Prépa. Agrég. écrit d'Analyse, Annexe n° 6.

Fonctions définies par une intégrale

Méthode de Laplace dans $\mathbb{R}^d$

On suppose que g et h sont deux fonctions réelles définies sur $\mathbb{R}^d$, telles que la fonction

$$\mathrm{F}(t) = \int_{\mathbb{R}^d} g(x)\, \mathrm{e}^{t\, h(x)}\, dx$$

soit définie pour t réel assez grand. On s'intéresse au comportement de $\mathrm{F}(t)$ lorsque $t \to +\infty$. On fait les hypothèses suivantes :

– la fonction h admet un maximum (unique) sur $\mathbb{R}^d$ au point x_0, et toute suite maximisante $(u_n) \subset \mathbb{R}^d$ pour h tend vers x_0 ;

– on suppose que h admet un DL2 au voisinage de x_0 avec une matrice hessienne définie négative $\mathrm{D}^2 h(x_0) = -\mathrm{A}$,

$$h(x_0 + v) = h(x_0) - \frac{1}{2}\, {}^t v \mathrm{A} v + o(\|v\|^2)\,;$$

– pour un certain t_0 l'intégrale $\int_{\mathbb{R}^d} |g(x)|\, \mathrm{e}^{t_0 h(x)}\, dx$ est finie ;

– enfin g est continue au point x_0 et $g(x_0) \neq 0$.

On en déduit

$$\mathrm{F}(t) = \int_{\mathbb{R}^d} g(x)\, \mathrm{e}^{th(x)}\, dx \sim \Big(\frac{2\pi}{t}\Big)^{d/2} \frac{g(x_0)\, \mathrm{e}^{th(x_0)}}{\sqrt{\det \mathrm{A}}},$$

équivalent valable quand $t \to +\infty$.

Démonstration. On supposera $g(x_0) > 0$. On va montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe t_1 tel que $\mathrm{F}(t) \le (1 + \varepsilon)\, \mathrm{K}(t)$ pour $t > t_1$, où

$$\mathrm{K}(t) = \Big(\frac{2\pi}{t}\Big)^{d/2} \frac{g(x_0)\, \mathrm{e}^{th(x_0)}}{\sqrt{\det \mathrm{A}}}\cdot$$

La preuve de $\mathrm{F}(t) \ge (1 - \varepsilon)\, \mathrm{K}(t)$ pour t assez grand est analogue et laissée au lecteur. On posera $\mathrm{C} = \mathrm{C}(\varepsilon) = (1+\varepsilon/2)^{-1/2} < 1$ et $\mathrm{D} = \mathrm{C}^{-d/2} > 1$ (détails purement techniques ; on doit juste penser que $\mathrm{C} < 1 < \mathrm{D}$ sont très proches de 1). Comme A est définie positive et g continue au point x_0, on peut trouver $r = r(\varepsilon) > 0$ tel que $h(x_0+v) - h(x_0) \le -\mathrm{C}\, {}^t v \mathrm{A} v/2$ et $g(x_0 + v) \le \mathrm{D}\, g(x_0)$ lorsque $\|v\| < r$. On découpe l'intégrale qui définit $\mathrm{F}(t)$ en deux parties : l'intégrale $\mathrm{J}_2(t)$ sur l'extérieur de la boule $\mathrm{B}(x_0, r)$ et l'intégrale $\mathrm{J}_1(t)$ sur $\mathrm{B}(x_0, r)$. On va voir que $\mathrm{J}_2(t)$ est petite devant $\mathrm{K}(r)$: d'après l'hypothèse sur les suites maximisantes, le sup de h dans $\mathbb{R}^d \setminus \mathrm{B}(x_0, r)$ est un nombre $\delta < h(x_0)$; pour $t > t_0$ on a donc si $x \notin \mathrm{B}(x_0, r)$ l'inégalité $t\, h(x) \le (t - t_0)\delta + t_0 h(x)$, d'où

$$|\mathrm{J}_2(t)| = \Big| \int_{\mathbb{R}^d \setminus \mathrm{B}(x_0, r)} g(x)\, \mathrm{e}^{th(x)}\, dx \Big| \le \mathrm{e}^{(t-t_0)\delta} \int_{\mathbb{R}^d} |g(x)|\, \mathrm{e}^{t_0 h(x)}\, dx = \mathrm{M}\, \mathrm{e}^{t\delta}$$

