Prépa. Agrég écrit d'Analyse, mercredi 23 janvier 2002.

Espaces de fonctions

D'après Rudin, Chapitre 15, "Zéros des fonctions holomorphes", en particulier 15.25, théorème de Müntz-Szasz.

L'une des applications des espaces normés de fonctions est la démonstration indirecte de théorèmes de densité tel que celui de Weierstrass par le biais du résultat suivant.

Théorème 1. *Soit* D *un sous-ensemble d'un espace normé* E *; pour que l'espace vectoriel engendré par* D *soit dense dans* E*, il faut et il suffit que toute forme linéaire continue* ℓ *sur* E*, nulle sur* D*, soit nulle sur* E *tout entier.*

On dit que $\mathrm{D} \subset \mathrm{E}$ est *total* dans E lorsque l'espace vectoriel engendré par D est dense dans E, c'est à dire que E est l'espace vectoriel *fermé* engendré par D. La partie qui nous intéresse est celle qui dit que D est total dès que toute forme linéaire continue nulle sur D est nulle partout. Sa démonstration utilise une des formes du théorème de Hahn-Banach : si l'espace fermé F engendré par D est différent de E, on peut trouver un point x hors de F ; il existe alors une forme linéaire continue nulle sur F mais non nulle en x (résultat valable en réel ou en complexe, à condition que F soit un $\mathbb{C}$-sous-espace vectoriel dans le cas complexe).

Pour être applicable, le théorème précédent demande en général qu'on dispose d'une représentation "concrète" des éléments du dual de E. C'est le cas si E est un Hilbert, ou bien un L_p avec $1 \le p < +\infty$, ou bien un espace de fonctions continues.

1. Fonctions analytiques bornées dans un demi-plan

On désigne par Ω_+ le demi-plan $\operatorname{Re} z > 0$ et par $\mathrm{H}_\infty(\Omega_+)$ l'espace des fonctions holomorphes et bornées dans Ω_+.

Lemme 1. *Si* $f \in \mathrm{H}(\Omega_+)$ *tend vers* 0 *à l'infini, on a*

$$\forall z \in \Omega_+, \quad |f(z)| \le \liminf_{s \to 0+} \bigl(\max\{|f(s+it)| : t \in \mathbb{R}\}\bigr).$$

Démonstration. Posons pour tout $s > 0$

$$m_s(f) = \sup\{|f(s+it)| : t \in \mathbb{R}\}.$$

Soient $z \in \Omega_+$ et $\varepsilon > 0$, soit s_0 tel que $0 < s_0 < \operatorname{Re} z$ et $m_{s_0}(f) \le \liminf_{s \to 0} m_s(f) + \varepsilon$; considérons le demi-disque $\mathrm{D} \subset \Omega_+$ centré en s_0 et de rayon R

$$\mathrm{D} = \{w \in \mathbb{C} : |w - s_0| \le \mathrm{R},\ \operatorname{Re} w \ge s_0\}\,;$$

on suppose le rayon R assez grand, de façon que $z \in \mathrm{D}$ et que $|f(w)| \le \varepsilon$ lorsque $|w| \ge \mathrm{R}$. Par le principe du maximum on sait que $|f(z)| \le \max\{|f(w)| : w \in \partial\mathrm{D}\}$. Les points w du bord de D sont, ou bien sur la droite verticale $\operatorname{Re} w = s_0$, et dans ce cas $|f(w)| \le m_{s_0}(f)$, ou bien sur le demi-cercle, mais dans ce cas $|w| \ge |w - s_0| \ge \mathrm{R}$, donc $|f(w)| \le \varepsilon$. La conclusion est $|f(z)| \le \liminf_{s \to 0} m_s(f) + \varepsilon$, pour tout $\varepsilon > 0$.

