Prépa. Agrég. écrit d'Analyse, Annexe n° 3.

Démonstration du théorème de Tykhonov

On va présenter deux démonstrations du théorème de Tykhonov. La première est essentiellement la démonstration au moyen des *ultrafiltres*, mais sans le dire… La deuxième ressemble plus à la démonstration du théorème de Hahn-Banach. Dans les deux cas, on fera appel au lemme de Zorn ; cela n'est pas surprenant si on pense que la seule affirmation que le produit $\prod_{i \in \mathrm{I}} \mathrm{X}_i$ d'une famille quelconque d'ensembles non vides est non vide équivaut au lemme de Zorn. Et si on veut s'intéresser en plus à la topologie de cet espace produit, la moindre des choses serait bien de pouvoir dire s'il est vide ou non !

Pour la première démonstration qui suit, il est agréable de concevoir la topologie d'un produit infini comme une espèce de limite des produits finis (cette notion existe vraiment, c'est la notion de *limite projective*). Soit $(\mathrm{X}_i)_{i \in \mathrm{I}}$ une famille quelconque d'espaces topologiques et posons $\mathrm{X} = \prod_{i \in \mathrm{I}} \mathrm{X}_i$; pour tout sous-ensemble fini $\mathrm{J} \subset \mathrm{I}$, considérons le produit fini $\mathrm{X}_\mathrm{J} = \prod_{j \in \mathrm{J}} \mathrm{X}_j$ et l'application de projection naturelle π_J de X sur X_J qui est définie par

$$\pi_\mathrm{J}\big((x_i)_{i \in \mathrm{I}}\big) = (x_j)_{j \in \mathrm{J}}.$$

Les ouverts de la topologie produit sur X sont agréables à décrire avec ces projections : disons qu'un ensemble $\mathrm{V} \subset \mathrm{X}$ est un ouvert semi-élémentaire s'il existe un ensemble fini $\mathrm{J} \subset \mathrm{I}$ et un ouvert W du produit fini X_J tels que $\mathrm{V} = \pi_\mathrm{J}^{-1}(\mathrm{W})$. Un ouvert quelconque de X est réunion d'ouverts semi-élémentaires.

La description précédente montre que les projections π_J sont continues de X sur X_J, pour tout $\mathrm{J} \subset \mathrm{I}$.

Théorème : théorème de Tykhonov. *Tout produit* $\mathrm{X} = \prod_{i \in \mathrm{I}} \mathrm{X}_i$ *d'une famille* $(\mathrm{X}_i)_{i \in \mathrm{I}}$ *de compacts est compact.*

Démonstration. Il est facile de voir que X est séparé. Soit $\mathcal{F}$ une famille de fermés de X, avec la propriété d'intersection finie, c'est à dire que toute famille finie $\mathrm{F}_1, \ldots, \mathrm{F}_n$ d'éléments de $\mathcal{F}$ a une intersection $\mathrm{F}_1 \cap \ldots \cap \mathrm{F}_n$ *non vide* ; la famille $\mathcal{A}$ de toutes les intersections finies $\mathrm{A} = \mathrm{F}_1 \cap \ldots \cap \mathrm{F}_\mathrm{N}$ d'éléments de $\mathcal{F}$ a les deux propriétés suivantes :

– si A, B sont deux éléments de $\mathcal{A}$, alors $\mathrm{A} \cap \mathrm{B} \in \mathcal{A}$
– tout élément de $\mathcal{A}$ est un fermé non vide de X.

Pour savoir que X est compact, nous devons montrer que l'intersection de cette famille $\mathcal{A}$ est non vide ; la stratégie (bizarre) de la preuve est d'augmenter la famille $\mathcal{A}$ en une famille $\mathcal{B}$ qui aura elle aussi une intersection non vide ; l'intérêt de l'élargissement de $\mathcal{B}$ est que dans $\mathcal{B}$, on aura simplifié la description de l'intersection : il n'y aura plus qu'un seul élément !

Pour les besoins de la rédaction de cette démonstration, appelons *famille convenable* toute famille $\mathcal{A}$ de parties fermées de X avec les deux propriétés ci-dessus. On fera quelques remarques.