qui est visiblement $o(\mathrm{K}(t))$ quand t est grand puisque $\delta < h(x_0)$. Il existe donc t_2 tel que $|\mathrm{J}_2(t)| \le \varepsilon\, \mathrm{K}(t)/2$ pour $t > t_2$. Pour traiter $\mathrm{J}_1(t)$ on écrit

$$\mathrm{J}_1(t) = \int_{\mathrm{B}(x_0, r)} g(x)\, \mathrm{e}^{th(x)}\, dx \le \mathrm{D}\, g(x_0) \int_{\mathrm{B}(0, r)} \mathrm{e}^{t(h(x_0) - \mathrm{C}\, {}^t v \mathrm{A} v/2)}\, dv.$$

Le changement de variable $y = \sqrt{t\mathrm{C}}\, v$ donne

$$(*) \qquad (t\mathrm{C})^{d/2} \int_{\mathrm{B}(0,r)} \mathrm{e}^{-t\mathrm{C}\, {}^t v \mathrm{A} v/2}\ dv = \int_{\mathrm{B}(0,r\sqrt{t\mathrm{C}})} \mathrm{e}^{-{}^t y \mathrm{A} y/2}\ dy$$

qui tend, lorsque t tend vers $+\infty$, vers l'intégrale de la densité gaussienne multidimensionnelle,

$$\mathrm{J} = \int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\, {}^t y \mathrm{A} y}\ dy = (2\pi)^{d/2} (\det \mathrm{A})^{-1/2}.$$

Dans le sens de la majoration que nous traitons maintenant, il nous suffit de dire que l'intégrale de $(*)$ est $\le$ J, mais dans le sens de la minoration il faudrait utiliser la convergence de $(*)$ vers J. Ici, on écrit donc simplement que

$$\mathrm{J}_1(t) \le \bigl(\mathrm{D} g(x_0)\ \mathrm{e}^{th(x_0)}\bigr) \bigl((t\mathrm{C})^{-d/2}\, \mathrm{J}\bigr) = \mathrm{D}^2\, \mathrm{K}(t) \le (1 + \varepsilon/2)\, \mathrm{K}(t)$$

ce qui donne pour $t > t_2$ l'inégalité $\mathrm{F}(t) \le (1+\varepsilon)\, \mathrm{K}(t)$.

Remarque. Si E est un sous-ensemble de $\mathbb{R}^d$ limité par une sous-variété (lisse) et si x_0 est *sur* la sous-variété limite, on n'a en intégrant sur E, que la moitié de la partie importante de l'intégrale précédente ; supposons donc que φ soit réelle de classe C^1, que $\mathrm{E} = \{x \in \mathbb{R}^d : \varphi(x) \le 0\}$, que $\varphi(x_0) = 0$ et que $\nabla\varphi(x_0)$ soit non nul ; on a alors

$$\int_{\mathrm{E}} g(x)\, \mathrm{e}^{th(x)}\ dx \sim \frac{1}{2} \Bigl(\frac{2\pi}{t}\Bigr)^{d/2} \frac{g(x_0)\, \mathrm{e}^{th(x_0)}}{\sqrt{\det \mathrm{A}}}.$$

Formule de Stirling

On a

$$\Gamma(t+1) = \int_0^{+\infty} x^t\, \mathrm{e}^{-x}\ dx$$

donc

$$\frac{\Gamma(t+1)}{t^{t+1}} = \int_0^{+\infty} \frac{x^t}{t^t}\, \mathrm{e}^{-x}\ \frac{dx}{t} = \int_0^{\infty} y^t\, \mathrm{e}^{-ty}\ dy$$

après le changement de variable $x = ty$; on réécrit

$$\frac{\Gamma(t+1)}{t^{t+1}} = \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{t(\ln(y) - y)}\ dy$$

qui est bien de la forme précédente, avec $d = 1$, $g = \mathbf{1}_{]0,+\infty[}$ et $h(x) = \ln(x) - x$ pour $x > 0$ et $h(x) = -2$ si $x \le 0$ (par exemple ; je veux n'importe quoi de plus petit que le maximum de h sur $]0, +\infty[$, qui est égal à -1). On voit que h admet un unique maximum en $x_0 = 1$, avec $h''(x_0) = -1$ et $h(x_0) = -1$. On aura donc

