1. Intégration, jusqu'au théorème de Lebesgue

Contenu du chapitre

1.1. Intégration positive

Fonctions et ensembles

Quelques notations : si A, B sont deux sous-ensembles d'un ensemble X, on note $\mathrm{B} \setminus \mathrm{A}$ la *différence* ensembliste, qui est le sous-ensemble de X formé de tous les $b \in \mathrm{B}$ qui ne sont pas dans A ; on note A^c le *complémentaire* dans X du sous-ensemble $\mathrm{A} \subset \mathrm{X}$,

$$\mathrm{A}^c = \mathrm{X} \setminus \mathrm{A} \,;$$

si f est une fonction réelle sur X et si $t \in \mathbb{R}$, on note $\{f > t\}$ le sous-ensemble de X égal à $\{x \in \mathrm{X} : f(x) > t\}$ (ou bien $\{f \le t\}$, etc. . .) ; plus généralement si U est un sous-ensemble de $\mathbb{R}$, on note similairement $\{f \in \mathrm{U}\}$ pour $f^{-1}(\mathrm{U})$. On note $\mathbf{1}_\mathrm{A}$ la fonction indicatrice d'un sous-ensemble $\mathrm{A} \subset \mathrm{X}$, fonction égale à 1 sur A et à 0 en dehors de A.

1.1.a. *Arithmétique de* $[0,+\infty]$

La topologie de $[0,+\infty]$ peut être définie ainsi : un sous-ensemble V est ouvert si et seulement s'il est réunion d'ensembles de l'une des formes suivantes : intervalles $[0,a[$, $]a,b[$ ou bien $]b,+\infty]$. On peut aussi définir cette topologie à partir d'une distance, par exemple en posant

$$d(x,y) = \Bigl| \frac{x}{1+x} - \frac{y}{1+y} \Bigr|,$$

où on convient que $\infty/(1+\infty) = 1$; ceci revient à rendre $[0,+\infty]$ homéomorphe à $[0,1]$ au moyen de l'application croissante $x \to x/(1+x)$. Il en résulte que comme dans $[0,1]$, *toute suite croissante d'éléments de* $[0,+\infty]$ *converge dans* $[0,+\infty]$ *pour cette topologie ; tout sous-ensemble de* $[0,+\infty]$ *admet une borne supérieure dans* $[0,+\infty]$.

Par exemple, la borne supérieure de $\emptyset$ est 0, le plus petit élément de $[0,+\infty]$; la limite d'une suite croissante d'éléments de $[0,+\infty]$ est égale à la borne supérieure de l'ensemble des termes de la suite.

On définit les opérations d'addition et multiplication de la façon suivante : les résultats ont les valeurs habituelles quand les deux nombres sont finis ; on pose en outre $a + (+\infty) = +\infty$ pour tout $a \ge 0$ (ce qui va de soi), $a \times (+\infty) = +\infty$ si $a > 0$, et enfin $0 \times (+\infty) = 0$. Pour comprendre cette dernière convention il faut voir qu'on fait le choix qui permet de passer à la limite dans le cas de suites **croissantes** ; ainsi $0 = 0 \times n$ tend vers $0 \times (+\infty) = 0$ quand n croît vers $+\infty$. Plus généralement : si $(u_n) \subset [0,+\infty]$ tend en croissant vers u, et si $(v_n) \subset [0,+\infty]$ tend en croissant vers v, on a $u+v = \lim_n (u_n + v_n)$, $u \times v = \lim_n (u_n \times v_n)$.

On peut définir sans problème la somme de n'importe quelle série à termes dans $[0,+\infty]$,

$$\sum_{k=0}^{+\infty} u_k = \lim_n \, (u_0 + u_1 + \cdots + u_n),$$

car $s_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$ définit une suite croissante dans $[0,+\infty]$, qui admet toujours une limite dans $[0,+\infty]$.

Sommation en vrac

Il est sans doute utile d'introduire un langage et des propriétés qui permettent de traiter avec souplesse les sommations d'une infinité de quantités positives, sans être obligé d'en ordonner les termes. L'expression « sommation en vrac » est empruntée au livre de R. Godement, *Analyse*. On pourra dire que l'essentiel de ce qui suit n'est qu'un cas particulier de la théorie de l'intégration, que nous allons développer de toute façon, quand on l'applique à des *mesures de comptage*. Je crois cependant qu'il n'est pas raisonnable de renvoyer au (délicat) théorème de Fubini quand on veut simplement inverser deux opérations de sommation de séries à termes positifs...

Si $(u_i)_{i \in \mathrm{I}}$ est une famille quelconque d'éléments de $[0,+\infty]$, on pose

$$\sum_{i \in \mathrm{I}} u_i = \sup \Bigl\{ \sum_{j \in \mathrm{J}} u_j : \mathrm{J} \text{ fini } \subset \mathrm{I} \Bigr\}$$

(c'est en fait un cas particulier de la définition de l'intégrale, voir les remarques qui précèdent et la théorie qui suit). Si on veut remonter aux origines du monde mathématique, il faut commencer par définir les sommes finies $\sum_{j \in \mathrm{J}} u_j$: par récurrence sur le cardinal de J, on montre qu'il est légitime de poser, pour tout j_0 élément de J fini non vide,

$$\sum_{j \in \mathrm{J}} u_j = u_{j_0} + \sum_{j \in \mathrm{J} \setminus \{j_0\}} u_j.$$

Pour commencer la récurrence, on doit convenir que $\sum_{j \in \mathrm{J}} u_j = 0$ lorsque J est vide. Dans le cas des sommes portant sur un ensemble fini d'indices, on montre par récurrence sur la cardinalité les analogues des propriétés que nous voulons établir pour les sommations d'une infinité de termes : nous admettons ce point.

On n'a pas demandé que l'ensemble I des indices soit dénombrable. Cependant, dans le cas (de loin le plus important) où $\sum_{i \in \mathrm{I}} u_i$ est *fini*, on voit que l'ensemble

$$\mathrm{I}_0 = \{i \in \mathrm{I} : u_i > 0\}$$

est dénombrable (pour chaque entier k, l'ensemble des i tels que $u_i > 2^{-k}$ est fini). D'autre part, si un ensemble I dénombrable est énuméré comme

$$\mathrm{I} = \{i_0, i_1, \ldots, i_n, \ldots\},$$

la somme en vrac $\sum_{i \in \mathrm{I}} u_i$ est égale à la somme de la série $\sum_{k=0}^{+\infty} u_{i_k}$; plus généralement, si φ est une bijection de I sur un ensemble J, on voit facilement que

$$\sum_{i \in \mathrm{I}} v_{\varphi(i)} = \sum_{j \in \mathrm{J}} v_j. \tag{1}$$

Si l'ensemble d'indices I est partitionné en I_1 et I_2, alors

$$\sum_{i \in \mathrm{I}} u_i = \sum_{i \in \mathrm{I}_1} u_i + \sum_{i \in \mathrm{I}_2} u_i\,;$$

il est clair qu'on a l'inégalité $\sum_{\mathrm{I}} \le \sum_{\mathrm{I}_1} + \sum_{\mathrm{I}_2}$ (en effet, un sous-ensemble fini J de I se découpe en $\mathrm{J}_1 \subset \mathrm{I}_1$ et $\mathrm{J}_2 \subset \mathrm{I}_2$). Il faut montrer l'inégalité inverse ; pour cela on peut supposer que $\sum_{\mathrm{I}} u_i$ est finie, ce qui implique que les deux sous-sommes sont finies ; on peut alors trouver pour tout $\varepsilon > 0$ deux sous-ensembles finis $\mathrm{J}_k \subset \mathrm{I}_k$, $k = 1, 2$ tels que $\sum_{j \in \mathrm{J}_k} u_j > \sum_{i \in \mathrm{I}_k} u_i - \varepsilon/2$; la somme sur l'ensemble $\mathrm{J} = \mathrm{J}_1 \cup \mathrm{J}_2$ donne le résultat. L'égalité précédente se généralise par récurrence à une somme finie de sommations en vrac.

Si l'ensemble d'indices I est partitionné en ensembles $(\mathrm{I}_\alpha)_{\alpha \in \mathrm{A}}$, où A est un ensemble quelconque d'indices, alors

$$\sum_{i \in \mathrm{I}} u_i = \sum_{\alpha \in \mathrm{A}} \Bigl(\sum_{i \in \mathrm{I}_\alpha} u_i \Bigr). \tag{2}$$

L'inégalité $\le$ est claire : un sous-ensemble fini J de I se place dans une union finie d'ensembles finis $\mathrm{J}_b \subset \mathrm{I}_b$, pour $b \in \mathrm{B}$, où B est un sous-ensemble fini de A. L'inégalité inverse vient du point précédent.

En partitionnant un produit $\mathrm{I} \times \mathrm{J}$ en ensembles $\mathrm{I} \times \{j\}$, ou bien en $\{i\} \times \mathrm{J}$, on voit que

$$\sum_{i \in \mathrm{I}} \Bigl(\sum_{j \in \mathrm{J}} u_{i,j} \Bigr) = \sum_{(i,j) \in \mathrm{I} \times \mathrm{J}} u_{i,j} = \sum_{j \in \mathrm{J}} \Bigl(\sum_{i \in \mathrm{I}} u_{i,j} \Bigr).$$

En particulier
$$\Big(\sum_{i\in \mathrm{I}} u_i\Big)\Big(\sum_{j\in \mathrm{J}} v_j\Big) = \sum_{(i,j)\in \mathrm{I}\times \mathrm{J}} u_i v_j.$$
Par récurrence sur n on prouve que

(3) $$\prod_{k=1}^{n}\Big(\sum_{i\in \mathrm{I}_k} u_{k,i}\Big) = \sum_{(i_1,\ldots,i_n)\in \mathrm{I}_1\times\cdots\times \mathrm{I}_n} u_{1,i_1}u_{2,i_2}\ldots u_{n,i_n}$$

(utiliser $\mathrm{I} = \mathrm{I}_1$ et $\mathrm{J} = \mathrm{I}_2 \times \cdots \times \mathrm{I}_n$ avec $v_j = u_{2,i_2}\ldots u_{n,i_n}$).

Un exemple d'application. Soit $p_1 = 2 < p_2 < \ldots < p_n$ la liste des n plus petits nombres premiers ; pour tout réel $s \ge 1$, on a en appliquant les principes expliqués précédemment (l'équation (3) puis la propriété (1))
$$\prod_{k=1}^{n}\Big(1-\frac{1}{p_k^s}\Big)^{-1} = \prod_{k=1}^{n}\Big(\sum_{j=0}^{+\infty}\frac{1}{p_k^{sj}}\Big) = \sum_{(j_1,\ldots,j_n)\in\mathbb{N}^n}\frac{1}{p_1^{sj_1}}\frac{1}{p_2^{sj_2}}\cdots\frac{1}{p_n^{sj_n}} = \sum_{m\in \mathrm{M}_n}\frac{1}{m^s},$$
où
$$\mathrm{M}_n = \{m = p_1^{j_1}p_2^{j_2}\ldots p_n^{j_n} : j_1,\ldots,j_n \ge 0\}.$$
En effet, l'application de $\mathbb{N}^n$ dans $\mathbb{N}$ définie par
$$\varphi(j_1,\ldots,j_n) = p_1^{j_1}p_2^{j_2}\ldots p_n^{j_n}$$
est une bijection de $\mathbb{N}^n$ sur l'ensemble M_n (d'après l'unicité de la décomposition en facteurs premiers). Pour $s > 1$ on en déduit en faisant tendre n vers l'infini
$$\prod_{k=1}^{+\infty}\Big(1-\frac{1}{p_k^s}\Big)^{-1} = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^s}.$$
La somme de cette série est la valeur $\zeta(s)$ de la *fonction zêta* au point s.

Si les $(u_i)_{i\in \mathrm{I}}$ ne sont plus supposés positifs, mais si $\sum_{i\in \mathrm{I}}|u_i| < +\infty$, il est facile de donner un sens à
$$\sum_{i\in \mathrm{I}} u_i \in \mathbb{R},$$
par exemple en séparant les termes positifs et les termes négatifs. Une définition plus intrinsèque nous mènerait à la notion de *famille sommable*, voir Skandalis, *Topologie et Analyse*, section 7.4, définition p. 200.

1.1.b. *Algèbres, σ-algèbres (ou tribus)*

Définition. Une *algèbre* $\mathcal{A}$ de parties d'un ensemble X est un sous-ensemble $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\mathrm{X})$, qui contient $\emptyset$ et qui est stable par réunion finie et par passage au complémentaire :

- (i) $\emptyset \in \mathrm{A}$;
- (ii) $(\mathrm{A},\mathrm{B} \in \mathcal{A}) \Rightarrow (\mathrm{A}\cup\mathrm{B}) \in \mathcal{A}$;
- (iii) $\mathrm{A} \in \mathcal{A} \Rightarrow \mathrm{A}^c \in \mathcal{A}$.

Il en résulte la stabilité par intersection finie. On peut définir la notion d'algèbre de parties, si on préfère, en remplaçant la propriété (ii) par la propriété de *stabilité par intersection finie*.

Définition. Une *tribu* ou *σ-algèbre* de parties de X est une classe $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\mathrm{X})$ qui contient la partie vide $\emptyset$, et qui est stable par complémentaire et par *union dénombrable*.

Autrement dit, il suffit de remplacer dans la définition d'une algèbre l'axiome (ii) par l'axiome renforcé

$(ii)_\sigma$ pour toute suite (A_n) d'éléments de $\mathcal{A}$, on a $\bigcup_n \mathrm{A}_n \in \mathcal{A}$.

La tribu est le cadre naturel dans lequel toutes les opérations ensemblistes dénombrables sont permises. Pour qu'une algèbre soit en fait une tribu, il suffit d'ajouter la stabilité par réunion des suites croissantes (parce que $\bigcup_n \mathrm{A}_n$ est aussi égal à la réunion de la suite croissante $\mathrm{B}_n = \mathrm{A}_0 \cup \ldots \cup \mathrm{A}_n$), ou bien la stabilité par intersection des suites décroissantes.

Pour tout ensemble X, l'ensemble $\mathcal{P}(\mathrm{X})$ est évidemment une tribu de parties de X, de même que $\{\emptyset, \mathrm{X}\}$. Sur $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ ou $\mathbb{R}^d$, la tribu naturelle à considérer est la tribu engendrée par les ouverts ; on l'appelle la *tribu borélienne*.

Mesures positives sur une tribu

Un *espace mesurable* $(\Omega, \mathcal{A})$ est simplement le couple d'un ensemble Ω et d'une tribu $\mathcal{A}$ de parties de Ω.

Définition. Une *mesure positive* μ sur un espace mesurable $(\Omega, \mathcal{A})$ est une application $\mu : \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ telle que $\mu(\emptyset) = 0$ et telle que pour toute famille finie ou dénombrable $(\mathrm{A}_i)_{i\in\mathrm{I}}$ d'éléments deux à deux disjoints de $\mathcal{A}$, on ait

$$\mu\Big(\bigcup_{i\in\mathrm{I}} \mathrm{A}_i\Big) = \sum_{i\in\mathrm{I}} \mu(\mathrm{A}_i)$$

(tous les calculs étant faits avec la valeur $+\infty$ admise).

