Prépa. Agrég. écrit d'Analyse, séance n° 7, Mercredi 22 Novembre 2000.

Transformation de Fourier

Fourier de L_1

A toute fonction réelle ou complexe $f \in \mathrm{L}_1(\mathbb{R}^d)$ on associe sa transformée de Fourier $\widehat{f}$, définie sur $\mathbb{R}^d$ par la formule

$$\forall t \in \mathbb{R}^d, \quad \widehat{f}(t) = \int \mathrm{e}^{it\,.\,x}\, f(x)\, dx,$$

où la notation $t\,.\,x$ représente le produit scalaire $t_1x_1 + \cdots + t_dx_d$ des deux vecteurs $t = (t_1, \ldots, t_d)$ et $x = (x_1, \ldots, x_d)$ de $\mathbb{R}^d$. L'application du théorème de convergence dominée à la famille des fonctions $g_t(x) = \mathrm{e}^{ix\,.\,t}\, f(x)$, dont les modules sont dominés par la fonction intégrable fixe $x \to |f(x)|$, montre que $\widehat{f}$ est continue. Il est clair que

$$\|\widehat{f}\|_\infty \le \|f\|_1.$$

De plus, l'application linéaire $f \to \widehat{f}$, continue de $\mathrm{L}_1(\mathbb{R}^d)$ dans $\mathrm{C}_b(\mathbb{R}^d)$, envoie les fonctions en escalier (à support borné) dans le sous-espace fermé $\mathrm{C}_0(\mathbb{R}^d)$ de $\mathrm{C}_b(\mathbb{R}^d)$, formé des fonctions continues qui tendent vers 0 à l'infini (vérification immédiate par le calcul sur une fonction indicatrice de pavé). Il en résulte que pour toute fonction $f \in \mathrm{L}_1(\mathbb{R}^d)$, la fonction $\widehat{f}$ est une fonction continue bornée, qui tend vers 0 à l'infini (ce qui entraîne que $\widehat{f}$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}^d$). On peut donc dire que $f \to \widehat{f}$ est un opérateur linéaire de norme ≤ 1, de $\mathrm{L}_1(\mathbb{R}^d)$ dans $\mathrm{C}_0(\mathbb{R}^d)$.

Si g est une autre fonction de $\mathrm{L}_1(\mathbb{R}^d)$ on voit avec Fubini que

$$\int \widehat{f}(t) g(t)\, dt = \int f(x) \widehat{g}(x)\, dx.$$

(formule d'échange). En effet, la fonction $h(x,t) = f(x)g(t)\,\mathrm{e}^{ix\,.\,t}$ est mesurable sur $\mathbb{R}^2$, et intégrable, ce qui permet d'appliquer Fubini ; l'interversion de l'ordre d'intégration donne le résultat.

Toujours avec Fubini, on voit que lorsque $f, g \in \mathrm{L}_1(\mathbb{R}^d)$, la transformée de Fourier de $f * g$ est égale au produit $\widehat{f}\,\widehat{g}$ des transformées de Fourier. Cette fois, on utilise $h(x,y) = f(x-y)g(y)\,\mathrm{e}^{ix\,.\,t}$, dont le module est $(x,y) \to |f(x-y)g(y)|$, dont on a vérifié l'intégrabilité lors de l'étude de la convolution.

Dilatations et Fourier

Soit $f \in \mathrm{L}_1(\mathbb{R}^d)$. Pour tout $\lambda > 0$ posons

$$\forall x \in \mathbb{R}^d, \quad f_{[\lambda]}(x) = \lambda^d f(\lambda x).$$

On voit par changement de variable que $f_{[\lambda]}$ a la même intégrale et la même norme dans $\mathrm{L}_1(\mathbb{R}^d)$ que f. On trouve immédiatement par le même changement de variable que

$$\forall t \in \mathbb{R}^d, \quad \widehat{f_{[\lambda]}}(t) = \widehat{f}(t/\lambda).$$

Fourier des Gaussiennes

On montre en dimension un, puis en dimension d, que

$$\int e^{it\,.\,x}\, e^{-|x|^2/2}\ \frac{dx}{(2\pi)^{d/2}} = e^{-|t|^2/2}$$

où on a noté par $|t|$ la norme euclidienne du vecteur t. Ce résultat se démontre en dimension un, par exemple par des considérations d'intégrales de contour, et le résultat sur $\mathbb{R}^d$ se déduit par Fubini (on peut aussi utiliser une équation différentielle, ou bien le passage par la transformée de Laplace et l'holomorphie). Posons

$$\forall x \in \mathbb{R}^d, \quad \gamma(x) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}}\ e^{-|x|^2/2}\,.$$

On obtient pour les dilatées $\gamma_{[k]}$ la formule $\widehat{\gamma_{[k]}}(t) = e^{-|t|^2/(2k^2)}$. On remarque que $\widehat{\gamma_{[k]}} \to 1$ quand $k \to +\infty$, ce qui correspond au fait que 1 est la transformée de Fourier de la mesure δ_0 (Dirac du point 0), et que la suite $(\gamma_{[k]})$ est une approximation de l'unité.

Inversion de Fourier et Plancherel

Supposons connue une fonction $k \in \mathrm{L}_1(\mathbb{R}^d)$ (différente de la fonction nulle) telle que $\widehat{k}$ soit aussi une fonction intégrable, et qui vérifie la *formule d'inversion*

$$\forall x \in \mathbb{R}^d, \quad k(x) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int \widehat{k}(t)\, e^{-it\,.\,x}\ dt.$$

Etant donnée une autre fonction $f \in \mathrm{L}_1(\mathbb{R}^d)$ on pourra, pour chaque x fixé, appliquer Fubini à la fonction intégrable $h(y,t) = (2\pi)^{-d} f(y)\widehat{k}(t)\, e^{i(y-x)\,.\,t}$ pour obtenir

$$\frac{1}{(2\pi)^d} \int \widehat{f}(t)\widehat{k}(t)\, e^{-ix\,.\,t}\ dt = \int \Bigl(\int h(y,t)\, dy \Bigr)\, dt =$$

$$= \int \Bigl(\int h(y,t)\, dt \Bigr)\, dy = \int f(y)k(x-y)\, dy = (f * k)(x)$$

ce qui montre que $f * k$ vérifie aussi la formule d'inversion, puisque le produit $\widehat{f}\,\widehat{k}$ est la transformée de Fourier de la convolée $f * k$.

Comme fonction k, on choisit une fonction dont la transformée de Fourier soit calculable et pour laquelle on sache vérifier la formule d'inversion. On peut prendre pour couple $(k, \widehat{k})$ la loi de Cauchy et la fonction $t \to e^{-|t|}$ (en dimension un), ou bien la densité gaussienne qui présente l'avantage supplémentaire d'être proportionnelle à sa transformée de Fourier.

Soit γ le noyau Gaussien et soit $f \in \mathrm{L}_1(\mathbb{R}^d)$; on montre donc avec Fubini que

$$\int \widehat{f}(t)\, e^{-|t|^2/2}\, e^{-ix\,.\,t}\ dt = (2\pi)^{d/2} \int f(y)\, e^{-|y-x|^2/2}\ dy = (2\pi)^d (f * \gamma)(x),$$

ce qui donne la formule d'inversion pour $g = f * \gamma$,

$$g(x) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int \widehat{g}(t)\, e^{-it\,.\,x}\ dt.$$

Le même calcul fonctionne aussi pour $f * \gamma_{[k]}$, pour tout k. On en déduit :

Théorème. *Si f et $\widehat{f}$ sont dans $\mathrm{L}_1(\mathbb{R}^d)$, la fonction f "est" continue et*

$$\forall x \in \mathbb{R}^d, \quad f(x) = (2\pi)^{-d} \int \widehat{f}(t)\, \mathrm{e}^{-ix\,.\,t}\; dt.$$

Démonstration. Posons $g_k = f * \gamma_{[k]}$, où $\gamma_{[k]}$ est le noyau Gaussien dilaté. On a vu que g_k tend vers f dans $\mathrm{L}_1(\mathbb{R}^d)$ (approximation par convolution). On a vu aussi que pour tout k,

$$g_k(x) = (2\pi)^{-d} \int \mathrm{e}^{-ix\,.\,t}\, \widehat{g}_k(t)\, dt,$$

et $|\widehat{g}_k(t)| = |\widehat{f}(t)|\, \widehat{\gamma_{[k]}}(t) \le |\widehat{f}(t)|$. Par le théorème de convergence dominée on montre (parce que $\widehat{\gamma_{[k]}} \to 1$) que $g_k(x)$ converge pour tout x vers

$$g(x) = (2\pi)^{-d} \int \mathrm{e}^{-ix\,.\,t}\, \widehat{f}(t)\, dt,$$

et g est continue. Puisque $g_k \to f$ dans L_1, on en déduit que $g = f$ presque partout, donc g est un représentant de f et la formule de l'énoncé est justifiée.

Pour toute fonction g qui vérifie la formule d'inversion précédente, on a

$$\int |\widehat{g}(t)|^2\, dt = (2\pi)^d \int |g(x)|^2\, dx.$$

En effet, d'après la formule d'inversion, on a

$$\overline{g(x)} = (2\pi)^{-d} \int \mathrm{e}^{it.x}\, \overline{\widehat{g}(t)}\, dt$$

donc $\widehat{k} = (2\pi)^d \overline{g}$ est la transformée de Fourier de $k = \overline{\widehat{g}}$, et le résultat découle de la formule d'échange,

$$(2\pi)^d \int g(x)\overline{g(x)}\, dx = \int g\, \widehat{k} = \int \widehat{g}\, k = \int \widehat{g}(t)\overline{\widehat{g}(t)}\, dt.$$

Ce résultat s'applique aux fonctions $g_k = f * \gamma_{[k]}$. Supposons que $f \in \mathrm{L}_1 \cap \mathrm{L}_2$. La suite $g_k = f * \gamma_{[k]}$ converge vers f dans L_1 et dans L_2. La formule précédente appliquée à $g_k - g_\ell$ montre que la suite $(\widehat{g_k})$ est de Cauchy dans L_2, donc converge vers une fonction $h \in \mathrm{L}_2$, et d'autre part la convergence L_1 entraîne la convergence simple de $\widehat{g_k}$ vers $\widehat{f}$, donc $h = \widehat{f}$, et on obtient à la limite

$$\int |\widehat{f}(t)|^2\, dt = (2\pi)^d \int |f(x)|^2\, dx.$$

Théorème. Prolongement à L_2 de la transformation de Fourier. *La transformation de Fourier se prolonge en une application linéaire continue de $\mathrm{L}_2(\mathbb{R}^d)$ dans lui-même, et on a pour toute fonction $f \in \mathrm{L}_2(\mathbb{R}^d)$*

$$\int |f(x)|^2\, dx = (2\pi)^{-d} \int |\widehat{f}(t)|^2\, dt.$$

Prépa. Agrég. écrit d'Analyse, séance n° 8, Mercredi 29 Novembre 2000.

