Prépa. Agrég. écrit d'Analyse, Annexe n° 4.

Un exemple simple de Cauchy-Lipschitz

On suppose données une norme (quelconque) sur $\mathbb{R}^d$, qui sera notée $v \in \mathbb{R}^d \to \|v\|$, et une application $\mathrm{F} : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$; on suppose que F est globalement lipschitzienne, c'est à dire qu'il existe une constante K telle que

$$\forall v_1, v_2 \in \mathbb{R}^d, \quad \|\mathrm{F}(v_1) - \mathrm{F}(v_2)\| \le \mathrm{K}\,\|v_1 - v_2\|.$$

On s'intéresse à l'équation différentielle (vectorielle) $y' = \mathrm{F}(y)$ sur un intervalle $[0, \mathrm{T}]$.

Le théorème qui suit est évidemment conséquence du théorème général de Cauchy-Lipschitz, mais le but de ce petit texte est de montrer qu'il admet une démonstration directe très simple à partir du théorème de point fixe des applications contractantes, et de l'introduction d'un espace normé (complet) adapté.

Théorème. *Pour toute donnée initiale $y_0 \in \mathbb{R}^d$, il existe une solution (unique) de l'équation $y' = \mathrm{F}(y)$ vérifiant $y(0) = y_0$, c'est à dire une fonction $y : [0, \mathrm{T}] \to \mathbb{R}^d$ de classe C^1 telle que*

$$\forall t \in [0, \mathrm{T}], \quad y'(t) = \mathrm{F}(y(t)), \quad \text{et} \quad y(0) = y_0.$$

Démonstration. On considère l'espace de Banach E des applications continues de $[0, \mathrm{T}]$ dans $\mathbb{R}^d$, mais on le munit d'une norme différente de la norme du sup, qui est cependant équivalente à la norme du sup ; cette norme est donnée par

$$\forall f \in \mathrm{E}, \quad \|\!|f|\!\| = \max\{\mathrm{e}^{-\mathrm{K}t}\,\|f(t)\| : t \in [0, \mathrm{T}]\}$$

où K est la constante de Lipschitz de F. Considérons la transformation S de E dans E définie par

$$\forall f \in \mathrm{E},\ \forall t \in [0, \mathrm{T}], \quad (\mathrm{S}f)(t) = y_0 + \int_0^t \mathrm{F}(f(s))\,ds$$

(l'intégrale est une intégrale vectorielle à valeurs dans $\mathbb{R}^d$). Montrons le caractère contractant de S ; si f, g sont deux éléments de E, on aura pour tout $t \in [0, \mathrm{T}]$,

$$\mathrm{e}^{-\mathrm{K}t}\,\|(\mathrm{S}f)(t) - (\mathrm{S}g)(t)\| = \mathrm{e}^{-\mathrm{K}t}\Big\|\int_0^t \big(\mathrm{F}(f(s)) - \mathrm{F}(g(s))\big)\,ds\Big\| \le$$

$$\le \mathrm{e}^{-\mathrm{K}t}\int_0^t \|\mathrm{F}(f(s)) - \mathrm{F}(g(s))\|\,ds \le \mathrm{e}^{-\mathrm{K}t}\int_0^t \mathrm{K}\,\|f(s) - g(s)\|\,ds \le$$

$$\le \mathrm{e}^{-\mathrm{K}t}\int_0^t \mathrm{K}\,\mathrm{e}^{\mathrm{K}s}\,\|\!|f - g|\!\|\,ds = \mathrm{e}^{-\mathrm{K}t}(\mathrm{e}^{\mathrm{K}t} - 1)\,\|\!|f - g|\!\| \le (1 - \mathrm{e}^{-\mathrm{K}\mathrm{T}})\,\|\!|f - g|\!\|$$

ce qui montre en prenant le max en $t \in [0, \mathrm{T}]$

$$\forall f, g \in \mathrm{E}, \quad \|\!|\mathrm{S}f - \mathrm{S}g|\!\| \le (1 - \mathrm{e}^{-\mathrm{K}\mathrm{T}})\,\|\!|f - g|\!\|$$

donc S est bien contractante, avec la constante $\mathrm{C} = 1 - \mathrm{e}^{-\mathrm{K}\mathrm{T}} < 1$. Puisque E est complet, il existe une fonction unique f_0 telle que $\mathrm{S}f_0 = f_0$. On en déduit d'abord que $f_0(0) = y_0$, et on montre classiquement que $\mathrm{S}f_0$ est de classe C^1 (parce que f_0 est continue) avec $(\mathrm{S}f_0)' = \mathrm{F}(f_0)$. Réciproquement, si f_1 de classe C^1 vérifie l'équation différentielle et la condition $f_1(0) = y_0$, on constate facilement que $\mathrm{S}f_1 = f_1$, donc $f_1 = f_0$ par l'unicité (évidente) dans le théorème de point fixe.