En prenant $\mathrm{I} = \{0, 1\}$, $\mathrm{A}_0 = \mathrm{A}$, $\mathrm{A}_1 = \mathrm{B}$ on obtient l'additivité finie (ii). On pourrait dire que la propriété $\mu(\emptyset) = 0$ résulte du choix $\mathrm{I} = \emptyset$, mais il me semble plus prudent de l'inclure explicitement dans la définition. Si la mesure prend au moins une valeur finie, l'égalité $\mu(\emptyset) = 0$ résulte de l'additivité finie, mais dans le cas le plus général, on a la mesure pathologique qui vaut $+\infty$ pour tout $\mathrm{A} \neq \emptyset$, qui nous oblige à inclure $\mu(\emptyset) = 0$ dans la définition.

Toute mesure possède la propriété de *régularité pour les suites croissantes* : si B_n est une suite croissante d'éléments de A et si $\mathrm{B} = \bigcup_n \mathrm{B}_n$ est la réunion de cette suite, on a

$$\mu(\mathrm{B}) = \lim_n \mu(\mathrm{B}_n).$$

En effet, on peut partitionner B en posant $\mathrm{A}_0 = \mathrm{B}_0$ et $\mathrm{A}_{n+1} = \mathrm{B}_{n+1} \setminus \mathrm{B}_n$ pour tout $n \geq 0$; puisque B est la réunion de la famille des ensembles deux à deux disjoints $(\mathrm{A}_n)_{n\geq 0}$, on voit que $\mu(\mathrm{B}) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mu(\mathrm{A}_k) = \lim_n \sum_{k=0}^{n} \mu(\mathrm{A}_k) = \lim_n \mu(\mathrm{B}_n)$. Inversement, si une fonction d'ensembles ν vérifie l'additivité finie et la régularité pour les limites croissantes, il en résulte que ν est σ-additive.

On dit qu'une mesure μ sur $(\Omega, \mathcal{A})$ est une *mesure finie* lorsque $\mu(\Omega) < +\infty$. Pour une mesure finie, on peut aussi passer à la limite pour les suites décroissantes, puisque dans ce cas on peut écrire

$$\mu(\mathrm{A}^c) = \mu(\Omega) - \mu(\mathrm{A}),$$

mais la régularité décroissante n'est pas vraie pour les mesures infinies (prendre par exemple $\mathrm{A}_n = [n, +\infty[$ et la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$).

Exemples.

1. La mesure sur un ensemble Ω qui est infinie pour tout sous-ensemble sauf pour $\emptyset$ n'a pas beaucoup d'intérêt, mais c'est une mesure, qui permet de voir que certains énoncés trop généraux sont faux.

2. La *mesure de comptage* μ sur un ensemble I est définie sur la tribu $\mathcal{P}(\mathrm{I})$; pour cette mesure, $\mu(\mathrm{A})$ est le nombre des éléments de A, c'est-à-dire aussi

$$\mu(\mathrm{A}) = \sum_{i \in \mathrm{I}} \mathbf{1}_{\mathrm{A}}(i)\,;$$

le résultat est infini pour tout sous-ensemble $\mathrm{A} \subset \mathrm{I}$ infini.

3. La mesure de Lebesgue sur $[0, 1]$, $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}^n$ est un exemple autrement important, mais son existence sur la tribu borélienne est loin d'être évidente.

Exercice. Montrer que pour toute suite croissante de mesures positives (μ_n) sur un espace mesurable $(\Omega, \mathcal{A})$, la limite $\mathrm{A} \in \mathcal{A} \to \mu(\mathrm{A}) = \lim_n \mu_n(\mathrm{A})$ est une mesure positive sur $(\Omega, \mathcal{A})$; pour toute suite $(\nu_k)_{k \geq 0}$ de mesures positives, $\sum_{k=0}^{+\infty} \nu_k$ est une mesure.

Pour les applications en Analyse classique, il est important de ne pas se limiter au cas des mesures finies ; cependant, les mesures infinies conduisent à des difficultés ; par exemple, il n'y a pas de bonne théorie du produit de deux mesures positives quelconques. On va souvent admettre la restriction raisonnable qui suit.

Définition. On dit qu'une mesure μ positive sur $(\Omega, \mathcal{A})$ est *σ-finie* s'il existe une suite (A_n) d'éléments de $\mathcal{A}$ telle que $\Omega = \bigcup_{n=0}^{+\infty} \mathrm{A}_n$ et $\mu(\mathrm{A}_n) < +\infty$ pour tout $n \geq 0$.

La mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$, la mesure de comptage sur $\mathbb{N}$ sont des exemples de mesures σ-finies.

Intégrale des fonctions étagées positives

Le point de vue le plus agréable pour ce paragraphe (et pour celui sur l'intégrale des fonctions positives) est de travailler avec l'ensemble $[0, +\infty]$, muni de l'arithmétique étendue introduite précédemment.

On considère un espace mesuré $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$; nous appelons *fonction $\mathcal{A}$-étagée* (réelle) une fonction f sur Ω qui ne prend qu'un nombre fini de valeurs *finies* $v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{R}$, de façon que l'ensemble $\{f = v_j\}$ soit un ensemble de $\mathcal{A}$ pour tout $j = 1, \ldots, n$. Si f est une fonction $\mathcal{A}$-étagée, on peut l'exprimer sous la forme $f = \sum_{i=1}^m a_i \, \mathbf{1}_{\mathrm{A}_i}$, où $\mathrm{A}_1, \ldots, \mathrm{A}_m$ est une partition de Ω en ensembles $\mathrm{A}_i \in \mathcal{A}$, et où $a_i \in \mathbb{R}$ est la valeur constante de f sur A_i (si A_i n'est pas vide ; si A_i est vide, a_i peut être n'importe quel nombre réel). Une façon d'obtenir une telle expression pour f est de considérer l'ensemble fini $v_1, \ldots, v_n$ des valeurs de f, de poser $\mathrm{V}_i = \{f = v_i\}$ pour tout i et de voir qu'on a $f = \sum_{i=1}^n v_i \, \mathbf{1}_{\mathrm{V}_i}$; cependant il est important de permettre un peu plus de souplesse dans la représentation de f, en n'exigeant pas que A_i soit précisément de la forme $\{f = v\}$ pour un certain v. On définit les fonctions étagées *à valeurs complexes* de façon tout à fait analogue.

On intègre d'abord les fonctions $\mathcal{A}$-étagées ≥ 0. Si f est une fonction $\mathcal{A}$-étagée ≥ 0, on l'exprime sous la forme $f = \sum_{i=1}^m a_i \, \mathbf{1}_{\mathrm{A}_i}$, où $\mathrm{A}_1, \ldots, \mathrm{A}_m$ est une partition de Ω en ensembles $\mathrm{A}_i \in \mathcal{A}$, et où $a_i \geq 0$; la quantité $\sum_{i=1}^m a_i \, \mu(\mathrm{A}_i)$ peut être $+\infty$ mais on va vérifier qu'elle ne dépend que de la fonction étagée f, et pas de la représentation de f du type précédent. On posera alors

$$\int f \, \mathrm{d}\mu = \sum_{i=1}^{m} a_i \, \mu(\mathrm{A}_i)$$

(élément de $[0, +\infty]$) et on dira que $\int f \, \mathrm{d}\mu$ est *l'intégrale* (par rapport à μ) de la fonction étagée $f \geq 0$.

Détaillons la preuve de l'indépendance par rapport à la représentation. Supposons que $f = \sum_{j=1}^{n} b_j \, \mathbf{1}_{\mathrm{B}_j}$ soit une autre représentation de la même fonction f, avec toujours $b_j \geq 0$ et $\mathrm{B}_j \in \mathcal{A}$ pour tout $j = 1, \ldots, n$, qui réalisent une deuxième partition de Ω. Les ensembles $\mathrm{C}_{i,j} = \mathrm{A}_i \cap \mathrm{B}_j$ forment une partition de Ω ; lorsque $\mathrm{C}_{i,j}$ est non vide, $a_i = b_j$ est la valeur de f sur $\mathrm{C}_{i,j}$, qu'on appellera $c_{i,j} = a_i = b_j$; si $\mathrm{C}_{i,j} = \emptyset$, alors $\mu(\mathrm{C}_{i,j}) = 0$, et $c_{i,j} \, \mu(\mathrm{C}_{i,j}) = 0 = a_i \, \mu(\mathrm{C}_{i,j}) = b_j \, \mu(\mathrm{C}_{i,j})$ dans ce cas, pour n'importe quel nombre $c_{i,j} \geq 0$; on aura donc dans tous les cas

$$c_{i,j} \, \mu(\mathrm{C}_{i,j}) = a_i \, \mu(\mathrm{C}_{i,j}) = b_j \, \mu(\mathrm{C}_{i,j})$$

pour tous i, j. On obtient ainsi

$$\sum_{i,j} c_{i,j} \, \mu(\mathrm{C}_{i,j}) = \sum_{i=1}^{m} \Bigl(\sum_{j=1}^{n} a_i \, \mu(\mathrm{C}_{i,j}) \Bigr) = \sum_{i=1}^{m} a_i \Bigl(\sum_{j=1}^{n} \mu(\mathrm{A}_i \cap \mathrm{B}_j) \Bigr) = \sum_{i=1}^{m} a_i \, \mu(\mathrm{A}_i)$$

(on note que $\mathrm{A}_i = \bigcup_{j=1}^{n} \mathrm{A}_i \cap \mathrm{B}_j$) et de même dans l'autre sens,

$$\sum_{i,j} c_{i,j} \, \mu(\mathrm{C}_{i,j}) = \sum_{j=1}^{n} \Bigl(\sum_{i=1}^{m} b_j \, \mu(\mathrm{C}_{i,j}) \Bigr) = \sum_{j=1}^{n} b_j \Bigl(\sum_{i=1}^{m} \mu(\mathrm{A}_i \cap \mathrm{B}_j) \Bigr) = \sum_{j=1}^{n} b_j \, \mu(\mathrm{B}_j).$$

Remarque. Lorsque la mesure μ est finie, il n'y a aucun problème pour définir tout de suite l'intégrale des fonctions étagées réelles ou même complexes, par la formule utilisée dans le cas positif. Mais pour une mesure infinie, le produit d'une valeur complexe non nulle a_i par une mesure infinie $\mu(\mathrm{A}_i)$ pose un problème : il faut se restreindre aux fonctions étagées telles que $\mu(\mathrm{A}_i)$ soit finie chaque fois que $a_i \neq 0$.

Premières propriétés

On démontre que $(f \leq g) \Rightarrow (\int f \, \mathrm{d}\mu \leq \int g \, \mathrm{d}\mu)$ et l'additivité dans le cas ≥ 0 (ainsi que la propriété triviale $\int (\lambda f) \, \mathrm{d}\mu = \lambda \int f \, \mathrm{d}\mu$, quand $\lambda \geq 0$) : il suffit de remarquer qu'étant données deux fonctions étagées, on peut raffiner les partitions de façon que les deux fonctions soient constantes sur les atomes $\mathrm{C}_{i,j}$ de la partition raffinée, comme on l'a fait ci-dessus. Si $f = \sum_i a_i \mathbf{1}_{\mathrm{A}_i} \leq \sum_j b_j \mathbf{1}_{\mathrm{B}_j} = g$, on aura $a_i \, \mu(\mathrm{C}_{i,j}) \leq b_j \, \mu(\mathrm{C}_{i,j})$ pour tous i, j et on raisonne comme ci-dessus ; idem pour l'additivité.

Remarque. Si f et g sont $\mathcal{A}$-étagées et si φ est une fonction quelconque de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, la fonction $\omega \to \varphi(f(\omega), g(\omega))$ est $\mathcal{A}$-étagée : raisonner sur les atomes $\mathrm{C}_{i,j}$ précédents.

Fonctions mesurables : le bagage minimal

Dans ce paragraphe, on va considérer des fonctions à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}} = [-\infty, +\infty]$; l'expression *fonction* ≥ 0 signifiera fonction à valeurs dans $[0, +\infty]$. On dit que la fonction f sur $(\Omega, \mathcal{A})$ à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$ est $\mathcal{A}$-*mesurable* si pour tout c réel, l'ensemble

$$\{f > c\} = \{\omega \in \Omega : f(\omega) > c\}$$

est dans la tribu $\mathcal{A}$. Il en résulte que $\{f \geq c\}$ est aussi dans $\mathcal{A}$, car

$$\{f \geq c\} = \bigcap_n \{f > c_n\} \in \mathcal{A}$$

si c_n est une suite strictement croissante vers c ; on a donc aussi $\{f < c\}$, $\{a < f < b\}$, etc... dans $\mathcal{A}$. Inversement, si on avait supposé $\{f < c\} \in \mathcal{A}$ pour tout c, on aurait retrouvé $\{f > c\}$ par les manipulations précédentes ; on peut donc définir la mesurabilité en demandant que $\{f < c\}$ soit dans la tribu $\mathcal{A}$ pour tout réel c.

Lemme 1.1.1. *Si $(f_i)_{i\in \mathrm{I}}$ est une famille finie ou dénombrable de fonctions $\mathcal{A}$-mesurables, les deux fonctions $\sup_{i\in \mathrm{I}} f_i$ et $\inf_{i\in \mathrm{I}} f_i$ sont $\mathcal{A}$-mesurables. Si (f_n) est une suite monotone de fonctions $\mathcal{A}$-mesurables, $\lim_n f_n$ est $\mathcal{A}$-mesurable. Si (f_n) est une suite de fonctions $\mathcal{A}$-mesurables, les fonctions $\limsup_n f_n$ et $\liminf_n f_n$ sont $\mathcal{A}$-mesurables. Si la suite (f_n) de fonctions $\mathcal{A}$-mesurables converge simplement sur Ω, la fonction $\lim_n f_n$ est $\mathcal{A}$-mesurable.*

Preuve. On travaille à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$, ce qui permet de donner un sens à tous les inf et sup considérés. Pour la mesurabilité du sup, on note que pour tout réel c,

$$\{\sup_{i\in \mathrm{I}} f_i > c\} = \bigcup_{i\in \mathrm{I}} \{f_i > c\} \in \mathcal{A},$$

car I est fini ou dénombrable ; pour l'inf,

$$\{\inf_{i\in \mathrm{I}} f_i < c\} = \bigcup_{i\in \mathrm{I}} \{f_i < c\} \in \mathcal{A}.$$

Si la suite (f_n) est croissante, sa limite simple est égale à $\sup_n f_n$, donc cette limite est mesurable ; si la suite (f_n) est décroissante, sa limite est égale à $\inf_n f_n$. Par ailleurs,

$$\limsup_n f_n = \lim_n \bigl(\sup_{k\geq n} f_k\bigr)$$

est limite décroissante de fonctions mesurables (comme sup dénombrables) ; enfin, si la suite converge simplement, la limite est égale à lim sup (et aussi à lim inf).