Lemme 2. *Si $f \in \mathrm{H}_\infty(\Omega_+)$ on a*

$$\|f\|_\infty = \lim_{s\to 0+} \bigl(\sup\{|f(s+it)| : t \in \mathbb{R}\}\bigr).$$

Démonstration. Pour tout $\varepsilon > 0$ posons

$$\forall z \in \Omega_+, \quad f_\varepsilon(z) = \frac{f(z)}{1+\varepsilon z}.$$

Il est clair que $|f_\varepsilon| \le |f|$ sur Ω_+ et $\lim_{\varepsilon\to 0} f_\varepsilon(z) = f(z)$ pour tout z ; de plus f_ε tend vers 0 à l'infini (dans Ω_+, bien entendu), donc en utilisant tous ces ingrédients et le lemme 1

$$\forall z \in \Omega_+, \quad |f(z)| \le \liminf_{s\to 0+} m_s(f).$$

On en déduit $m_{s_0}(f) \le \liminf_{s\to 0+} m_s(f)$ pour tout $s_0 > 0$, d'où l'existence de la limite $\lim_{s\to 0+} m_s(f)$.

Remarque. Si f est holomorphe sur Ω_+ et est seulement bornée sur toute verticale, le résultat du lemme 2 peut être faux : prendre $f(z) = \mathrm{e}^z$; pour cette fonction on aura bien que $\lim_{s\to 0+} m_s(f) = \lim_{s\to 0+} \mathrm{e}^s = 1$, mais la fonction n'est pas bornée sur Ω_+. Cependant, si $f(z)\,\mathrm{e}^{-\varepsilon z}$ est bornée sur Ω_+ pour tout $\varepsilon > 0$, on déduira de l'application du lemme 2 pour tout $\varepsilon > 0$ que f est en fait bornée sur Ω_+ : une fonction holomorphe non bornée sur Ω_+ va au moins aussi vite à l'infini qu'une fonction e^{az}, pour un certain $a > 0$. Voir les paragraphes sur Phragmén-Lindelöf dans les bons manuels pour une discussion approfondie de ce type de question.

Théorème 2. *Si $f \in \mathrm{H}_\infty(\Omega_+)$ possède des zéros $(\alpha_n)_{n\ge 1}$ (distincts) dans Ω_+ et n'est pas identiquement nulle, on a*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\operatorname{Re}\alpha_n}{1+|\alpha_n|^2} < +\infty.$$

Réciproquement, pour toute suite $(\alpha_n)_{n\ge 1} \subset \Omega_+$ de points distincts qui vérifie cette condition, il existe une fonction $g \in \mathrm{H}_\infty(\Omega_+)$ qui s'annule précisément en ces points. On peut prendre

$$g(z) = \prod_{n=1}^{+\infty} u_n \,\frac{z-\alpha_n}{z+\overline{\alpha}_n}$$

où u_n est le complexe de module un tel que $u_n(1-\alpha_n)/(1+\overline{\alpha}_n)$ soit réel ≥ 0.

Démonstration. Supposons $\|f\|_\infty = 1$. Soit $\alpha \in \Omega_+$; son symétrique par rapport à la droite verticale $\operatorname{Re} z = 0$ est $-\overline{\alpha}$. Il est clair géométriquement que tout $z \in \Omega_+$ est plus proche de α que de $-\overline{\alpha}$ (et le calcul le confirme aisément) donc

$$\forall z \in \Omega_+, \quad \Bigl|\frac{z-\alpha}{z+\overline{\alpha}}\Bigr| \le 1.$$

Si $f(\alpha) = 0$, la fonction $g(z) = (z+\overline{\alpha})\,f(z)/(z-\alpha)$ est (prolongeable en fonction) holomorphe dans Ω_+, et bornée (distinguer un disque autour de α et le reste de Ω_+). Mais quand $\operatorname{Re} z = s > 0$ est petit, disons $0 < s < \operatorname{Re}\alpha/2$, on a

$$\Bigl|\frac{z+\overline{\alpha}}{z-\alpha}\Bigr| \le \frac{\operatorname{Re}\alpha + s}{\operatorname{Re}\alpha - s} \le 1 + \frac{2s}{\operatorname{Re}\alpha - s} \le 1 + \frac{4s}{\operatorname{Re}\alpha} \;;$$

on en déduit $\|g\|_\infty \le \|f\|_\infty = 1$ par le lemme 2. On a donc

$$\forall z \in \Omega_+, \quad |f(z)| \le \Bigl|\frac{z-\alpha}{z+\overline{\alpha}}\Bigr|.$$