1. Si $\mathcal{A}$ est convenable et si π est une application de X dans un compact K, alors $\bigcap_{\mathrm{A} \in \mathcal{A}} \overline{\pi(\mathrm{A})}$ est non vide, car la famille des fermés $\overline{\pi(\mathrm{A})}$ du compact K a la propriété d'intersection finie : en effet, $\overline{\pi(\mathrm{A}_1)} \cap \ldots \cap \overline{\pi(\mathrm{A}_n)}$ est toujours non vide quand $\mathrm{A}_1, \ldots, \mathrm{A}_n \in \mathcal{A}$, puisque cette intersection est plus grande que $\pi(\mathrm{A}_1) \cap \ldots \cap \pi(\mathrm{A}_n)$, lui-même plus grand que l'ensemble non vide $\pi(\mathrm{A}_1 \cap \ldots \cap \mathrm{A}_n)$, image de l'ensemble non vide $\mathrm{A}_1 \cap \ldots \cap \mathrm{A}_n \in \mathcal{A}$.

2. Par Zorn, toute famille convenable $\mathcal{A}$ est contenue dans une famille convenable maximale $\mathcal{B}$. Dans cette situation maximale, le fait qu'un fermé $\mathrm{C} \subset \mathrm{X}$ rencontre tous les éléments $\mathrm{B} \in \mathcal{B}$ entraîne que $\mathrm{C} \in \mathcal{B}$: sinon, la famille $\mathcal{C}$ formée de C, de tous les $\mathrm{B} \in \mathcal{B}$ et de tous les $\mathrm{C} \cap \mathrm{B}$ pour $\mathrm{B} \in \mathcal{B}$ serait une famille convenable plus grande (strictement) que $\mathcal{B}$.

3. Appliquons ce qui précède à la projection π_{J} de X sur le compact $\mathrm{X}_{\mathrm{J}} = \prod_{j \in \mathrm{J}} \mathrm{X}_j$, où J est un sous-ensemble fini quelconque de I ; d'après le point 1, on peut trouver un point $x_{\mathrm{J}} \in \mathrm{B}_{\mathrm{J}} = \bigcap_{\mathrm{B} \in \mathcal{B}} \overline{\pi_{\mathrm{J}}(\mathrm{B})}$; pour tout voisinage fermé V de x_{J} dans X_{J} et tout $\mathrm{B} \in \mathcal{B}$, l'ensemble $\mathrm{V} \cap \pi_{\mathrm{J}}(\mathrm{B})$ est donc non vide, donc $\pi_{\mathrm{J}}^{-1}(\mathrm{V}) \cap \mathrm{B}$ est non vide pour tout $\mathrm{B} \in \mathcal{B}$. Par maximalité, le fermé $\pi_{\mathrm{J}}^{-1}(\mathrm{V})$ est dans $\mathcal{B}$. En particulier, si $j \in \mathrm{J}$ et si W est un voisinage fermé dans X_j de la coordonnée x_j de x_{J}, l'ensemble $\mathrm{V} = \{y_{\mathrm{J}} \in \mathrm{X}_{\mathrm{J}} : y_j \in \mathrm{W}\}$ est un voisinage fermé de x_{J} dans X_{J} et $\pi_j^{-1}(\mathrm{W}) = \pi_{\mathrm{J}}^{-1}(\mathrm{V})$ est dans $\mathcal{B}$.

Il en résulte que si j est un indice commun à J_1 et à J_2, si $x_{\mathrm{J}_1} \in \mathrm{B}_{\mathrm{J}_1}$ et $y_{\mathrm{J}_2} \in \mathrm{B}_{\mathrm{J}_2}$, alors leur coordonnée j coïncide, $y_j = x_j$; sinon, on pourrait trouver des fermés W_1 et W_2 disjoints, qui soient voisinages de x_j et y_j dans X_j, et alors $\mathcal{B}$ contiendrait les ensembles disjoints $\pi_j^{-1}(\mathrm{W}_1)$ et $\pi_j^{-1}(\mathrm{W}_2)$, ce qui est impossible puisque deux éléments quelconques d'une famille convenable ont une intersection non vide.

En particulier, quand $\mathrm{J} = \mathrm{J}_1 = \mathrm{J}_2$, on conclut que tous les éléments de B_{J} ont les mêmes coordonnées, c'est à dire que B_{J} est réduit à un seul point x_{J}, et de plus on a isolé pour tout $j \in \mathrm{I}$ un point $x_j \in \mathrm{X}_j$ associé de façon unique à la famille maximale $\mathcal{B}$. On va naturellement considérer le point $x = (x_i)_{i \in \mathrm{I}} \in \mathrm{X}$ et montrer qu'il est dans tous les $\mathrm{B} \in \mathcal{B}$, donc *a fortiori* dans l'intersection de la famille initiale $\mathcal{F}$.