Proposition 1.1.2. *Toute fonction $\mathcal{A}$-mesurable positive est limite d'une suite* croissante *de fonctions $\mathcal{A}$-étagées positives. Toute fonction $\mathcal{A}$-mesurable f à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$ est limite simple d'une suite de fonctions $\mathcal{A}$-étagées (f_n) telles que $|f_n| \leq |f|$.*

Démonstration. Considérons une fonction mesurable positive f, et expliquons d'abord le principe général : soit (R_n) une suite croissante de sous-ensembles finis de $[0, +\infty[$, contenant tous 0, et dont la réunion soit dense dans $[0, +\infty]$. On définit $f_n(\omega)$ comme le plus grand élément r de R_n tel que $r \leq f(\omega)$; comme $0 \in \mathrm{R}_n$, on a $0 \leq f_n(\omega)$;

comme $\mathrm{R}_n \subset \mathrm{R}_{n+1}$, on a $f_n(\omega) \le f_{n+1}(\omega)$. La densité de la réunion des R_n implique la convergence simple de (f_n) vers f.

Si on prend $\mathrm{R}_n = \{i/2^n : i = 0, \ldots, 4^n\}$, on définit f_n qui prend les valeurs $i/2^n$ pour $i = 0, \ldots, 4^n$, avec $\{f_n = i/2^n\} = \{i/2^n \le f < (i+1)/2^n\}$ quand $0 \le i < 4^n$ et $\{f_n = 2^n\} = \{f \ge 2^n\}$. On voit qu'on définit ainsi une fonction f_n qui est $\mathcal{A}$-étagée, et que la suite (f_n) tend simplement vers f, en croissant. On peut aussi définir cette même fonction f_n par la formule

$$\forall \omega \in \Omega, \quad f_n(\omega) = \min\bigl\{2^n,\, 2^{-n}\bigl[2^n f(\omega)\bigr]\bigr\}$$

où $[x]$ désigne la partie entière d'un réel x.

Si f est mesurable à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$, on note que la fonction $|f|$ est mesurable car

$$\{|f| > c\} = \{f > c\} \cup \{f < -c\} \in \mathcal{A}.$$

On peut trouver une suite croissante (φ_n) de fonctions étagées qui tend vers $|f|$ et on pose pour tout n

$$f_n = \bigl(\mathbf{1}_{\{f>0\}} - \mathbf{1}_{\{f<0\}}\bigr)\, \varphi_n.$$

Cette suite (f_n) est formée de fonctions étagées, elle tend simplement vers f et $|f_n| \le |f|$ pour tout n.

Remarque. La somme de deux fonctions mesurables ≥ 0 est mesurable. Si f est mesurable positive et $a \ge 0$, la fonction af est mesurable.

Il suffit d'utiliser les deux résultats qui précèdent : si f, g sont mesurables, alors $f = \lim_n f_n$, $g = \lim_n g_n$, avec (f_n), (g_n) suites croissantes de fonctions étagées, donc $f + g = \lim_n \nearrow (f_n + g_n)$ est mesurable. L'affirmation sur af est évidente, en examinant les ensembles $\{af > c\}$.

On voit bien qu'on pourrait aller plus loin et se débarrasser de l'hypothèse que les fonctions sont ≥ 0, dans certaines limites : si f, g sont à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$, la fonction $f + g$ n'a pas de sens en général (à cause du cas où $f(\omega) + g(\omega)$ serait de la forme $+\infty + (-\infty)$, expression qui n'a pas de sens raisonnable). On a la propriété suivante.

Remarque 1.1.3. Si φ est une fonction réelle continue sur $\mathbb{R}^2$ et si f, g sont $\mathcal{A}$-mesurables à valeurs dans $\mathbb{R}$, la fonction $\omega \to \varphi(f(\omega), g(\omega))$ est $\mathcal{A}$-mesurable.

Preuve : en effet, il existe deux suites (f_n), (g_n) de fonctions $\mathcal{A}$-étagées qui tendent simplement vers f, g ; la suite $\varphi(f_n, g_n)$ est formée de fonctions $\mathcal{A}$-étagées, et converge simplement vers $\varphi(f, g)$ qui est donc $\mathcal{A}$-mesurable.

1.1.c. *Intégrale des fonctions mesurables positives*

Définition. L'intégrale d'une fonction mesurable $f \ge 0$ est le sup des intégrales des fonctions étagées $g \le f$.

Avec cette définition, il est évident que $0 \le f_1 \le f_2$ implique $\int f_1 \,\mathrm{d}\mu \le \int f_2 \,\mathrm{d}\mu$; il est clair aussi que $\int (af) \,\mathrm{d}\mu = a \int f \,\mathrm{d}\mu$ pour tout $a \ge 0$, et de plus on voit facilement que $\int (f_1 + f_2) \,\mathrm{d}\mu \ge \int f_1 \,\mathrm{d}\mu + \int f_2 \,\mathrm{d}\mu$; il y a en fait égalité, mais nous prouverons ce point plus loin, après le lemme de convergence monotone.

Exemples.

1. On a défini $\sum_{i\in \mathrm{I}} u_i$ pour toute famille $(u_i)_{i\in \mathrm{I}}$ de réels ≥ 0. La quantité $\sum_{i\in \mathrm{I}} u_i$ est l'intégrale pour la mesure de comptage de la fonction positive $u : i \to u_i$ définie sur l'ensemble I.

2. *Intégrale de Riemann*. Désignons par λ la mesure de Lebesgue sur la droite $\mathbb{R}$. Si une fonction mesurable positive f sur un intervalle fermé borné $[a, b]$ est intégrable au sens de Riemann, on voit que

$$\int_{[a,b]} f\,\mathrm{d}\lambda = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t,$$

où la deuxième expression désigne l'intégrale au sens de Riemann. En effet, si φ est une *fonction en escalier*, c'est un cas particulier de fonction étagée, et on vérifie facilement que

$$\int_{[a,b]} \varphi\,\mathrm{d}\lambda = \int_a^b \varphi(t)\,\mathrm{d}t\,;$$

par définition de l'intégrale de Riemann, on peut trouver pour tout $\varepsilon > 0$ deux fonctions en escalier φ_1, φ_2 qui vérifient les inégalités $0 \leq \varphi_1 \leq f \leq \varphi_2$ et $\int_a^b \bigl(\varphi_2(t) - \varphi_1(t)\bigr)\,\mathrm{d}t < \varepsilon$. On aura

$$\int_a^b \varphi_1(t)\,\mathrm{d}t = \int_{[a,b]} \varphi_1\,\mathrm{d}\lambda \leq \int_{[a,b]} f\,\mathrm{d}\lambda \leq \int_{[a,b]} \varphi_2\,\mathrm{d}\lambda = \int_a^b \varphi_2(t)\,\mathrm{d}t$$

ce qui montre que $\int_{[a,b]} f\,\mathrm{d}\lambda$ et $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ diffèrent de moins de ε, pour tout $\varepsilon > 0$, donc les deux intégrales sont égales.

Lemme-Exercice corrigé.

a. Si f est mesurable ≥ 0, montrer que $\int f\,\mathrm{d}\mu = 0$ si et seulement si $\mu(\{f > 0\}) = 0$.

b. Montrer que si $\int f\,\mathrm{d}\mu < \infty$, alors $\mu(\{f = +\infty\}) = 0$.

Solution de a. Supposons que $\{f > 0\}$ soit μ-négligeable. Par définition, $\int f\,\mathrm{d}\mu$ est le sup des $\int g\,\mathrm{d}\mu$ pour les g étagées telles que $0 \leq g \leq f$. Si on écrit $g = \sum_{i=1}^n a_i \mathbf{1}_{\mathrm{A}_i}$, avec (A_i) partition de Ω en ensembles de $\mathcal{A}$, on aura que $\mathrm{A}_i \subset \{f > 0\}$ si $a_i > 0$, donc $\mu(\mathrm{A}_i) = 0$ et $a_i\,\mu(\mathrm{A}_i) = 0$ dans ce cas ; si $a_i = 0$ on a aussi $a_i\,\mu(\mathrm{A}_i) = 0$, donc $a_i\,\mu(\mathrm{A}_i) = 0$ pour tout i, donc $\int g\,\mathrm{d}\mu = \sum_{i=1}^n a_i\,\mu(\mathrm{A}_i) = 0$.

Inversement si $\int f\,\mathrm{d}\mu = 0$, on pose $\mathrm{B}_n = \{f \geq 2^{-n}\}$ pour tout entier $n \geq 0$ et on constate que $0 \leq 2^{-n}\mathbf{1}_{\mathrm{B}_n} \leq f$ donc $0 \leq 2^{-n}\mu(\mathrm{B}_n) \leq \int f\,\mathrm{d}\mu = 0$, donc $\mu(\mathrm{B}_n) = 0$; ceci étant vrai pour tout n, on aura $\mu(\bigcup_n \mathrm{B}_n) = 0$, et $\bigcup_n \mathrm{B}_n = \{f > 0\}$.

Solution de b. Pour tout entier n on a $2^n \mathbf{1}_{\{f=+\infty\}} \leq f$ donc $2^n \mu(\{f = +\infty\}) \leq \int f\,\mathrm{d}\mu$ ce qui donne $\mu(\{f = +\infty\}) \leq 2^{-n} \int f\,\mathrm{d}\mu$ pour tout n et $\mu(\{f = +\infty\}) = 0$ à la limite.

Proposition 1.1.4 : lemme des suites croissantes, ou de convergence monotone. *Si une suite (f_n) de fonctions mesurables ≥ 0 tend en croissant vers f, on a*

$$\int f\,\mathrm{d}\mu = \lim_n \int f_n\,\mathrm{d}\mu.$$

Démonstration. On sait que la fonction limite f est mesurable, d'après le lemme 1.1.1. Soit $g = \sum_{j=1}^m a_j \mathbf{1}_{\mathrm{A}_j}$ une fonction étagée positive $\le f$, avec des $\mathrm{A}_j \in \mathcal{A}$ deux à deux disjoints, et $a_j > 0$ pour $j = 1, \ldots, m$ (il est inutile de faire figurer des A_j tels que $a_j = 0$, puisque la fonction $a_j \mathbf{1}_{\mathrm{A}_j}$ est nulle dans ce cas) ; soit $\varepsilon \in]0,1[$ donné, posons $a'_j = (1-\varepsilon) a_j$ et considérons

$$\mathrm{A}_{j,n} = \{\omega \in \mathrm{A}_j : f_n(\omega) > a'_j\}$$

pour $j = 1, \ldots, m$ et tout entier n. Cette suite d'ensembles est croissante en n pour chaque j ; pour tout $\omega \in \mathrm{A}_j$, on a $\lim_n f_n(\omega) = f(\omega) \ge g(\omega) = a_j > a'_j$, donc $f_n(\omega) > a'_j$ pour n assez grand, ce qui signifie que l'ensemble $\mathrm{A}_{j,n}$ tend en croissant avec n vers A_j. Ceci implique que

$$\lim_n \mu(\mathrm{A}_{j,n}) = \mu(\mathrm{A}_j) \,;$$

d'autre part on voit que

$$g_n = \sum_{j=1}^m a'_j \, \mathbf{1}_{\mathrm{A}_{j,n}} \le f_n \,;$$

en effet, les ensembles $(\mathrm{A}_{j,n})_{j=1}^m$ sont deux à deux disjoints ; si ω est dans $\mathrm{A}_{j_0,n}$, on a $f_n(\omega) > a'_{j_0} = g_n(\omega)$ par définition de $\mathrm{A}_{j_0,n}$, et si ω n'est dans aucun $\mathrm{A}_{j,n}$ on a $g_n(\omega) = 0 \le f_n(\omega)$. Il en résulte que

$$(1-\varepsilon) \int g \, \mathrm{d}\mu = \sum_{j=1}^m a'_j \, \mu(\mathrm{A}_j) = \lim_n \sum_{j=1}^m a'_j \, \mu(\mathrm{A}_{j,n}) = \lim_n \int g_n \, \mathrm{d}\mu \le \lim_n \int f_n \, \mathrm{d}\mu.$$

Si $\varepsilon > 0$ tend vers 0, on déduit que

$$\int g \, \mathrm{d}\mu \le \lim_n \int f_n \, \mathrm{d}\mu,$$

pour toute fonction étagée $g \le f$, donc $\int f \, \mathrm{d}\mu \le \lim_n \int f_n \, \mathrm{d}\mu$; l'inégalité inverse est évidente.

Conséquence : additivité de l'intégrale. Si f et g sont deux fonctions mesurables ≥ 0, on peut trouver deux suites croissantes (f_n) et (g_n) de fonctions étagées qui tendent vers f et g respectivement ; on passe à la limite croissante dans l'additivité de l'intégrale pour les fonctions étagées, et on obtient pour tous $a, b \ge 0$, puisque $af + bg$ est la limite croissante de la suite $af_n + bg_n$

$$\int (af + bg) \, \mathrm{d}\mu = a \int f \, \mathrm{d}\mu + b \int g \, \mathrm{d}\mu.$$

Proposition 1.1.5. *Si (u_k) est une suite de fonctions mesurables ≥ 0, on a*

$$\int_\Omega \Big(\sum_{k=0}^{+\infty} u_k(\omega) \Big) \, \mathrm{d}\mu(\omega) = \sum_{k=0}^{+\infty} \int_\Omega u_k(\omega) \, \mathrm{d}\mu(\omega)$$

avec les conventions d'usage sur la valeur $+\infty$.

Démonstration. La suite $f_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$ est croissante, de limite $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k$; par convergence monotone et additivité de l'intégrale on obtient

$$\int_\Omega \Big(\sum_{k=0}^{+\infty} u_k \Big) \, \mathrm{d}\mu = \lim_n \int_\Omega f_n \, \mathrm{d}\mu = \lim_n \Big(\sum_{k=0}^{n} \int_\Omega u_k \, \mathrm{d}\mu \Big) = \sum_{k=0}^{+\infty} \int_\Omega u_k \, \mathrm{d}\mu.$$

Mesures à densité

Si f est une fonction $\mathcal{A}$-mesurable ≥ 0 sur Ω, on peut définir une nouvelle mesure $\nu = f\mu$ sur $(\Omega, \mathcal{A})$ (on dit et on note aussi $\mathrm{d}\nu(\omega) = f(\omega)\,\mathrm{d}\mu(\omega)$, ou $\mathrm{d}\nu = f\,\mathrm{d}\mu$) en posant pour tout $\mathrm{A} \in \mathcal{A}$

$$\nu(\mathrm{A}) = \int_\Omega \mathbf{1}_\mathrm{A} f\,\mathrm{d}\mu = \int_\mathrm{A} f\,\mathrm{d}\mu.$$

La proposition précédente montre que ν est une mesure ; en effet, si les (A_k) sont deux à deux disjoints de réunion A, on a $\mathbf{1}_\mathrm{A} = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbf{1}_{\mathrm{A}_k}$ donc

$$\nu(\mathrm{A}) = \int \Bigl(\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbf{1}_{\mathrm{A}_k} f\Bigr)\,\mathrm{d}\mu = \sum_{k=0}^{+\infty} \int \mathbf{1}_{\mathrm{A}_k} f\,\mathrm{d}\mu = \sum_{k=0}^{+\infty} \nu(\mathrm{A}_k).$$

De plus, pour toute fonction mesurable positive g on a

$$\int g\,\mathrm{d}\nu = \int gf\,\mathrm{d}\mu\,;$$

la relation est vraie pour les fonctions g étagées par définition et linéarité, et passe aux fonctions g mesurables par le lemme de convergence monotone appliqué deux fois, une fois à μ et une fois à ν.