En extrayant les zéros de f un par un on voit que

$$|f(z)| \le \prod_{n=1}^{\mathrm{N}} \Bigl|\frac{z-\alpha_n}{z+\overline{\alpha}_n}\Bigr|$$

pour tout N ; si on choisit un réel $b > 0$ tel que $f(b) \ne 0$, on aura pour tout N

$$\prod_{n=1}^{\mathrm{N}} \Bigl|\frac{b-\alpha_n}{b+\overline{\alpha}_n}\Bigr|^2 \ge |f(b)|^2 > 0$$

ce qui prouve que le produit infini de réels < 1 est convergent, donc (en utilisant les logarithmes)

$$\sum \Bigl(1 - \Bigl|\frac{b-\alpha_n}{b+\overline{\alpha}_n}\Bigr|^2\Bigr) = 4b \sum \frac{\operatorname{Re}\alpha_n}{|b+\overline{\alpha}_n|^2} < +\infty,$$

ce qui donne le critère annoncé après quelques manipulations : on notera que la fonction $\alpha \to |b+\overline{\alpha}|^2/(1+|\alpha|^2)$ est bornée et minorée par un $\delta > 0$ sur le fermé $\overline{\Omega}_+$, car elle ne s'y annule pas et tend vers 1 à l'infini. On en déduit bien $\sum(\operatorname{Re}\alpha_n)/(1+|\alpha_n|^2) < +\infty$.

Les considérations des lignes qui précèdent permettent aussi de démontrer que la condition $\sum(\operatorname{Re}\alpha_n)/(1+|\alpha_n|^2) < +\infty$ entraîne la convergence du produit infini des modules $\prod_{n=1}^{\infty} |(z-\alpha_n)/(z+\overline{\alpha}_n)|$, pour tout $z \in \Omega_+$.

Dans l'autre direction, on suppose que la suite de points $(\alpha_n)_{n\ge 1} \subset \Omega_+$ est telle que $\sum(\operatorname{Re}\alpha_n)/(1+|\alpha_n|^2) < +\infty$; il suffit de vérifier que le produit infini proposé dans l'énoncé converge en tout point $z \in \Omega_+$. En effet, les produits partiels sont ≤ 1 en module, donc la fonction produit infini sera limite simple dominée de fonctions holomorphes, par conséquent holomorphe elle-même.

La condition garantit déjà la convergence du produit infini des modules. Il faut ensuite vérifier que les arguments se comportent bien ; c'est à cela que sert le choix du complexe u_n de module un : il est choisi de façon que la convergence du produit infini des nombres complexes soit garantie au point $z = 1$, puisque dans ce cas tous les facteurs du produit en question sont égaux à leur module, par le choix des u_n.

Voici comment on peut mener la discussion. Soit V un voisinage ouvert du point 1 dans lequel $(\operatorname{Re}\alpha)/(1+|\alpha|^2) > 1/4$; la suite (α_n) n'a certainement qu'un nombre fini de termes dans V. Discutons donc le facteur de base $u(z-\alpha)/(z+\overline{\alpha})$ dans le cas $\alpha \notin \mathrm{V}$. Le complexe u de module un est tel que $u(1-\alpha)/(1+\overline{\alpha})$ soit réel > 0. On écrit pour $z \in \Omega_+$ fixé

$$u\,\frac{z-\alpha}{z+\overline{\alpha}} = \Bigl(u\,\frac{1-\alpha}{1+\overline{\alpha}}\Bigr) \,.\, \Bigl(\frac{(1+\overline{\alpha})(z-\alpha)}{(1-\alpha)(z+\overline{\alpha})}\Bigr) = \mathrm{A}(\alpha)\,.\,\mathrm{B}(\alpha).$$

