Prépa. Agrég écrit d'Analyse, janvier 2004.

Weierstrass et Stone-Weierstrass

Le théorème classique de Weierstrass

Pour démontrer une version du théorème de Weierstrass sur $\mathbb{R}^d$, considérons la fonction réelle g définie sur $\mathbb{R}^d$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}^d, \quad g(x) = \Bigl(4 - \sum_{i=1}^{d} x_i^2\Bigr)^+$$

où la notation u^+ signifie $\max(u, 0)$. Cette fonction g est réelle ≥ 0, continue à support compact et atteint un unique maximum au point 0. Par ailleurs, elle est polynomiale des variables $x_1, \ldots, x_d$ dans la boule (euclidienne) de rayon 2. Ensuite, pour tout entier $n \geq 1$, posons $c_n = (\int_{\mathbb{R}^d} g^n(x)\, dx)^{-1}$; on a vu que la formule $g_n(x) = c_n\, g^n(x)$ permet de définir une suite (g_n) de fonctions intégrables qui fournit une approximation de l'identité par convolution. Si f est une fonction continue sur $\mathbb{R}^d$, à valeurs réelles ou complexes, à support dans la boule unité, la suite $(f * g_n)$ tend uniformément vers f par les théorèmes généraux d'approximation par convolution ; on va voir de plus que $f * g_n$ est polynomiale dans la boule unité. On a

$$(f * g_n)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} g_n(x-y) f(y)\, dy = \int_{\|y\| \leq 1} g_n(x-y) f(y)\, dy,$$

où la deuxième égalité résulte de l'hypothèse que f est nulle hors de la boule unité. Si $\|x\| \leq 1$, compte tenu du fait que l'intégrale précédente est limitée aux y tels que $\|y\| \leq 1$, on aura $\|x - y\| \leq 2$ pour tous les y du domaine d'intégration ; on saura donc que $x - y$ est dans la boule de rayon 2, dans laquelle

$$g_n(x-y) = c_n \Bigl(4 - \sum_{i=1}^{d} (x_i - y_i)^2\Bigr)^n = \sum_{k \in \mathrm{M}} x^k\, \mathrm{P}_{k,n}(y),$$

où $k = (k_1, \ldots, k_d)$ parcourt la famille M des multi-indices tels que $0 \leq k_1 + \cdots + k_d \leq 2n$, où on a posé $x^k = \prod_{i=1}^d x_i^{k_i}$, et où les $\mathrm{P}_{k,n}$ sont des polynômes en y. On a donc pour tout x dans la boule unité

$$(f * g_n)(x) = \sum_{k \in \mathrm{M}} x^k \int_{\|y\| \leq 1} \mathrm{P}_{k,n}(y)\, f(y)\, dy$$

qui est bien un polynôme dans les coordonnées (x_i).

On peut bien entendu remplacer la condition que le support de f soit dans la boule unité par la condition que f ait un support compact quelconque. On a ainsi obtenu une version du théorème classique de Weierstrass.

Théorème (Weierstrass). *Pour toute fonction continue f sur $\mathbb{R}^d$, à support contenu dans un compact* K *de $\mathbb{R}^d$, il existe une suite de fonctions polynomiales qui tend vers f uniformément sur* K.

Si la fonction f est réelle, on peut prendre des polynômes à coefficients réels ; si f est complexe, on doit évidemment prendre des coefficients complexes. On peut ensuite s'affranchir de l'hypothèse que f soit définie sur $\mathbb{R}^d$, à support compact, et traiter les fonctions définies et continues sur un compact K de $\mathbb{R}^d$; ce pas supplémentaire est inutile pour notre objectif, qui est le théorème de Stone-Weierstrass.