Remarque en passant. *Si on a associé à chaque fonction $\mathcal{A}$-mesurable positive f sur Ω un nombre $\mathrm{I}(f) \in [0, +\infty]$ de façon que :* **1.**— *l'application* I *vérifie la propriété de « linéarité positive », c'est-à-dire que $\mathrm{I}(af + bg) = a\mathrm{I}(f) + b\mathrm{I}(g)$ quand $a, b \in [0, +\infty]$;* **2.**— *on a $\mathrm{I}(f) = \lim_n \mathrm{I}(f_n)$ quand f est la limite croissante de la suite (f_n), alors*

- *la formule $\mathrm{A} \in \mathcal{A} \to \mu(\mathrm{A}) = \mathrm{I}(\mathbf{1}_\mathrm{A})$ définit une mesure μ sur $(\Omega, \mathcal{A})$;*
- *pour toute fonction $\mathcal{A}$-mesurable positive f sur Ω, on a*

$$\mathrm{I}(f) = \int f\,\mathrm{d}\mu.$$

On a vu dans la preuve de la proposition 1.1.5 que l'additivité et le passage à la limite croissante impliquent que

$$\mathrm{I}\Bigl(\sum_{k=0}^{+\infty} u_k\Bigr) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathrm{I}(u_k)$$

pour toute série $\sum u_k$ de fonctions positives ; en particulier, si $(\mathrm{A}_k) \subset \mathcal{A}$ est une famille d'ensembles deux à deux disjoints, et si $\mathrm{A} = \bigcup_{k=0}^{+\infty} \mathrm{A}_k$,

$$\mu(\mathrm{A}) = \mathrm{I}(\mathbf{1}_\mathrm{A}) = \mathrm{I}\Bigl(\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbf{1}_{\mathrm{A}_k}\Bigr) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathrm{I}(\mathbf{1}_{\mathrm{A}_k}) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mu(\mathrm{A}_k)$$

donc μ est une mesure ; par linéarité positive, on a pour toute fonction étagée positive $\varphi = \sum_{j=1}^n c_j \mathbf{1}_{\mathrm{A}_j}$

$$\mathrm{I}(\varphi) = \sum_{j=1}^n c_j \mathrm{I}(\mathbf{1}_{\mathrm{A}_j}) = \sum_{j=1}^n c_j \mu(\mathrm{A}_j) = \int \varphi\,\mathrm{d}\mu,$$

et on passe aux fonctions mesurables positives générales par limite croissante de suites d'étagées positives, en utilisant le lemme de convergence monotone pour l'intégrale et la propriété **2** de l'application I.

Proposition 1.1.6 : lemme de Fatou. *Si (f_n) est une suite de fonctions mesurables* ≥ 0,

$$\int \liminf_n f_n \,\mathrm{d}\mu \leq \liminf_n \int f_n \,\mathrm{d}\mu.$$

Démonstration. Posons $g_n = \inf_{m\geq n} f_m \geq 0$. On sait que g_n est mesurable (d'après le lemme 1.1.1). Pour chaque entier $m \geq n$ on a évidemment $g_n \leq f_m$, donc $\int g_n \leq \int f_m$ et par conséquent on a aussi

$$\int g_n \,\mathrm{d}\mu \leq \inf_{m\geq n} \int f_m \,\mathrm{d}\mu.$$

D'après le lemme des suites croissantes 1.1.4, le premier terme de l'inégalité précédente croît vers $\int \liminf_n f_n$, parce que (g_n) tend en croissant vers $\liminf_n f_n$, alors que le deuxième croît vers $\liminf_n \int f_n$, ce qui donne à la limite le résultat voulu.

1.1.d. *Intégrale des fonctions réelles*

Contrairement aux paragraphes précédents, on va considérer maintenant des fonctions mesurables à valeurs dans $\mathbb{R}$ (valeurs *finies*). On a dit qu'une fonction réelle f sur Ω est *$\mathcal{A}$-mesurable* si l'ensemble $\{f > c\}$ est dans la tribu $\mathcal{A}$, pour tout nombre réel c ; on a vu que cela implique que les ensembles $\{f \geq c\}$, $\{f < c\}$, $\{f \leq c\}$ sont tous dans $\mathcal{A}$. On peut écrire $f = f^+ - f^-$, où $f^+ = \max(f, 0)$ et $f^- = \max(-f, 0)$. Ces deux fonctions f^+ et f^- sont mesurables ≥ 0 (par exemple par la remarque 1.1.3). On a $f^+, f^- \leq f^+ + f^- = |f|$; notons que $|f| = f^+ + f^-$ est mesurable.

Rappelons que d'après la proposition 1.1.2, toute fonction $\mathcal{A}$-mesurable réelle f est limite simple d'une suite (f_n) de fonctions $\mathcal{A}$-étagées telles que $|f_n| \leq |f|$.

Définition. On désigne par $\mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ l'espace vectoriel des fonctions $\mathcal{A}$-mesurables f à valeurs dans $\mathbb{R}$ telles que $\int |f| \,\mathrm{d}\mu < +\infty$.

Si $f \in \mathcal{L}^1$, on peut écrire $f = f^+ - f^-$, et $f^+, f^- \leq f^+ + f^- = |f|$, donc $\int f^+ \,\mathrm{d}\mu$ et $\int f^- \,\mathrm{d}\mu$ sont finies ; il y a donc au moins une façon d'écrire $f = f_1 - f_2$ avec f_1, f_2 mesurables ≥ 0 d'intégrale finie. Si on a une autre décomposition $f = g_1 - g_2$ avec g_1, g_2 mesurables ≥ 0 d'intégrale finie, on remarque que $f_1 + g_2 = f_2 + g_1$ et on utilise l'additivité de l'intégrale dans le cas positif pour vérifier que $\int f_1 - \int f_2 = \int g_1 - \int g_2$. On peut donc poser

$$\int f \,\mathrm{d}\mu = \int f_1 \,\mathrm{d}\mu - \int f_2 \,\mathrm{d}\mu$$

pour n'importe quelle façon de représenter f sous la forme $f = f_1 - f_2$ avec f_1, f_2 mesurables ≥ 0 d'intégrale finie. En particulier cette nouvelle définition est cohérente avec la définition antérieure du cas positif. Il est facile de vérifier la linéarité de l'intégrale. Notons aussi que

$$\Bigl|\int f \,\mathrm{d}\mu\Bigr| = \Bigl|\int f^+ \,\mathrm{d}\mu - \int f^- \,\mathrm{d}\mu\Bigr| \leq \int f^+ \,\mathrm{d}\mu + \int f^- \,\mathrm{d}\mu = \int |f| \,\mathrm{d}\mu.$$

Remarque. Si f est mesurable de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$ et si f est intégrable-Riemann sur $[a, b]$, alors f est Lebesgue-intégrable, et les intégrales sont égales.

Preuve : par définition les fonctions Riemann-intégrables sont bornées ; si $|f| \leq \mathrm{M}$, la fonction $f + \mathrm{M}$ est mesurable positive, intégrable Riemann ; on a vu que dans ce cas les intégrales coïncident. On en déduit le résultat annoncé pour $f = (f + \mathrm{M}) - \mathrm{M}$.

Remarque. Si f est mesurable ≥ 0 et si $\mathrm{d}\nu = f \,\mathrm{d}\mu$, une fonction g mesurable réelle est ν-intégrable si et seulement si gf est μ-intégrable, et

$$\int g \,\mathrm{d}\nu = \int gf \,\mathrm{d}\mu.$$

En effet, on sait d'après le cas positif que

$$\int |g| \,\mathrm{d}\nu = \int |g| f \,\mathrm{d}\mu, \quad \int g_+ \,\mathrm{d}\nu = \int g_+ f \,\mathrm{d}\mu, \quad \int g_- \,\mathrm{d}\nu = \int g_- f \,\mathrm{d}\mu.$$

Le *théorème de convergence dominée de Lebesgue* est un outil extrêmement utile de la théorie de l'intégration. Il résulte assez facilement du lemme de Fatou, mais l'information qui est donnée par le théorème de Lebesgue est souvent plus directement exploitable.

Théorème 1.1.7 : théorème de convergence dominée de Lebesgue, première manière. *Si une suite $(f_n) \subset \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ de fonctions réelles tend simplement vers f et si $|f_n| \leq g$ pour tout n, avec $g \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, alors f est intégrable et*

$$\int_\Omega f \,\mathrm{d}\mu = \lim_n \int_\Omega f_n \,\mathrm{d}\mu.$$

Démonstration. On va utiliser Fatou. Dans le lemme de Fatou, on doit supposer que les fonctions considérées sont positives, mais on va pouvoir se ramener à cette situation grâce à l'existence d'un «plancher intégrable», à savoir la fonction $-g$: d'après l'hypothèse, on a l'encadrement

$$-g \leq f_n \leq g$$

pour tout n, ce qui montre que la fonction $g_n = g + f_n$ est une fonction mesurable positive, donc d'après Fatou 1.1.6,

$$\int_\Omega \liminf_n g_n \,\mathrm{d}\mu \leq \liminf_n \int_\Omega g_n \,\mathrm{d}\mu.$$

On a

$$\liminf_n g_n = g + \liminf_n f_n = g + \lim_n f_n = g + f\,;$$

la fonction f est mesurable, comme limite simple d'une suite de fonctions mesurables, et de la majoration $|f_n| \leq g$ on déduit $|f| \leq 2g$ à la limite, donc f est intégrable. La conséquence du lemme de Fatou se récrit

$$\int_\Omega g \,\mathrm{d}\mu + \int_\Omega f \,\mathrm{d}\mu = \int_\Omega \liminf_n g_n \,\mathrm{d}\mu \leq \liminf_n \int_\Omega g_n \,\mathrm{d}\mu = \int_\Omega g \,\mathrm{d}\mu + \liminf_n \int_\Omega f_n \,\mathrm{d}\mu.$$

Puisque l'intégrale de g est finie, on peut la retrancher aux deux membres pour obtenir

$$\int_\Omega f \, \mathrm{d}\mu \le \liminf_n \int_\Omega f_n \, \mathrm{d}\mu.$$

Enfin, l'application du même raisonnement à la suite des opposées $-f_n$ donne

$$\limsup_n \int_\Omega f_n \, \mathrm{d}\mu \le \int_\Omega f \, \mathrm{d}\mu \le \liminf_n \int_\Omega f_n \, \mathrm{d}\mu$$

et achève la preuve.

Remarque. Sous les hypothèses du théorème de Lebesgue, on peut montrer sans se fatiguer un résultat apparemment plus fort,

$$\int_\Omega |f - f_n| \, \mathrm{d}\mu \to 0$$

(qui signifie que la suite (f_n) converge vers f dans l'espace $\mathrm{L}^1(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$). En effet, la suite $|f_n - f|$ tend simplement vers 0, et on a la domination $|f_n - f| \le 2g$ par une fonction intégrable fixe. Ce petit raisonnement permettra aussi de déduire le théorème de Lebesgue pour les fonctions complexes, sans être obligé de passer par les parties réelle et imaginaire.

Remarque. La démonstration précédente suggère un lemme de Fatou avec « plancher intégrable » qui se formulerait ainsi : *si v est une fonction $\mathcal{A}$-mesurable* intégrable *et si $(f_n) \subset \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ est une suite de fonctions réelles telles que $f_n \ge v$, on a*

$$\int_\Omega \liminf_n f_n \, \mathrm{d}\mu \le \liminf_n \int_\Omega f_n \, \mathrm{d}\mu.$$

Cet énoncé est correct, mais il y a un léger problème que nous ne ferons qu'évoquer : si $f = \liminf_n f_n$, on a certainement $\int f_- < +\infty$ mais il est possible que $\int f_+ = +\infty$; il faudrait faire une petite extension dans cette direction de la notion d'intégrale pour pouvoir interpréter l'énoncé précédent. Pour les détails, le lecteur devra se rapporter à son manuel préféré.

1.2. Jeux de tribus

Toute intersection de tribus de parties de X est une tribu de parties de X. Il en résulte que pour toute classe $\mathcal{C}$ de parties de X, il existe une plus petite tribu contenant $\mathcal{C}$. On l'appelle la *tribu engendrée* par la classe $\mathcal{C}$, et on la note $\sigma(\mathcal{C})$. Évidemment, si $\mathcal{C}$ est déjà une tribu, alors $\sigma(\mathcal{C}) = \mathcal{C}$.

Principe trivial et répété sans cesse :

si $\mathcal{C} \subset \mathcal{A}$, avec $\mathcal{A}$ une tribu, alors $\sigma(\mathcal{C}) \subset \mathcal{A}$.

Mettons ce petit principe en application. La tribu borélienne de $\mathbb{R}$ est la tribu $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ qui est engendrée par les ouverts de $\mathbb{R}$.

Proposition. *La tribu borélienne de $\mathbb{R}$ est engendrée par la classe $\mathcal{C}$ formée des intervalles $]c, +\infty[$, où c varie dans $\mathbb{R}$.*

Démonstration. Posons $\mathcal{A} = \sigma(\mathcal{C})$, et montrons que $\mathcal{A} = \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$. Évidemment $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ puisque $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ contient tous les générateurs de $\mathcal{A}$, qui sont des intervalles *ouverts*. Pour tout c, l'intervalle fermé $[c, +\infty[$ est l'intersection de la suite des $]c - 2^{-n}, +\infty[$, donc $[c, +\infty[\in \mathcal{A}$ pour tout c réel ; en passant au complémentaire on voit que $]-\infty, b[$ est dans $\mathcal{A}$, et par intersection avec $]a, +\infty[$ on déduit que tout intervalle $]a, b[$ est dans $\mathcal{A}$. Comme tout ouvert de $\mathbb{R}$ est réunion dénombrable d'intervalles ouverts, on voit que les générateurs de $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ sont dans $\mathcal{A}$, donc $\mathcal{B}_{\mathbb{R}} \subset \mathcal{A}$, d'où l'égalité des deux tribus.

On montre de la même façon que la tribu borélienne de $\overline{\mathbb{R}}$ est engendrée par les intervalles $]c, +\infty]$. Rappelons pourquoi tout ouvert de $\mathbb{R}$ est réunion dénombrable d'intervalles ouverts : la famille $\mathcal{F}$ des intervalles de la forme $]q, r[$ avec q, r rationnels, $q < r$, est dénombrable puisqu'elle est indexée par un sous-ensemble de l'ensemble dénombrable $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$; si V est un ouvert de $\mathbb{R}$, désignons par $\mathcal{F}_{\mathrm{V}}$ le sous-ensemble de $\mathcal{F}$ formé des intervalles $]q, r[$ contenus dans V ; c'est encore un ensemble dénombrable d'intervalles. Pour tout point $x \in \mathrm{V}$, on peut trouver $\varepsilon > 0$ tel que $]x - \varepsilon, x + \varepsilon[\subset \mathrm{V}$, puis trouver deux rationnels q, r tels que $x - \varepsilon < q < x < r < x + \varepsilon$. L'intervalle $]q, r[$ est dans la famille $\mathcal{F}_{\mathrm{V}}$, donc

$$x \in \mathrm{U} = \bigcup \{\mathrm{I} : \mathrm{I} \in \mathcal{F}_{\mathrm{V}}\}.$$

On a évidemment $\mathrm{U} \subset \mathrm{V}$, et tout point x de V est dans U, donc $\mathrm{V} = \mathrm{U}$, réunion dénombrable d'intervalles ouverts.