Holomorphie et analyticité

Sur ces questions il y a au moins deux sources qu'il faut lire : Cartan et Rudin. Le volume 2 de Chatterji contient aussi une masse d'informations, qui commence tout doucement, avec la définition des nombres complexes…

Une fonction holomorphe f est une fonction qui est dérivable au sens complexe. Un point tout à fait remarquable est que pour développer la théorie des fonctions holomorphes, on n'a pas pas besoin de supposer que $z \to f'(z)$ soit continue ; on verra en fait que f est développable en série entière au voisinage de chaque point de Ω, ce qui impliquera que f' est elle aussi holomorphe dans Ω, et on peut donc continuer de dériver indéfiniment. On aura ainsi établi l'identité entre le point de vue *holomorphe* et le point de vue *analytique* (fondé sur les développements en séries entières).

Fonctions holomorphes

On dit que f est *holomorphe* dans un ouvert Ω de $\mathbb{C}$ si elle admet en tout point $z \in \Omega$ une dérivée au sens complexe,

$$f'(z) = \lim_{h \to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h}$$

où h tend vers 0 par *valeurs complexes*. Les opérations habituelles sur les dérivées se justifient comme dans le cas réel usuel : dérivée d'un produit, de l'inverse $1/f$ lorsque $f(z) \neq 0$, composition de fonctions $\mathbb{C}$-dérivables, etc… On vérifie à la main facilement que les monômes z^n, $n \geq 0$ sont holomorphes, avec dérivée nz^{n-1}, et que les z^n pour $n < 0$ sont holomorphes en dehors de 0, avec la dérivée qu'on imagine.

Ecrivons $z = x + iy$, avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et posons $f(z) = \mathrm{P}(x, y) + i\mathrm{Q}(x, y)$ avec P et Q fonctions réelles sur l'ouvert $\Omega' \simeq \Omega$ de $\mathbb{R}^2$ qui correspond à $\Omega \subset \mathbb{C} \simeq \mathbb{R}^2$; on voit que la dérivabilité complexe de f au point z implique que pour t réel petit, $f(z + it) - f(z) \sim (it)f'(z) = i\,(tf'(z)) \sim i\,(f(z + t) - f(z))$, ce qui se traduit par $\frac{\partial}{\partial y}(\mathrm{P} + i\mathrm{Q}) = i\,\frac{\partial}{\partial x}(\mathrm{P} + i\mathrm{Q})$, ou encore

$$\frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial x} = -\frac{\partial \mathrm{P}}{\partial y}\,; \quad \frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial y} = \frac{\partial \mathrm{P}}{\partial x}$$

en tout point de Ω. On peut visualiser les choses de la façon suivante : le gradient de Q se déduit de celui de P par une rotation d'angle $+\pi/2$. On peut aussi dire les choses avec l'opérateur $\overline{\partial}$, défini par

$$\overline{\partial} = \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\Big).$$

Dans ces questions on est amené à jongler sans cesse entre $\mathbb{C}$ et $\mathbb{R}^2$; on pourrait formaliser à l'extrême, en introduisant l'application p de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{R}^2$ qui est définie par $p(x+iy) = (x, y)$ et l'application inverse j telle que $j(x, y) = x+iy$. A la fonction f de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ on peut ainsi associer l'application $\varphi = p \circ f \circ j$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$; c'est l'application $\varphi(x, y) = (\mathrm{P}(x, y), \mathrm{Q}(x, y))$, où P, Q sont comme ci-dessus.

On peut alors dire que le problème de l'holomorphie de f est de savoir si une application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans lui-même, à savoir la différentielle de f (ou plus exactement de φ), dont la matrice jacobienne est

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \mathrm{P}}{\partial x} & \frac{\partial \mathrm{P}}{\partial y} \\ \frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial x} & \frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial y} \end{pmatrix}$$

est en fait une application $\mathbb{C}$-linéaire quand on l'interprète comme une application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$. Or, si A est une matrice réelle 2×2, interprétée comme application linéaire de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$, l'application $j \circ \mathrm{A} \circ p$ de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ n'est $\mathbb{C}$-linéaire **que lorsque** la matrice est de la forme

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$$

(et bien évidemment, l'application $\mathbb{C}$-linéaire en question, de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$, est une bête multiplication, par $\lambda = a - ib$ dans notre exemple). On retrouve ainsi les conditions de Cauchy-Riemann. On peut également dire que les fonctions holomorphes sont les fonctions f différentiables qui vérifient dans l'ouvert Ω l'équation $\overline{\partial} f = 0$.

Si γ est une application C^1 d'un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ à valeurs dans un ouvert Ω où f est holomorphe, on vérifie facilement que la fonction complexe de variable réelle $f \circ \gamma$ admet pour dérivée $t \to f'(\gamma(t))\, \gamma'(t)$. Cette remarque simple est très utile pour le calcul des intégrales sur des chemins (paragraphe suivant).

Intégrale sur un chemin

On considère une application γ de classe C^1 d'un intervalle fermé borné $[\alpha, \beta]$, à valeurs dans $\mathbb{R}^d$, et F une fonction à valeurs réelles ou complexes définie et continue sur la courbe image $\gamma^* = \gamma([\alpha, \beta])$. On pose pour chaque $j = 1, \ldots, d$

$$\int_\gamma \mathrm{F}(x)\, dx_j = \int_\alpha^\beta \mathrm{F}(\gamma(t))\, \gamma_j'(t)\, dt$$

où la variable x représente un point de $\mathbb{R}^d$ et où $\gamma_j(t)$ désigne la $j$ième composante de $\gamma(t) \in \mathbb{R}^d$. Si on a un autre paramétrage $\gamma_1 : [\alpha_1, \beta_1] \to \mathbb{R}^d$ du même chemin γ^*, de la forme $\gamma_1 = \gamma \circ \psi$, avec ψ bijection croissante de classe C^1 de $[\alpha_1, \beta_1]$ sur $[\alpha, \beta]$, on aura par le changement de variable $t = \psi(s)$

$$\int_{\alpha_1}^{\beta_1} \mathrm{F}(\gamma_1(s))\, \gamma_{1,j}'(s)\, ds = \int_{\alpha_1}^{\beta_1} \mathrm{F}(\gamma(\psi(s)))\, \gamma_j'(\psi(s))\psi'(s)\, ds = \int_\alpha^\beta \mathrm{F}(\gamma(t))\, \gamma_j'(t)\, dt.$$

On peut ensuite ajouter les différentes composantes $j = 1, \ldots, d$, puis considérer des chemins qui sont C^1 par morceaux pour arriver finalement à la notion générale d'intégrale sur un chemin γ

$$\int_\gamma \Bigl(\sum_{j=1}^d \mathrm{F}_j(x)\, dx_j\Bigr).$$

Dans le cas complexe (identifié à $\mathbb{R}^2$), on utilise souvent $dz = dx + i\, dy$, qui correspond à $\sum \mathrm{F}_j\, dx_j$ avec $d = 2$, $\mathrm{F}_1 = 1$ et $\mathrm{F}_2 = i$.

Continuons avec une remarque facile. Si f est holomorphe, avec f' continue (on montrera plus loin que cette propriété de continuité de f' est automatique) dans un ouvert contenant un chemin γ, allant du point $a = \gamma(\alpha)$ au point $b = \gamma(\beta)$, alors

$$\int_\gamma f'(z)\, dz = f(b) - f(a).$$

En particulier, le résultat sera nul pour un chemin fermé (c'est à dire quand $\gamma(\alpha) = \gamma(\beta)$). Cette remarque est essentielle pour le développement des arguments qui suivent.

On peut facilement majorer le module de l'intégrale d'une fonction continue F sur un chemin,

$$\Bigl|\int_\gamma \mathrm{F}(z)\,dz\Bigr| \le \ell(\gamma)\,\max\{|\mathrm{F}(z)| : z \in \gamma^*\}$$

où $\ell(\gamma) = \int_\alpha^\beta |\gamma'(t)|\,dt$ désigne la longueur du chemin γ. En particulier, si le segment $\gamma^* = [a, b]$ est contenu dans Ω, et si f est holomorphe dans un ouvert contenant γ^*, avec f' continue, on en déduit la majoration

$$|f(b) - f(a)| \le |b - a|\,\max\{|f'(z)| : z \in \gamma^*\}. \tag{1}$$

On a besoin d'un calcul fondamental. Désignons par γ_r le parcours du cercle de rayon $r > 0$ centré en 0 donné par $\gamma_r(\theta) = r\,\mathrm{e}^{i\theta}$, pour $\theta \in [0, 2\pi]$. On a

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_r} \frac{dz}{z} = 1$$

ce qui se voit immédiatement, puisque

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_r} \frac{dz}{z} = \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{ri\,\mathrm{e}^{i\theta}}{r\,\mathrm{e}^{i\theta}}\,d\theta = 1.$$

On a aussi

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_r} \frac{dz}{z^n} = 0$$

pour tout $n \ne 1$, parce que la fonction z^{-n} admet dans ce cas une primitive complexe dans un voisinage du cercle γ_r^* (on peut aussi paramétriser comme ci-dessus, et trouver une intégrale de $\mathrm{e}^{in\theta}$). Ensuite, pour $|\lambda| < r$, on aura

$$\mathrm{J}(\lambda) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_r} \frac{dz}{z - \lambda} = 1$$

par exemple en développant la fonction $z \to (z - \lambda)^{-1} = z^{-1}(1 - \lambda/z)^{-1}$ en série entière (en λ/z), normalement convergente sur le cercle de rayon r,

$$\mathrm{J}(\lambda) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_r} \frac{\lambda^n dz}{z^{n+1}} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_r} \frac{\lambda^0 dz}{z} = 1.$$

En revanche, quand $|\lambda| > r$, on aura

$$\mathrm{J}(\lambda) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_r} \frac{dz}{z - \lambda} = 0$$

en développant cette fois $z \to (z - \lambda)^{-1} = -\lambda^{-1}(1 - z/\lambda)^{-1}$ en série entière en z/λ. Ces deux calculs sont des cas particuliers de la notion très importante *d'indice* d'un chemin par rapport à un point λ.

De l'holomorphie à l'analyticité : en passant par le lemme de Goursat

L'un des cheminements classiques est le suivant :

$\big($ g continue dans une boule ouverte $\mathrm{D} = \mathrm{B}(z_0, r_0)$, holomorphe dans D, sauf peut-être en un point $\big)$

$\Rightarrow_1$ $\big($ l'intégrale curviligne de $g(z)\,dz$ sur le bord de tout rectangle (ou triangle) contenu dans D est nulle $\big)$

$\Rightarrow_2$ $\big($ g admet une primitive G (au sens complexe) dans D $\big)$

$\Rightarrow_3$ $\big($ l'intégrale de $g(z)\,dz$ sur tout cercle $\mathrm{S}(z_0, r)$, $r < r_0$ est nulle $\big)$

$\Rightarrow_4$ $\big($ la formule de Cauchy pour f holomorphe dans D $\big)$

$\Rightarrow_5$ $\big($ f est développable en série de Taylor $\sum_{n\ge 0} a_n (z - z_0)^n$, convergente pour tout point $z \in \mathrm{D}$ $\big)$

$\Rightarrow_6$ $\big($ f' est holomorphe dans D $\big)$.