$$\frac{\Gamma(t+1)}{t^{t+1}} \sim \sqrt{2\pi}\, \frac{\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{t}}$$

d'où la formule de Stirling

$$\Gamma(t+1) \sim t^t\ \mathrm{e}^{-t}\ \sqrt{2\pi t}$$

lorsque $t \to +\infty$, et son cas particulier

$$n! \sim n^n\ \mathrm{e}^{-n}\ \sqrt{2\pi n}$$

pour n entier tendant vers $+\infty$.

Fonction d'Airy

Voir Zuily-Queffélec, Chapitre IX, section V et la suite, pour un développement voisin ; on veut étudier les propriétés de la fonction A définie par

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{A}(t) = \int_0^{+\infty} \sin\Bigl(tx + \frac{x^3}{3}\Bigr)\, dx.$$

Cette fonction n'est pas la fonction notée $Ai(t)$ dans ZQ (la fonction de ZQ serait l'intégrale ci-dessus, mais avec sin remplacé par cos, et multiplié par 2 ; ce qui auront consulté ZQ verront que ce petit changement de rien du tout modifie beaucoup les résultats valables pour Ai). On veut montrer que cette fonction A est dérivable, et même indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$.

Il n'est même pas totalement évident pour commencer que l'intégrale ci-dessus converge, et à plus forte raison que la fonction ainsi définie soit dérivable. Il est clair qu'on ne peut pas utiliser *directement* un théorème à la Lebesgue avec majoration de la dérivée par rapport au paramètre ; mais dans les problèmes de ce type il est souvent utile d'effectuer une intégration par parties. En effet, la fonction à intégrer est férocement oscillante quand x tend vers $+\infty$, et on peut espérer adoucir ceci en remplaçant la fonction par une primitive, dans un processus d'intégration par parties.

L'étude est plus facile sur un intervalle $t \ge t_0 > 0$. Pour pouvoir intégrer, on va introduire l'expression $(t+x^2)\sin(tx+x^3/3)$ (qui est déjà une dérivée en x) et compenser en divisant dx par $t + x^2 > 0$. On pose $\mathrm{U}_t(x) = tx + x^3/3$ et on note sa dérivée $u_t(x) = \mathrm{U}'_t(x) = t + x^2$. On écrit

$$\int_0^y \sin\bigl(\mathrm{U}_t(x)\bigr)\, dx = \int_0^y \sin\bigl(\mathrm{U}_t(x)\bigr)\, u_t(x)\, \frac{dx}{u_t(x)} =$$

$$= -\Bigl[\cos(\mathrm{U}_t(x))\, \frac{1}{u_t(x)}\Bigr]_0^y - \int_0^y \cos(\mathrm{U}_t(x))\, \frac{2x\, dx}{u_t(x)^2}\ ;$$

le terme entre crochets tend vers $1/t$ lorsque $y \to +\infty$, ce qui montre que l'intégrale initiale converge, et que

$$\mathrm{A}(t) = \frac{1}{t} - \int_0^{+\infty} \cos(\mathrm{U}_t(x))\, \frac{2x\, dx}{(t+x^2)^2}.$$

Cette nouvelle expression contient une intégrale absolument convergente, à laquelle on peut appliquer le théorème standard de dérivabilité (mais les dérivées par rapport au paramètre t ne sont pas très simples). Avec cette formule on vérifie facilement que A est de classe C^1 sur $]0, +\infty[$. Mais des ennuis apparaîtront avec la dérivée seconde : l'intégrale obtenue n'est plus absolument convergente ; pour régler cela, on peut procéder à une nouvelle intégration par parties qui donnera

$$\mathrm{A}(t) = \frac{1}{t} + \int_0^{+\infty} \sin(\mathrm{U}_t(x))\, \frac{d}{dx}\Bigl(\frac{2x}{u_t(x)^3}\Bigr)\, dx$$

qui permet de dériver un peu plus loin. On peut répéter indéfiniment et montrer que A est de classe C^∞. Autre information, pour $t > 0$

$$\Bigl|\mathrm{A}(t) - \frac{1}{t}\Bigr| \le \int_0^{+\infty} \frac{2x\, dx}{(t+x^2)^2} = \Bigl[(t+x^2)^{-1}\Bigr]_{x=0}^{+\infty} = \frac{1}{t}$$

qui montre que $\mathrm{A}(t)$ tend vers 0 lorsque $t \to +\infty$. En fait, on peut voir que $t\,\mathrm{A}(t)$ tend vers 1 quand $t \to +\infty$.