Définition : produit de tribus. On suppose donnés X_1 et X_2 avec chacun une tribu $\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{A}_2$; on définit la *tribu produit* sur l'ensemble produit $\mathrm{X}_1 \times \mathrm{X}_2$, tribu qui est notée $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$: c'est la tribu engendrée par les ensembles de la forme $\mathrm{A}_1 \times \mathrm{A}_2$, avec $\mathrm{A}_j \in \mathcal{A}_j$:

$$\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2 = \sigma\bigl(\{\mathrm{A}_1 \times \mathrm{A}_2 : \mathrm{A}_1 \in \mathcal{A}_1, \mathrm{A}_2 \in \mathcal{A}_2\}\bigr).$$

Exercice. Si $\mathcal{A}$ est une tribu de parties de Ω, si X est un sous-ensemble de Ω, montrer que la classe $\mathcal{A}_{\mathrm{X}}$ formée des $\mathrm{A} \cap \mathrm{X}$, pour $\mathrm{A} \in \mathcal{A}$, est une tribu de parties de X ; si la classe $\mathcal{C}$ engendre la tribu $\mathcal{A}$, montrer que les $\mathrm{C} \cap \mathrm{X}$, pour $\mathrm{C} \in \mathcal{C}$, engendrent la tribu $\mathcal{A}_{\mathrm{X}}$. Montrer qu'une fonction f est $\mathcal{A}_{\mathrm{X}}$-mesurable positive sur X si et seulement si elle est la restriction à X d'une fonction $\mathcal{A}$-mesurable sur Ω.

La mesurabilité abstraite

Définition. Étant donnés deux espaces mesurables $(\Omega_1, \mathcal{A}_1)$ et $(\Omega_2, \mathcal{A}_2)$, on dit qu'une application $f : \Omega_1 \to \Omega_2$ est *mesurable* si $f^{-1}(\mathcal{A}_2) \subset \mathcal{A}_1$.

Propriété évidente : la composition de deux applications mesurables $f : (\Omega_1, \mathcal{A}_1) \to (\Omega_2, \mathcal{A}_2)$ et $g : (\Omega_2, \mathcal{A}_2) \to (\Omega_3, \mathcal{A}_3)$ fournit une application mesurable $g \circ f$ de $(\Omega_1, \mathcal{A}_1)$ dans $(\Omega_3, \mathcal{A}_3)$.

Critère suffisant de mesurabilité : *pour que f soit mesurable de* $(\Omega_1, \mathcal{A}_1)$ *dans* $(\Omega_2, \mathcal{A}_2)$, *il suffit que* $\{f \in \mathrm{C}\} \in \mathcal{A}_1$ *pour tout* C *d'une classe* $\mathcal{C}$ *qui engendre* $\mathcal{A}_2$.

En effet, on montre facilement que la classe

$$\mathcal{D} = \{\mathrm{B} \in \mathcal{A}_2 : \{f \in \mathrm{B}\} \in \mathcal{A}_1\}$$

est une tribu, et elle contient $\mathcal{C}$ par hypothèse. Elle contient donc $\sigma(\mathcal{C})$, et est donc égale à $\mathcal{A}_2$.

Mentionnons deux applications du critère de mesurabilité précédent.

1. *Pour que f soit mesurable de* $(\Omega, \mathcal{A})$ *dans* $\mathbb{R}$ *(ou dans* $\overline{\mathbb{R}}$*) muni de la tribu borélienne, il faut et il suffit que*

$$\forall c \in \mathbb{R}, \quad \{f > c\} \in \mathcal{A}.$$

On voit ainsi que les fonctions réelles $\mathcal{A}$-mesurables de notre « bagage minimal » coïncident avec les applications mesurables de $(\Omega, \mathcal{A})$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$.

2. *Si f_1 et f_2 sont deux applications mesurables de* $(\Omega, \mathcal{A})$ *dans* $(\mathrm{X}_j, \mathcal{B}_j)$, *pour* $j = 1, 2$, *l'application couple* $f : \omega \to (f_1(\omega), f_2(\omega))$ *est mesurable de* $(\Omega, \mathcal{A})$ *dans l'espace produit* $(\mathrm{X}_1 \times \mathrm{X}_2, \mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{B}_2)$.

En effet, il suffit de tester l'image inverse des générateurs de la forme $\mathrm{B}_1 \times \mathrm{B}_2$, ce qui est facile :

$$f^{-1}(\mathrm{B}_1 \times \mathrm{B}_2) = f_1^{-1}(\mathrm{B}_1) \cap f_2^{-1}(\mathrm{B}_2) \in \mathcal{A}.$$

Topologie et tribus ; tribus boréliennes

Définition. Soit X un espace topologique ; la *tribu borélienne* de X, qu'on notera $\mathcal{B}_\mathrm{X}$, est la tribu de parties de X engendrée par la classe $\mathcal{O}_\mathrm{X}$ des ouverts de X, c'est-à-dire $\mathcal{B}_\mathrm{X} = \sigma(\mathcal{O}_\mathrm{X})$.

D'après le critère de mesurabilité, pour que f soit mesurable de $(\Omega, \mathcal{A})$ dans $(\mathrm{X}, \mathcal{B}_\mathrm{X})$, il suffit que $f^{-1}(\mathrm{V}) \in \mathcal{A}$ pour tout ouvert V de X. En particulier, toute application *continue* entre deux espaces topologiques X_1 et X_2 est mesurable de $(\mathrm{X}_1, \mathcal{B}_{\mathrm{X}_1})$ dans $(\mathrm{X}_2, \mathcal{B}_{\mathrm{X}_2})$. Si $\mathcal{C}$ est une classe d'ouverts telle que tout ouvert de X soit réunion dénombrable d'éléments de $\mathcal{C}$, on aura $\mathcal{B}_\mathrm{X} = \sigma(\mathcal{C})$.

Théorème 1.2.1. *La tribu borélienne de* $\mathbb{R}^2$ *est égale à la tribu produit tensoriel* $\mathcal{B}_\mathbb{R} \otimes \mathcal{B}_\mathbb{R}$. *Plus généralement,*

$$\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n} = \mathcal{B}_\mathbb{R} \otimes \mathcal{B}_\mathbb{R} \otimes \cdots \otimes \mathcal{B}_\mathbb{R},$$

où le produit tensoriel contient n facteurs, tribu de parties de $\mathbb{R}^n$ *engendrée par les pavés mesurables* $\mathrm{A}_1 \times \cdots \times \mathrm{A}_n$, *avec* $\mathrm{A}_j \in \mathcal{B}_\mathbb{R}$, $j = 1, \ldots, n$.

Démonstration. On se limitera au cas de deux facteurs. Montrons d'abord l'inclusion $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^2} \subset \mathcal{B}_\mathbb{R} \otimes \mathcal{B}_\mathbb{R}$. Pour cela il suffit de montrer que tout ouvert V du produit $\mathbb{R}^2$ appartient à $\mathcal{B}_\mathbb{R} \otimes \mathcal{B}_\mathbb{R}$. Comme on l'a fait en dimension 1, on voit que tout ouvert V de $\mathbb{R}^2$ est réunion dénombrable de pavés $]q_1, r_1[\times]q_2, r_2[$, avec q_1, q_2, r_1, r_2 rationnels. Tous ces pavés sont dans $\mathcal{B}_\mathbb{R} \otimes \mathcal{B}_\mathbb{R}$, donc tout ouvert V est dans $\mathcal{B}_\mathbb{R} \otimes \mathcal{B}_\mathbb{R}$, d'où $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^2} \subset \mathcal{B}_\mathbb{R} \otimes \mathcal{B}_\mathbb{R}$.

L'inclusion inverse $\mathcal{B}_\mathbb{R} \otimes \mathcal{B}_\mathbb{R} \subset \mathcal{B}_{\mathbb{R}^2}$ est vraie pour tout espace topologique produit $\mathrm{X} \times \mathrm{Y}$; il faut maintenant montrer que pour tous boréliens A_1 et A_2 de $\mathbb{R}$, le produit

$A_1 \times A_2$ est un borélien de $\mathbb{R}^2$. On introduit d'abord, lorsque V_2 est un ouvert fixé de $\mathbb{R}$, la classe

$$\mathcal{C}_1 = \{A_1 \in \mathcal{B}_\mathbb{R} : A_1 \times V_2 \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^2}\}\,;$$

on vérifie que $\mathcal{C}_1$ est une tribu, et $\mathcal{C}_1$ contient les ouverts de $\mathbb{R}$, donc $\mathcal{C}_1 = \mathcal{B}_\mathbb{R}$ pour tout V_2, ce qui veut dire que $A_1 \times V_2 \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^2}$ pour tous $A_1 \in \mathcal{B}_\mathbb{R}$ et V_2 ouvert de $\mathbb{R}$. Dans un deuxième temps on considère pour A_1 borélien de $\mathbb{R}$ fixé

$$\mathcal{C}_2 = \{A_2 \in \mathcal{B}_\mathbb{R} : A_1 \times A_2 \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^2}\}\,;$$

de même, $\mathcal{C}_2$ est une tribu, qui contient les ouverts V_2 d'après le premier pas, donc $\mathcal{C}_2 = \mathcal{B}_\mathbb{R}$, ce qui donne ce que nous voulons.

Définition. On dit qu'une application f entre deux espaces topologiques X et Y est *borélienne* si elle est mesurable de $(X, \mathcal{B}_X)$ dans $(Y, \mathcal{B}_Y)$. En particulier, toute application continue est borélienne.

Proposition. *Soient φ une fonction borélienne de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ et $f_1, f_2, \ldots, f_n$ des fonctions mesurables de $(\Omega, \mathcal{A})$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_\mathbb{R})$. L'application $\omega \to \varphi(f_1(\omega), \ldots, f_n(\omega))$ est mesurable de $(\Omega, \mathcal{A})$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_\mathbb{R})$.*

Démonstration. Faisons la pour $n = 2$. L'application couple $(\omega \to (f_1(\omega), f_2(\omega))$ est mesurable de $(\Omega, \mathcal{A})$ dans $(\mathbb{R}^2, \mathcal{B}_\mathbb{R} \otimes \mathcal{B}_\mathbb{R})$, et φ est par définition mesurable de $(\mathbb{R}^2, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^2})$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_\mathbb{R})$. Puisque $\mathcal{B}_\mathbb{R} \otimes \mathcal{B}_\mathbb{R} = \mathcal{B}_{\mathbb{R}^2}$, tout roule.

Proposition 1.2.2. *Si une application f de Ω dans un espace X métrisable est limite simple d'une suite d'applications mesurables de $(\Omega, \mathcal{A})$ dans $(X, \mathcal{B}_X)$, elle est mesurable de $(\Omega, \mathcal{A})$ dans $(X, \mathcal{B}_X)$.*

Si une application à valeurs dans un espace topologique X métrisable **séparable** *est mesurable de $(\Omega, \mathcal{A})$ dans $(X, \mathcal{B}_X)$, elle est limite simple d'une suite d'applications $\mathcal{A}$-étagées.*

Démonstration. Supposons que f soit limite simple d'une suite (f_n) d'applications mesurables de $(\Omega, \mathcal{A})$ dans $(X, \mathcal{B})$. Pour montrer que l'application f est mesurable, il suffit de montrer que $\{f \in U\} = f^{-1}(U) \in \mathcal{A}$ pour tout U ouvert de X.

Soit d une distance sur X qui définit la topologie de X ; si $A \subset X$ et $x \in X$, posons $\operatorname{dist}(x, A) = \inf\{d(x, a) : a \in A\}$. Considérons pour tout entier $k \ge 0$ l'ensemble ouvert

$$U_k = \{x \in U : \operatorname{dist}(x, U^c) > 2^{-k}\}\,;$$

on obtient une suite croissante dont la réunion est U. Si $f(\omega) \in U$, il existe un entier k tel que $\operatorname{dist}(f(\omega), U^c) > 2^{-k}$, donc par la continuité de la distance on a pour n assez grand, disons pour n plus grand qu'un certain m, l'inégalité $\operatorname{dist}(f_n(\omega), U^c) > 2^{-k}$ c'est-à-dire que $\omega \in \bigcap_{n \ge m}\{f_n \in U_k\}$. On a donc

$$\{f \in U\} \subset B = \bigcup_k \bigcup_m \bigcap_{n \ge m} \{f_n \in U_k\}.$$

Inversement si $\omega \in B$, il existe k et m tels que $\operatorname{dist}(f_n(\omega), U^c) > 2^{-k}$ pour tout $n \ge m$, ce qui implique que $\operatorname{dist}(f(\omega), U^c) \ge 2^{-k} > 0$ à la limite, donc $\omega \in \{f \in U\}$. On a donc bien égalité des deux ensembles $\{f \in U\}$ et B, et $B \in \mathcal{A}$ puisqu'il se déduit par des opérations dénombrables des $\{f_n \in \mathrm{U}_k\}$, eux-mêmes dans $\mathcal{A}$ puisque chaque f_n est mesurable et U_k ouvert.

Montrons la partie inverse de la proposition. Soient $(x_k)_{k\geq 0}$ une suite dense dans X et introduisons une distance d sur X qui définisse la topologie de X ; pour tout entier $k \geq 0$ posons $\delta_k(\omega) = \min\{d(f(\omega), x_j) : 0 \leq j \leq k\}$. D'après la densité de la suite, on a $\delta_k(\omega) \to 0$; posons aussi $j_k(\omega) = \min\{j \leq k : d(f(\omega), x_j) = \delta_k(\omega)\}$, et enfin $f_k(\omega) = x_{j_k(\omega)}$. On a bien $d(f_k(\omega), f(\omega)) \to 0$, et on vérifie que f_k est $\mathcal{A}$-étagée puisque

$$\{f_k = x_j\} = \{\omega : d(f(\omega), x_j) = \delta_k(\omega)\} \ \cap \bigcap_{0\leq i<j} \{\omega : d(f(\omega), x_i) > \delta_k(\omega)\} \in \mathcal{A}$$

pour tout $j = 0, \ldots, k$.