L'implication $\Rightarrow_1$ est le lemme de Goursat ; l'implication $\Rightarrow_2$ est facile, surtout si on a montré le théorème de Goursat pour un triangle : il suffit alors de poser $\mathrm{G}(z) = \int_{\gamma_z} f(w)\,dw$, où γ_z est le segment de z_0 à z. L'implication $\Rightarrow_3$ a déjà été vue (intégrale d'une dérivée continue sur un chemin fermé). Pour l'implication $\Rightarrow_4$, on utilise la fonction $g(z) = (f(z) - f(\lambda))/(z - \lambda)$ qui est holomorphe, sauf peut-être au point λ. L'implication $\Rightarrow_5$ consiste à développer en série $z \to (z - \lambda)^{-1}$, et le dernier point est du DEUG amélioré (dérivabilité *complexe* de la somme d'une série entière).

Dérivabilité complexe de la somme d'un série entière : DEUG amélioré

Si $\sum a_n z^n$ est une série entière à coefficients complexes (a_n), son rayon de convergence R est donné par la formule

$$1/\mathrm{R} = \limsup |a_n|^{1/n}.$$

On en déduit classiquement la convergence de la série dérivée (formelle) $\sum_{n\ge 1} n a_n z^{n-1}$ dans le même disque ouvert $\mathrm{D}(0, \mathrm{R})$. Rappelons brièvement pourquoi la somme de la série dérivée est la dérivée (complexe) de $z \to f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$.

Si on prend $0 < r < \mathrm{R}$ et $|z_0|, |z_0 + h| < r$ on aura d'abord pour $t \in (0, 1)$, en utilisant une intégrale sur le segment de z_0 à $z_0 + th$, segment contenu dans $\mathrm{D}(0, r)$

$$|(z_0 + th)^{n-1} - z_0^{n-1}| \le (n-1) r^{n-2}\, t\, |h|$$

(utiliser par exemple la majoration (1) ci-dessus) puis

$$\big|(z_0 + h)^n - z_0^n - n z_0^{n-1} h\big| \le \frac{n(n-1)}{2}\, r^{n-2} |h|^2.$$

Il en résulte que

$$\Big| f(z_0 + h) - f(z_0) - \big(\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n z_0^{n-1}\big)\, h \Big| \le \mathrm{K}(r)\, |h|^2$$

ce qui montre la dérivabilité complexe de f au point z_0, et montre aussi que $f'(z_0)$ est égal à la somme de la série dérivée.

Lemme de Goursat

Lemme. *On suppose que f est continue dans Ω, holomorphe dans Ω sauf peut être en un point z_1 de Ω. Si γ est le bord d'un rectangle fermé* R *contenu dans Ω, on a*

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 0.$$

Supposons que $z_1 \notin \mathrm{R}$ (pour commencer). On pose

$$\Bigl|\int_\gamma f(z)\,dz\Bigr| = c$$

et on veut montrer que $c = 0$. On considère $\gamma_0 = \gamma$ et $\mathrm{R}_0 = \mathrm{R}$ comme les premiers termes d'une suite de rectangles et de chemins. Désignons par L_0 le demi-périmètre du rectangle R_0 et observons que $|z - z'| \le \mathrm{L}_0$ pour tout couple de points (z, z') de R_0. On doit avoir

$$\Bigl|\int_{\gamma'} f(z)\,dz\Bigr| \ge c/4$$

pour le bord γ' d'au moins un des quatre rectangles obtenus en coupant les côtés de R_0 en deux parties égales. On désigne par γ_1 l'un de ces γ' ; le demi-périmètre du rectangle R_1 bordé par γ_1 est la moitié de celui de R_0, c'est à dire $\mathrm{L}_1 = \frac{1}{2}\mathrm{L}_0$. On continue, par induction, à définir des chemins γ_n et des rectangles R_n, dont la taille des côtés est 2^{-n} fois celle du rectangle initial, le demi-périmètre L_n est $2^{-n}\mathrm{L}_0$, et qui vérifient pour tout $n \ge 0$

$$(*) \qquad \Bigl|\int_{\gamma_n} f(z)\,dz\Bigr| \ge c/4^n.$$

Ces rectangles tendent vers un point unique $z_0 \in \Omega$; on conclura en faisant un DL (complexe) au voisinage de z_0 : en posant $g(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0)$, et étant donné $\varepsilon > 0$, on a $|f(z) - g(z)| < \varepsilon\,|z - z_0|$ pour tout point $z \in \gamma_n^*$, pourvu que $n \ge \mathrm{N}_0(\varepsilon)$; de plus $|z - z_0| \le \mathrm{L}_n$ pour tout $z \in \mathrm{R}_n$. Comme l'intégrale de g (qui est une dérivée) est nulle sur γ_n, on obtient

$$4^{-n}\,c \le \Bigl|\int_{\gamma_n} f(z)\,dz\Bigr| = \Bigl|\int_{\gamma_n} (f(z) - g(z))\,dz\Bigr| \le 2\mathrm{L}_n\,.\,\varepsilon\mathrm{L}_n = 2\,.\,4^{-n}\mathrm{L}_0^2\,\varepsilon,$$

ce qui donne bien $c = 0$ puisque ε est arbitraire.

Dans le cas où le rectangle R contient le point exceptionnel z_1, on procède par approximation de l'intégrale curviligne par quatre intégrales sur des bords de rectangles qui ne contiennent pas z_1.

Prépa. Agrég. écrit d'Analyse, séance n° 9, Mercredi 6 Décembre 2000.

Holomorphie et analyticité, suite

De la nullité des intégrales sur les bords de triangle on déduit facilement l'existence d'une primitive complexe. Si f est une fonction continue dans un ouvert Ω du plan complexe, et si on a

$$\int_{\partial \mathrm{T}} f(z)\, dz = 0$$

pour tout triangle T contenu dans Ω, alors pour tout sous-ensemble ouvert convexe $\mathrm{C} \subset \Omega$, on peut définir dans C une primitive F de f (au sens complexe) de la façon suivante : on fixe un point $z_0 \in \mathrm{C}$ quelconque, et pour tout $z \in \mathrm{C}$ on considère le segment $[z_0, z]$, qui est contenu dans C par convexité, et le chemin $\gamma_z(t) = (1-t)z_0 + tz$ qui parcourt ce segment lorsque t décrit l'intervalle $[0,1]$. On pose

$$\forall z \in \mathrm{C}, \quad \mathrm{F}(z) = \int_{\gamma_z} f(w)\, dw.$$

On vérifie facilement que $\mathrm{F}'(z) = f(z)$, comme on le fait habituellement dans le cas réel pour montrer que $\mathrm{G}(x) = \int_a^x g(t)\, dt$ admet g comme dérivée quand g est continue. Ici, étant donné $z + h \in \mathrm{C}$ on considère le triangle dont les sommets sont z_0, z et $z+h$; de la convexité de C on déduit que ce triangle est contenu dans C, donc dans Ω ; l'hypothèse donne alors

$$\mathrm{F}(z+h) - \mathrm{F}(z) = \int_{\gamma_{z,h}} f(w)\, dw \sim h\, f(z)$$

(quand h est petit) où $\gamma_{z,h}$ est le chemin qui parcourt le segment $[z, z+h]$.

Du cercle d'implications exposé la fois précédente, qui mène de fonction holomorphe à fonction analytique, on gardera le théorème de Morera, qui est bien commode pour vérifier que l'holomorphie est préservée par certaines limites de suites de fonctions.

Théorème. *Soit f une fonction continue dans un ouvert Ω ; si on a*

$$\int_{\partial \mathrm{T}} f(z)\, dz = 0$$

pour tout triangle T *contenu dans Ω, alors f est holomorphe dans Ω.*

Dans l'énoncé, "triangle" signifie triangle "plein", et $\partial \mathrm{T}$ est n'importe quel chemin qui parcourt le bord du triangle T.

Démonstration. Soient $z_0 \in \Omega$ et $\mathrm{C} = \mathrm{B}(z_0, r)$ une boule ouverte contenue dans Ω ; dans le convexe C la fonction f admet une primitive F, qui est donc holomorphe dans C ; la chaîne d'implications donnera F développable en série entière, donc sa dérivée f sera elle aussi dérivable au sens complexe dans C, et en particulier au point z_0.

La notion d'indice d'un chemin fermé

On trouvera, par exemple dans Rudin, théorème 10.10, le résultat suivant

Théorème. *Soit γ un chemin fermé ; pour tout $z \notin \gamma^*$, on considère l'intégrale*

$$\mathrm{Ind}_\gamma(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{dw}{w-z}.$$

La fonction Ind_γ*, définie hors de γ^*, est à valeurs dans $\mathbb{Z}$, constante sur chaque composante connexe de $\mathbb{C} \setminus \gamma^*$, et nulle sur la composante non bornée de $\mathbb{C} \setminus \gamma^*$.*

Fonctions holomorphes dans une couronne. Développement de Laurent

Désignons par $\mathrm{C}(r_0, r_1)$ la couronne ouverte du plan complexe centrée en 0 égale à $\{z \in \mathbb{C} : r_0 < |z| < r_1\}$. On suppose $r_0 < r_1$, et on peut admettre les cas extrêmes $r_1 = +\infty$ et $r_0 = 0$. Ainsi, $\mathrm{C}(0, +\infty)$ est égal à $\mathbb{C}^*$.

Si f est holomorphe dans $\mathrm{C}(r_0, r_1)$, on démontre la constance des intégrales sur les cercles de rayon r compris entre r_0 et r_1 (centrés en 0) ; on pose $\gamma_r(\theta) = r\,\mathrm{e}^{i\theta}$, où θ varie dans $[0, 2\pi]$, et on pose $g(z) = z\, f(z)$; on a

$$\mathrm{J}(r) = \int_{\gamma_r} f(z)\, dz = \int_0^{2\pi} \frac{g(r\,\mathrm{e}^{i\theta})}{r\,\mathrm{e}^{i\theta}}\, ri\,\mathrm{e}^{i\theta}\ d\theta = i \int_0^{2\pi} g(r\,\mathrm{e}^{i\theta})\, d\theta$$

donc

$$r\,\frac{d\mathrm{J}(r)}{dr} = ri\frac{d}{dr}\int_0^{2\pi} g(r\,\mathrm{e}^{i\theta})\, d\theta = \int_0^{2\pi} g'(r\,\mathrm{e}^{i\theta})\, ri\,\mathrm{e}^{i\theta}\ d\theta = \int_{\gamma_r} g'(z)\, dz = 0,$$

ce qui montre que $\mathrm{J}(r)$ reste constant sur l'intervalle $]r_0, r_1[$. Autres méthodes pour montrer cette constance : invariance par homotopie (voir Cartan, paragraphe II.1.6), ou bien la démonstration du *Théorème de Cauchy global*, dans Rudin, 3ième édition, théorème 10.35.