Remarques

1. Il faut rappeler que le cadre $\mathbb{R}^d$ est important du point de vue théorique, car il permet de ramener une équation différentielle d'ordre > 1 à une équation vectorielle d'ordre 1, et également une équation non autonome à une équation autonome avec une dimension d'espace de plus. Notons encore que tout marcherait aussi bien si l'espace des valeurs $\mathbb{R}^d$ était remplacé par un espace de Banach.

2. Au lieu de "tordre" la norme uniforme on aurait pu garder la norme usuelle et tordre l'opérateur S en posant

$$(\mathrm{S}_1 f)(t) = \mathrm{e}^{-\mathrm{K}t}\Big(y_0 + \int_0^t \mathrm{F}\big(\mathrm{e}^{\mathrm{K}s}\, f(s)\big)\, ds\Big).$$

3. On peut utiliser une variante de la méthode pour travailler directement sur $[0, +\infty[$; ça n'est pas très utile puisqu'il suffit, si on veut résoudre l'équation sur $[0, +\infty[$, de la résoudre sur chaque intervalle $[0, n]$ comme on l'a expliqué précédemment, puis de remarquer que les différentes solutions (y_n), définies sur $[0, n]$, se recollent (d'après le résultat d'unicité) pour former une fonction bien définie y sur $[0, +\infty[$, qui est solution de $y' = \mathrm{F}(y)$. Expliquons cependant cette variante : on introduit une norme $f \to |\!|\!| f |\!|\!|$ avec une constante $\mathrm{M} > \mathrm{K}$,

$$|\!|\!| f |\!|\!| = \sup\{\mathrm{e}^{-\mathrm{M}t}\, \|f(t)\| : t \geq 0\}$$

qui est définie sur l'espace $\mathrm{E}_\infty(\mathrm{M})$ des fonctions continues sur $[0, +\infty[$ telles que $f(t) = \mathrm{O}(\mathrm{e}^{\mathrm{M}t})$; cet espace $\mathrm{E}_\infty(\mathrm{M})$ est complet pour cette norme. Ceci donnera en remplaçant dans le calcul précédent, pour tout $t \geq 0$

$$\mathrm{e}^{-\mathrm{M}t}\, \|(\mathrm{S}f)(t) - (\mathrm{S}g)(t)\| \leq \mathrm{e}^{-\mathrm{M}t} \int_0^t \mathrm{K}\ \mathrm{e}^{\mathrm{K}s}\, |\!|\!| f - g |\!|\!|\ ds = \mathrm{e}^{-\mathrm{M}t}(\mathrm{e}^{\mathrm{K}t} - 1)\, |\!|\!| f - g |\!|\!|$$

et le maximum de $\mathrm{C}(t) = \mathrm{e}^{-\mathrm{M}t}(\mathrm{e}^{\mathrm{K}t} - 1)$ sur $[0, +\infty[$ est atteint en un certain $t_0 > 0$ pour lequel $1 - \mathrm{e}^{-\mathrm{K}t_0} = \mathrm{K}/\mathrm{M}$ et $\mathrm{C} = \mathrm{C}(t_0) \leq \mathrm{K}/\mathrm{M} < 1$. On en déduit

$$\forall f, g \in \mathrm{E}_\infty(\mathrm{M}), \quad |\!|\!| \mathrm{S}f - \mathrm{S}g |\!|\!| \leq \mathrm{C}\ |\!|\!| f - g |\!|\!| .$$

4. Bien entendu il s'agit ici d'un développement censé illustrer l'intérêt des espaces de fonctions. La méthode plus directe par itération, sans mention explicite d'espace normé de fonctions continues, est aussi (sinon plus) rapide dans ce cas uniformément lipschitzien. On définit une suite (y_n) de fonctions de $[0, \mathrm{T}]$ dans $\mathbb{R}^d$ en posant $y_0(t) = y_0$ pour tout t, puis

$$y_{n+1}(t) = y_0 + \int_0^t \mathrm{F}(y_n(s))\, ds$$

pour tout $n \geq 0$. Si on pose $\mathrm{M} = \|\mathrm{F}(y_0)\|$, on montre facilement par récurrence que $\|y_{n+1}(t) - y_n(t)\| \leq \mathrm{K}^{-1}\mathrm{M}\, (\mathrm{K}t)^{n+1}/(n+1)!$ pour tout $n \geq 0$, d'où résulte la convergence de la série $y_0 + \sum_{n \geq 0}(y_{n+1} - y_n)$ vers une fonction y_∞ qui est solution de l'équation $y' = \mathrm{F}(y)$ et vérifie de plus l'estimation $\|y_\infty(t) - y_0\| \leq \mathrm{K}^{-1}\mathrm{M}(\mathrm{e}^{\mathrm{K}t} - 1)$.