Si on avait $x \notin \mathrm{B}$ et puisque chaque B est fermé pour la topologie produit, il existerait un ouvert élémentaire V tel que $x \in \mathrm{V} \subset \mathrm{B}^c$; cet ouvert élémentaire est de la forme $\pi_{\mathrm{J}}^{-1}(\mathrm{W}_0)$, où W_0 est un ouvert de $\mathrm{X}_{\mathrm{J}} = \prod_{j \in \mathrm{J}} \mathrm{X}_j$, pour un certain sous-ensemble fini $\mathrm{J} \subset \mathrm{I}$. Cela signifie que $x_{\mathrm{J}} = \pi_{\mathrm{J}}(x) \in \mathrm{W}_0$ et que W_0 est disjoint de $\pi_{\mathrm{J}}(\mathrm{B})$, donc aussi de $\overline{\pi_{\mathrm{J}}(\mathrm{B})}$, contrairement à la construction précédente. En effet, W_0 contient un voisinage fermé W de x_{J}, et on a dit que W doit rencontrer $\pi_{\mathrm{J}}(\mathrm{B})$ pour tout $\mathrm{B} \in \mathcal{B}$ (en fait, on a même conclu que $\pi_{\mathrm{J}}^{-1}(\mathrm{W}) \in \mathcal{B}$).

Ceci achève la première démonstration, qui est finalement assez courte mais peu intuitive.

Passons à une autre démonstration, qui colle de plus près à la démonstration habituelle par extractions successives sur les coordonnées ; quand on veut démontrer Bolzano-Weierstrass pour une suite bornée (x_n, y_n, z_n) de $\mathbb{R}^3$ par exemple, on commence par trouver un candidat pour la première coordonnée x d'une limite de sous-suite en sélectionnant une première sous-suite telle que x_{n_k} tende vers une limite x ; ensuite, on cherche à étendre la définition de la limite en trouvant la deuxième coordonnée y, puis la dernière ; dans le cas d'un produit infini non dénombrable, cette stratégie d'extension ne pourra pas être menée aussi explicitement, elle utilisera le lemme de Zorn.

La description est plus agréable si on rend la situation un tout petit peu plus concrète en traitant seulement un cas particulier, celui du produit $\mathrm{X} = [0,1]^{\mathrm{I}}$, que l'on considérera comme l'espace des toutes les fonctions f sur l'ensemble I, à valeurs dans $[0,1]$; cet espace X est muni de la topologie de la convergence simple. Un ouvert élémentaire V de cette topologie est de la forme suivante : on donne un sous-ensemble fini $\mathrm{J} \subset \mathrm{I}$ et pour chaque $j \in \mathrm{J}$ un intervalle $\mathrm{U}_j \subset [0,1]$ ouvert dans $[0,1]$, et on pose

$$\mathrm{V} = \mathrm{V}(\mathrm{J}, (\mathrm{U}_j)_{j \in \mathrm{J}}) = \{f : \mathrm{I} \to [0,1] : \forall j \in \mathrm{J},\ f(j) \in \mathrm{U}_j\}.$$

Il est clair que l'intersection de deux, ou d'un nombre fini d'ouverts élémentaires est un ouvert élémentaire.

On suppose donc donnée une famille $\mathcal{F}$ de fermés de X. On suppose que la famille $\mathcal{F}$ possède la propriété d'intersection finie, et on veut prouver que l'intersection de la famille $\mathcal{F}$ est non vide. Il est commode d'introduire à nouveau la famille $\mathcal{A}$ formée de tous les ensembles fermés non vides de la forme $\mathrm{A} = \mathrm{F}_1 \cap \ldots \cap \mathrm{F}_n$, où $n \in \mathbb{N}$ est quelconque et $\mathrm{F}_1, \ldots, \mathrm{F}_n \in \mathcal{F}$. Il faut montrer que l'intersection des fermés $\mathrm{A} \in \mathcal{A}$ est non vide.

Disons que (L, g) est une *donnée partielle* si $\mathrm{L} \subset \mathrm{I}$ et si g est une fonction de L dans $[0, 1]$; à une telle donnée partielle on associe le fermé de X formé de toutes les fonctions f sur I dont la restriction à L est g,

$$\mathrm{C}(\mathrm{L}, g) = \{f \in \mathrm{X} : \forall i \in \mathrm{L}, f(i) = g(i)\}.$$

Lorsque $\mathrm{L} = \mathrm{I}$, l'ensemble $\mathrm{C}(\mathrm{I}, g)$ est réduit au seul point $g \in \mathrm{X}$, qui est bien une fonction de I dans $[0, 1]$. On dira que (L, g) est adhérent à la famille $\mathcal{A}$ si pour tout ouvert V élémentaire de X qui contient le fermé $\mathrm{C}(\mathrm{L}, g)$ et tout $\mathrm{A} \in \mathcal{A}$, l'ensemble V rencontre A.

