hermitien, et qu'en général on a $\ker \mathrm{T} = (\mathrm{im}\,\mathrm{T}^*)^\perp$ (lemme 6.4.1).

On va maintenant identifier les valeurs propres non nulles de T ; on sait déjà qu'elles sont réelles. Si $\lambda \in \mathbb{R}$ est valeur propre non nulle de T, il existe $f \in \mathrm{H}$ non nulle telle que $\mathrm{T}f = \lambda f$. Mais alors la relation $f = \lambda^{-1}\mathrm{T}f$ montre que f est continue, donc $g = \mathrm{T}f$ est de classe C^2 et vérifie l'équation différentielle $4g'' + g = 2f$ et les conditions $g'(0) = g'(\pi) = 0$. En revenant à $f = \lambda^{-1}g$ qui est aussi de classe C^2 on aura

$$f'' = \Big(\frac{1}{2}\,\lambda^{-1} - \frac{1}{4}\Big)\,f$$

et $f'(0) = f'(\pi) = 0$. Supposons d'abord que $\frac{1}{2}\lambda^{-1} - 1/4 = \omega^2 > 0$. Les solutions sont de la forme $f(x) = \mathrm{A}\,\mathrm{ch}(\omega x) + \mathrm{B}\,\mathrm{sh}(\omega x)$, mais les conditions aux limites imposent $\mathrm{B} = 0$, puis $\mathrm{A}\,\mathrm{sh}(\omega\pi) = 0$ qui entraîne $\mathrm{A} = 0$ et $f = 0$, contrairement à l'hypothèse $f \neq 0$. Ce cas est donc impossible.

La deuxième possibilité est $\frac{1}{2}\lambda^{-1} - 1/4 = 0$, c'est-à-dire $\lambda = 2$. Dans ce cas l'équation devient $f'' = 0$, qui admet pour solutions les fonctions affines $\mathrm{A} + \mathrm{B}x$; la condition aux limites impose $\mathrm{B} = 0$, et les solutions possibles sont les constantes.

La dernière possibilité est $\frac{1}{2}\lambda^{-1} - 1/4 = -\omega^2 < 0$. Dans ce cas les solutions sont de la forme $f(x) = \mathrm{A}\cos(\omega x) + \mathrm{B}\sin(\omega x)$, et les conditions aux limites donnent d'abord $\mathrm{B} = 0$, puis $\sin(\omega\pi) = 0$. Ceci n'est possible que si $\omega = j$ avec j entier ≥ 1. La valeur correspondante pour λ est $\lambda_j = 2(1 - 4j^2)^{-1}$.

Pour finir, on peut résumer ainsi : les seuls candidats vecteurs propres de T pour une valeur propre non nulle sont les fonctions $x \to \cos(jx)$, pour $j = 0, 1, \ldots$ (on a ainsi inclus le cas des constantes).

Par ailleurs, le lemme permet de vérifier facilement que les fonctions $e_j : x \to \cos(jx)$, $j \in \mathbb{N}$, qui étaient les seuls candidats possibles vecteurs propres pour une valeur propre non nulle, sont bien vecteurs propres de T. En effet, $4e_j'' + e_j$ est proportionnelle à e_j,

$$4\, e_j'' + e_j = (-4j^2 + 1)\, e_j$$

et vérifie les conditions aux limites voulues, donc $\mathrm{T}e_j = 2\,(1 - 4j^2)^{-1}\, e_j$. Compte tenu de l'injectivité de T, on a une base orthogonale de $\mathrm{L}_2(0, \pi)$, qu'il reste seulement à normaliser. Rappelons que la mesure utilisée est la mesure de Lebesgue, donc $\|e_0\|^2 = \pi$ et $\|e_j\|^2 = \pi/2$ pour $j \geq 1$. On obtient une base orthonormée formée de vecteurs propres de T en posant $f_0(x) = 1/\sqrt{\pi}$, et pour $j \geq 1$,

$$f_j(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, \cos(jx).$$

Les valeurs propres non nulles de T sont les $\lambda_j = 2(1 - 4j^2)^{-1}$ pour $j = 0, 1, 2, \ldots$