En se fatiguant un peu on arrive à voir que la dérivée de A se calcule aussi par

$$\mathrm{A}'(t) = \int_0^{+\infty} x \cos\Bigl(tx + \frac{x^3}{3}\Bigr)\, dx$$

c'est à dire en dérivant *sous l'intégrale* semi-convergente de départ, par rapport au paramètre t ; il nous faut justifier ce résultat. Posons

$$\mathrm{A}_n(t) = \int_0^{n} \sin\Bigl(tx + \frac{x^3}{3}\Bigr)\, dx \quad \text{et} \quad g(t) = \int_0^{+\infty} x \cos\Bigl(tx + \frac{x^3}{3}\Bigr)\, dx.$$

La justification de la convergence de cette dernière intégrale suit le même chemin (intégration par parties) que précédemment. Il n'y a aucune difficulté pour justifier que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{A}_n'(t) = \int_0^{n} x \cos\Bigl(tx + \frac{x^3}{3}\Bigr)\, dx,$$

et nous allons montrer que $\mathrm{A}_n'(t)$ converge vers $g(t)$, uniformément sur tout compact de $\mathbb{R}$, ce qui donnera le résultat voulu. On écrit

$$g(t) - \mathrm{A}_n'(t) = \int_n^{+\infty} x \cos\Bigl(tx + \frac{x^3}{3}\Bigr)\, dx =$$

$$= \Bigl[\sin(\mathrm{U}_t(x)) \frac{x}{u_t(x)}\Bigr]_n^{+\infty} + \int_n^{+\infty} \sin(\mathrm{U}_t(x)) \Bigl(\frac{2x^2}{u_t(x)^2} - \frac{1}{u_t(x)}\Bigr)\, dx$$

qui tend bien vers 0 comme il faut : si $|t| \le \mathrm{M}$, et dès que $n \ge n_0(\mathrm{M}) = \sqrt{\mathrm{M}+1}$, le premier terme est borné par $n(n^2 - \mathrm{M})^{-1}$ et le second par

$$\int_n^{+\infty} \Bigl(\frac{2x^2}{(x^2 - \mathrm{M})^2} + \frac{1}{x^2 - \mathrm{M}}\Bigr)\, dx$$

qui tend vers 0 quand $n \to +\infty$, puisque l'intégrale ci-dessus converge.

En revanche, la dérivée suivante $\mathrm{A}''(t)$, qui existe, ne peut pas se représenter comme

$$-\int_0^{+\infty} x^2 \sin\Bigl(tx + \frac{x^3}{3}\Bigr)\, dx$$

parce que cette intégrale généralisée n'est plus convergente !

Il y a quand même quelque chose à faire ; on voit par la même astuce d'intégration par parties que la fonction F définie par

$$\mathrm{F}(y) = \int_0^{y} x^2 \sin\Bigl(tx + \frac{x^3}{3}\Bigr)\, dx$$

oscille lorsque $y \to +\infty$ (mais en restant bornée), à cause du terme tout intégré

$$\Bigl[(1 - \cos((\mathrm{U}_t(x)) \frac{x^2}{u_t(x)}\Bigr]_0^y = \bigl(1 - \cos(yt + y^3/3)\bigr)\, \frac{y^2}{t + y^2}$$

mais on peut penser à la méthode de Cesaro qui est si utile pour les séries de Fourier ; si $\lim_{y\to+\infty} \mathrm{F}(y)$ n'existe pas, a-t-on au moins l'existence de

$$\lim_{y\to+\infty} \frac{1}{y} \int_0^y \mathrm{F}(x)\, dx = \lim_{y\to+\infty} \int_0^y (1 - x/y)\, x^2 \sin\Bigl(tx + \frac{x^3}{3}\Bigr)\, dx \ ?$$