Lemme 1.2.3 d'approximation. *Soient* (X, d) *un espace métrique,* $\mathcal{B}_\mathrm{X}$ *sa tribu borélienne et* μ *une mesure* finie *sur* $(\mathrm{X}, \mathcal{B}_\mathrm{X})$ *; si* A *est un borélien de* X*, il existe pour tout* $\varepsilon > 0$ *un fermé* F *et un ouvert* V *de* X*, tels que*

$$\mathrm{F} \subset \mathrm{A} \subset \mathrm{V} \ \text{ et } \ \mu(\mathrm{V}) - \mu(\mathrm{F}) = \mu(\mathrm{V} \setminus \mathrm{F}) < \varepsilon.$$

Démonstration. On désigne par $\mathcal{D}$ la famille de toutes les parties $\mathrm{D} \subset \mathrm{X}$ qui ont la propriété suivante : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un fermé F et un ouvert V de X tels que

$$\mathrm{F} \subset \mathrm{D} \subset \mathrm{V} \ \text{ et } \ \mu(\mathrm{V}) - \mu(\mathrm{F}) = \mu(\mathrm{V} \setminus \mathrm{F}) < \varepsilon.$$

On va montrer que $\mathcal{D}$ est une tribu qui contient les ouverts. Il en résultera que $\mathcal{D}$ contient la tribu borélienne $\mathcal{B}_\mathrm{X}$, ce qui est l'expression même du résultat attendu. Montrons d'abord que tout ouvert V de X est dans la famille $\mathcal{D}$. Posons pour tout entier $n \geq 0$

$$\mathrm{F}_n = \{x \in \mathrm{X} : d(x, \mathrm{V}^c) \geq 2^{-n}\}.$$

On voit que $\mathrm{F}_n \subset \mathrm{V}$ est fermé, croissant avec n et $\mathrm{V} = \bigcup_n \mathrm{F}_n$. On a par conséquent $\mu(\mathrm{V}) = \lim_n \mu(\mathrm{F}_n)$, ce qui peut s'exprimer par $\mu(\mathrm{V}) - \mu(\mathrm{F}_n) \to 0$ puisque la mesure μ est finie. On a ainsi l'approximation souhaitée pour D = V, en prenant V pour ouvert extérieur et F_n comme fermé intérieur, pour n assez grand.

Montrons ensuite que $\mathcal{D}$ est une tribu. Si $\mathrm{F} \subset \mathrm{D} \subset \mathrm{V}$, alors $\mathrm{V}^c \subset \mathrm{D}^c \subset \mathrm{F}^c$ donne un encadrement pour le complémentaire, et $\mu(\mathrm{F}^c \setminus \mathrm{V}^c) = \mu(\mathrm{V} \setminus \mathrm{F})$, car au niveau des ensembles on a $\mathrm{F}^c \setminus \mathrm{V}^c = \mathrm{V} \setminus \mathrm{F}$; ceci montre que $\mathrm{D} \in \mathcal{D}$ implique $\mathrm{D}^c \in \mathcal{D}$. On a $\emptyset \in \mathcal{D}$ puisque l'ensemble vide est ouvert. Enfin, soit (D_n) une suite d'éléments de $\mathcal{D}$; pour chaque entier n encadrons D_n par $\mathrm{F}_n \subset \mathrm{D}_n \subset \mathrm{V}_n$, de façon que $\mu(\mathrm{V}_n) - \mu(\mathrm{F}_n) < 2^{-n-2}\varepsilon$; l'ensemble $\mathrm{Y} = \bigcup_{n=0}^{+\infty} \mathrm{F}_n$ n'est pas en général fermé, mais $\mathrm{Y}_\mathrm{N} = \bigcup_{n=0}^{\mathrm{N}} \mathrm{F}_n$ est fermé et $\mu(\mathrm{Y}) = \lim_\mathrm{N} \mu(\mathrm{Y}_\mathrm{N})$. Si on pose $\mathrm{D} = \bigcup_{n=0}^{+\infty} \mathrm{D}_n$ et $\mathrm{V} = \bigcup_{n=0}^{+\infty} \mathrm{V}_n$, on a les encadrements

$$\mathrm{Y}_\mathrm{N} = \bigcup_{n=0}^{\mathrm{N}} \mathrm{F}_n \subset \mathrm{Y} \subset \mathrm{D} \subset \mathrm{V}\,;$$

on voit que $\mathrm{V} \setminus \mathrm{Y} \subset \bigcup_{n=0}^{+\infty} (\mathrm{V}_n \setminus \mathrm{F}_n)$, donc $\mu(\mathrm{V}) - \mu(\mathrm{Y}) < \sum_{n=0}^{+\infty} 2^{-n-2}\varepsilon = \varepsilon/2$. Pour N assez grand on aura aussi $\mu(\mathrm{Y}) - \mu(\mathrm{Y}_\mathrm{N}) < \varepsilon/2$, ce qui donne le bon encadrement $\mathrm{Y}_\mathrm{N} \subset \mathrm{D} \subset \mathrm{V}$ et $\mu(\mathrm{V}) - \mu(\mathrm{Y}_\mathrm{N}) < \varepsilon$, qui prouve que $\mathrm{D} \in \mathcal{D}$. Ceci achève la preuve du lemme.

Théorème 1.2.4 d'approximation. *Soit* (X, d) *un espace métrique, soient* $\mathcal{B}_{\mathrm{X}}$ *sa tribu borélienne et* μ *une mesure sur* $(\mathrm{X}, \mathcal{B}_{\mathrm{X}})$ *; si* A *est un borélien de* X*, contenu dans un ouvert* W *de* **mesure finie**, $\mu(\mathrm{W}) < +\infty$*, il existe pour tout* $\varepsilon > 0$ *un fermé* F *et un ouvert* V *de* X*, tels que* $\mu(\mathrm{V}) < +\infty$*,*

$$\mathrm{F} \subset \mathrm{A} \subset \mathrm{V} \quad \textit{et} \quad \mu(\mathrm{V}) - \mu(\mathrm{F}) = \mu(\mathrm{V} \setminus \mathrm{F}) < \varepsilon.$$

Il en résulte qu'il existe une fonction φ *réelle continue sur* X*, nulle hors de* W*, telle que*

$$0 \le \varphi \le 1 \quad \textit{et} \quad \int_{\mathrm{X}} |\mathbf{1}_{\mathrm{A}} - \varphi| \, \mathrm{d}\mu < \varepsilon.$$

Démonstration. Pour montrer le premier résultat, introduisons la mesure *finie* ν qui est définie sur $(\mathrm{X}, \mathcal{B}_{\mathrm{X}})$ par

$$\forall \mathrm{B} \in \mathcal{B}_{\mathrm{X}}, \quad \nu(\mathrm{B}) = \mu(\mathrm{B} \cap \mathrm{W}),$$

où W est un ouvert fixé de X, tel que $\mu(\mathrm{W}) < +\infty$. On considère un borélien A quelconque contenu dans l'ouvert W ; d'après le lemme précédent, on peut trouver un encadrement $\mathrm{F} \subset \mathrm{A} \subset \mathrm{V}_1$ tel que $\nu(\mathrm{V}_1 \setminus \mathrm{F}) < \varepsilon$; on peut remplacer V_1 par l'ouvert $\mathrm{V} = \mathrm{V}_1 \cap \mathrm{W}$ et on obtient un encadrement $\mathrm{F} \subset \mathrm{A} \subset \mathrm{V} \subset \mathrm{W}$ tel que

$$\mu(\mathrm{V} \setminus \mathrm{F}) = \mu(\mathrm{V}) - \mu(\mathrm{F}) = \mu(\mathrm{V} \cap \mathrm{W}) - \mu(\mathrm{F} \cap \mathrm{W}) = \nu(\mathrm{V}) - \nu(\mathrm{F}) < \varepsilon.$$

On pose ensuite

$$\forall x \in \mathrm{X}, \quad \varphi(x) = \frac{d(x, \mathrm{V}^c)}{d(x, \mathrm{V}^c) + d(x, \mathrm{F})} \cdot$$

Cette fonction est continue, $0 \le \varphi \le 1$, $\varphi = 1$ sur F, et $\varphi = 0$ hors de V (donc φ est *a fortiori* nulle hors de W) ; ceci montre que $\mathbf{1}_{\mathrm{F}} \le \varphi \le \mathbf{1}_{\mathrm{V}}$; comme on a aussi $\mathbf{1}_{\mathrm{F}} \le \mathbf{1}_{\mathrm{A}} \le \mathbf{1}_{\mathrm{V}}$, on voit que $|\mathbf{1}_{\mathrm{A}} - \varphi| \le \mathbf{1}_{\mathrm{V}} - \mathbf{1}_{\mathrm{F}}$, donc

$$\int_{\mathrm{X}} |\mathbf{1}_{\mathrm{A}} - \varphi| \, \mathrm{d}\mu \le \int_{\mathrm{X}} \big(\mathbf{1}_{\mathrm{V}} - \mathbf{1}_{\mathrm{F}}\big) \, \mathrm{d}\mu = \mu(\mathrm{V}) - \mu(\mathrm{F}) < \varepsilon.$$

Remarque en passant. Si la mesure μ sur $(\mathrm{X}, \mathcal{B}_{\mathrm{X}})$ est finie, on peut prendre $\mathrm{W} = \mathrm{X}$ et les résultats du théorème 1.2.4 s'appliquent dans ce cas à tous les boréliens de X. En revanche, il ne suffit pas que μ soit σ-finie sur $(\mathrm{X}, \mathcal{B}_{\mathrm{X}})$ pour en déduire un lien intéressant entre topologie et mesure : penser à la mesure sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$ qui donne la mesure 1 à chaque rationnel ; cette mesure est σ-finie mais tous les ouverts non vides sont de mesure infinie. L'hypothèse raisonnable pour pouvoir se servir du théorème précédent est que l'espace métrique X soit réunion d'une suite *d'ouverts* de mesure finie, comme c'est le cas pour la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$.

Le théorème précédent utilise assez peu la métrique de X ; de fait, il suffit évidemment que X soit un espace topologique dont la topologie puisse être définie par une distance, ce qu'on appelle un *espace métrisable*. Cette hypothèse nous a servi à montrer que tout ouvert dans un tel espace est réunion d'une suite de fermés : c'est la seule propriété dont on avait besoin pour l'espace topologique X.

1.3. Intégrale des fonctions réelles ou complexes. Classes de fonctions

On a déjà défini l'intégrale des fonctions réelles. Si f est mesurable à valeurs dans $\mathbb{C}$, les fonctions $\operatorname{Re} f$, $\operatorname{Im} f$ et $|f|$ sont mesurables réelles (par composition avec des fonctions continues, de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{R}$) ; on dit alors que f est intégrable si $\int |f| \, \mathrm{d}\mu < +\infty$, ce qui équivaut à dire que les deux fonctions $\operatorname{Re} f$ et $\operatorname{Im} f$ sont intégrables.

Remarque. Toute fonction mesurable complexe f est limite simple d'une suite (f_n) de fonctions étagées (complexes), qu'on peut choisir telles que $|f_n| \le |f|$.

Preuve. On connaît le résultat dans le cas réel (Proposition 1.1.2). Il suffit de l'appliquer à $\operatorname{Re} f$ et $\operatorname{Im} f$ pour obtenir le cas complexe : il existe (u_n), (v_n) étagées qui tendent respectivement vers $\operatorname{Re} f$ et $\operatorname{Im} f$, avec $|u_n| \le |\operatorname{Re} f|$ et $|v_n| \le |\operatorname{Im} f|$; la suite de fonctions étagées complexes $f_n = u_n + \mathrm{i} v_n$ tend vers f et

$$|f_n| = |u_n + \mathrm{i} v_n| = \bigl(u_n^2 + v_n^2\bigr)^{1/2} \le \bigl((\operatorname{Re} f)^2 + (\operatorname{Im} f)^2\bigr)^{1/2} = |f|.$$

On désigne par $\mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ l'espace vectoriel des fonctions mesurables f à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ telles que $\int |f| \, \mathrm{d}\mu < +\infty$. Si f est à valeurs complexes, on pose la définition qui va de soi,

$$\int f \, \mathrm{d}\mu = \int (\operatorname{Re} f) \, \mathrm{d}\mu + \mathrm{i} \int (\operatorname{Im} f) \, \mathrm{d}\mu.$$

En écrivant un scalaire complexe z sous la forme $z = a + \mathrm{i} b$, a, b réels, puis en développant $zf = (a \operatorname{Re} f - b \operatorname{Im} f) + \mathrm{i}(a \operatorname{Im} f + b \operatorname{Re} f)$, on vérifie que $\int zf = z \int f$. On voit que l'intégrale est $\mathbb{C}$-linéaire,

$$\forall z, w \in \mathbb{C}, \quad \int (zf + wg) \, \mathrm{d}\mu = z \int f \, \mathrm{d}\mu + w \int g \, \mathrm{d}\mu,$$

et on a la majoration du module

$$\Bigl| \int f \, \mathrm{d}\mu \Bigr| \le \int |f| \, \mathrm{d}\mu.$$

Pour établir cette majoration, on écrit $\int f \, \mathrm{d}\mu = r \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, avec $r \ge 0$ et θ réel. On a

$$r = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta} \int f \, \mathrm{d}\mu = \int \bigl(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta} f\bigr) \, \mathrm{d}\mu = \int \operatorname{Re}\bigl(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta} f\bigr) \, \mathrm{d}\mu \le$$

$$\le \int |\operatorname{Re}(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta} f)| \, \mathrm{d}\mu \le \int |\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta} f| \, \mathrm{d}\mu = \int |f| \, \mathrm{d}\mu.$$

On peut aussi montrer cette majoration en introduisant une suite (φ_n) de fonctions étagées qui tend simplement vers f avec $|\varphi_n| \le |f|$ pour tout n ; pour les fonctions étagées, la majoration voulue est facile (une simple application de l'inégalité triangulaire dans $\mathbb{C}$), et on fait passer l'inégalité à la limite par convergence dominée.

1.3.a. *Fonctions définies presque-partout*

On suppose que μ est une mesure ≥ 0 sur $(\Omega, \mathcal{A})$. On dit qu'un sous-ensemble $\mathrm{Z} \subset \Omega$ est *μ-négligeable* s'il existe un ensemble $\mathrm{N} \in \mathcal{A}$ tel que $\mathrm{Z} \subset \mathrm{N}$ et $\mu(\mathrm{N}) = 0$. On dit qu'une fonction $f : \Omega_0 \to \mathbb{R}$, où Ω_0 est un sous-ensemble de Ω, est *définie μ-presque partout* si l'ensemble de non-définition $\Omega \setminus \Omega_0$ est μ-négligeable ; on dira qu'une fonction $g : \Omega \to \mathbb{R}$ est une *μ-modification* de f si l'ensemble

$$\{\omega \in \Omega_0 : f(\omega) \neq g(\omega)\} \cup (\Omega \setminus \Omega_0)$$

est μ-négligeable.

Définition. On dira que f définie μ-presque partout est *μ-mesurable* si elle admet une μ-modification $\mathcal{A}$-mesurable ; si f est définie sur Ω_0 et si $\mathrm{N} \in \mathcal{A}$ est un ensemble de mesure nulle qui contient $\Omega \setminus \Omega_0$, cela revient à dire que

$$\{\omega \in \Omega \setminus \mathrm{N} : f(\omega) > c\} \in \mathcal{A}$$

pour tout réel c.