Considérons maintenant le noyau L défini par

$$\mathrm{L} = \sum_{j=0}^{+\infty} \lambda_j\, f_j \otimes f_j \,; \tag{6}$$

la série converge dans $\mathrm{L}_2([0, \pi]^2)$ puisque $\sum \lambda_j^2 < +\infty$ et que les fonctions $f_j \otimes f_j$ définies par $(f_j \otimes f_j)(x, t) = f_j(x)\, f_j(t)$ forment un système orthonormé dans $\mathrm{L}_2([0, \pi]^2)$. On voit facilement que l'opérateur $\mathrm{T_L}$ dont le noyau est L vérifie pour tout $j \geq 0$

$$\mathrm{T_L} f_j = \lambda_j\, f_j$$

(pour $g \in \mathrm{L}_2(0, \pi)$, calculer $\langle \mathrm{T_L} f_j, g\rangle$ en appliquant Fubini à la fonction $\mathrm{L}(x, t) f(t) \overline{g(x)}$, intégrable sur le carré $[0, \pi]^2$) ; ceci implique $\mathrm{T_L} = \mathrm{T}_k$, puis $\mathrm{L} = k$ par l'injectivité de la correspondance $k \to \mathrm{T}_k$. La série (6) converge **au sens de** L_2, mais les coefficients (λ_j) sont sommables dans cet exemple, et les (f_j) uniformément bornées ; on a donc aussi convergence normale de la série de fonctions

$$\sum_{j=0}^{+\infty} \lambda_j\, f_j(x)\, f_j(t) =: \mathrm{M}(x, t).$$

Les sommes partielles convergent partout vers M et au sens de L_2 vers k ; en passant à une sous-suite qui converge presque partout, on déduit d'abord que $k = \mathrm{M}$ presque partout, mais la continuité de k et de L sur $[0, \pi]^2$ implique ensuite que pour tous x, t tels que $0 \le t \le x \le \pi$, on a

$$k(x,t) = \sin(x/2)\cos(t/2) = \frac{2}{\pi} - \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{4\,\cos(jx)\cos(jt)}{\pi(4j^2-1)}.$$

Le dernier pas de la preuve précédente a utilisé le fait que tout ouvert non vide de $[0, \pi]^2$ a une mesure > 0 pour la mesure de Lebesgue ; l'ouvert $\{k \ne \mathrm{M}\}$ est donc vide, puisqu'il est Lebesgue-négligeable.

Voir le théorème de Mercer pour un énoncé général de représentation point par point de certains noyaux (par exemple, Dieudonné, *Éléments d'Analyse* 1, théorème 11.6.7).

Exercice. Pour tout α réel tel que $0 < \alpha < 1$, traiter la variante suivante de l'exercice (dont on vient de traiter le cas $\alpha = 1/2$)

$$(\mathrm{T}_\alpha f)(x) = \cos(\alpha\pi - \alpha x) \int_0^x \cos(\alpha t) f(t)\,dt + \cos(\alpha x) \int_x^\pi \cos(\alpha\pi - \alpha t) f(t)\,dt.$$

En déduire la formule suivante, pour tous x, t tels que $0 \le t \le x \le \pi$,

$$\cos(\alpha\pi - \alpha x)\,\cos(\alpha t) = \frac{\sin(\alpha\pi)}{\alpha\pi} - \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{2\alpha\,\sin(\alpha\pi)\,\cos(jx)\cos(jt)}{\pi(j^2-\alpha^2)}.$$

En déduire ensuite

$$\pi\,\mathrm{cotan}(\alpha\pi) = \frac{1}{\alpha} - \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{2\alpha}{j^2-\alpha^2} = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \frac{1}{\alpha - j}.$$

6.5. Espace $\mathrm{H}_0^1(\Omega)$ et problème de Dirichlet

6.5.a. *Intégration par parties*

Si φ est une fonction réelle ou complexe de classe C^1 sur $\mathbb{R}^d$, à support compact, et si $\mathrm{D}_j\varphi$ désigne l'une des dérivées partielles de φ, où $j = 1, \ldots, d$, on a

$$\int_{\mathbb{R}^d} (\mathrm{D}_j\varphi)(x)\,dx = 0. \tag{7}$$

En effet, on écrit d'abord, en prenant $j = 1$ par exemple et en supposant que le support de φ est contenu dans le pavé $[-a, a]^d$

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} \frac{\partial\varphi}{\partial x_1}(t, x_2, \ldots, x_d)\,dt &= \int_{-a}^{a} \frac{\partial\varphi}{\partial x_1}(t, x_2, \ldots, x_d)\,dt \\ &= \varphi(a, x_2, \ldots, x_d) - \varphi(-a, x_2, \ldots, x_d) = 0 - 0 = 0,\end{aligned}$$

et on termine avec Fubini en intégrant dans les autres variables $x_2, \ldots, x_d$.