Dans ce qui précède, le résultat reste valable si la fonction f est supposée continue dans la couronne, et holomorphe dans la couronne sauf peut-être en un point z_0. Si on pose $\mathrm{R} = |z_0|$, on aura $r_0 < \mathrm{R} < r_1$, la fonction $\mathrm{J}(r)$ est continue sur $]r_0, r_1[$ (parce que f est continue) et constante sur les deux intervalles $]r_0, \mathrm{R}[$ et $]\mathrm{R}, r_1[$, donc elle est constante sur $]r_0, r_1[$. Ce cas sert pour traiter directement les séries de Laurent, sans faire au préalable le passage holomorphe $\Rightarrow$ analytique.

En effet, si f est holomorphe dans $\mathrm{C}(r_0, r_1)$, et si λ est un point fixé de cette couronne, on considère la fonction g définie par $g(z) = (f(z) - f(\lambda))/(z - \lambda)$ pour $z \neq \lambda$ et $g(\lambda) = f'(\lambda)$. La fonction g est continue dans la couronne, et holomorphe sur $\mathrm{C}(r_0, r_1) \setminus \{\lambda\}$. On choisit R_0 et R_1 de façon que $r_0 < \mathrm{R}_0 < |\lambda| < \mathrm{R}_1 < r_1$. On a dit que

$$(*) \qquad \int_{\gamma_{\mathrm{R}_1}} g(z)\, dz - \int_{\gamma_{\mathrm{R}_0}} g(z)\, dz = 0.$$

En utilisant de plus

$$\frac{1}{2\pi i}\Big(\int_{\gamma_{\mathrm{R}_1}} \frac{dz}{z - \lambda} - \int_{\gamma_{\mathrm{R}_0}} \frac{dz}{z - \lambda}\Big) = 1$$

on déduit de $(*)$ une formule de Cauchy pour f,

$$f(\lambda) = \frac{1}{2\pi i}\Big(\int_{\gamma_{\mathrm{R}_1}} \frac{f(z)}{z - \lambda}\, dz - \int_{\gamma_{\mathrm{R}_0}} \frac{f(z)}{z - \lambda}\, dz\Big).$$

En utilisant les développements de $(z - \lambda)^{-1}$ sur les deux cercles on obtient la série de Laurent. Pour le cercle γ_{R_1} de rayon $\mathrm{R}_1 > |\lambda|$ on développe la fonction $z \to (z - \lambda)^{-1} = z^{-1}(1 - \lambda/z)^{-1}$ en série entière (en λ/z), normalement convergente (en z) sur le cercle de rayon R_1,

$$\int_{\gamma_{\mathrm{R}_1}} \frac{f(z)}{z - \lambda}\, dz = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{\gamma_{\mathrm{R}_1}} \frac{\lambda^n f(z)}{z^{n+1}}\, dz = \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^n \Big(\int_{\gamma_{\mathrm{R}_1}} \frac{f(z)}{z^{n+1}}\, dz\Big).$$

En revanche, pour le cercle γ_{R_0} on développe cette fois $z \to (z-\lambda)^{-1} = -\lambda^{-1}(1-z/\lambda)^{-1}$ en série entière en z/λ pour obtenir $-\sum_{n=0}^{+\infty} z^n/\lambda^{n+1}$ et

$$\int_{\gamma_{\mathrm{R}_0}} \frac{f(z)}{z-\lambda}\,dz = -\sum_{n=0}^{+\infty} \int_{\gamma_{\mathrm{R}_0}} \frac{z^n f(z)}{\lambda^{n+1}}\,dz = -\sum_{m=-\infty}^{-1} \lambda^m \Bigl(\int_{\gamma_{\mathrm{R}_0}} \frac{f(z)}{z^{m+1}}\,dz \Bigr).$$

En rassemblant les deux développements, et compte tenu du fait que les intégrales sur les cercles centrés en 0 ne dépendent pas du rayon du cercle, on obtient pour tout r entre r_0 et r_1

$$f(\lambda) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \lambda^n \Bigl(\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \frac{f(z)}{z^{n+1}}\,dz \Bigr).$$

Il s'agit donc d'un développement de f de la forme $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n z^n$, convergent pour tout $z \in \mathrm{C}(r_0, r_1)$. En y regardant de plus près, on voit que les deux parties du développement (en $-\infty$ et en $+\infty$) sont deux séries normalement convergentes sur tout compact K contenu dans la couronne ouverte.

Comme sous-produit, on obtient à partir de l'expression

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \frac{f(z)}{z^{n+1}}\,dz$$

pour tout r tel que $r_0 < r < r_1$, les inégalités de Cauchy,

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad |a_n| \le \frac{\mathrm{M}(r)}{r^n}$$

où $\mathrm{M}(r) = \max\{|f(z)| : |z| = r\}$. En effet,

$$|a_n| = \frac{1}{2\pi} \Bigl| \int_0^{2\pi} \frac{f(r\,\mathrm{e}^{i\theta})}{r^{n+1}\,\mathrm{e}^{i(n+1)\theta}}\, ri\,\mathrm{e}^{i\theta}\ d\theta \Bigr| \le \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{|f(r\,\mathrm{e}^{i\theta})|}{r^n}\,d\theta \le r^{-n}\,\mathrm{M}(r).$$

Conséquences des inégalités de Cauchy

Si f est continue dans le disque $\mathrm{D}(0,\mathrm{R})$ et holomorphe sauf en 0, on peut la considérer comme une fonction dans la couronne $\mathrm{C}(0,\mathrm{R})$; on trouve en faisant tendre r vers 0 que $a_n = 0$ pour tout $n < 0$: en effet, $\mathrm{M}(r)$ reste borné quand $r \to 0$ d'après la continuité de f, alors que r^{-n} tend vers 0 pour $n < 0$. Ceci montre que $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ pour tout z tel que $0 < |z| < \mathrm{R}$; puisque f était supposée continue, on a aussi $f(0) = a_0$, de sorte que f est égale à la somme de la série $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ dans tout le disque ouvert. Il en résulte que f est holomorphe : elle présentait au point 0 une *singularité artificielle*. Si f n'était pas définie en 0 mais était bornée au voisinage de 0, la même démonstration prouve que f se prolonge en fonction holomorphe dans le disque. Par translation, on obtient le principe suivant :

si f est continue dans un ouvert Ω, si $z_0 \in \Omega$ et si f est holomorphe dans $\Omega \setminus \{z_0\}$, alors f est holomorphe dans Ω. Si f est holomorphe dans $\Omega \setminus \{z_0\}$ et bornée au voisinage de z_0, elle se prolonge en fonction holomorphe dans Ω.

Les inégalités de Cauchy, du côté $n \ge 0$, entraînent le théorème de Liouville (et le théorème fondamental de l'algèbre) :

si f est holomorphe et bornée sur $\mathbb{C}$, c'est une fonction constante.

Si on avait un polynôme $\mathrm{P}(z)$ sans racine complexe, la fonction $f(z) = 1/\mathrm{P}(z)$ serait holomorphe et bornée sur $\mathbb{C}$, donc constante : cela n'est possible que pour un polynôme de degré 0.

Précisions sur les développements en série

On suppose que f est holomorphe dans un ouvert Ω, et on considère un point $z_0 \in \Omega$. Soit R la distance de z_0 au fermé complémentaire de Ω (on a $\mathrm{R} > 0$; on pose $\mathrm{R} = +\infty$ si $\Omega = \mathbb{C}$). La fonction $g(h) = f(z_0 + h)$ est holomorphe dans $\mathrm{D}(0, \mathrm{R})$. On a vu que g admet un développement en série de la forme

$$g(h) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \, h^n$$

qui converge pour tout h tel que $|h| < \mathrm{R}$. On voit donc que pour tout $z_0 \in \Omega$, la fonction f admet un développement $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n (z - z_0)^n$, valable pour tout z tel que $|z - z_0| < \mathrm{R}$; la série de Taylor de f au point z_0 représente f dans tout le disque $\mathrm{D}(z_0, \mathrm{R})$. Ainsi, holomorphe dans Ω implique analytique dans Ω.

Quelques mots sur les fonctions multiformes

Pour parler plus correctement des fonctions telles que le logarithme, on peut introduire une *surface de Riemann*, qui est une variété complexe, où chaque point possède un voisinage homéomorphe à un ouvert de $\mathbb{C}$; posons

$$\mathrm{H} = \{(z, t) : z \in \mathbb{C}, t \in \mathbb{R} \ \text{ et } \ z \, \mathrm{e}^{-it} \ \text{réel } > 0\}.$$

En d'autres termes, z et t sont liés par le fait que z est de la forme $z = r \, \mathrm{e}^{it}$ pour un certain $r > 0$, donc t apparaît comme un argument du nombre complexe z. La surface H peut se visualiser comme une hélice dans $\mathbb{R}^3$ qui s'enroule autour de l'axe $x = y = 0$. La projection $(z, t) \to z$ est bijective au voisinage de chaque point de H ; les applications inverses donnent des cartes qui permettent de définir une structure holomorphe sur H, et de définir des fonctions holomorphes sur H. Posons

$$\forall (z, t) \in \mathrm{H}, \quad \varphi(z, t) = \ln(z \, \mathrm{e}^{-it}) + it.$$

On obtient de cette façon une fonction holomorphe sur H, qui correspond à la fonction logarithme complexe, qu'on ne peut pas définir globalement sur $\mathbb{C}$.

La surface H a une propriété qui va au delà de la seule fonction logarithme. Pour toute fonction f holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ il existe une fonction F sur H dont la dérivée en tout point $(z, t) \in \mathrm{H}$ est égale à $f(z)$. Le cas du logarithme correspond à $f(z) = 1/z$. Il est beaucoup plus difficile d'imaginer la surface qui aurait la propriété correspondante pour le plan avec deux trous, $\mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$.

Prépa. Agrég. écrit d'Analyse, séance n$^{\text{o}}$ 10, Mercredi 13 Décembre 2000.

Principe du maximum

On note $\mathrm{D}(z_0, r_0)$ le disque ouvert de rayon r_0 et de centre z_0 dans le plan complexe,

$$\mathrm{D}(z_0, r_0) = \{z \in \mathrm{C} : |z - z_0| < r_0\}.$$

Théorème : principe des zéros isolés. *Soient Ω un ouvert non vide de $\mathbb{C}$ et f une fonction holomorphe sur Ω ; on considère un point $z_0 \in \Omega$.*

1. Si $f^{(n)}(z_0) = 0$ pour tout $n \geq 0$, la fonction f est nulle dans un voisinage de z_0.

2. Si f n'est pas nulle dans un voisinage de z_0, il existe $r_0 > 0$ et un disque épointé $\mathrm{D}(z_0, r_0) \setminus \{z_0\}$ qui ne contient aucun zéro de f.