Le premier facteur $\mathrm{A}(\alpha_n)$ est le terme général d'un produit infini convergent ; il suffit donc d'étudier les $\mathrm{B}(\alpha_n)$. On a maintenant

$$1 - \mathrm{B}(\alpha) = 2(1-z)\,\frac{\operatorname{Re}\alpha}{(1-\alpha)(z+\overline{\alpha})}.$$

Dans le fermé $\overline{\Omega}_+ \setminus \mathrm{V}$, la fonction $\alpha \to |(z+\overline{\alpha})(1-\alpha)|/(1+|\alpha|^2)$ tend vers 1 à l'infini et ne s'annule pas ; elle est donc minorée par un $c > 0$. Il en résulte que $|1-\mathrm{B}(\alpha_n)| \le \mathrm{C}(z)\,(\operatorname{Re}\alpha_n)/(1+|\alpha_n|^2)$ est le terme général d'une série convergente, d'où la convergence absolue du produit infini $\prod_{n=1}^{+\infty} \mathrm{B}(\alpha_n)$.

Remarque. Au lieu de ne parler que de zéros distincts, on aurait pu mener la discussion avec des zéros *comptés avec leur ordre de multiplicité*.

Transformée de Fourier-Laplace

Si μ est une mesure complexe bornée sur $[0, +\infty[$, on peut poser

$$\forall z \in \Omega_+, \quad f(z) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-zx} \, d\mu(x).$$

Si $z = a + ib$, $a > 0$, on a $|\, \mathrm{e}^{-zx} \,| = \mathrm{e}^{-ax}$ qui garantit que l'intégrale converge, et en fait $\|f\|_\infty \le \|\mu\|$, norme dans l'espace des mesures. Les théorèmes usuels d'holomorphie de fonctions définies par une intégrale montrent que $f \in \mathrm{H}_\infty(\Omega_+)$.

Si μ est non nulle, la fonction f est non nulle. On peut le montrer avec Stone-Weierstrass appliqué à la densité dans $\mathrm{C}_0(\mathbb{R})$ de l'algèbre engendrée par les exponentielles. On peut préférer le faire autrement, notamment si on veut retrouver Weierstrass ; on se ramènera alors à l'injectivité de la transformée de Fourier (qui peut se faire sans Weierstrass).

Proposition 1. *Si $f \in \mathrm{H}(\Omega_+)$ se prolonge en fonction holomorphe $\widetilde{f}$ dans $\{\mathrm{Re}\, z > -\varepsilon\}$ pour un $\varepsilon > 0$, si $\widetilde{f}$ tend vers 0 quand $|z| \to +\infty$, et si $t \to \widetilde{f}(-a + it)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ pour un réel a tel que $-\varepsilon < -a < 0$, il existe une mesure complexe bornée μ sur $[0, +\infty[$ telle que*

$$\forall z \in \Omega_+, \quad f(z) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-zx} \, d\mu(x).$$

Démonstration. Ecrivons encore $f(w)$ pour la fonction prolongée. Il est classique de montrer que

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{f(w)}{w - z} \, dw = -\frac{1}{2i\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(-a + it)}{-a + it - z} \, idt$$

pour tout $z \in \Omega_+$, où γ parcourt la verticale $\mathrm{Re}\, z = -a$ en descendant ; pour le justifier, on intègre sur le bord de demi-disques qui contiennent z, centrés en $-a$ et de rayons tendant vers l'infini. D'autre part

$$\frac{1}{a - it + z} = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-(a - it + z)x} \, dx$$

et un petit coup de Fubini (on utilise l'hypothèse d'intégrabilité de f sur la verticale $\mathrm{Re}\, w = -a$) donne

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(-a + it) \Big(\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-(a - it + z)x} \, dx \Big) \, dt =$$

$$= \int_0^{+\infty} \Big(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(-a + it) \, \mathrm{e}^{-(a - it)x} \, dt \Big) \, \mathrm{e}^{-zx} \, dx = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-zx} \, g(x) \, dx,$$

où

$$g(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(-a + it) \, \mathrm{e}^{-(a - it)x} \, dt.$$