Si φ est dans l'espace $\mathrm{C}^1_{\mathrm{comp}}(\Omega)$ des fonctions de classe C^1 à support compact dans l'ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, on peut introduire la fonction $\mathrm{E}\varphi$ sur $\mathbb{R}^d$, qui est égale à φ dans Ω et à 0 hors de Ω ; il est facile de voir que cette fonction $\mathrm{E}\varphi$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^d$, à support compact, et par conséquent

$$\int_\Omega (\mathrm{D}_j \varphi)(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}^d} (\mathrm{D}_j(\mathrm{E}\varphi))(x)\, dx = 0.$$

Si u est de classe C^1 sur Ω et $\psi \in \mathrm{C}^1_{\mathrm{comp}}(\Omega)$, le produit $\varphi = u\psi$ est dans $\mathrm{C}^1_{\mathrm{comp}}(\Omega)$, donc l'intégrale de chaque dérivée partielle $\mathrm{D}_j \varphi = (\mathrm{D}_j u)\, \psi + u\, (\mathrm{D}_j \psi)$ est nulle, et

$$\int_\Omega (\mathrm{D}_j u)\, \psi = -\int_\Omega u\, (\mathrm{D}_j \psi). \tag{8}$$

Si ψ est de classe C^2 à support compact dans Ω, alors $\mathrm{D}_j \psi \in \mathrm{C}^1_{\mathrm{comp}}$ et

$$\int_\Omega (\mathrm{D}_j u)\, (\mathrm{D}_j \psi) = -\int_\Omega u\, (\mathrm{D}_j^2 \psi),$$

et en additionnant pour $j = 1, \ldots, d$,

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \psi = -\int_\Omega u\, \Delta \psi. \tag{9}$$

6.5.b. *Espace de Sobolev* H^1_0

Désormais on travaillera dans $\mathbb{R}^2$, ou plus précisément dans un ouvert Ω de $\mathbb{R}^2$, et en se limitant aux fonctions réelles pour éviter les barres de conjugaison complexe. On munit l'espace $\mathrm{L}_2(\Omega)^3$ d'une structure naturelle d'espace de Hilbert en définissant le produit scalaire de deux triplets de fonctions $\mathbf{f} = (f_0, f_1, f_2)$ et $\mathbf{g} = (g_0, g_1, g_2)$ par la formule

$$\langle \mathbf{f}, \mathbf{g} \rangle = \int_\Omega (f_0 g_0 + f_1 g_1 + f_2 g_2).$$

On considère le sous-espace vectoriel fermé H de $\mathrm{L}_2(\Omega)^3$ formé des triplets (f, g_1, g_2) qui sont dans l'adhérence du sous-espace formé de tous les $(\varphi, \mathrm{D}_1\varphi, \mathrm{D}_2\varphi)$, pour $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$. On va montrer que le triplet (f, g_1, g_2) est complètement déterminé par sa composante f : quand $\varphi, \psi \in \mathcal{D}(\Omega)$, on a vu que

$$\int_\Omega \nabla \varphi \cdot \nabla \psi = -\int_\Omega \varphi\, \Delta \psi\,;$$

considérons $\nabla \varphi = (\mathrm{D}_1\varphi, \mathrm{D}_2\varphi)$ et $\overrightarrow{g} = (g_1, g_2)$ comme des vecteurs de $\mathbb{R}^2$. Si $(\varphi_n, \nabla \varphi_n)$ tend vers $(f, \overrightarrow{g})$ dans $\mathrm{L}_2(\Omega)$, on aura à la limite

$$\int_\Omega \overrightarrow{g} \cdot \nabla \psi = -\int_\Omega f\, \Delta \psi.$$

Si $f = 0$, il en résulte que $\int_\Omega \overrightarrow{g} \cdot \nabla\psi = 0$ pour toute $\psi \in \mathcal{D}(\Omega)$, et en faisant tendre $\nabla\psi$ vers $\overrightarrow{g}$,

$$\int_\Omega \overrightarrow{g} \cdot \overrightarrow{g} = 0$$

ce qui montre que $\overrightarrow{g} = (g_1, g_2)$ est nul, comme élément de $\mathrm{L}_2(\Omega)$. On peut donc « coder » les triplets (f, g_1, g_2) de façon injective par leur première composante, et considérer l'espace des triplets comme un espace de fonctions f. On désigne donc par $\mathrm{H}_0^1(\Omega)$ l'espace des fonctions $f \in \mathrm{L}_2(\Omega)$ pour lesquelles existe une suite $(\varphi_n) \subset \mathcal{D}(\Omega)$ telle que $\|f - \varphi_n\|_{\mathrm{L}_2(\Omega)} \to 0$ et telle que $(\mathrm{D}_j\varphi_n)$ converge dans $\mathrm{L}_2(\Omega)$ vers une fonction g_j, pour $j = 1, 2$. On notera $\mathrm{D}_j f := g_j$, dérivée partielle généralisée de f, et $\nabla f := \overrightarrow{g}$, gradient généralisé de f. On munit $\mathrm{H}_0^1(\Omega)$ du produit scalaire

$$\langle f, g\rangle_{\mathrm{H}^1} = \int_\Omega \bigl(fg + \nabla f \cdot \nabla g\bigr)$$

ce qui donne la norme

$$\|f\|^2_{\mathrm{H}^1} = \int_\Omega \bigl(|f|^2 + |\nabla f|^2\bigr)\,;$$

d'après la discussion précédente, on obtient ainsi un espace de Hilbert. Lorsque $\varphi, \psi \in \mathcal{D}(\Omega)$, on a pour $j = 1, 2$

$$\int_\Omega \varphi\,(\mathrm{D}_j\psi) = -\int_\Omega (\mathrm{D}_j\varphi)\,\psi\,;$$

par convergence dans $\mathrm{L}_2(\Omega)$, on obtient la relation caractéristique des dérivées faibles au sens de H_0^1,

$$\forall f, g \in \mathrm{H}_0^1(\Omega), \quad \int_\Omega f\,(\mathrm{D}_j g) = -\int_\Omega (\mathrm{D}_j f)\,g, \quad j = 1, 2. \tag{10}$$