Lorsque $\mathrm{L} = \mathrm{I}$ et que (I, g) est adhérent à la famille $\mathcal{A}$, cette information dit que pour tout $\mathrm{A} \in \mathcal{A}$ fixé, tout ouvert élémentaire contenant l'élément $g \in \mathrm{X}$ rencontre A, et comme A est fermé on en déduit que $g \in \mathrm{A}$, pour tout $\mathrm{A} \in \mathcal{A}$, autrement dit l'intersection de la famille $\mathcal{A}$ est non vide, puisqu'elle contient g.

Notre objectif est donc de montrer qu'il existe une donnée partielle (L, g), adhérente à la famille $\mathcal{A}$, pour laquelle $\mathrm{L} = \mathrm{I}$, en procédant par élargissement progressif de l'ensemble de définition L ; on peut considérer qu'on commence avec le cas trivial où $\mathrm{L} = \emptyset$, ou bien anticiper sur le pas général de récurrence pour démarrer avec un cas moins trivial où $\mathrm{L} = \{i_0\}$ (ce passage de $\mathrm{L} = \emptyset$ à $\{\mathrm{L} = i_0\}$ est identique à ce qui sera fait plus bas pour montrer que la situation maximale est nécessairement celle où $\mathrm{L} = \mathrm{I}$).

Avant de se lancer, il est utile de voir à quelle condition un ouvert élémentaire $\mathrm{V} = \mathrm{V}(\mathrm{J}, (\mathrm{U}_j)_{j \in \mathrm{J}})$ contient un fermé de la forme $\mathrm{C}(\mathrm{L}, g)$. On note que si $\mathrm{V} = \mathrm{V}(\mathrm{J}, (\mathrm{U}_j)_{j \in \mathrm{J}})$ contient $\mathrm{C}(\mathrm{L}, g)$, alors $\mathrm{U}_j = [0, 1]$ pour tout $j \in \mathrm{J} \setminus \mathrm{L}$: si $j \notin \mathrm{L}$, un élément $f \in \mathrm{C}(\mathrm{L}, g)$ peut prendre au point j n'importe quelle valeur $s \in [0, 1]$, mais si $\mathrm{C}(\mathrm{L}, g) \subset \mathrm{V}$, cela impose $f(j) \in \mathrm{U}_j$; cela n'est possible que si $\mathrm{U}_j = [0, 1]$. On voit que $\mathrm{C}(\mathrm{L}, g)$ est contenu dans $\mathrm{V}(\mathrm{J}, (\mathrm{U}_j)_{j \in \mathrm{J}})$ si et seulement si $g(j) \in \mathrm{U}_j$ pour tout $j \in \mathrm{J} \cap \mathrm{L}$ et $\mathrm{U}_j = [0, 1]$ pour tout $j \in \mathrm{J} \setminus \mathrm{L}$. Les ouverts $\mathrm{U}_j = [0, 1]$ ne servent à rien dans la définition de V : si V contient $\mathrm{C}(\mathrm{L}, g)$, on peut supposer que $\mathrm{J} \subset \mathrm{L}$.

On dira que la donnée partielle (L_1, g_1) est *plus petite* que la donnée partielle (L_2, g_2) si $\mathrm{L}_1 \subset \mathrm{L}_2$ et $g_2 = g_1$ en tout point de L_1. On vérifie que les données partielles adhérentes à $\mathcal{A}$ forment un ensemble inductif pour cet ordre : si $(\mathrm{L}_\alpha, g_\alpha)$ est une famille totalement ordonnée de données partielles adhérentes à $\mathcal{A}$, la famille (L_α) de sous-ensembles de I est totalement ordonnée par inclusion. On pose $\mathrm{L} = \bigcup_\alpha \mathrm{L}_\alpha$, et il est clair par la définition de l'ordre que pour tout $i \in \mathrm{L}$ on aura une valeur $g(i) \in [0, 1]$ bien définie qui est la valeur de $g_\alpha(i)$ à partir du moment où $i \in \mathrm{L}_\alpha$. Considérons la donnée partielle (L, g) et montrons qu'elle est adhérente à $\mathcal{A}$: soit $\mathrm{V} = \mathrm{V}(\mathrm{J}, (\mathrm{U}_j)_{j \in \mathrm{J}})$ un ouvert élémentaire contenant $\mathrm{C}(\mathrm{L}, g)$; on a vu qu'on peut supposer $\mathrm{J} \subset \mathrm{L}$, et l'inclusion signifie alors que $g(j) \in \mathrm{U}_j$ pour tout $j \in \mathrm{J}$; comme J est fini et la famille (L_α) totalement ordonnée, le sous-ensemble fini J sera contenu dans L_α pour α assez grand ; on en déduit alors que V contient déjà $\mathrm{C}(\mathrm{L}_\alpha, g_\alpha)$ (micro-exercice), donc V rencontre tout $\mathrm{A} \in \mathcal{A}$ puisque $(\mathrm{L}_\alpha, g_\alpha)$ était supposée adhérente à $\mathcal{A}$.