Dans ce cas il serait raisonnable de dire que l'intégrale généralisée *converge au sens de Cesaro*, et de la noter Ces $\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$. On a bien alors (en travaillant encore) que

$$\mathrm{A}''(t) = -\,\mathrm{Ces}\int_0^{+\infty} x^2 \sin\Bigl(tx + \frac{x^3}{3}\Bigr)\,dx.$$

On aura ensuite l'équation très intéressante

$$\mathrm{A}''(t) - t\mathrm{A}(t) = -\,\mathrm{Ces}\int_0^{+\infty} (t+x^2) \sin\Bigl(tx + \frac{x^3}{3}\Bigr)\,dx = -1$$

parce que

$$\int_0^{y} (t+x^2) \sin\Bigl(tx + \frac{x^3}{3}\Bigr)\,dx = 1 - \cos(\mathrm{U}_t(y))$$

oscille sans favoritisme entre les valeurs 0 et 2 quand $y \to +\infty$, rendant plausible l'affirmation

$$\mathrm{Ces}\lim_{y\to+\infty} \bigl(1 - \cos(\mathrm{U}_t(y))\bigr) = 1.$$

Il reste à justifier ce qui vient d'être expliqué heuristiquement ; pour ne pas répéter cinquante fois la même chose (ça fera seulement deux), on va énoncer un lemme. Dans une expression de la forme $x^k/u_t(x)^\ell$, il est raisonnable de dire que *le degré en x* est $d = k - 2\ell$. C'est ce degré qui contrôle la convergence absolue des intégrales du lemme qui suit.

Lemme. *On suppose $a > \sqrt{\mathrm{M}+1}$ et $k, \ell \ge 0$. Si le degré $d = k - 2\ell$ est < 2, les intégrales*

$$\int_a^y \sin(\mathrm{U}_t(x))\,\frac{x^k\,dx}{u_t(x)^\ell} \quad \text{et} \quad \int_a^y \cos(\mathrm{U}_t(x))\,\frac{x^k\,dx}{u_t(x)^\ell}$$

convergent quand $y \to +\infty$, uniformément pour $|t| \le \mathrm{M}$. Si $d = 2$, elles restent bornées quand $y \to +\infty$, uniformément pour $|t| \le \mathrm{M}$.

Démonstration. C'est essentiellement la même chose que dans le calcul de $\mathrm{A}'(t)$, et le traitement est identique pour les deux intégrales. Voyons donc la première. En intégrant par parties on obtient

$$\begin{aligned}\int_a^y \sin(\mathrm{U}_t(x))\,\frac{x^k\,dx}{u_t(x)^\ell} &= \Bigl[-\cos(\mathrm{U}_t(y))\,\frac{x^k}{u_t(x)^{\ell+1}}\Bigr]_a^y \\ &\quad + \int_a^y \cos(\mathrm{U}_t(y))\Bigl(\frac{kx^{k-1}}{u_t(x)^{\ell+1}} - (\ell+1)\frac{2x^{k+1}}{u_t(x)^{\ell+2}}\Bigr)\,dx.\end{aligned}$$

On remarque que les nouvelles intégrales sont de "degré" $d' = d - 3 < -1$, donc absolument convergentes, et même uniformément en $t \in [-\mathrm{M}, \mathrm{M}]$ puisque la quantité sous l'intégrale se majore par une fonction intégrable de x, indépendante de t,

$$y \to \frac{kx^{k-1}}{(x^2-\mathrm{M})^{\ell+1}} + (\ell+1)\frac{2x^{k+1}}{(x^2-\mathrm{M})^{\ell+2}}.$$

Pour le terme tout intégré, on a une majoration de la valeur en y par $y^k/(y^2-\mathrm{M})^{\ell+1}$, valable pour $|t| \le \mathrm{M}$; ce majorant tend vers 0 lorsque $y \to +\infty$ puisque son degré en y est $d - 2 < 0$. Ceci montre que le terme entre crochets tend uniformément vers $a^k \cos(at + a^3/3)/(t+a^2)^{\ell+1}$, l'opposé de la valeur en a.