Quand $\Omega = \mathbb{R}^2$ on peut utiliser Fourier pour caractériser les éléments de $\mathrm{H}^1(\mathbb{R}^2)$ par des propriétés de $\widehat{f}$; on obtient facilement dans ce cas l'injectivité qu'on a montrée ci-dessus. L'espace $\mathrm{H}^1(\mathbb{R}^2)$ est l'espace des fonctions $f \in \mathrm{L}_2(\mathbb{R}^2)$ telles que les deux fonctions $t \to t_j\widehat{f}(t)$, $j = 1, 2$, soient dans $\mathrm{L}_2(\mathbb{R}^2)$.

6.5.c. *Inégalité de Poincaré*

On désigne par Ω un ouvert **borné** de $\mathbb{R}^2$. Reprenons le contenu de l'inégalité (3), en prenant pour $v_0 = v$ un vecteur assez grand pour que $\Omega + v_0$ soit disjoint de Ω ; soit f une fonction de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$, à support dans Ω ; pour $x \in \Omega$, on a alors $f(x + v_0) = 0$. On aura donc $f_{v_0} - f = -f$ sur Ω, donc

$$\|f\|_{\mathrm{L}_2(\Omega)} = \|f_{v_0} - f\|_{\mathrm{L}_2(\Omega)} \le \|f_{v_0} - f\|_{\mathrm{L}_2(\mathbb{R}^d)} \le |v_0|\,\|\nabla f\|_{\mathrm{L}_2(\mathbb{R}^d)} = |v_0|\,\|\nabla f\|_{\mathrm{L}_2(\Omega)},$$

ce qui constitue *l'inégalité de Poincaré* : si Ω est un ouvert borné, il existe une constante C (dépendant de Ω) telle que

$$\int_\Omega |f(x)|^2\,dx \le \mathrm{C}^2 \int_\Omega |(\nabla f)(x)|^2\,dx,$$

pour toute fonction de $\mathrm{H}_0^1(\Omega)$ (on a effectué un passage à la limite L_2, à partir du cas de $\mathcal{D}(\Omega)$). La démonstration précédente indique que la condition Ω borné n'est pas nécessaire, puisque nous avons simplement utilisé l'existence d'un vecteur v_0 tel que $\Omega + v_0$ soit disjoint de Ω ; cela serait encore vrai pour une bande de largeur finie.

L'inégalité de Poincaré montre que la quantité $\bigl(\int_\Omega |\nabla f|^2\bigr)^{1/2}$ permet de définir une norme équivalente sur H_0^1 dans le cas d'un ouvert borné ; en effet

$$\int_\Omega |\nabla f|^2 \le \int_\Omega \bigl(|f|^2 + |\nabla f|^2\bigr) \le (\mathrm{C}^2+1)\int_\Omega |\nabla f|^2 \,;$$

cette norme équivalente provient d'un produit scalaire, qu'on notera avec un indice P comme Poincaré,

$$\langle f, g\rangle_{\mathrm{H}^1_{0,\mathrm{P}}} = \int_\Omega \nabla f \cdot \nabla g$$

qui définit un nouvel espace de Hilbert (le même espace vectoriel de fonctions $\mathrm{H}_0^1(\Omega)$, mais avec une nouvelle structure de Hilbert).

6.5.d. *Solution faible du problème de Dirichlet*

Étant donnée une fonction $f \in \mathrm{L}_2(\Omega)$, une solution classique du *problème de Dirichlet dans* Ω est une fonction u de classe C^2 dans Ω, qui vérifie

$$\Delta u = f$$

dans Ω, qui se prolonge en fonction continue sur l'adhérence $\overline{\Omega}$, et vérifie $u = 0$ au bord de Ω ; dans ce cas, d'après la relation (9),

$$\forall \psi \in \mathcal{D}(\Omega), \quad \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \psi = -\int_\Omega (\Delta u)\psi = -\int_\Omega f\psi \,;$$

mais cette propriété

$$\text{(SF)} \qquad \forall \psi \in \mathcal{D}(\Omega), \quad \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla \psi = -\int_\Omega f\psi$$

a un sens pour toute fonction $u \in \mathrm{H}_0^1(\Omega)$; on dit que u est *solution faible* dans ce cas.