Weierstrass complexe

Sur $\mathbb{C}^d$, on considérera les d coordonnées complexes $z_j = x_j + \mathrm{i} y_j$, $j = 1, \ldots, d$; identifiant $\mathbb{C}^d$ à $\mathbb{R}^{2d}$ on pourra d'après ce qui précède, pour toute fonction complexe f continue sur $\mathbb{C}^d$ et à support dans un compact K, approcher uniformément sur K la fonction f par des fonctions polynomiales à coefficients complexes des variables réelles x_j, y_j ; de plus, comme $x_j = \frac{1}{2}(z_j + \overline{z}_j)$ et $y_j = \frac{1}{2\mathrm{i}}(z_j - \overline{z}_j)$, on peut remplacer les fonctions polynomiales à coefficients complexes en x_j, y_j par des fonctions polynomiales p en $z_j, \overline{z}_j$, $j = 1, \ldots, d$ à coefficients complexes, de la forme

$$\forall z = (z_1, \ldots, z_d) \in \mathbb{C}^d, \quad p(z) = \mathrm{P}(z, \overline{z}) = \sum_{m,n} c_{m,n}\, z_1^{m_1}\, \overline{z}_1^{\,n_1} \ldots z_d^{m_d}\, \overline{z}_d^{\,n_d}$$

où la somme porte sur un nombre fini de couples (m, n) de multi-indices formés de d entiers ≥ 0.

Le théorème de Stone-Weierstrass

On peut trouver une démonstration standard de Stone-Weierstrass dans tous les bons ouvrages (par exemple Hirsch-Lacombe). La démonstration suivante est un peu moins habituelle : elle consiste à utiliser des idées cependant très habituelles (du type partition de l'unité), pour ramener le théorème de Stone-Weierstrass au théorème classique de Weierstrass.

Lemme. *Soient Λ un ensemble fini dans $\mathbb{C}$ et $(\mathrm{Y}_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ une famille de compacts de $\mathbb{R}^{\mathrm{N}}$ telle que $\mathrm{Y}_\lambda \cap \mathrm{Y}_\mu = \emptyset$ lorsque $|\lambda - \mu| > \delta$; il existe une fonction complexe continue g sur $\mathbb{R}^{\mathrm{N}}$, à support compact et telle que $|g - \lambda| \leq \delta$ sur Y_λ, pour tout $\lambda \in \Lambda$.*

Démonstration. Pour tout couple $(\lambda, \mu) \in \Lambda^2$ tel que $|\lambda - \mu| > \delta$, on a par compacité

$$\operatorname{dist}(\mathrm{Y}_\lambda, \mathrm{Y}_\mu) := \min\{d(y_\lambda, y_\mu) : y_\lambda \in \mathrm{Y}_\lambda,\, y_\mu \in \mathrm{Y}_\mu\} > 0$$

d'après l'hypothèse du lemme. Choisissons un réel α tel que

$$0 < \alpha < \min\{\operatorname{dist}(\mathrm{Y}_\lambda, \mathrm{Y}_\mu) : \lambda, \mu \in \Lambda,\ |\lambda - \mu| > \delta\}.$$

Pour chaque $\lambda \in \Lambda$ et tout $y \in \mathbb{R}^{\mathrm{N}}$ posons $h_\lambda(y) = \big(\alpha - d(y, \mathrm{Y}_\lambda)\big)^+$. Cette fonction h_λ est continue ≥ 0 sur $\mathbb{R}^{\mathrm{N}}$, à support compact, égale à $\alpha > 0$ sur Y_λ. Par ailleurs, si $y \in \mathrm{Y}_\mu$ et $h_\lambda(y) \neq 0$, on a $d(y, \mathrm{Y}_\lambda) < \alpha$, ce qui implique que $|\lambda - \mu| \leq \delta$. Autrement dit,

$$(*) \qquad \forall y \in \mathrm{Y}_\mu, \quad |\lambda - \mu|\, h_\lambda(y) \leq \delta\, h_\lambda(y).$$