Il reste à vérifier que $d\mu(x) = g(x) \, dx$ est une mesure bornée. C'est facile puisque

$$|g(x)| \le \mathrm{e}^{-ax} \, \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(-a + it)| \, dt = \mathrm{M} \, \mathrm{e}^{-ax} \, .$$

2. Théorème de Müntz-Szasz

Théorème 3. *Si* $0 < \lambda_1 < \ldots < \lambda_n < \ldots$ *et si* $\sum \lambda_n^{-1} = +\infty$, *la suite des fonctions*

$$1, t^{\lambda_1}, \ldots, t^{\lambda_n}, \ldots$$

engendre un sous-espace vectoriel dense dans $\mathrm{C}([0,1])$.

Réciproquement, si $\sum \lambda_n^{-1} < +\infty$, *la fonction* t^λ *n'est pas dans l'adhérence de* $\mathrm{Vect}\{t \to t^{\lambda_n} : n \geq 1\}$ *quand* $\lambda > 0$ *et* $\lambda \notin \{\lambda_n : n \geq 1\}$.

Ce joli théorème date des années 1914–15. Si on prend par exemple $\lambda_n = n$ pour tout $n \geq 1$, on obtient dans ce cas le théorème de Weierstrass. En réalité, la plupart des démonstrations s'appuient sur ce théorème de Weierstrass. Il existe des démonstrations assez élémentaires qui utilisent le calcul de certains déterminants de Gram (voir Gourdon, problème 21 p. 286). On utilisera ici la méthode évoquée au début, fondée sur Hahn-Banach.

En posant $t = \mathrm{e}^{-x}$, $x \in [0, +\infty[$ on voit facilement que l'énoncé est équivalent à la formulation suivante.

Théorème 4. *Si* $0 < \lambda_1 < \ldots < \lambda_n < \ldots$ *et si* $\sum \lambda_n^{-1} = +\infty$, *la suite des fonctions*

$$\mathrm{e}^{-\lambda_1 x}, \ldots, \mathrm{e}^{-\lambda_n x}, \ldots$$

engendre un sous-espace vectoriel dense dans $\mathrm{C}_0([0, +\infty[)$.

Réciproquement, si $\sum \lambda_n^{-1} < +\infty$, *la fonction* $\mathrm{e}^{-\lambda x}$ *n'est pas dans l'adhérence de* $\mathrm{Vect}\{x \to \mathrm{e}^{-\lambda_n x} : n \geq 1\}$ *quand* $\lambda > 0$ *et* $\lambda \notin \{\lambda_n : n \geq 1\}$.

Démonstration. On désigne par $\mathrm{D} \subset \mathrm{C}_0([0, +\infty[)$ l'ensemble des fonctions $\mathrm{e}^{-\lambda_n x}$. Si l'espace vectoriel engendré par D n'est pas dense dans $\mathrm{C}_0([0, +\infty[)$, il existe d'après le théorème 1 une forme linéaire continue ℓ sur $\mathrm{C}_0([0, +\infty[)$, nulle sur D mais non identiquement nulle. Une telle forme linéaire provient d'une mesure borélienne complexe bornée μ sur $[0, +\infty[$,

$$\forall \varphi \in \mathrm{C}_0([0, +\infty[), \quad \ell(\varphi) = \int_0^{+\infty} \varphi(t)\, d\mu(t).$$

La nullité de ℓ sur D donne

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\lambda_n x}\, d\mu(x) = 0$$

pour tout $n \geq 1$, c'est à dire que la fonction $f \in \mathrm{H}_\infty(\Omega_+)$ définie par

$$f(z) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-zx}\, d\mu(x)$$

admet les points (λ_n) comme zéros. Si μ n'est pas nulle, la fonction f n'est pas identiquement nulle (injectivité de Laplace). Il résulte du théorème 2 que $\sum \lambda_n/(1+\lambda_n^2) < +\infty$, c'est à dire $\sum \lambda_n^{-1} < +\infty$, ce qui montre la première partie.