Pour toute $f \in \mathrm{L}_2(\Omega)$, il existe une unique $u \in \mathrm{H}_0^1(\Omega)$ qui est solution faible ; en effet, considérons la forme linéaire ℓ_f sur l'espace de Hilbert $\mathrm{H}_0^1(\Omega)$ définie par

$$\forall \psi \in \mathrm{H}_0^1(\Omega), \quad \ell_f(\psi) = -\int_\Omega f\psi.$$

Cette forme est continue sur $\mathrm{L}_2(\Omega)$ et *a fortiori* sur $\mathrm{H}_0^1(\Omega)$; il existe donc un unique vecteur u de l'espace de Hilbert $\mathrm{H}^1_{0,\mathrm{P}}(\Omega)$ qui représente cette forme linéaire,

$$\forall \psi \in \mathrm{H}_0^1(\Omega), \quad \ell_f(\psi) = \langle \psi, u\rangle_{\mathrm{H}^1_{0,\mathrm{P}}}$$

et cette propriété équivaut exactement à dire que u est solution faible. La correspondance $f \to u$ définit une application linéaire T de $\mathrm{L}_2(\Omega)$ dans $\mathrm{H}^1_0(\Omega)$; la fonction $\mathrm{T}f$ est caractérisée par

$$\forall \psi \in \mathrm{H}^1_0(\Omega), \quad \langle \mathrm{T}f, \psi\rangle_{\mathrm{H}^1_{0,\mathrm{P}}} = -\langle f, \psi\rangle_{\mathrm{L}_2}.$$

Si $g \in \mathrm{L}_2(\Omega)$ la fonction $\psi = \mathrm{T}g$ est dans $\mathrm{H}^1_0(\Omega)$ donc

$$\langle \mathrm{T}f, \mathrm{T}g\rangle_{\mathrm{H}^1_{0,\mathrm{P}}} = -\langle f, \mathrm{T}g\rangle_{\mathrm{L}_2}. \tag{11}$$

En prenant $g = f$, et en utilisant Poincaré

$$\|\mathrm{T}f\|^2_{\mathrm{H}^1_{0,\mathrm{P}}} = \langle \mathrm{T}f, \mathrm{T}f\rangle_{\mathrm{H}^1_{0,\mathrm{P}}} = -\langle f, \mathrm{T}f\rangle_{\mathrm{L}_2} \le \|f\|_2 \|\mathrm{T}f\|_2 \le \mathrm{C}\,\|f\|_2 \|\mathrm{T}f\|_{\mathrm{H}^1_{0,\mathrm{P}}}$$

donc $\|\mathrm{T}f\|_{\mathrm{H}^1_{0,\mathrm{P}}} \le \mathrm{C}\,\|f\|_2$, ce qui montre que T est borné de $\mathrm{L}_2(\Omega)$ dans $\mathrm{H}^1_0(\Omega)$; par le théorème 6.2.6, l'injection canonique j de $\mathrm{H}^1_0(\Omega)$ dans $\mathrm{L}_2(\Omega)$ est compacte ; on voit donc que l'endomorphisme $\mathrm{T}_1 = j \circ \mathrm{T} \in \mathcal{L}(\mathrm{L}_2(\Omega))$ est compact. De plus, T_1 est hermitien ; en effet les fonctions f et g jouent des rôles symétriques dans l'équation (11), donc

$$\langle \mathrm{T}_1 f, g\rangle_{\mathrm{L}_2} = \langle \mathrm{T}f, g\rangle_{\mathrm{L}_2} = -\langle \mathrm{T}f, \mathrm{T}g\rangle_{\mathrm{H}^1_{0,\mathrm{P}}} = \langle f, \mathrm{T}_1 g\rangle_{\mathrm{L}_2}.$$

L'opérateur T_1 est moralement l'inverse du Laplacien ; en effet, si $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, la fonction $f = \Delta\varphi$ est dans $\mathrm{L}_2(\Omega)$ et $u = \varphi \in \mathrm{H}^1_0(\Omega)$ est évidemment la solution de $\Delta u = f$; on a donc

$$\mathrm{T}_1(\Delta\varphi) = \varphi.$$

En particulier l'image de T_1 contient $\mathcal{D}(\Omega)$; elle est donc dense dans $\mathrm{L}_2(\Omega)$, et il en résulte que T_1 est injectif. Ceci montre que $-\mathrm{T}_1$ est un opérateur autoadjoint positif et injectif. Comme tel, il admet une diagonalisation dans une base orthonormée. On peut ranger ses valeurs propres dans une suite $\mu_1 \ge \mu_2 \ge \ldots$ qui tend vers 0 par valeurs > 0. Les fonctions propres φ_n vérifient

$$-\Delta\varphi_n = \frac{1}{\mu_n}\,\varphi_n$$

au sens faible. En fait, si Ω est un ouvert régulier, on peut montrer que toutes les fonctions propres sont régulières (voir le livre de Brézis par exemple).