3. Si $f(w_n) = 0$ et $w_n \to z_0 \in \Omega$, $w_n \neq z_0$, alors f est identiquement nulle au voisinage de z_0.

Démonstration. On sait que la série de Taylor de f au point z_0 représente f en tout point du plus grand disque ouvert $\mathrm{D}(z_0, r_0)$ contenu dans Ω (avec $r_0 = d(z_0, \Omega^c) > 0$). Si toutes les dérivées de f sont nulles au point z_0, cette série de Taylor est identiquement nulle, donc $f = 0$ dans $\mathrm{D}(z_0, r_0)$.

Si f n'est pas identiquement nulle au voisinage de z_0, on peut considérer le premier coefficient a_{n_0} non nul de la série de Taylor de f au point z_0 et écrire

$$f(z) = a_{n_0}(z - z_0)^{n_0} + \cdots + a_n(z - z_0)^n + \cdots = (z - z_0)^{n_0} g(z),$$

où $g(z)$ est holomorphe (donc continue) au voisinage de z_0, et $g(z_0) \neq 0$; par continuité il existe un voisinage $\mathrm{V} \subset \Omega$ de z_0 sur lequel $g \neq 0$. Dans V, la fonction f ne peut s'annuler qu'au point z_0. Le dernier point de l'énoncé est simplement la contraposée du point 2.

Théorème : principe du maximum. *Soit f une fonction holomorphe dans un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}$; si $|f|$ admet un maximum local en un point $z_0 \in \Omega$, f est constante dans un voisinage de z_0.*

La démonstration qui suit est la plus commune, on la trouve par exemple chez Cartan, III.2.2 ; Rudin procède différemment (voir son théorème 10.24). Dans Zuily-Queffélec, chapitre XI, on trouve un cadre plus général concernant le principe du maximum pour les solutions de certaines EDP.

Démonstration. Si $|f|$ admet un maximum local au point z_0, il existe $r_0 > 0$ tel que le disque ouvert $\mathrm{D}(z_0, r_0)$ soit contenu dans Ω et

$$|f(z)| \leq |f(z_0)|$$

pour tout $z \in \mathrm{D}(z_0, r_0)$. En multipliant f par un nombre complexe de module 1, on peut supposer que $f(z_0)$ est réel positif. Posons $f(z) = \mathrm{U}(z) + i\mathrm{V}(z)$, avec U, V réelles. Pour tout r tel que $0 < r < r_0$ on peut appliquer la formule de Cauchy au cercle $\gamma_r(z_0)$ de rayon r centré au point z_0

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r(z_0)} \frac{f(w)}{w - z_0} \, dw = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + r\,\mathrm{e}^{i\theta}) \, d\theta.$$

En prenant la partie réelle et après une petite manipulation

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \big(\mathrm{U}(z_0) - \mathrm{U}(z_0 + r\,\mathrm{e}^{i\theta})\big) \, d\theta = 0.$$

Mais l'expression dans la parenthèse est continue en la variable θ, à valeurs ≥ 0, et puisque son intégrale sur $[0, 2\pi]$ est nulle on a $\mathrm{U}(z_0) = \mathrm{U}(z_0 + r\,\mathrm{e}^{i\theta})$ pour tout θ ; comme ce raisonnement est vrai pour tout r entre 0 et r_0, on en déduit que $\mathrm{U}(z) = \mathrm{U}(z_0)$ dans le disque $\mathrm{D}(z_0, r_0)$. Comme $\mathrm{U}^2(z) + \mathrm{V}^2(z) = |f(z)|^2 \leq |f(z_0)|^2 = \mathrm{U}^2(z_0) = \mathrm{U}^2(z)$ pour tout $z \in \mathrm{D}(z_0, r_0)$, il en résulte que $\mathrm{V} = 0$ dans ce disque, donc f est constante dans ce disque.

Corollaire. *Soient $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert non vide borné, f une fonction continue sur $\overline{\Omega}$, holomorphe dans Ω ; pour tout $z \in \Omega$ on a*

$$|f(z)| \leq \max\{|f(w)| : w \in \partial\Omega\}.$$

En raccourci : le maximum de $|f|$ est atteint *au bord* (le bord, ou *frontière* de l'ouvert Ω est noté $\partial\Omega$).

Démonstration. Puisque $|f|$ est continue sur le compact non vide $\overline{\Omega}$, on peut trouver $z_1 \in \overline{\Omega}$ tel que $|f(z_1)|$ soit le maximum de $|f|$ sur $\overline{\Omega}$. Si on sait que $z_1 \in \partial\Omega$ le résultat est obtenu. Si $z_1 \in \Omega$, on va trouver un autre point z_0 tel que $z_0 \in \partial\Omega$ et $f(z_0) = f(z_1)$, ce qui terminera la preuve.

Si $z_1 \in \Omega$ et si $|f|$ y atteint son maximum, on sait que f est constante au voisinage de z_1 par le principe du maximum. Posons

$$\mathrm{W} = \{w \in \Omega : f(w) = f(z_1),\ f^{(n)}(w) = 0\ \forall n \geq 1\}.$$

Le point z_1 est dans W ; l'ensemble W est fermé dans Ω, mais il est aussi ouvert (raisonner avec la série de Taylor de f en un point $w_0 \in \mathrm{W}$).

Traçons une demi-droite D issue de z_1 et soit z_0 le premier point de $\mathrm{D} \setminus \mathrm{W}$ que l'on rencontre en s'éloignant de z_1 (z_0 existe parce que W est borné). On a $f = f(z_1)$ sur W donc $f(z_0) = f(z_1)$ par continuité. On ne peut pas avoir $z_0 \in \Omega$ puisque W est fermé dans Ω et que $z_0 \in \overline{\mathrm{W}} \setminus \mathrm{W}$. On a donc $z_0 \in \partial\Omega$, et la valeur maximale $|f(z_0)| = |f(z_1)|$ de $|f|$ est bien atteinte au bord de Ω.

Corollaire. *Soient $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert non vide différent de $\mathbb{C}$, f une fonction continue sur $\overline{\Omega}$, holomorphe dans Ω, et qui tend vers 0 quand $|z| \to +\infty$. Pour tout $z \in \Omega$ on a*

$$|f(z)| \leq \max\{|f(w)| : w \in \partial\Omega\}.$$

Démonstration. Si $f = 0$ c'est trivial ; sinon soit z_0 tel que $a = |f(z_0)| > 0$. Soit $\mathrm{R} > |z_0|$ tel que $|z| \geq \mathrm{R}$ implique $|f(z)| < a$. Posons $\Omega_\mathrm{R} = \Omega \cap \mathrm{B}(0, \mathrm{R})$; cet ouvert est non vide, borné ; le bord de Ω_R est formé d'une partie du bord de Ω et d'une partie du cercle de rayon R. D'après le résultat précédent, le maximum de $|f|$ sur $\overline{\Omega_\mathrm{R}}$ est atteint sur le bord de Ω_R, et ça ne peut pas être sur la partie cercle de rayon R puisque $|f(w)| < |f(z_0)|$ lorsque $|w| = \mathrm{R}$. On en déduit le résultat cherché.

Corollaire. *Soit $\mathrm{S} = \{z \in \mathbb{C} : 0 < \operatorname{Re} z < 1\}$ et soit f une fonction continue sur $\overline{\mathrm{S}}$, holomorphe dans S. Si f est* **bornée** *sur S, on a pour tout $z \in \mathrm{S}$*

$$|f(z)| \leq \sup\{|f(w)| : w \in \partial\mathrm{S}\}.$$

On trouve ce corollaire chez Rudin, théorème 12.8. Le bord de la bande S est formé des deux droites $\mathrm{Re}\, z = 0$ et $\mathrm{Re}\, z = 1$. Il faut savoir que le résultat est **faux** si aucune hypothèse n'est ajoutée à l'holomorphie-continuité de f : il existe f holomorphe dans S, de module 1 sur ∂S, et qui n'est pas bornée dans S (voir exercice 10.3).

Démonstration. Pour tout $\varepsilon > 0$ on pose

$$\forall z \in \overline{\mathrm{S}}, \quad g_\varepsilon(z) = \mathrm{e}^{\varepsilon z^2} f(z).$$

On note que $|\,\mathrm{e}^{\varepsilon(x+iy)^2}\,| = \mathrm{e}^{\varepsilon(x^2-y^2)} \le \mathrm{e}^{\varepsilon(1-y^2)}$ si $z = (x+iy) \in \mathrm{S}$. Puisque f est bornée sur S, la fonction g_ε tend vers 0 à l'infini, donc par le corollaire précédent

$$|g_\varepsilon(z)| \le \max\{|\,\mathrm{e}^{\varepsilon w^2} f(w)| : \mathrm{Re}\, w = 0, 1\} \le \mathrm{e}^\varepsilon \sup\{|f(w)| : w \in \partial\mathrm{S}\}.$$

En faisant tendre ε vers 0, on obtient le résultat.

On voit qu'on n'avait pas vraiment besoin de savoir que f était bornée pour appliquer la démonstration précédente : il suffisait de savoir que $\mathrm{e}^{-\varepsilon\, y^2} f(x+iy)$ tend vers 0 quand $z = x + iy$ tend vers l'infini dans S, pour tout $\varepsilon > 0$. Voir l'exercice 10.3 sur cette question, et Rudin, section du chapitre 12 sur Phragmen-Lindelöf.

Corollaire : lemme des trois droites. *Soit f une fonction continue sur $\overline{\mathrm{S}}$, holomorphe dans $\mathrm{S} = \{z \in \mathbb{C} : 0 < \mathrm{Re}\, z < 1\}$, et* **bornée** *sur* S *; posons pour $x \in [0, 1]$*

$$\mathrm{M}_x = \sup\{|f(x+iy)| : y \in \mathbb{R}\}.$$

Pour tout $\theta \in]0, 1[$ on a

$$\mathrm{M}_\theta \le \mathrm{M}_0^{1-\theta} \mathrm{M}_1^\theta.$$

Pour ce lemme classique et la suite de notre développement, voir Zuily-Queffélec, chapitre XI, 2.4 et la suite (p. 467 et suivantes).

Démonstration. On choisit a réel de façon que $\mathrm{e}^{a(x-\theta)}\, \mathrm{M}_x$ prenne la même valeur en $x = 0$ et $x = 1$. Il faut que $\mathrm{e}^a = \mathrm{M}_0/\mathrm{M}_1$. Posons $g(z) = \mathrm{e}^{a(z-\theta)} f(z)$; sur chacune des droites du bord, $j = 0, 1$

$$|g(j+iy)| = \mathrm{e}^{a(j-\theta)}\, |f(j+iy)| \le (\mathrm{M}_0/\mathrm{M}_1)^{j-\theta} \mathrm{M}_j = \mathrm{M}_0^{1-\theta} \mathrm{M}_1^\theta.$$

Par ailleurs, la remarque

$$|g(\theta+iy)| = |\,\mathrm{e}^{aiy} f(\theta+iy)| = |f(\theta+iy)|$$

et le corollaire précédent appliqué à g terminent la preuve.