Dans l'autre direction il va falloir bricoler un peu pour pouvoir appliquer la proposition 1. Si $\sum \lambda_n^{-1} < +\infty$, on va construire une fonction $f \in \mathrm{H}(\Omega_+)$, non identiquement nulle et admettant tous les λ_n comme 0, mais pas d'autre zéro dans Ω_+, et qui de plus soit prolongeable en une fonction $\widetilde{f}$, holomorphe sur l'ouvert $\{\mathrm{Re}\, z > -1\}$ et tendant vers 0 à l'infini suffisamment vite. D'après la proposition 1, il existe alors une mesure bornée μ sur $[0,+\infty[$ telle que

$$\forall z \in \Omega_+, \quad f(z) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-zx}\, d\mu(x).$$

On obtient ainsi, à partir de μ, une forme linéaire continue ℓ sur $\mathrm{C}_0([0,+\infty[)$, nulle sur toutes les fonctions de D, mais non nulle sur $\mathrm{e}^{-\lambda x}$ puisque $f(\lambda) \neq 0$; cette fonction $x \to \mathrm{e}^{-\lambda x}$ ne peut donc pas être dans l'espace fermé engendré par D, sur lequel ℓ continue d'être nulle par linéarité et continuité.

Terminons par la construction de f. La suite $\alpha_n = \lambda_n + 1$ vérifie le critère du théorème 2, donc il existe une fonction $g \in \mathrm{H}_\infty(\Omega_+)$, nulle en tous les points $\lambda_n + 1$ et seulement en ces points. Alors $\mathrm{F}(z) = g(z+1)$ est holomorphe dans $\{\mathrm{Re}\, z > -1\}$ et ses zéros dans Ω_+ sont exactement les points (λ_n). Pour finir $f(z) = \mathrm{F}(z)/(2+z)^2$ aura les propriétés de décroissance et d'intégrabilité voulues, et elle aura toujours les mêmes zéros dans Ω_+.

Fonctions analytiques dans le disque ; produits de Blaschke

En utilisant la transformation

$$\mathrm{Z} = \frac{z-1}{z+1}$$

on envoie le demi-plan Ω_+ sur le disque unité ouvert U. La pièce de base pour les produits infinis dans Ω_+ est transformée en la fonction

$$\mathrm{Z} \in \mathrm{U} \ \to \ \frac{\overline{a}}{|a|}\,\frac{a - \mathrm{Z}}{1 - \overline{a}\,\mathrm{Z}},$$

où $a \in \mathrm{U}$. Dans ce contexte on obtient

Théorème 5. *Si $f \in \mathrm{H}_\infty(\mathrm{U})$ possède des zéros $(\alpha_n)_{n\geq 1}$ (distincts) dans U et n'est pas identiquement nulle, on a*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \bigl(1 - |\alpha_n|\bigr) < +\infty.$$

Réciproquement, pour toute suite $(\alpha_n)_{n\geq 1} \subset \mathrm{U}$ de points distincts qui vérifie cette condition, il existe une fonction $g \in \mathrm{H}_\infty(\mathrm{U})$ qui s'annule précisément en ces points. On peut prendre

$$g(z) = \prod_{n=1}^{+\infty} \frac{\overline{\alpha}_n}{|\alpha_n|}\,\frac{\alpha_n - z}{1 - \overline{\alpha}_n z}.$$

Les fonctions du type de la fonction g ci-dessus s'appellent des *produits de Blaschke*. Si on repense à la démonstration du théorème 2, on voit qu'on a en fait le résultat suivant : si $f \in \mathrm{H}_\infty(\mathrm{U})$, on peut trouver un produit de Blaschke g et une fonction $\mathrm{F} \in \mathrm{H}_\infty(\mathrm{U})$, où F est sans zéro dans U, de façon que $f(z) = g(z)\,\mathrm{F}(z)$ pour tout $z \in \mathrm{U}$ (un des théorèmes de factorisation ; voir Rudin, Chapitre 17).

Dans le contexte de U, les fonctions $z \to (z-a)/(1-\overline{a}z)$ jouent un autre rôle très important : ce sont les automorphismes (biholomorphes) de U, dont la connaissance est cruciale pour le théorème de l'application conforme de Riemann.