6.5.e. *Fonctions de Bessel*

On considère la vibration d'un tambour, dont le bord sera représenté dans le plan $z = 0$ de l'espace $\mathbb{R}^3$ par le cercle de rayon un centré en 0 ; la peau du tambour est paramétrisée par un point $\xi = (x, y)$ du disque unité. La position de la peau du tambour est représentée par une fonction $z = v(\xi)$ définie pour ξ dans le cercle unité, qui figure l'altitude dans l'espace à trois dimensions de ce point ξ ; au repos, on a $v = 0$. Par ailleurs, le bord du tambour est supposé immobile, donc on demandera toujours que $v = 0$ sur le cercle unité.

La théorie physique nous enseigne que le mouvement de vibration du tambour est régi par *l'équation des ondes*, qui s'écrit, pour une fonction $u(\xi, t)$ dépendant du temps $t > 0$ et de la variable d'espace ξ

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \Delta u,$$

où le laplacien porte sur la variable d'espace. Si $\xi = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ varie dans le disque unité du plan $z = 0$ de $\mathbb{R}^3$, l'équation $z = u(x, y, t)$ représente la surface du tambour à l'instant t. Lorsque $v(x, y)$ vérifie $\Delta v = -\mu^2 v$, on obtient une solution particulière u de l'équation des ondes sous la forme

$$u(x, t) = v(x) \sin(\mu t).$$

On cherche la fréquence fondamentale du tambour représenté par le disque unité Ω du plan $z = 0$ de $\mathbb{R}^3$; cette solution v devrait correspondre par raison de symétrie à une fonction radiale $v(x) = f(\|x\|)$ vérifiant $\Delta v = -\mu^2 v$ et $v = 0$ au bord du disque. Cette condition sur $v(x) = f(\|x\|)$ amène en calculant le laplacien en polaires à une équation différentielle du type

$$f''(r) + \frac{1}{r} f'(r) + f(r) = 0.$$

C'est l'une des équations différentielles de Bessel.

Solution série entière pour l'équation de Bessel

Recherchons donc une fonction $t \to y(t)$ qui vérifie

$$t^2 y''(t) + t\, y'(t) + t^2 y(t) = 0.$$

Si on désigne par D l'opérateur qui agit sur une fonction f par $\mathrm{D}f = t^2 f'' + t f' + t^2 f$, on voit que D a une action très simple sur les fonctions monômes : si $p_n(t) = t^n$, $n \geq 0$, on aura $\mathrm{D}(p_n) = n(n-1)p_n + np_n + p_{n+2} = n^2 p_n + p_{n+2}$; ainsi, $\mathrm{D}(p_0) = 0 + p_2$, $\mathrm{D}(p_2) = 4p_2 + p_4$, $\mathrm{D}(p_4) = 16p_4 + p_6$, donc la série entière solution de $\mathrm{D}f = 0$ doit être de la forme

$$y(t) = 1 - \frac{t^2}{4} + \frac{t^4}{4\,.\,16} + \cdots$$

On ne poursuivra pas le détail du calcul de cette série, on la retrouvera autrement.

Fonction génératrice

On considère

$$f(u, t) = \exp\Bigl(\frac{t}{2}\Bigl(u - \frac{1}{u}\Bigr)\Bigr)$$

où u est complexe non nul et t réel. Pour chaque t fixé, on a une fonction holomorphe de u, définie sur $\mathbb{C}^*$, qui admet donc un développement de Laurent

$$f(u, t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \mathrm{J}_n(t)\, u^n.$$

Les coefficients $\mathrm{J}_n(t)$ sont des fonctions C^∞ en t, ou même prolongeables en fonctions holomorphes, ce qu'on vérifie par exemple en considérant leur expression par intégrale de Cauchy

$$\mathrm{J}_n(t) = \frac{1}{2\mathrm{i}\pi} \int_{\gamma_r} f(u, t) \frac{du}{u^{n+1}}$$

et en appliquant les théorèmes classiques d'holomorphie d'intégrales à paramètre. On peut ensuite trouver une relation entre $t^2\, d^2 f/dt^2$, $t\, df/dt$, f et $d^2 f/du^2$, qui conduit à l'équation différentielle

$$t^2\, \mathrm{J}_n''(t) + t\, \mathrm{J}_n'(t) + (t^2 - n^2)\, \mathrm{J}_n(t) = 0,$$

qui est l'équation de Bessel de paramètre n. En fait la dérivation du résultat est plus facile en série de Fourier, en se limitant à $u = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, $\frac{1}{2}(u - 1/u) = \mathrm{i}\sin\theta$; en considérant (t, θ) comme les coordonnées polaires du point $(x, y) = (t\cos\theta, t\sin\theta)$ on voit que la fonction proposée est

$$f(x,y) = g(t,\theta) = \exp\Big(\frac{t}{2}(u - 1/u)\Big) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}t\sin\theta} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}y}$$

qui vérifie évidemment

$$(\Delta f)(x,y) = -\cos y - \mathrm{i}\sin y = -f(x,y).$$

On va de l'autre côté calculer le laplacien en coordonnées polaires pour la fonction

$$g(t,\theta) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}t\sin\theta} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \mathrm{J}_n(t)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}\,.$$