Si une fonction f définie μ-presque partout est μ-mesurable, et si g_1, g_2 sont deux modifications $\mathcal{A}$-mesurables de f, alors $g_1 - g_2$ est nulle presque partout : il existe $\mathrm{N}_j \in \mathcal{A}$ négligeable tel que $f(\omega)$ soit défini et égal à $g_j(\omega)$ quand $\omega \notin \mathrm{N}_j$, $j = 1, 2$; l'ensemble $\{g_1 \neq g_2\}$ est donc contenu dans $\mathrm{N}_1 \cup \mathrm{N}_2$, donc de mesure nulle. Il en résulte que $\int |g_1| = \int |g_2|$ et dans le cas où ces intégrales sont finies, $\int g_1 = \int g_2$. Si une modification est intégrable, toutes les modifications sont intégrables et ont la même intégrale.

On dira qu'une fonction μ-mesurable f définie μ-presque-partout est *intégrable* si ses μ-modifications $\mathcal{A}$-mesurables sont intégrables. On peut alors convenir de poser, pour une fonction intégrable f définie μ-presque-partout sur Ω,

$$\int_\Omega f \,\mathrm{d}\mu = \int_\Omega \widetilde{f} \,\mathrm{d}\mu,$$

où $\widetilde{f}$ est une μ-modification $\mathcal{A}$-mesurable quelconque de f. La définition s'applique aussi aux fonctions à valeurs complexes, par exemple en regardant les parties réelle et imaginaire.

La discussion précédente peut s'appliquer à des fonctions f qui seraient définies partout, mais « mal » : dans ce cas l'ensemble de non-définition $\Omega \setminus \Omega_0$ peut être vide, mais il faut cependant modifier f sur un ensemble $\mathrm{N} \in \mathcal{A}$ de mesure nulle pour qu'elle devienne $\mathcal{A}$-mesurable : on dira que f est μ-mesurable.

Cela peut par exemple être le cas si f est une fonction intégrable-Riemann sur un intervalle borné $[a, b]$; une telle fonction n'est pas nécessairement borélienne ; cependant, il existe une suite croissante (φ_n) et une suite décroissante (ψ_n) de fonctions en escalier telles que $\varphi_n \le f \le \psi_n$ pour tout n et $\int_a^b (\psi_n - \varphi_n)(t) \,\mathrm{d}t \to 0$. Dans ce cas les fonctions boréliennes $\varphi = \sup_n \varphi_n$ et $\psi = \inf_n \psi_n$ vérifient $\varphi \le f \le \psi$ et $\int_{[a,b]} (\psi - \varphi) \,\mathrm{d}\lambda = 0$, donc l'ensemble

$$\mathrm{N} = \{\varphi < \phi\} \in \mathcal{B}$$

vérifie $\lambda(\mathrm{N}) = 0$. Les deux fonctions φ et ψ sont des modifications $\mathcal{B}$-mesurables de f : on a $\varphi = f = \psi$ Lebesgue-presque partout. Toute fonction Riemann-intégrable est donc λ-mesurable, et les deux notions d'intégrale coïncident,

$$\int_{[a,b]} f \,\mathrm{d}\lambda = \int_a^b f(t) \,\mathrm{d}t.$$

En effet, $\int_{[a,b]} f \,\mathrm{d}\lambda = \int_{[a,b]} \varphi \,\mathrm{d}\lambda = \int_a^b \varphi(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ car la fonction φ est à la fois borélienne et intégrable-Riemann, et on a vérifié l'égalité dans ce cas.

Théorème 1.3.1 : théorème de convergence dominée de Lebesgue. *Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré ; on donne une suite (f_n) de fonctions intégrables réelles ou complexes définies presque partout sur Ω, et une fonction intégrable $g \ge 0$ définie presque partout. Si*

– *la suite (f_n) tend presque partout vers une fonction f*

– *pour tout n, on a $|f_n| \le g$ presque-partout, avec $\int_\Omega g \,\mathrm{d}\mu < +\infty$,*

il en résulte que

$$\int_\Omega f \,\mathrm{d}\mu = \lim_n \int_\Omega f_n \,\mathrm{d}\mu.$$

Démonstration. On peut introduire un ensemble négligeable $\mathrm{N} \in \mathcal{A}$, réunion dénombrable d'ensembles négligeables, qui contienne :

– l'ensemble N_1 des points où f_n, pour un $n \in \mathbb{N}$, ou bien g ne sont pas définies ;

– les points $\omega \notin \mathrm{N}_1$ tels que la suite $f_n(\omega)$ n'est pas convergente ;

– les points $\omega \notin \mathrm{N}_1$ où on n'a pas $|f_n| \le g$, et les points où $g = +\infty$.

Définissons les fonctions $\widetilde{f_n}$, $\widetilde{f}$ et $\widetilde{g}$ qui sont égales à f_n, f et g en dehors de N, et qu'on prolonge par 0 (par exemple) sur l'ensemble N. La suite $\widetilde{f_n}$ converge simplement vers $\widetilde{f}$. Toutes les intégrales qui nous intéressent sont les mêmes pour les fonctions avec tilde ou sans tilde. Mais les fonctions tildées vérifient les hypothèses strictes de la première version 1.1.7 du théorème de Lebesgue : $|\widetilde{f_n} - \widetilde{f}|$ tend simplement vers 0 sur Ω en étant dominée par la fonction intégrable $2\widetilde{g}$, ce qui permet de terminer la preuve.

Corollaire 1.3.2. *Considérons une série $\sum u_k$ de fonctions $\mathcal{A}$-mesurables réelles ou complexes sur Ω telle que*

$$\int \Bigl(\sum_{k=0}^{+\infty} |u_k|\Bigr) \,\mathrm{d}\mu < +\infty$$

(hypothèse équivalente à $\sum_k \bigl(\int |u_k| \,\mathrm{d}\mu\bigr) < +\infty$ d'après la proposition 1.1.5) ; alors

– *chaque fonction u_k est intégrable ;*

– *la série numérique $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k(\omega)$ converge pour μ-presque tout $\omega \in \Omega$; sa somme représente une fonction intégrable définie μ-presque-partout ;*

– *on peut intervertir la série et l'intégrale*

$$\int \Bigl(\sum_{k=0}^{+\infty} u_k\Bigr) \,\mathrm{d}\mu = \sum_{k=0}^{+\infty} \Bigl(\int u_k \,\mathrm{d}\mu\Bigr).$$

Démonstration. Posons $\mathrm{S}(\omega) = \sum_{k=0}^{+\infty} |u_k(\omega)|$, valeur finie ou égale à $+\infty$. On a supposé que $\int \mathrm{S} \,\mathrm{d}\mu < +\infty$. La première affirmation est évidente puisque $|u_k| \le \mathrm{S}$ pour tout k. Puisque l'intégrale de S est finie, il en résulte que l'ensemble

$$\mathrm{N} = \{\mathrm{S} = +\infty\} \in \mathcal{A}$$

est de mesure nulle. La série numérique $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k(\omega)$ est absolument convergente pour tout $\omega \notin \mathrm{N}$, et sa somme donne donc une fonction σ mesurable définie presque-partout (hors de N). Les sommes partielles

$$\sigma_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$$

convergent presque-partout vers σ, en restant dominées presque-partout par la fonction intégrable S. D'après le théorème de Lebesgue, on obtient le résultat,

$$\int \sigma \,\mathrm{d}\mu = \lim_n \int \sigma_n \,\mathrm{d}\mu = \lim_n \Bigl(\sum_{k=0}^{n} \int u_k \,\mathrm{d}\mu\Bigr) = \sum_{k=0}^{+\infty} \Bigl(\int u_k \,\mathrm{d}\mu\Bigr).$$

Exercice. Si f est intégrable sur $\mathbb{R}$, on définit sa *transformée de Fourier* $\widehat{f}$ en posant

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \widehat{f}(t) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}xt}\,\mathrm{d}x.$$

a. Montrer que $\widehat{f}$ est bornée, continue, et tend vers 0 à l'infini.

b. Montrer que si $\int_{\mathbb{R}} |x|^k |f(x)|\,\mathrm{d}x < +\infty$, alors $\widehat{f}$ est de classe C^k sur $\mathbb{R}$ (k est un entier ≥ 1).

c. Si f est ≥ 0, intégrable et paire sur $\mathbb{R}$ (on a $f(-x) = f(x)$ pour tout x), montrer que $\widehat{f}$ est de classe C^2 si et seulement si $\int_{\mathbb{R}} x^2 f(x)\,\mathrm{d}x < +\infty$.

Dérivation sous l'intégrale

Le théorème de Lebesgue donne un critère très commode pour dériver les intégrales dépendant d'un paramètre. Supposons que $f(\omega, t)$ soit défini pour $(\omega, t) \in \Omega \times \mathrm{I}$, où I est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$. Si pour tout t la fonction $\omega \to f(\omega, t)$ est intégrable, on peut poser

$$\forall t \in \mathrm{I}, \quad \mathrm{F}(t) = \int_\Omega f(\omega, t)\,\mathrm{d}\mu(\omega).$$

Pour étudier la dérivabilité de F en un point $t_0 \in \mathrm{I}$, on considère

$$\frac{\mathrm{F}(t_0+h) - \mathrm{F}(t_0)}{h} = \int_\Omega \frac{f(\omega, t_0+h) - f(\omega, t_0)}{h}\,\mathrm{d}\mu(\omega)$$

lorsque h tend vers 0. Pour prouver l'existence de $\mathrm{F}'(t_0)$, on sait qu'il suffit de montrer que pour toute suite $(t_0 + h_n)_n \subset \mathrm{I}$ tendant vers t_0, le quotient $(\mathrm{F}(t_0+h_n) - \mathrm{F}(t_0))/h_n$ tend vers une limite ; on peut écrire

$$\frac{\mathrm{F}(t_0+h_n) - \mathrm{F}(t_0)}{h_n} = \int_\Omega \varphi_n(\omega)\,\mathrm{d}\mu(\omega),$$

où on a posé

$$\varphi_n(\omega) = \frac{f(\omega, t_0+h_n) - f(\omega, t_0)}{h_n}\,;$$

si on fait l'hypothèse naturelle que pour presque tout ω, la fonction $t \to f(\omega, t)$ soit dérivable sur I, on voit que la suite (φ_n) converge simplement presque partout vers

$$\frac{\partial f}{\partial t}(\omega, t_0) = \lim_n \frac{f(\omega, t_0 + h_n) - f(\omega, t_0)}{h_n}.$$

Cette information de convergence simple n'est pas suffisante pour déduire la convergence des intégrales des φ_n : c'est ici qu'on va faire intervenir le théorème de Lebesgue, par l'intermédiaire du théorème des accroissements finis.

Si la dérivée par rapport à t est majorée par une fonction intégrable fixe g, c'est-à-dire que pour presque tout ω on a

$$\forall t \in \mathrm{I}, \quad \Big|\frac{\partial f}{\partial t}(\omega, t)\Big| \le g(\omega)$$

alors F *est dérivable sur* I *et*

$$\mathrm{F}'(t_0) = \int_\Omega \frac{\partial f}{\partial t}(\omega, t_0)\,\mathrm{d}\mu(\omega).$$

On note qu'on a besoin de supposer la majoration de la dérivée *pour tout t*, parce que le théorème des accroissements finis nous dit que

$$\varphi_n(\omega) = \frac{f(\omega, t_0 + h_n) - f(\omega, t_0)}{h_n} = \frac{\partial f}{\partial t}(\omega, c_n(\omega))$$

où $c_n(\omega)$ est un point entre t_0 et $t_0 + h_n$, mais à *condition que* la dérivée existe en *tout* point entre t_0 et $t_0 + h_n$. C'est l'hypothèse *pour tout t* qui permet de conclure que $|\varphi_n(\omega)| \le g(\omega)$, donnant la domination voulue. On remarquera qu'on n'a pas réellement donné de critère pour pouvoir dériver la fonction F au seul point t_0 fixé. Le critère précédent est très utile mais il y a des cas où il faut revenir à la *preuve* précédente, et la bricoler un peu, comme dans l'exercice qui suit (si on assez de place dans la tête, on peut y ranger un théorème de dérivation qui règle l'exercice ci-dessous : voir Briane et Pagès, théorème 8.6).

Exercice. Si f est une fonction Lebesgue-intégrable sur $\mathbb{R}$, montrer que la fonction g définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-|x-t|}\, f(t)\,\mathrm{d}t$$

est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

1.3.b. *Espaces* L^p

Lemme. *Soit* X *un espace vectoriel sur* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$ *et soit q une fonction réelle* **à valeurs** ≥ 0 *définie sur* X *; pour que q soit une semi-norme sur* X, *(il faut et) il suffit que :*

pour tous $x \in \mathrm{X}$ et $\lambda \in \mathbb{K}$ on a $q(\lambda x) = |\lambda|\, q(x)$, et l'ensemble $\{x \in \mathrm{X} : q(x) \le 1\}$ est convexe.

Démonstration. Si q est une semi-norme, il est clair que $\mathrm{C}_q = \{x \in \mathrm{X} : q(x) \le 1\}$ est convexe. Inversement, supposons que q soit positivement homogène et que C_q soit convexe, et déduisons la sous-additivité de q : soient x et y deux vecteurs de X, et choisissons $a > q(x) \geq 0$ et $b > q(y) \geq 0$; considérons $x_1 = a^{-1}x$ et $y_1 = b^{-1}y$; par homogénéité, $q(x_1) = a^{-1}q(x) < 1$, et de même $q(y_1) < 1$, ce qui montre que les vecteurs x_1 et y_1 sont dans l'ensemble convexe C_q ; formons la combinaison convexe

$$z = \frac{a}{a+b}\, x_1 + \frac{b}{a+b}\, y_1 = \frac{1}{a+b}\,(x+y),$$

qui est dans C_q d'après l'hypothèse de convexité, c'est-à-dire que $q(z) \leq 1$. L'homogénéité de q transforme l'inégalité $q(z) \leq 1$ en $q(x+y) \leq a+b$. En faisant tendre a vers $q(x)$ et b vers $q(y)$ on obtient l'inégalité triangulaire $q(x+y) \leq q(x) + q(y)$.

Pour $1 \leq p < +\infty$, soit $\mathcal{L}^p = \mathcal{L}^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ l'espace vectoriel des fonctions f complexes $\mathcal{A}$-mesurables telles que $\int_\Omega |f(s)|^p \,\mathrm{d}\mu(s) < +\infty$; la quantité

$$q(f) = \Bigl(\int_\Omega |f(s)|^p \,\mathrm{d}\mu(s) \Bigr)^{1/p}$$

est une semi-norme sur $\mathcal{L}^p$.