Posons enfin

$$\forall y \in \mathbb{R}^{\mathrm{N}}, \quad g(y) = \frac{\sum_{\lambda \in \Lambda} \lambda\, h_\lambda(y)}{\max\big(\alpha, \sum_{\lambda \in \Lambda} h_\lambda(y)\big)}.$$

Cette fonction g est continue sur $\mathbb{R}^{\mathrm{N}}$, à valeurs complexes et à support compact. Si $y \in \mathrm{Y}_\mu$, on a $\mathrm{S} := \sum_{\lambda \in \Lambda} h_\lambda(y) \geq h_\mu(y) = \alpha$, le dénominateur de $g(y)$ est donc égal à S et on peut écrire

$$g(y) - \mu = \mathrm{S}^{-1} \Big(\sum_{\lambda \in \Lambda} \lambda\, h_\lambda(y) \Big) - \mu = \mathrm{S}^{-1} \sum_{\lambda \in \Lambda} (\lambda - \mu)\, h_\lambda(y).$$

En tenant compte de la remarque $(*)$ on obtient

$$|g(y) - \mu| \leq \frac{\delta \sum_{\lambda \in \Lambda} h_\lambda(y)}{\sum_{\lambda \in \Lambda} h_\lambda(y)} = \delta.$$

Théorème 1 (Stone-Weierstrass, cas complexe). *On suppose que* X *est un espace topologique compact non vide et* $\mathcal{A}$ *une famille de fonctions continues sur* X *qui sépare les points de* X. *Pour toute fonction* f *complexe continue sur* X *et tout* $\delta > 0$, *il existe un entier* N, *des fonctions* $\varphi_1, \ldots, \varphi_{\mathrm{N}} \in \mathcal{A}$ *et une fonction* p *sur* $\mathbb{C}^{\mathrm{N}}$, *polynomiale des variables* $z_j, \overline{z}_j$, $j = 1, \ldots, \mathrm{N}$ *tels que*

$$\forall x \in \mathrm{X}, \quad |f(x) - p(\varphi_1(x), \ldots, \varphi_{\mathrm{N}}(x))| < \delta.$$

Démonstration. Soit f une fonction complexe continue sur X ; on considère le compact

$$\mathrm{K} = \{(x_1, x_2) \in \mathrm{X} \times \mathrm{X} : |f(x_1) - f(x_2)| \geq \delta/2\}.$$

Pour chaque $(x_1, x_2) \in \mathrm{K}$, on a $x_1 \neq x_2$, donc il existe une fonction $\psi \in \mathcal{A}$ telle que $\psi(x_1) \neq \psi(x_2)$; on trouve alors un ouvert U_{x_1,x_2} dans K contenant (x_1, x_2) et tel que $\psi(u_1) - \psi(u_2) \neq 0$ pour tout $(u_1, u_2) \in \mathrm{U}_{x_1,x_2}$. Par Borel-Lebesgue, on peut sélectionner une famille finie $\varphi_1, \ldots, \varphi_{\mathrm{N}}$ dans $\mathcal{A}$ telle que si on pose $\varphi(x) = (\varphi_1(x), \ldots, \varphi_{\mathrm{N}}(x)) \in \mathbb{C}^{\mathrm{N}}$, on ait que $|f(x_1) - f(x_2)| \geq \delta/2$ implique $\varphi(x_1) \neq \varphi(x_2)$, pour tous $x_1, x_2 \in \mathrm{X}$.