Rappelons que si $f(x,y) = g(r,\theta)$, où $r > 0$ et $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, alors

$$(\Delta f)(x,y) = \Big(\frac{d^2}{dr^2}\,g + \frac{1}{r}\,\frac{d}{dr}\,g + \frac{1}{r^2}\,\frac{d^2}{d\theta^2}\,g\Big)(r,\theta).$$

On obtient ainsi pour le laplacien de $f_n(x,y) = g_n(t,\theta) = \mathrm{J}_n(t)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}$, et pour $t > 0$,

$$\big(\mathrm{J}_n''(t) + t^{-1}\mathrm{J}_n'(t) - n^2t^{-2}\,\mathrm{J}_n(t)\big)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}\,.$$

En sommant ces relations on obtient en écrivant que $t^2\Delta f + t^2 f = 0$ la relation

$$0 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \big(t^2\mathrm{J}_n''(t) + t\mathrm{J}_n'(t) + (t^2 - n^2)\mathrm{J}_n(t)\big)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}$$

qui montre que J_n vérifie l'équation de Bessel de paramètre n.

Dans la logique du calcul précédent, il est intéressant de noter, une fois l'équation de Bessel établie, que chaque morceau $v_n(x,y) = \mathrm{J}_n(r)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}$ vérifie l'équation $\Delta v_n = -v_n$. Si on change d'échelle la fonction v_μ définie par $v_\mu(x,y) = v_n(\mu x, \mu y)$ vérifie l'équation $\Delta v_\mu = -\mu^2 v_\mu$. Ces fonctions v_μ interviendront dans les modes propres de vibration du tambour.

Justifions le calcul précédent, c'est-à-dire justifions que les dérivées des séries précédentes sont bien les séries des dérivées. On obtient ceci par l'argument usuel de convergence normale des séries dérivées. Traitons par exemple le cas de la première dérivée par rapport à t. Chaque J_n s'exprime comme coefficient de Fourier,

$$\mathrm{J}_n(t) = \int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}t\sin\theta}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\theta}\,\frac{d\theta}{2\pi}$$

et

$$\mathrm{J}_n'(t) = \int_0^{2\pi} \big(\mathrm{i}\sin\theta\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}t\sin\theta}\big)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\theta}\,\frac{d\theta}{2\pi}$$

ce qui montre que les $(\mathrm{J}_n'(t))$ sont les coefficients de Fourier de la fonction $k_t(\theta) = \mathrm{i}\sin\theta\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}t\sin\theta}$; comme cette fonction est C^∞ en θ on est sûr que les coefficients $\mathrm{J}_n'(t)$ sont aussi sommables qu'il faut, mais on voudrait une majoration indépendante de t ; il faut alors revenir à la preuve de l'affirmation précédente, qui s'obtient en remarquant que

$$-n^2 \mathrm{J}'_n(t) = \int_0^{2\pi} k''_t(\theta)\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}n\theta} \,\frac{d\theta}{2\pi}$$

(deux intégrations par parties en θ), d'où

$$n^2 |\mathrm{J}'_n(t)| \le \int_0^{2\pi} |k''_t(\theta)| \,\frac{d\theta}{2\pi}$$

qui est facile à majorer par une quantité $\mathrm{M_T}$ indépendante de t, pourvu que t reste dans l'intervalle $[0, \mathrm{T}]$; en effet,

$$|k''_t(\theta)| = \Bigl|\bigl(-\mathrm{i}\sin\theta - t(2\cos^2\theta - \sin^2\theta) - \mathrm{i}t^2 \sin\theta\cos^2\theta\bigr)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}t\sin\theta}\Bigr| \le 1 + 3\mathrm{T} + \mathrm{T}^2 =: \mathrm{M_T}.$$

On a ainsi sur l'intervalle $[0, \mathrm{T}]$ la majoration

$$|\mathrm{J}'_n(t)| \le \frac{\mathrm{M_T}}{n^2}$$

qui donne bien la convergence normale de la série des dérivées sur l'intervalle $[0, \mathrm{T}]$, et qui suffit à justifier l'interversion de la série et de la dérivation. Les autres justifications sont analogues.