Interpolation d'opérateurs linéaires : le théorème de Riesz-Thorin

Soit $(\mathrm{X}, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré ; désignons par $\mathrm{E}(\mathrm{X}, \mathcal{A}, \mu)$ l'espace vectoriel des fonctions f sur X qui sont $\mathcal{A}$-étagées et telles que $\mu\{f \ne 0\} < +\infty$; nous les appellerons *fonctions simples*. Les fonctions simples sont dans tous les espaces $\mathrm{L}_p(\mathrm{X}, \mathcal{A}, \mu)$. Notons $\mathrm{E}_p(\mathrm{X}, \mathcal{A}, \mu)$ l'espace E muni de la norme de $\mathrm{L}_p(\mathrm{X}, \mathcal{A}, \mu)$.

Théorème. *Soient $(\mathrm{X}, \mathcal{A}, \mu)$ et $(\mathrm{Y}, \mathcal{B}, \nu)$ deux espaces mesurés ; on suppose donnée une application linéaire* T *de $\mathrm{E}(\mathrm{X}, \mathcal{A}, \mu)$ à valeurs dans l'espace des ν-classes de fonctions mesurables sur $(\mathrm{Y}, \mathcal{B})$, et p_0, p_1, q_0, q_1 tels que $1 \le p_0, p_1, q_0, q_1 \le +\infty$ et $p_0 < +\infty$. On suppose que* *l'opérateur* T *est borné de* $E_{p_0}(X, \mathcal{A}, \mu)$ *dans* $L_{q_0}(Y, \mathcal{B}, \nu)$ *et* T *est borné aussi de* $E_{p_1}(X, \mathcal{A}, \mu)$ *dans* $L_{q_1}(Y, \mathcal{B}, \nu)$.

Soient $\theta \in]0,1[$ *et* p, q *définis par* $1/p = (1-\theta)/p_0 + \theta/p_1$, $1/q = (1-\theta)/q_0 + \theta/q_1$ *; l'opérateur* T *se prolonge en opérateur borné de* $L_p(X, \mathcal{A}, \mu)$ *dans* $L_q(Y, \mathcal{B}, \nu)$ *et*

$$\|T\|_{p,q} \le \|T\|_0^{1-\theta} \, \|T\|_1^{\theta}.$$

Le théorème est dû à Marcel Riesz (1926) qui s'en est servi pour montrer que les projecteurs $f \to S_N f$ donnés par les sommes de Fourier sont uniformément bornés dans $L_p(\mathbb{T})$ quand $1 < p < +\infty$; la démonstration qui suit, et qui utilise essentiellement le lemme des trois droites, est due à O. Thorin (vers 1940), d'où ce nom de Riesz-Thorin que l'on donne habituellement de nos jours à ce théorème. Rudin (Ana. R. et Comp.) n'énonce pas le théorème, mais se sert de sa démonstration pour en déduire la conséquence qui suit (Hausdorff-Young) ; Zuily-Queffélec traitent ce théorème, peut-être pas de la façon la plus simple, parce qu'ils tiennent à présenter la notion de fonction holomorphe à valeurs dans un espace de Banach.

Expliquons rapidement la stratégie de la démonstration. Si $q < +\infty$, le dual de L_q est L_r, $1/r = 1 - 1/q$. Pour contrôler la norme L_q de $T(f)$ quand $f \in L_p$, on va contrôler $\int_Y (Tf) g \, d\nu$, pour $g \in L_r$; on va introduire des f_z, g_z dépendant d'un paramètre complexe z dans la bande S, de façon que $F : z \to \int_Y (Tf_z) g_z \, d\nu$ soit holomorphe bornée dans S, égale à $\int_Y (Tf) g \, d\nu$ au point θ ; pour pouvoir majorer $|F(\theta)|$ en appliquant le lemme des trois droites, les choses seront faites de façon que l'on puisse contrôler F sur les deux droites verticales qui bordent le domaine S. Pour cela, on fera en sorte que $|f_z|^{p_j} = |f|^p$, avec $j = 0, 1$, lorsque $\operatorname{Re} z = j$ (et une chose analogue pour g_z) ; on aura donc $f_z \in L_{p_j}$ sur les bords, ce qui permettra d'appliquer l'hypothèse du théorème.

Puisque $p_0 < +\infty$ et $\theta < 1$, on a $1 \le p < +\infty$, et dans ce cas l'espace $E(X, \mathcal{A}, \mu)$ est dense dans $L_p(X, \mathcal{A}, \mu)$. Pour pouvoir définir T par prolongement, de $L_p(X, \mathcal{A}, \mu)$ dans $L_q(Y, \mathcal{B}, \nu)$, il suffit de trouver une constante C telle que

$$\forall f \in E(X, \mathcal{A}, \mu), \quad \|Tf\|_q \le C \, \|f\|_p.$$

Dans ce cas le prolongement vérifiera $\|T\|_{p,q} \le C$. Nous voulons donc précisément montrer l'inégalité précédente avec la constante $C = \|T\|_0^{1-\theta} \, \|T\|_1^{\theta}$.

On désignera systématiquement par r l'exposant conjugué de q, ainsi $1/r = 1 - 1/q$, $1/r_0 = 1 - 1/q_0$ et $1/r_1 = 1 - 1/q_1$. On vérifie que pour toute fonction $h \in L_q(Y, \mathcal{B}, \nu)$,

$$\|h\|_q = \sup\{\Bigl|\int_Y hg \, d\nu\Bigr| : g \in E(Y, \mathcal{B}, \nu), \ \|g\|_r \le 1\}$$

(même si $r = +\infty$, auquel cas E n'est pas toujours dense dans L_∞, ou si $r = 1$, cas où $L_r = L_1$ n'est pas *tout* le dual de $L_q = L_\infty$).

Nous aurons donc atteint le but si nous montrons que : pour toute fonction simple f sur X telle que $\|f\|_p \le 1$ et toute fonction simple g sur Y, telle que $\|g\|_r \le 1$, nous avons

$$\Bigl|\int_Y (Tf) g \, d\nu\Bigr| \le \|T\|_0^{1-\theta} \, \|T\|_1^{\theta}.$$

On considère une fonction simple f sur $(\mathrm{X}, \mathcal{A}, \mu)$ et une fonction simple g sur $(\mathrm{Y}, \mathcal{B}, \nu)$; on les écrira sous la forme

$$f = \sum_{i=1}^{m} u_i\, c_i\, \mathbf{1}_{\mathrm{A}_i}, \quad g = \sum_{j=1}^{n} v_j\, d_j\, \mathbf{1}_{\mathrm{B}_j},$$

où les u_i, v_j sont des complexes de module un, les c_i, d_j des réels > 0, les (A_i) des ensembles de $\mathcal{A}$, deux à deux disjoints et tels que $\mu(\mathrm{A}_i) < +\infty$, les (B_j) des ensembles de $\mathcal{B}$, deux à deux disjoints et tels que $\nu(\mathrm{B}_j) < +\infty$.

On introduit deux fonctions affines a et b, telles que $a(0) = 1/p_0$, $a(1) = 1/p_1$, $b(0) = 1/r_0 = 1 - 1/q_0$, $b(1) = 1/r_1 = 1 - 1/q_1$, que l'on prolonge naturellement à la variable complexe $z = x + iy$,

$$a(z) = (1 - z)/p_0 + z/p_1, \quad b(z) = (1 - z)/r_0 + z/r_1.$$

On pose ensuite

$$f_z = \sum_{i=1}^{m} u_i\, c_i^{p\,a(z)} \mathbf{1}_{\mathrm{A}_i}, \quad g_z = \sum_{j=1}^{n} v_j\, d_j^{r\,b(z)} \mathbf{1}_{\mathrm{B}_j},$$

et on note que

$$|f_z| = \sum_{i=1}^{m} c_i^{p\ \mathrm{Re}\, a(z)} \mathbf{1}_{\mathrm{A}_i} = |f|^{p\,a(x)}, \quad |g_z| = \sum_{j=1}^{n} d_j^{r\ \mathrm{Re}\, b(z)} \mathbf{1}_{\mathrm{B}_j} = |g|^{r\,b(x)}.$$

On voit que f_z et g_z sont encore des fonctions simples, donc elles appartiennent à tous les espaces L_s. Notons que $p\,a(\theta) = 1$, $r\,b(\theta) = r(1 - 1/q) = 1$, de sorte que $f_\theta = f$ et $g_\theta = g$. Par construction, $p_0 a(0) = p_1 a(1) = 1$ et $r_0 b(0) = r_1 b(1) = 1$.

Notre objectif est de contrôler la valeur de $\int_{\mathrm{Y}} \mathrm{T}(f) g\, d\nu$, et nous le ferons en faisant apparaître cette quantité comme la valeur au point θ d'une fonction holomorphe bornée sur la bande ouverte $\mathrm{S} = \{z : 0 < \mathrm{Re}\, z < 1\}$, et continue sur la bande fermée. Posons pour tout $z \in \mathbb{C}$

$$\mathrm{F}(z) = \int_{\mathrm{Y}} \mathrm{T}(f_z) g_z\, d\nu = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} u_i\, v_j\, c_i^{p\,a(z)}\, d_j^{r\,b(z)} t_{i,j}$$

où $t_{i,j} = \int_{\mathrm{Y}} \mathrm{T}(\mathbf{1}_{\mathrm{A}_i}) \mathbf{1}_{\mathrm{B}_j}\, d\nu$. La dernière expression montre clairement que F est holomorphe (sur $\mathbb{C}$) et bornée sur la bande S. On a bien que $\mathrm{F}(\theta) = \int_{\mathrm{Y}} \mathrm{T}(f) g\, d\nu$. Par le lemme des trois droites on va contrôler $\mathrm{F}(\theta)$ au moyen des sup M_0 et M_1 de $|\mathrm{F}|$ sur les deux verticales $x = 0$ et $x = 1$,

$$j = 0, 1, \quad \mathrm{M}_j = \sup\{|\mathrm{F}(j + iy)| : y \in \mathbb{R}\}.$$

Lorsque $x = 0$, on a $z = iy$ et

$$|f_z|^{p_0} = |f|^{p_0 p\, a(0)} = |f|^p, \quad |g_z|^{r_0} = |g|^{r_0 r\, b(0)} = |g|^r.$$

On borne $|\mathrm{F}(0 + iy)| = |\int_{\mathrm{Y}} \mathrm{T}(f_z) g_z\, d\nu|$ par Hölder, puisque $1/q_0 + 1/r_0 = 1$

$$\Bigl|\int_{\mathrm{Y}} \mathrm{T}(f_z) g_z\, d\nu\Bigr| \le \|\mathrm{T}(f_z)\|_{q_0} \|g_z\|_{r_0} \le \|\mathrm{T}\|_0\, \|f_z\|_{p_0}\, \|g_z\|_{r_0}$$