Soit $\Lambda \subset \mathbb{C}$ un ensemble fini tel que $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} \mathrm{B}(\lambda, \delta/4)$ recouvre le compact $f(\mathrm{X}) \subset \mathbb{C}$; posons pour chaque $\lambda \in \Lambda$

$$\mathrm{X}_\lambda = \{x \in \mathrm{X} : |f(x) - \lambda| \leq \delta/4\}.$$

Ces ensembles (X_λ) recouvrent X. Posons aussi

$$\mathrm{Y}_\lambda = \varphi(\mathrm{X}_\lambda) = \{\varphi(x) : |f(x) - \lambda| \leq \delta/4\} \subset \mathbb{C}^{\mathrm{N}}.$$

Si $y \in \mathrm{Y}_\lambda \cap \mathrm{Y}_\mu$, on a $y = \varphi(x_\lambda) = \varphi(x_\mu)$ pour certains $x_\lambda \in \mathrm{X}_\lambda$ et $x_\mu \in \mathrm{X}_\mu$; cette égalité $\varphi(x_\lambda) = \varphi(x_\mu)$ implique que $|f(x_\lambda) - f(x_\mu)| < \delta/2$, et on a aussi $|f(x_\lambda) - \lambda| \leq \delta/4$, $|f(x_\mu) - \mu| \leq \delta/4$, donc $|\lambda - \mu| < \delta$. Lorsque $|\lambda - \mu| \geq \delta$, les ensembles Y_λ et Y_μ sont donc des compacts disjoints dans $\mathbb{C}^{\mathrm{N}}$.

On peut par conséquent appliquer le lemme précédent à la famille des compacts (Y_λ) de $\mathbb{C}^{\mathrm{N}} \simeq \mathbb{R}^{2\mathrm{N}}$: il existe une fonction g continue à support compact sur $\mathbb{C}^{\mathrm{N}}$ telle que $|g - \lambda| \leq \delta$ sur chaque ensemble Y_λ. Il en résulte que $|f(x) - g(\varphi(x))| \leq \delta/4 + \delta \leq 2\delta$ pour tout $x \in \mathrm{X}$, car il existe $\lambda \in \Lambda$ tel que $x \in \mathrm{X}_\lambda$ (et $\varphi(x) \in \mathrm{Y}_\lambda$). Désignons par Y une boule fermée de $\mathbb{C}^{\mathrm{N}}$ assez grande pour contenir $\varphi(\mathrm{X})$ et le support de g. Par Weierstrass (complexe) appliqué à la fonction continue g, il existe une fonction polynomiale p en les variables $z_j, \overline{z}_j$, $1 \leq j \leq \mathrm{N}$, telle que $|p - g| \leq \delta$ sur Y. À la fin,

$$\forall x \in \mathrm{X}, \quad \bigl|f(x) - p(\varphi_1(x), \ldots, \varphi_{\mathrm{N}}(x))\bigr| \leq 3\,\delta.$$

Remarque. Il est facile d'adapter l'argument au cas où f et toutes les fonctions de $\mathcal{A}$ sont à valeurs réelles. Dans ce cas, on choisira l'ensemble Λ dans $\mathbb{R}$, la fonction g du lemme précédent sera réelle et on appliquera la version réelle de Weierstrass : il existera un entier N, des fonctions $\varphi_1, \ldots, \varphi_{\mathrm{N}} \in \mathcal{A}$ et une fonction polynomiale réelle P des variables réelles $x_1, \ldots, x_{\mathrm{N}}$ tels que

$$\forall x \in \mathrm{X}, \quad |f(x) - \mathrm{P}(\varphi_1(x), \ldots, \varphi_{\mathrm{N}}(x))| < \delta.$$

Stone-Weierstrass exprimé avec une algèbre de fonctions

Commençons par le cas réel. On a dit dans la remarque précédente que si $\mathcal{A}$ est une famille de fonctions réelles continues sur le compact X, qui sépare les points de X, toute fonction réelle continue f sur X pourra être approchée uniformément par une fonction de la forme $\psi = \mathrm{P}(\varphi_1, \ldots, \varphi_\mathrm{N})$, avec $\varphi_j \in \mathcal{A}$. Plus précisément, cela signifie que ψ est combinaison linéaire à coefficients réels de fonctions de la forme

$$x \in \mathrm{X} \to \varphi_1(x)^{k_1} \ldots \varphi_\mathrm{N}(x)^{k_\mathrm{N}},$$

avec $k_1, \ldots, k_\mathrm{N}$ entiers ≥ 0. En particulier, lorsque $k_1 = \cdots = k_\mathrm{N} = 0$, on introduit la fonction constante $\mathbf{1}$ dans la combinaison linéaire ; l'ensemble de toutes les fonctions ψ de la forme précédente est la $\mathbb{R}$-algèbre engendrée par la famille $\mathcal{A}$ et par les fonctions constantes.