L'ensemble des données partielles adhérentes à $\mathcal{A}$ étant inductif, il admet des éléments maximaux d'après le lemme de Zorn. Pour terminer, il suffit de montrer que si (L, g) est maximal, alors $\mathrm{L} = \mathrm{I}$. Montrons que toute donnée partielle (L, g) adhérente à $\mathcal{A}$ peut être étendue, tant que $\mathrm{L} \neq \mathrm{I}$ (ce qui justifie l'affirmation sur les éléments maximaux). Soit $k \in \mathrm{I} \setminus \mathrm{L}$. La famille $\mathcal{B}$ de tous les ensembles

$$\mathrm{B} = \mathrm{A} \cap \mathrm{V}$$

où V varie dans la famille des ouverts élémentaires contenant $\mathrm{C}(\mathrm{L}, g)$ et A dans $\mathcal{A}$, vérifie la propriété d'intersection finie. En effet, étant donné un nombre fini d'ensembles $\mathrm{A}_\alpha \cap \mathrm{V}_\alpha \in \mathcal{B}$, l'intersection finie $\mathrm{V} = \bigcap_\alpha \mathrm{V}_\alpha$ est encore un ouvert élémentaire qui contient $\mathrm{C}(\mathrm{L}, g)$, et $\mathrm{A} = \bigcap_\alpha \mathrm{A}_\alpha$ est un élément de $\mathcal{A}$. Il en résulte que $\bigcap_\alpha (\mathrm{A}_\alpha \cap \mathrm{V}_\alpha) = \mathrm{A} \cap \mathrm{V}$ est non vide, puisque (L, g) est adhérent à $\mathcal{A}$. Désignons par π_k l'application $f \to f(k)$ de X sur $[0, 1]$. Il résulte de la propriété de $\mathcal{B}$ que la famille des ensembles

$$\overline{\pi_k(\mathrm{A} \cap \mathrm{V})}$$

est une famille de fermés du compact $[0, 1]$, avec la propriété d'intersection finie. Il existe donc un point x_k dans l'intersection. Sur $\widetilde{\mathrm{L}} = \mathrm{L} \cup \{k\}$ on définit une extension $\widetilde{g}$ de g en posant $\widetilde{g}(k) = x_k$ (et $\widetilde{g}(i) = g(i)$ pour tout $i \in \mathrm{L}$).

Montrons pour finir que $(\widetilde{\mathrm{L}}, \widetilde{g})$ est adhérent à la famille $\mathcal{A}$. Supposons que l'ouvert élémentaire $\widetilde{\mathrm{V}}$ contienne le nouvel ensemble $\mathrm{C}(\widetilde{\mathrm{L}}, \widetilde{g})$,

$$\mathrm{C}(\widetilde{\mathrm{L}}, \widetilde{g}) = \mathrm{C}(\mathrm{L}, g) \cap \{f \in \mathrm{X} : f(k) = x_k\}.$$

On peut écrire

$$\widetilde{\mathrm{V}} = \mathrm{V}(\mathrm{J}, (\mathrm{U}_j)_{j \in \mathrm{J}}) \cap \{f \in \mathrm{X} : f(k) \in \mathrm{U}_k\}$$

où l'ensemble J ne contient pas k, et $x_k \in \mathrm{U}_k$. Il est clair que V contient $\mathrm{C}(\mathrm{L}, g)$, donc $\mathrm{A} \cap \mathrm{V}$ est l'un des ensembles de la famille $\mathcal{B}$, par conséquent le voisinage U_k de x_k rencontre $\pi_k(\mathrm{A} \cap \mathrm{V})$, ce qui signifie exactement que $\widetilde{\mathrm{V}}$ rencontre A.

On a bien montré que toute donnée partielle (L, g) avec $\mathrm{L} \neq \mathrm{I}$ peut être étendue.