Dans le cas $d = 2$, les nouvelles intégrales sont de degré $d' = d - 3 = -1$; elles ne sont pas absolument convergentes sur $[a, +\infty[$, mais elles convergent uniformément quand $y \to +\infty$ d'après la première partie (on a bien $-1 = d' < 2$!) ; le terme tout intégré, lui, reste borné par

$$\frac{a^k}{(a^2 - \mathrm{M})^{\ell+1}} + \frac{y^k}{(y^2 - \mathrm{M})^{\ell+1}} = \Big(\frac{a^2}{a^2 - \mathrm{M}}\Big)^{\ell+1} + \Big(\frac{y^2}{y^2 - \mathrm{M}}\Big)^{\ell+1} \le 2\,\Big(\frac{a^2}{a^2 - \mathrm{M}}\Big)^{\ell+1}.$$

On va maintenant montrer que

$$\mathrm{A}''(t) = -\,\mathrm{Ces} \int_0^{+\infty} x^2 \sin\Big(tx + \frac{x^3}{3}\Big)\,dx = -\lim_{y \to +\infty} \int_0^y (1 - x/y)\, x^2\, \sin(\mathrm{U}_t(x))\,dx.$$

Supposons $|t| \le \mathrm{M}$, $a > \sqrt{\mathrm{M} + 1}$ et posons pour $y > a$

$$f_y(t) = \int_a^y (1 - x/y)\, x\, \cos\Big(tx + \frac{x^3}{3}\Big)\,dx.$$

D'après le lemme précédent, la partie de l'intégrale qui est en $y^{-1} \int_a^y x^2 \cos(\mathrm{U}_t(x))\,dx$ tend uniformément vers 0 (cas du degré $d = 2$), donc la limite de $f_y(t)$ existe quand $y \to +\infty$, et elle vaut

$$f(t) := \int_a^{+\infty} x \cos\Big(tx + \frac{x^3}{3}\Big)\,dx = \mathrm{A}'(t) - \int_0^a x \cos\Big(tx + \frac{x^3}{3}\Big)\,dx.$$

On a sans problème

$$f'_y(t) = -\int_a^y (1 - x/y)\, x^2 \sin\Big(tx + \frac{x^3}{3}\Big)\,dx.$$

Par intégration par parties on voit que

$$f'_y(t) = -\cos(\mathrm{U}_t(a))\,\frac{a^2 - a^3/y}{u_t(a)} - \int_a^y \cos(\mathrm{U}_t(x))\,\Big(\frac{2x - 3x^2/y}{u_t(x)} - \frac{2x^3 + x^4/y}{u_t(x)^2}\Big)\,dx.$$

L'expression intégrale se décompose en quatre intégrales ; deux sont de degré -1, donc convergent uniformément d'après le lemme, et les deux autres sont en $y^{-1}\times$degré 0, donc convergent vers 0. Le premier terme converge uniformément vers $-a^2 \cos(\mathrm{U}_t(a))/u_t(a)$, donc f'_y converge uniformément lorsque $y \to +\infty$.

D'après le théorème classique déjà utilisé, la limite uniforme des f'_y est bien la dérivée de la limite des f_y, c'est à dire la dérivée de f,

$$-\lim_{y \to +\infty} \int_a^y (1 - x/y)\, x^2\, \sin(\mathrm{U}_t(x))\,dx = f'(t) = \mathrm{A}''(t) + \int_0^a x^2\, \sin(\mathrm{U}_t(x))\,dx.$$

On a ainsi justifié la formule pour $\mathrm{A}''(t)$, et il ne reste plus qu'à dire pourquoi

$$\mathrm{Ces} \lim_{y \to +\infty} \cos(\mathrm{U}_t(y)) = \lim_y y^{-1} \int_0^y \cos(\mathrm{U}_t(x))\,dx = 0.$$

Mais c'est clair puisque l'intégrale converge (degré 0), et qu'on la divise par $y \to +\infty$. On a donc fini de justifer l'équation

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{A}''(t) - t\mathrm{A}(t) = -1.$$