Formules pour les séries entières des fonctions de Bessel

On écrit ensuite en introduisant le réel $s = t/2$ pour aérer les formules,

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}t\sin\theta} = \exp\bigl((t/2)(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta})\bigr) = \exp\bigl(s\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\bigr)\exp\bigl(\overline{-s\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}\bigr) = \exp\bigl(s\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\bigr)\,\overline{\exp\bigl(-s\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\bigr)},$$

de sorte que $\mathrm{J}_0(t)$ apparaît comme un produit scalaire dans $\mathrm{L}_2(0, 2\pi)$,

$$\mathrm{J}_0(t) = \int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}t\sin\theta} \,\frac{d\theta}{2\pi} = \langle \exp\bigl(s\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\bigr), \exp\bigl(-s\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\bigr)\rangle =$$

$$\Bigl\langle \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{s^k}{k!}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\theta}, \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-s)^k}{k!}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\theta} \Bigr\rangle = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \,\frac{(t/2)^{2k}}{(k!)^2}.$$

L'écriture est peut-être plus agréable si on garde la variable $z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$,

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}t\sin\theta} = \mathrm{e}^{t(z - \overline{z})/2} = \exp(sz)\,\overline{\exp(-sz)}.$$

On obtient la formule pour J_n, $n > 0$, en translatant de n pas vers la droite le développement contenant les $(-t/2)$, donc

$$\mathrm{J}_n(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \,\frac{(t/2)^{2k+n}}{k!\,(k+n)!}.$$

On peut aussi définir des J_ν pour tout ν réel non entier en traitant $(k+n)!$ avec la fonction Γ,

$$\mathrm{J}_\nu(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \, \frac{(t/2)^{2k+\nu}}{k!\,\Gamma(k+\nu+1)}.$$

Il est facile de vérifier en utilisant seulement la relation $\Gamma(s+1) = s\,\Gamma(s)$ que cette fonction J_ν est solution de $t^2y'' + ty' + (t^2 - \nu^2)y = 0$. Ainsi, J_ν et $\mathrm{J}_{-\nu}$ sont deux solutions de l'équation de Bessel de paramètre ν, et elles sont indépendantes lorsque ν est non entier (observer leurs deux comportements à l'origine). Pour n entier < 0 on doit poser $\mathrm{J}_n = (-1)^n \mathrm{J}_{-n}$; les fonctions J_ν permettent aussi de trouver une deuxième solution dans le cas entier (fonction de Bessel de deuxième espèce, en général notée Y_n).

Retour au tambour

On peut montrer que la fonction J_0 a une infinité de zéros ; considérons le premier zéro $\mu = \mu_{0,1} > 0$. On introduit $f(r) = \mathrm{J}_0(\mu r)$, qui est nulle pour $r = 1$; posons $v(x) = f(\|x\|)$. On calcule $r^2\,\Delta v$,

$$\mu^2 r^2\,\mathrm{J}_0''(\mu r) + \mu r\,\mathrm{J}_0'(\mu r) = -\mu^2 r^2\,\mathrm{J}_0(\mu r),$$

ce qui montre $\Delta v = -\mu^2 v$. En fait ce calcul donne un mode propre pour tout zéro $\mu_{0,k}$ de la fonction J_0, et les solutions de l'équation des ondes correspondantes sont de la forme

$$u_k(x,t) = \mathrm{J}_0(\mu_{0,k}\|x\|)\,\sin(\mu_{0,k}t).$$

Pour tout entier $n \ge 1$ considérons les deux fonctions $f(r,\theta) = \mathrm{J}_n(\mu\,r)\sin(n\theta)$ et $\mathrm{J}_n(\mu\,r)\cos(n\theta)$, et la fonction $v(x,y)$ telle que $v(r\cos\theta, r\sin\theta) = f(r,\theta)$. On a déjà expliqué qu'en calculant en coordonnées polaires et en utilisant l'équation de Bessel, on voit que

$$\Delta v = -\mu^2\,v.$$

Pour que cette fonction soit de plus nulle au bord du disque de rayon 1, il faut que $\mathrm{J}_n(\mu) = 0$. Pour chaque entier n, on trouvera une suite de solutions $v_{n,k}$ correspondant à la suite des zéros $0 < \mu_{n,1} < \ldots < \mu_{n,k} < \ldots$ de la fonction J_n.

Il se produit un phénomène intéressant qui n'est pas facile à établir : si $0 \le m < n$, les fonctions de Bessel J_m et J_n n'ont pas de zéro commun, à part peut-être 0. Ce résultat est conséquence d'un théorème montré par Siegel en 1929 : les zéros > 0 des fonctions de Bessel d'indice entier sont des nombres transcendants. Il en résulte que les sous-espaces propres pour le problème de Dirichlet du disque unité sont de dimension 1 (lorsque $n = 0$) ou bien 2 (lorsque $n > 0$).