Supposons réciproquement que l'ensemble $\mathcal{A}$ soit une algèbre de fonctions réelles, contenant les fonctions constantes et séparant les points de X : dans ce cas toutes les fonctions ψ sont encore dans $\mathcal{A}$, ce qui signifie que toute fonction continue f peut être approchée uniformément par un élément de $\mathcal{A}$.

Théorème (Stone-Weierstrass, cas réel). *On suppose que* X *est un espace topologique compact non vide et* $\mathcal{A}$ *une* $\mathbb{R}$*-algèbre de fonctions continues réelles sur* X*, qui sépare les points de* X *et contient les fonctions constantes. L'algèbre* $\mathcal{A}$ *est dense dans* $\mathrm{C}_\mathbb{R}(\mathrm{X})$*, pour la norme uniforme.*

Dans le cas complexe, l'approximation du théorème 1 était obtenue par une fonction $\psi = p(\varphi_1, \ldots, \varphi_\mathrm{N})$, avec $\varphi_j \in \mathcal{A}$ et p une fonction polynomiale en z_j et $\overline{z}_j$. Cela signifie que ψ est combinaison linéaire à coefficients complexes de fonctions de la forme

$$x \in \mathrm{X} \to \varphi_1(x)^{k_1} \overline{\varphi_1(x)}^{\ell_1} \ldots \varphi_\mathrm{N}(x)^{k_\mathrm{N}} \overline{\varphi_\mathrm{N}(x)}^{\ell_\mathrm{N}},$$

ce qui montre qu'on doit aussi utiliser ici les fonctions complexes conjuguées telles que $x \to \overline{\varphi_1(x)}$. Pour obtenir la traduction en termes d'algèbres de fonctions, il nous faudra supposer que la fonction $\overline{\varphi}$ est encore dans $\mathcal{A}$, pour toute $\varphi \in \mathcal{A}$.

Théorème (Stone-Weierstrass, cas complexe). *On suppose que* X *est un espace topologique compact non vide et* $\mathcal{A}$ *une* $\mathbb{C}$*-algèbre de fonctions continues sur* X*, qui sépare les points de* X*, contient les fonctions constantes,* et qui de plus est stable par conjugaison complexe. *L'algèbre* $\mathcal{A}$ *est dense dans* $\mathrm{C}_\mathbb{C}(\mathrm{X})$*, pour la norme uniforme.*

Remarque. Il n'est pas extrêmement difficile de montrer que toute fonction réelle continue sur $\mathbb{R}^d$, à support dans un compact K de $\mathbb{R}^d$, peut être approchée uniformément sur K par une fonction de la forme

$$y \in \mathbb{R}^d \to \sup\bigl(a_1(y), \ldots, a_\mathrm{M}(y)\bigr) - \sup\bigl(b_1(y), \ldots, b_\mathrm{N}(y)\bigr)$$

où les fonctions a_i, b_j sont des fonctions affines sur $\mathbb{R}^d$. Si dans la preuve du théorème 1, on remplace l'emploi du théorème de Weierstrass classique par cette nouvelle information, on obtient la version réticulée de Stone-Weierstrass : si E est un espace vectoriel de fonctions réelles continues sur le compact X, qui est stable par sup fini, contient les constantes et sépare les points de X, alors E est dense dans $\mathrm{C}_\mathbb{R}(\mathrm{X})$.