L'équation différentielle $y''(t) - ty(t) = \mathrm{C}te$

On vient de dire que A vérifie l'équation $\mathrm{A}''(t) - t\mathrm{A}(t) = -1$, ce qui implique immédiatement que A est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$. On va essayer de retrouver A au moyen de l'équa diff. Il est évident que l'équation différentielle $y''(t) = ty(t)$ admet deux solutions indépendantes, sommes de séries entières de rayon de convergence $+\infty$

$$\mathrm{B}(t) = 1 + \frac{t^3}{3.2} + \frac{t^6}{6.5.3.2} + \frac{t^9}{9.8.6.5.3.2} + \cdots$$

et

$$\mathrm{C}(t) = t + \frac{t^4}{4.3} + \frac{t^7}{7.6.4.3} + \frac{t^{10}}{10.9.7.6.4.3} + \cdots$$

Introduisons de plus

$$\mathrm{D}(t) = \frac{t^2}{2} + \frac{t^5}{5.4.2} + \frac{t^8}{8.7.5.4.2} + \frac{t^{11}}{11.10.8.7.5.4.2} + \cdots$$

Cette fonction D vérifie $\mathrm{D}''(t) - t\mathrm{D}(t) = 1$. La fonction A étudiée précédemment est donc de la forme $\mathrm{A}(t) = \beta\mathrm{B}(t) + \gamma\,\mathrm{C}(t) - \mathrm{D}(t)$; pour trouver β et γ il suffit de calculer $\mathrm{A}(0)$ et $\mathrm{A}'(0)$, c'est à dire

$$\beta = \mathrm{A}(0) = \int_0^{+\infty} \sin(x^3/3)\,dx \quad \text{et} \quad \gamma = \mathrm{A}'(0) = \int_0^{+\infty} x\cos(x^3/3)\,dx.$$

On commence par poser $y = x^3/3$ qui donne

$$\beta = 3^{-2/3}\int_0^{+\infty} \frac{\sin(y)}{y^{2/3}}\,dy \quad \text{et} \quad \gamma = 3^{-1/3}\int_0^{+\infty} \frac{\cos(y)}{y^{1/3}}\,dy.$$

Ces deux intégrales s'obtiennent à partir de

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{ix}\,x^{\alpha-1}\,dx = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{ix+(\alpha-1)\,\ln(x)}\,dx$$

pour $0 < \alpha < 1$. Par un argument d'holomorphie, cette dernière intégrale est la même sur le demi-axe imaginaire $z = ix$, $x \geq 0$, ce qui donne en posant $s = \alpha - 1$

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{e}^{s\,\ln(ix)}\,i\,dx = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{e}^{s\,\ln|x|+is\,\pi/2}\,i\,dx =$$

$$i\,\mathrm{e}^{is\,\pi/2}\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x}\,x^{\alpha-1}\,dx = \mathrm{e}^{i\alpha\pi/2}\,\Gamma(\alpha).$$

On a choisi la détermination de $\ln(z) = \ln|z| + i\arg z$ qui correspond au choix $-\pi < \arg(z) < \pi$; ainsi $\ln(i) = i\pi/2$. On obtient en prenant la partie réelle

$$\int_0^{+\infty} \cos(y)\,y^{\alpha-1}\,dy = \cos(\alpha\pi/2)\,\Gamma(\alpha)$$

et avec la partie imaginaire

$$\int_0^{+\infty} \sin(y)\,y^{\alpha-1}\,dy = \sin(\alpha\pi/2)\,\Gamma(\alpha).$$

Quand $\alpha \to 0$, on a $\Gamma(\alpha) \sim \alpha^{-1}$ et l'intégrale en sinus tend vers $\pi/2$: moyennant justification de la convergence, on a retrouvé l'intégrale de $\sin(x)/x$ en utilisant un chemin complexe un peu différent de l'habituel. Finalement

$$\beta = \frac{1}{2}\,3^{-2/3}\,\Gamma\Big(\frac{1}{3}\Big) \quad \text{et} \quad \gamma = \frac{1}{2}\,3^{-1/3}\,\Gamma\Big(\frac{2}{3}\Big).$$