(on a utilisé la norme $\|\mathrm{T}\|_0$ de T, agissant de E_{p_0} dans L_{q_0}), ce qui donne

$$\mathrm{M}_0 \le \|\mathrm{T}\|_0 \, \|f\|_p^{1/p_0} \, \|g\|_r^{1/r_0}.$$

Lorsque $x = 1$, on a $z = 1 + iy$ et

$$|f_z|^{p_1} = |f|^{p_1 p \, a(1)} = |f|^p, \quad |g_z|^{r_1} = |g|^{r_1 r \, b(1)} = |g|^r.$$

et on bornera $| \int_{\mathrm{Y}} \mathrm{T}(f_z) g_z \, d\nu| \le \|\mathrm{T}\|_1 \, \|f_z\|_{p_1} \, \|g_z\|_{r_1}$ donc

$$\mathrm{M}_1 \le \|\mathrm{T}\|_1 \, \|f\|_p^{1/p_1} \, \|g\|_r^{1/r_1}.$$

Le lemme des trois droites donne

$$|\mathrm{F}(\theta)| \le \mathrm{M}_0^{1-\theta} \mathrm{M}_1^{\theta} \le \|\mathrm{T}\|_0^{1-\theta} \, \|\mathrm{T}\|_1^{\theta} \, \|f\|_p \, \|g\|_r.$$

On a déjà dit qu'à partir de là on obtient

$$\|\mathrm{T}(f)\|_q \le \|\mathrm{T}\|_0^{1-\theta} \, \|\mathrm{T}\|_1^{\theta} \, \|f\|_p.$$

L'opérateur T est donc borné sur le sous-espace dense des fonctions simples f, ce qui permet de l'étendre en un opérateur borné de L_p dans L_q.

Une application : Hausdorff-Young

On considère la transformation de Fourier sur $\mathrm{L}_1(\mathbb{R}^d) \cap \mathrm{L}_2(\mathbb{R}^d)$; on sait qu'elle est de norme 1 de L_1 dans L_∞, et de norme $(2\pi)^{d/2}$ de L_2 dans lui-même. Par interpolation, on obtient que Fourier peut s'étendre en opérateur borné de $\mathrm{L}_p(\mathbb{R}^d)$ dans $\mathrm{L}_q(\mathbb{R}^d)$, pour tout $1 \le p \le 2$, et avec $1/q + 1/p = 1$. Le résultat de continuité date de 1912–1923, mais la valeur exacte de la norme de cet opérateur de L_p dans L_q n'a été donnée qu'en 1975 !

On peut appliquer le même argument dans le contexte des séries de Fourier : en considérant les applications de norme un de $\ell_1(\mathbb{Z})$ et $\ell_2(\mathbb{Z})$ dans $\mathrm{L}_\infty(\mathbb{T})$ et $\mathrm{L}_2(\mathbb{T})$ respectivement, on obtiendra si $1 < p < 2$ et $1/q = 1 - 1/p$ les inégalités

$$\Bigl(\int_0^{2\pi} \bigl|\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n \, \mathrm{e}^{in\theta}\bigr|^q \, \frac{d\theta}{2\pi}\Bigr)^{1/q} \le \bigl(\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n|^p\bigr)^{1/p}$$

pour tous coefficients (c_n), ou bien en considérant les applications de norme un de $\mathrm{L}_1(\mathbb{T})$ et $\mathrm{L}_2(\mathbb{T})$ dans $\ell_\infty(\mathbb{Z})$ et $\ell_2(\mathbb{Z})$ on aura que

$$\bigl(\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)|^q\bigr)^{1/q} \le \Bigl(\int_0^{2\pi} |f(\theta)|^p \, \frac{d\theta}{2\pi}\Bigr)^{1/p}$$

pour toute $f \in \mathrm{L}_p(0, 2\pi)$.

Prépa. Agrég. écrit d'Analyse, séance n^{o} 11, Mercredi 20 Décembre 2000.

Autour de la représentation conforme

Trois références bibliographiques :

[Car] H. Cartan, Théorie élémentaire des fonctions analytiques d'une ou plusieurs variables complexes

[Cha] S.D. Chatterji, Cours d'Analyse (volume 2)

[Rud] W. Rudin, Analyse réelle et complexe (troisième édition ; avec notes historiques par J. Dhombres), Dunod.

Domaines simplement connexes

Voir surtout [Car] II.1.6, II.1.7, ou [Rud] 10.38, 13.11, [Cha] 7.8.

Avant de vraiment commencer, rappelons que l'ensemble C des points z d'un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}$ au voisinage desquels une fonction f holomorphe dans Ω est constante, est un ensemble à la fois ouvert et fermé dans Ω. Lorsque cet ouvert Ω est *connexe*, on a donc $\mathrm{C} = \Omega$ (et f est constante sur Ω) ou bien $\mathrm{C} = \emptyset$. Ce fait sera appliqué à plusieurs reprises dans la suite. En particulier, si Ω est connexe et si $f' = 0$ dans Ω, alors f est constante dans Ω.

On dit que l'ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}$ est *simplement connexe* si Ω est connexe et si tout chemin fermé γ contenu dans Ω est homotope dans Ω à un chemin constant (homotope en tant que *chemin fermé*) ; autrement dit, pour toute application continue γ de $[0,1]$ dans Ω, telle que $\gamma(0) = \gamma(1)$, il existe $\delta : [0,1]^2 \to \Omega$ continue telle que $\delta(t,0) = \gamma(t)$ pour tout t, $\delta(0,s) = \delta(1,s)$ pour tout s et $\delta(t,1) = x_1$ pour tout t.

On a donc une déformation continue du chemin fermé γ en une famille de chemins *fermés* γ_s contenus dans Ω, famille paramétrée par $s \in [0,1]$, et telle que $\gamma = \gamma_0$ et que γ_1 soit un chemin réduit à un point. Pour chaque $s \in [0,1]$, le chemin γ_s est le chemin $t \in [0,1] \to \delta(t,s) \in \Omega$.

Si Ω est homéomorphe à un simplement connexe, il est lui-même simplement connexe (évident).

Les ensembles étoilés sont connexes, et aussi simplement connexes : en effet, si Ω est étoilé par rapport à x_1, il suffit de poser

$$\delta(t,s) = (1-s)\gamma(t) + s x_1$$

pour tous $t, s \in [0,1]$.

Quand Ω est simplement connexe, on a

$$\int_\gamma f(w)\,dw = 0$$

pour tout chemin fermé γ contenu dans Ω et toute fonction f holomorphe dans Ω. En effet, l'intégrale d'une fonction holomorphe sur un chemin fermé est invariante par déformation continue du chemin fermé, et l'intégrale sur le chemin constant est nulle.

Il en résulte que quand Ω est simplement connexe, toute fonction f holomorphe dans Ω admet des primitives dans Ω : on fixe $z_0 \in \Omega$ et on pose

$$\mathrm{F}(z) = \int_{\gamma_z} f(w)\,dw$$

où γ_z est n'importe quel chemin dans Ω tel que $\gamma(0) = z_0$ et $\gamma(1) = z$. La nullité de l'intégrale de $f(w)\,dw$ sur les chemins fermés contenus dans Ω implique que la valeur de $\mathrm{F}(z)$ ne dépend pas du chemin γ_z, et cette remarque permet, comme d'habitude, de montrer que F est une primitive de f sur Ω.

Proposition 11.1. *Si Ω est simplement connexe, et si f holomorphe sur Ω ne s'annule pas sur Ω, il existe une fonction g holomorphe sur Ω telle que $f = \mathrm{e}^g$, et il existe h holomorphe sur Ω telle que $f = h^2$.*

Démonstration. Il suffit de prendre pour fonction holomorphe g une primitive convenable de la fonction holomorphe f'/f dans Ω : la dérivée de $\varphi = f\,\mathrm{e}^{-g}$ est alors nulle, donc cette fonction φ est constante (l'ouvert Ω est connexe), et si on fixe $z_0 \in \Omega$ on aura $f(z) = f(z_0)\,\mathrm{e}^{-g(z_0)}\,\mathrm{e}^{g(z)}$ pour tout $z \in \Omega$. Il suffit de choisir la valeur de $g(z_0)$ de façon que $\mathrm{e}^{g(z_0)} = f(z_0)$, ce qui est possible parce que $f(z_0) \neq 0$ d'après l'hypothèse.

Pour h, prendre $\mathrm{e}^{g/2}$.

Image ouverte

Voir surtout [Rud] 10.30, 10.32, ou [Car] VI.1, [Cha] 7.2.3.

Proposition 11.2. *Soit f holomorphe au voisinage de z_0.*

1. *Si $f'(z_0) \neq 0$, il existe un voisinage ouvert V de z_0 et un disque ouvert $\mathrm{D} = \mathrm{D}(f(z_0), r)$ tels que f soit bijective de V sur D.*

2. *Si $f'(z_0) = 0$ et si f n'est pas constante au voisinage de z_0, il existe un entier $m \geq 2$, un voisinage ouvert V de z_0 et un disque ouvert $\mathrm{D} = \mathrm{D}(f(z_0), r)$, $r > 0$ tels que f soit surjective de V sur D, et que tout point $\zeta \neq f(z_0)$ de D soit l'image d'exactement m points distincts de V.*

Démonstration. Supposons d'abord $f'(z_0) \neq 0$. Considérons f comme une application φ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$,

$$\varphi(x, y) = \bigl(\mathrm{Re}\, f(x+iy), \mathrm{Im}\, f(x+iy)\bigr) \in \mathbb{R}^2.$$

L'application φ est de classe C^1 parce que f est holomorphe, et le déterminant jacobien de φ au point z_0 vaut $|f'(z_0)|^2 \neq 0$ (exercice). D'après le théorème d'inversion locale, on peut trouver des voisinages ouverts V_0 de z_0 et V_1 de $f(z_0)$ tels que f soit bijective de V_0 sur V_1 ; si on veut, on peut remplacer V_1 par un disque ouvert $\mathrm{D} = \mathrm{D}(f(z_0), r)$ plus petit, et V_0 par $\mathrm{V} = f^{-1}(\mathrm{D})$.