Pour le vérifier, on voit d'abord que $q(\lambda f) = |\lambda|\, q(f)$ (facile), puis on montre que l'ensemble $\{f \in \mathcal{L}^p : q(f) \leq 1\}$ est convexe. Cela provient de la convexité sur $[0, +\infty[$ de la fonction $u \to u^p$; on a alors si f, g sont deux éléments de $\mathcal{L}^p$ tels que $q(f) \leq 1$, $q(g) \leq 1$ et si $0 \leq t \leq 1$,

$$|(1-t)f(s) + t\,g(s)|^p \leq \bigl((1-t)|f(s)| + t|g(s)|\bigr)^p \leq (1-t)|f(s)|^p + t|g(s)|^p$$

pour tout $s \in \Omega$, donc

$$\int_\Omega \bigl|(1-t)f(s)+t g(s)\bigr|^p \,\mathrm{d}\mu(s) \leq (1-t) \int_\Omega |f(s)|^p \,\mathrm{d}\mu(s) + t \int_\Omega |g(s)|^p \,\mathrm{d}\mu(s) \leq (1-t)+t = 1.$$

On notera dorénavant

$$\|f\|_p = \Bigl(\int_\Omega |f(s)|^p \,\mathrm{d}\mu(s) \Bigr)^{1/p}.$$

Notons $\mathcal{N}$ l'ensemble des fonctions f scalaires (avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) qui sont $\mathcal{A}$-mesurables et nulles μ-presque partout. C'est aussi, pour tout $p \in [1, +\infty[$, l'ensemble des fonctions f telles que $\|f\|_p = 0$. On voit facilement que $\mathcal{N}$ est un espace vectoriel, contenu dans $\mathcal{L}^p$ pour tout p, ce qui permet de considérer le quotient $\mathrm{L}^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu) = \mathcal{L}^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu)/\mathcal{N}$. On vérifie sans peine que la semi-norme $\|\cdot\|_p$ « passe au quotient », parce que sa valeur est constante sur les classes d'équivalence. En effet, si f_1, f_2 sont dans la même classe, l'inégalité triangulaire pour la semi-norme donne

$$\bigl|\|f_1\|_p - \|f_2\|_p\bigr| \leq \|f_1 - f_2\|_p = 0.$$

Quand on passe aux classes, on obtient une norme sur l'espace $\mathrm{L}^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, toujours notée $\|f\|_p$,

$$\forall f \in \mathrm{L}^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu), \quad \|f\|_p = \Bigl(\int_\Omega |f(s)|^p \,\mathrm{d}\mu(s) \Bigr)^{1/p}.$$

Exercice.

Si $\int |g_k| \,\mathrm{d}\mu \leq 2^{-k}$ pour tout entier $k \geq 0$, montrer que la suite numérique $(g_k(\omega))$ tend vers 0 pour μ-presque tout $\omega \in \Omega$.

Si $(f_n) \subset \mathrm{L}^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ tend vers f en norme L^p, montrer qu'il existe une sous-suite (f_{n_j}) qui tend vers f μ-presque partout.

Remarque. Si f est une fonction mesurable définie presque-partout, toutes ses extensions mesurables sont dans la même classe ; on peut donc parler de la classe d'une fonction définie presque partout. De même, une fonction mesurable à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$ qui est presque-partout finie définit une classe de fonctions réelles.

Théorème de Fischer-Riesz

Théorème 1.3.3. *Pour tout $p \in [1+\infty]$ l'espace $\mathrm{L}^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ est un espace de Banach.*

Démonstration. Traitons d'abord le cas $1 \leq p < +\infty$. Soit (f_n) une suite de Cauchy dans L^p ; on peut trouver une sous-suite d'entiers (n_k) telle que pour tout $k \geq 1$,

$$u_k = f_{n_k} - f_{n_{k-1}}$$

vérifie $\|u_k\|_p \leq 2^{-k}$. Nous allons montrer que la série $\sum u_k$ converge dans L^p. Comme

$$\sum_{k=1}^{\mathrm{K}} u_k = f_{n_\mathrm{K}} - f_{n_0},$$

la convergence de la série $\sum u_k$ équivaut à la convergence de la sous-suite (f_{n_k}) ; comme la suite (f_n) est de Cauchy, la convergence d'une sous-suite impliquera la convergence de la suite entière, et démontrera que L^p est complet.

Posons $v_k = |u_k|$, $g_n = \left(\sum_{k=1}^n v_k\right)^p$, remarquons que $\|v_k\|_p = \|u_k\|_p$ pour obtenir

$$\int g_n(s)\,\mathrm{d}\mu(s) = \Big\|\sum_{k=1}^n v_k\Big\|_p^p \leq \big(\sum_{k=1}^n \|v_k\|_p\big)^p \leq \big(\sum_{k=1}^{+\infty} 2^{-k}\big)^p = 1.$$

La suite (g_n) est une suite croissante de fonctions mesurables ≥ 0, elle converge vers une fonction mesurable g dont la valeur en chaque point est égale à $g(s) = \left(\sum_{k=1}^{+\infty} |u_k(s)|\right)^p$ (valeur $+\infty$ admise ; on convient que $(+\infty)^p = +\infty$) ; on sait par la proposition 1.1.4 de convergence monotone que $\int g(s)\,\mathrm{d}\mu(s) = \lim_n \int g_n(s)\,\mathrm{d}\mu(s) \leq 1$. La fonction g est donc finie presque partout. Posons

$$\mathrm{B} = \{g < +\infty\} \in \mathcal{A}\,;$$

on a $\mu(\mathrm{B}^c) = 0$, et la série $\sum u_k(s)$ converge absolument pour tout $s \in \mathrm{B}$; posons

$$\mathrm{U}_n(s) = \sum_{k=1}^n \mathbf{1}_\mathrm{B}(s) u_k(s), \quad \mathrm{U}(s) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbf{1}_\mathrm{B}(s) u_k(s)\,;$$

la fonction U_n est presque-partout égale à $\sum_{k=1}^n u_k$; on remarque que

$$(*) \qquad |\mathrm{U}(s) - \mathrm{U}_n(s)|^p = 1_\mathrm{B}(s)\Big|\sum_{k>n} u_k(s)\Big|^p \leq \Big(\sum_{k>n} |u_k(s)|\Big)^p \leq g(s)$$

pour tout s, et que $|\mathrm{U}(s)-\mathrm{U}_n(s)|^p$ tend vers 0 lorsque $n \to +\infty$ pour tout s. Comme la fonction g est intégrable, le théorème de convergence dominée de Lebesgue permet de conclure que

$$\Bigl\| \mathrm{U} - \sum_{k=1}^n u_k \Bigr\|_p^p = \|\mathrm{U}-\mathrm{U}_n\|_p^p = \int |\mathrm{U}-\mathrm{U}_n|^p \,\mathrm{d}\mu \to 0.$$

On a montré que la série converge dans L^p : sa somme est égale à U (qui est dans L^p parce que $|\mathrm{U}|^p \le g$, en appliquant $(*)$ pour $n=0$).

L'espace $\mathrm{L}^\infty(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ est l'espace des μ-classes bornées, c'est-à-dire les classes f contenant une fonction bornée. Si f_1 est un représentant de f tel que $|f_1| \le \mathrm{M}$ partout, on aura alors $\mu(\{\,|f_2| > \mathrm{M}\}) = 0$ pour tout autre représentant f_2 de f. On peut définir la norme L^∞ de f comme étant la plus petite constante M avec cette propriété,

$$\|f\|_\infty = \min\bigl\{\mathrm{M} : \mu(\{|f| > \mathrm{M}\}) = 0\bigr\}.$$

L'espace L^∞ est complet pour cette norme : supposons que (f_n) soit une suite de Cauchy dans L^∞, et désignons encore par f_n un représentant $\mathcal{A}$-mesurable de la classe f_n. Pour chaque couple p, q d'entiers, il existe un ensemble μ-négligeable $\mathrm{N}_{p,q} \in \mathcal{A}$ tel qu'on ait $|f_p(\omega) - f_q(\omega)| \le \|f_p - f_q\|_\infty$ pour tout $\omega \notin \mathrm{N}_{p,q}$. Désignons par $\mathrm{A} \in \mathcal{A}$ le complémentaire de la réunion dénombrable de tous ces ensembles $(\mathrm{N}_{p,q})$. On voit que la suite $(\mathbf{1}_\mathrm{A} f_n)$ est de Cauchy pour la convergence uniforme sur Ω : elle converge donc uniformément vers une fonction bornée f, et cette fonction est $\mathcal{A}$-mesurable comme limite simple de la suite $(\mathbf{1}_\mathrm{A} f_n)$. Pour finir, on montre facilement que la classe de la fonction f est limite de la suite (f_n) dans l'espace $\mathrm{L}^\infty(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, parce que le complémentaire de A est négligeable.

Tribu complétée

On a vu que dans certains cas, une fonction réelle f définie sur $\mathbb{R}$ n'est pas borélienne, mais est tout de même Lebesgue-presque partout égale à une fonction borélienne g ; on dit alors que f est Lebesgue-mesurable. On peut faire entrer ce cas dans le cadre général de la mesurabilité abstraite, en agrandissant la tribu : désignons par $\widehat{\mathcal{B}}_\lambda$ la classe des ensembles de la forme $\mathrm{A} \cup \mathrm{Z}$, où A est borélien et Z est Lebesgue-négligeable, c'est-à-dire qu'il existe un borélien B tel que $\mathrm{Z} \subset \mathrm{B}$ et $\lambda(\mathrm{B}) = 0$. On vérifie facilement que cette classe $\widehat{\mathcal{B}}_\lambda$ est une tribu, et on peut définir l'extension $\widehat{\lambda}$ de la mesure de Lebesgue λ à cette tribu en posant

$$\widehat{\lambda}(\mathrm{A} \cup \mathrm{Z}) = \lambda(\mathrm{A}).$$

Si f est Lebesgue-presque partout égale à une fonction borélienne g, on voit que pour tout réel c, l'ensemble $\{f > c\}$ diffère de $\{g > c\}$ par un ensemble négligeable, et il en résulte que $\{f > c\} \in \widehat{\mathcal{B}}_\lambda$. Autrement dit, f est mesurable à valeurs dans $\mathbb{R}$ muni de la *tribu complétée* $\widehat{\mathcal{B}}_\lambda$. Réciproquement, toute fonction $\widehat{\mathcal{B}}_\lambda$-mesurable est Lebesgue-presque partout égale à une fonction $\mathcal{B}_\mathbb{R}$-mesurable (exercice ; on pourra commencer par les fonctions $\widehat{\mathcal{B}}_\lambda$-étagées ≥ 0).

Si f est Lebesgue-presque partout égale à une fonction borélienne *intégrable* g, on a dit que f est Lebesgue-intégrable, et on a posé

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} g(x)\,\mathrm{d}x.$$

On a vu que cette situation se produit si f est une fonction intégrable-Riemann sur un intervalle borné $[a, b]$: une telle fonction n'est pas nécessairement borélienne, mais elle est égale Lebesgue presque-partout à une fonction borélienne intégrable. De plus, les deux notions d'intégrale coïncident,

$$\int_{[a,b]} f\,\mathrm{d}\lambda = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Intégrale Banachique

On suppose que E est un espace de Banach **séparable** et que f est une fonction mesurable de $(\Omega, \mathcal{A})$ dans E, telle que $\int \|f(\omega)\|\,\mathrm{d}\mu(\omega) < +\infty$. D'après la proposition 1.2.2, il existe une suite de fonctions étagées (f_n) à valeurs dans E qui converge simplement vers f. De plus, on peut supposer que $\|f_n(\omega)\| \leq \|f(\omega)\|$ pour tout $\omega \in \Omega$: en effet, il existe une suite croissante (φ_n) de fonctions étagées positives qui tend vers la fonction mesurable et intégrable $\|f\| : \omega \to \|f(\omega)\|$; la suite $(\widetilde{f}_n)$ définie par

$$\widetilde{f}_n(\omega) = \frac{\varphi_n(\omega)}{\|f_n(\omega)\| + 2^{-n}}\, f_n(\omega)$$

satisfait nos conditions : les fonctions sont étagées, tendent vers f et $\|\widetilde{f}_n(\omega)\| \leq \|f(\omega)\|$ pour tout n et tout $\omega \in \Omega$.

Définir l'intégrale de fonctions étagées vectorielles ne pose pas plus de problèmes que dans le cas scalaire (bien sûr, ces intégrales sont maintenant des vecteurs de E) ; il faut néanmoins se limiter aux *fonctions étagées intégrables*, c'est-à-dire les fonctions étagées g à valeurs dans E telles que $\int \|g(\omega)\|\,\mathrm{d}\mu(\omega) < +\infty$. Si g est une telle fonction étagée à valeurs dans E, on pourra écrire

$$g = \sum_{j=1}^{n} \mathbf{1}_{\mathrm{A}_j} x_j,$$

où $\mathrm{A}_1, \ldots, \mathrm{A}_n$ est une partition de Ω en ensembles de $\mathcal{A}$, et où $x_1, \ldots, x_n$ sont des vecteurs de E. On sait que $\int \|g\|\,\mathrm{d}\mu = \sum_{j=1}^{n} \mu(\mathrm{A}_j)\,\|x_j\| < +\infty$, ce qui implique que $\mu(\mathrm{A}_j) < +\infty$ chaque fois que $x_j \neq 0_{\mathrm{E}}$; si on adopte la convention d'écriture $+\infty \cdot 0_{\mathrm{E}} = 0_{\mathrm{E}}$, on peut donc considérer

$$\int g\,\mathrm{d}\mu = \sum_{j=1}^{n} \mu(\mathrm{A}_j) x_j \in \mathrm{E}.$$

L'indépendance par rapport à la représentation se montre exactement comme on a fait dans le cas étagé positif. L'inégalité triangulaire dans E donne immédiatement l'inégalité évidente mais fondamentale $\left\|\int g\,\mathrm{d}\mu\right\| \leq \int \|g\|\,\mathrm{d}\mu$.

Supposons donc que les (f_n) étagées tendent vers f et que $\|f_n\| \leq \|f\|$; la suite des fonctions $\|f - f_n\|$ tend vers 0 en étant dominée par la fonction intégrable $2\,\|f\|$; par le théorème de convergence dominée,

$$\int \|f(\omega) - f_n(\omega)\| \,\mathrm{d}\mu(\omega) \to 0.$$

Il existe donc un entier N tel que $\int \|f(\omega) - f_n(\omega)\| \,\mathrm{d}\mu(\omega) \leq \varepsilon$ pour tout $n \geq \mathrm{N}$, ce qui donne par l'inégalité triangulaire pour la norme de E

$$\int \|f_m(\omega) - f_n(\omega)\| \,\mathrm{d}\mu(\omega) \leq 2\varepsilon$$

pour tous les entiers $m, n \geq \mathrm{N}$; la suite des vecteurs $\mathrm{I}_n = \int f_n \,\mathrm{d}\mu \in \mathrm{E}$ est donc de Cauchy, puisque

$$\|\mathrm{I}_m - \mathrm{I}_n\| \leq \int \|f_m(\omega) - f_n(\omega)\| \,\mathrm{d}\mu(\omega) \leq 2\varepsilon$$

pour tous les entiers $m, n \geq \mathrm{N}$; puisque E est complet, cette suite de vecteurs (I_n) tend vers une limite I que l'on peut légitimement définir comme *l'intégrale de la fonction vectorielle* f,

$$\int f \,\mathrm{d}\mu = \lim_n \int f_n \,\mathrm{d}\mu \in \mathrm{E},$$

car on montre facilement que la limite I est indépendante de la suite (f_n) choisie.