Point de vue holomorphe

On peut pousser plus loin le point de vue holomorphe qui nous a simplement servi ci-dessus à calculer les valeurs des coefficients β et γ. Partons de l'expression

$$\mathrm{F}(t) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{ity+y^3/3}\, dy$$

dont on prendra ensuite la partie imaginaire. Posons $x = y^3/3$, $\omega = 3^{1/3}$, on obtient

$$\mathrm{F}(t) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{it\omega x^{1/3}+ix}\ \omega^{-2} x^{-2/3}\, dx = \omega^{-2} \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{it\omega x^{1/3}+ix-\frac{2}{3}\ln(x)}\, dx$$

qui deviendra en remplaçant x par ix comme avant

$$\mathrm{F}(t) = \omega^{-2} \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{it\omega(ix)^{1/3}-x-\frac{2}{3}\ln(ix)}\ i\, dx$$

puis en posant $\zeta = \mathrm{e}^{i\pi/6} = \mathrm{e}^{\ln(i)/3} = i^{1/3}$

$$\mathrm{F}(t) = \omega^{-2}\zeta \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{\zeta^4\omega t x^{1/3}}\ \mathrm{e}^{-x}\ \frac{dx}{x^{2/3}}$$

dans lequel l'exponentielle $\mathrm{e}^{\zeta^4\omega t x^{1/3}}$ se laisse gentiment développer en série sous le signe intégral, donnant

$$\mathrm{F}(t) = \omega^{-2}\zeta \sum_{n=0}^{+\infty} \zeta^{4n}\omega^n \frac{t^n}{n!} \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x}\ x^{n/3-2/3}\, dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \zeta^{4n+1}\omega^{n-2}\Gamma\Big(\frac{n+1}{3}\Big)\,\frac{t^n}{n!}.$$

Si on écrit $n = 3k + j$, avec $j = 0, 1, 2$ on trouvera, en regroupant suivant la valeur de j, l'expression

$$\mathrm{F}(t) = \omega^{-2}\zeta\,\Gamma(1/3)\,\mathrm{B}(t) + \omega^{-1}\zeta^5\,\Gamma(2/3)\,\mathrm{C}(t) - i\mathrm{D}(t).$$

En prenant la partie réelle, on trouve l'expression en série entière de la fonction de ZQ

$$Ai(t) = \omega^{-2}\sqrt{3}\,\Gamma(1/3)\,\mathrm{B}(t) - \omega^{-1}\sqrt{3}\,\Gamma(2/3)\,\mathrm{C}(t).$$

Il resterait pour bien faire à justifier le changement de contour dans les intégrales de notre fonction holomorphe $z \to z^{-2/3}\,\mathrm{e}^{it\omega z^{1/3}+iz}$. Pour chaque $r > 0$, désignons par γ_r le parcours du quart de cercle $z = r\,\mathrm{e}^{i\theta}$, avec $0 \le \theta \le \pi/2$. On aura sur ce quart de cercle

$$z^{1/3} = r^{1/3}(\cos(\theta/3) + i\sin(\theta/3)),$$

d'où

$$\mathrm{Re}(it\omega z^{1/3} + iz) = -t\omega r^{1/3}\sin(\theta/3) - r\sin(\theta)$$

et $0 \le \sin(\theta/3) \le \sin(\theta)$ quand $0 \le \theta \le \pi/2$. Pour t réel fixé, on aura $|t\omega r^{1/3}| \le \frac{1}{2}\, r$ pour r assez grand, donc

$$\Big|\int_{\gamma_r} z^{-2/3}\,\mathrm{e}^{it\omega z^{1/3}+iz}\ dz\Big| \le r^{-2/3} \int_0^{\pi/2} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\,r\sin(\theta)}\ r\, d\theta.$$

Si on choisit $\alpha \in]1/3, 1[$, la fonction $x \ge 0 \to x^\alpha\,\mathrm{e}^{-x/2}$ est bornée par un certain K_α, donc

$$r^{-2/3} \int_0^{\pi/2} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\,r\sin(\theta)}\ r\, d\theta \le \mathrm{K}_\alpha\, r^{-2/3+1-\alpha} \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sin^\alpha(\theta)}$$

qui tend vers 0 quand $r \to +\infty$, puisque $1/3 - \alpha < 0$. Ceci implique le résultat voulu, en utilisant la nullité de l'intégrale sur le contour formé du segment réel de 0 à r, du quart de tour γ_r et pour finir du segment imaginaire pur de ir à 0 (il y a une singularité en 0, mais elle est facile à traiter).