Si $f'(z_0) = 0$ sans que f soit constante au voisinage, on peut écrire la série de Taylor de f au point z_0, convergente pour $|h|$ assez petit

$$f(z_0 + h) - f(z_0) = a_m h^m + \cdots + a_n h^n + \cdots = a_m h^m \Bigl(1 + \frac{a_{m+1}}{a_m}\, h + \cdots\Bigr)$$

avec $a_m \neq 0$ et $m \geq 2$. Si on pose $\mathrm{F}(h) = f(z_0 + h) - f(z_0)$, on a $\mathrm{F}(h) = a h^m g(h)$, avec $a = a_m \neq 0$, g définie et holomorphe dans un voisinage de 0 et $g(0) = 1$. On peut trouver un voisinage ouvert V_0 de 0 dans lequel $|g - 1| < 1$, c'est à dire que g prend ses valeurs dans le disque ouvert $\mathrm{D}(0, 1)$; dans ce disque qui ne contient pas 0 on peut définir une détermination de $z \to \ln z$ (tout simplement, posons pour u complexe tel que $|u| < 1$

$$-\ln(1 - u) = \sum_{n \geq 1} u^n / n\,) \,;$$

on peut trouver b tel que $b^m = a$, et on aura pour $h \in \mathrm{V}_0$

$$\mathrm{F}(h) = \big(b\,h\,\mathrm{e}^{m^{-1}\ln g(h)}\big)^m = \varphi(h)^m$$

où

$$\varphi(h) = b\,h\,\mathrm{e}^{m^{-1}\ln g(h)}\,.$$

La fonction φ est holomorphe dans V_0 et $\varphi'(0) = b \neq 0$ par construction. D'après la première partie on peut trouver un disque $\mathrm{D}_1 = \mathrm{D}(\varphi(0), \rho) = \mathrm{D}(0, \rho)$ et un voisinage ouvert V_1 de 0 tel que φ soit bijective de V_1 sur D_1. Il est alors clair que l'image de V_1 par $\mathrm{F} = \varphi^m$ est $\mathrm{D}(0, \rho^m)$, et que chaque valeur $\zeta \neq 0$ dans $\mathrm{D}(0, \rho^m)$ est atteinte m fois par F (prendre les m racines $m$ièmes $z_1, \ldots, z_m$ de ζ dans $\mathrm{D}(0, \rho)$, puis les m nombres complexes $h_j \in \mathrm{V}_1$ tels que $\varphi(h_j) = z_j$, $j = 1, \ldots, m$). En revenant à f, on obtient que l'image de $\mathrm{V} = z_0 + \mathrm{V}_1$ par f est $\mathrm{D} = \mathrm{D}(f(z_0), \rho^m)$ et que chaque valeur $\zeta \neq f(z_0)$ est atteinte m fois.

Corollaire 11.3. *Si f est holomorphe sur un ouvert Ω et n'est constante au voisinage d'aucun point de Ω, alors l'image $f(\Omega)$ est ouverte dans $\mathbb{C}$.*

Démonstration. Soit w_0 un point de l'image $f(\Omega)$; il existe $z_0 \in \Omega$ tel que $w_0 = f(z_0)$, et par hypothèse f n'est pas constante au voisinage de z_0. La proposition précédente 11.2 implique que l'image de f contient un disque ouvert autour de w_0, pour tout $w_0 \in f(\Omega)$, donc l'image $f(\Omega)$ est ouverte.

Corollaire 11.4. *Si f est holomorphe et* injective *sur un ouvert Ω, alors f' ne s'annule pas dans Ω.*

Démonstration. La fonction f n'est constante au voisinage d'aucun point puisqu'elle est injective. Si f' s'annulait au point $z_0 \in \Omega$, la conclusion **2** de la proposition 11.2 s'appliquerait, et cette conclusion dit clairement que f ne serait pas injective.

Notons une conséquence du corollaire précédent : si f est une bijection holomorphe de Ω_1 sur Ω_2, sa dérivée ne s'annule pas et il en résulte que l'application réciproque f^{-1} est holomorphe : si $z_2 = f(z_1) \in \Omega_2$, la dérivée de f^{-1} au point z_2 est égale à $1/f'(z_1)$.

Bijections holomorphes du disque unité

Voir [Rud] 12.2 et la suite, ou [Cha] 7.3.

On désigne par U le disque unité ouvert du plan complexe,

$$\mathrm{U} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}.$$

On va voir qu'on peut déterminer toutes les bijections holomorphes de U sur U. Elles seront un outil très utile pour la démonstration du théorème de la représentation conforme.

Lemme 11.5 : variante du lemme de Schwarz. *Soit f une fonction holomorphe de* U *dans* U *; on a $|f'(0)| < 1$, sauf s'il existe un nombre $\lambda \in \mathbb{C}$ avec $|\lambda| = 1$ tel que $f(z) = \lambda z$ pour tout $z \in$* U.

Démonstration. On écrit la série de Taylor de f à l'origine,

$$f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n\, z^n.$$

Pour $r < 1$ et $\theta \in [0, 2\pi]$ on a

$$f(r\,\mathrm{e}^{i\theta}) = \sum_{n\geq 0} a_n\, r^n\, \mathrm{e}^{in\theta}$$

et on obtient en calculant le carré de la norme $\mathrm{L}_2([0, 2\pi])$ de la fonction $\theta \to f(r\,\mathrm{e}^{i\theta})$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} r^{2n}\, |a_n|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(r\,\mathrm{e}^{i\theta})|^2\, d\theta < 1,$$

(parce que $|f(z)| < 1$ pour tout $z \in \mathrm{U}$) ce qui donne quand $r \to 1$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|^2 \leq 1.$$

On a donc $|f'(0)| = |a_1| \leq 1$; si $|a_1| = 1$, on aura nécessairement $a_n = 0$ pour tout $n \neq 1$, donc $f(z) = a_1 z$ pour tout $z \in \mathrm{U}$.

Corollaire 11.6. *Si* F *est une bijection holomorphe de* U *sur* U *telle que* $\mathrm{F}(0) = 0$, *il existe* λ *complexe de module un tel que* $\mathrm{F}(z) = \lambda z$ *pour tout* $z \in \mathrm{U}$.

Démonstration. Soit G la bijection réciproque de F ; puisque F est holomorphe injective, sa dérivée ne s'annule pas (corollaire 11.4), donc G est holomorphe, et sa dérivée en 0 est égale à $1/\mathrm{F}'(0)$; comme on doit avoir à la fois $|\mathrm{F}'(0)| \leq 1$ et $|\mathrm{G}'(0)| \leq 1$ en appliquant le lemme précédent 11.5 à F et à G, on en déduit $|\mathrm{F}'(0)| = 1$ et le résultat voulu découle de la deuxième partie du lemme 11.5.

On va maintenant présenter un objet crucial, les *transformations de Möbius* du disque unité. Soit $a \in \mathrm{U}$; on pose

$$\forall z \in \mathrm{U}, \quad \varphi_a(z) = \frac{z - a}{1 - \overline{a}\, z}.$$

On va montrer que φ_a est une bijection holomorphe de U sur lui-même.

Montrons d'abord que $\varphi_a(\mathrm{U}) \subset \mathrm{U}$. On écrit

$$|z - a|^2 = (z - a)(\overline{z} - \overline{a}), \quad |1 - \overline{a}z|^2 = (1 - \overline{a}z)(1 - a\overline{z})$$

et en développant et simplifiant on obtient pour $z \in \mathrm{U}$

$$|1 - \overline{a}z|^2 - |z - a|^2 = 1 + |a|^2|z|^2 - |a|^2 - |z|^2 = (1 - |a|^2)(1 - |z|^2) > 0.$$

On a donc $|z - a| < |1 - \overline{a}z|$ et l'application φ_a envoie fU dans U. Lorsque z est de module un, on peut écrire $z = \mathrm{e}^{i\theta}$ et alors

$$|z - a| = |\,\mathrm{e}^{i\theta} - a| = |1 - a\,\mathrm{e}^{-i\theta}\,| = |1 - \overline{a}\ \mathrm{e}^{i\theta}\,| = |1 - \overline{a}\, z|$$

ce qui montre que $|\varphi_a(z)| = 1$ lorsque $|z| = 1$; à la place du calcul explicite qui précède, on aurait pu appliquer le principe du maximum pour déduire que $|\varphi_a| \leq 1$ à l'intérieur du disque, et même $|\varphi_a| < 1$ dans le disque ouvert (si le maximum du module était atteint en un point intérieur, la fonction φ_a serait constante, ce qui n'est visiblement pas le cas).

On vérifie par le calcul que $\varphi_a \circ \varphi_{-a}$ est l'application identique, ainsi que $\varphi_{-a} \circ \varphi_a$; il en résulte que φ_a est une bijection holomorphe de U, d'inverse φ_{-a}.

Corollaire 11.7. *Si $a \in \mathrm{U}$ et si F est une bijection holomorphe de U sur U telle que $\mathrm{F}(a) = 0$, il existe λ de module un tel que*

$$\mathrm{F}(z) = \lambda \, \frac{z - a}{1 - \overline{a}\, z}$$

pour tout $z \in \mathrm{U}$.

Démonstration. L'application $\mathrm{F} \circ \varphi_{-a}$ est une bijection de U sur U qui envoie 0 sur 0, donc d'après le corollaire 11.6 il existe λ de module un tel que $\mathrm{F}(\varphi_{-a}(w)) = \lambda \, w$ pour tout $w \in \mathrm{U}$, d'où le résultat en prenant $w = \varphi_a(z)$, $z \in \mathrm{U}$.

Familles normales

Voir [Car] V.4 ; [Rud] 14.5 et la suite, [Cha] 7.6.

Lemme 11.8. *Si une fonction f holomorphe sur un disque ouvert $\mathrm{D} = \mathrm{D}(z_0, r_0)$ est telle que $|f| \le 1$ sur D, alors $r_0^k \, |f^{(k)}(z_0)| \le k!$ pour tout $k \ge 0$.*

Démonstration. Pour tout $r < r_0$ les inégalités de Cauchy permettent de majorer les coefficients (a_k) de la série de Taylor de f au point z_0,

$$|a_k| = \Bigl| \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} \Bigr| \le \frac{1}{r^k}$$

pour tout $k \ge 0$, d'où le résultat en faisant tendre r vers r_0.

Proposition 11.9. *On suppose que $(f_n)_{n \ge 0}$ est une suite de fonctions holomorphes sur un disque ouvert $\mathrm{D} = \mathrm{D}(z_0, r_0)$, telle que pour tout entier $n \ge 0$ et tout $z \in \mathrm{D}$ on ait $|f_n(z)| \le 1$ et telle que*

$$a(k) = \lim_n \frac{f_n^{(k)}(z_0)}{k!}$$

existe pour tout $k \ge 0$. Alors la série entière

$$f(z_0 + h) = \sum_{k \ge 0} a(k) \, h^k$$

converge pour $|h| < r_0$, et (f_n) converge uniformément vers f sur tout compact $\mathrm{K} \subset \mathrm{D}$. Le même résultat de convergence uniforme vaut pour les suites dérivées $(f_n^{(k)})_{n \ge 0}$, pour tout $k \ge 0$.

Démonstration. On se ramène à $z_0 = 0$ pour simplifier l'écriture. Posons

$$a_n(k) = \frac{f_n^{(k)}(0)}{k!}$$

pour tout $k \ge 0$. On a $f_n(z) = \sum_{k \ge 0} a_n(k) z^k$ pour $|z| < r_0$, et le lemme précédent 11.8 donne $|a_n(k)| \, r_0^k \le 1$ pour tout $k \ge 0$, et aussi $|a(k)| \, r_0^k \le 1$ pour tout $k \ge 0$ à la limite, ce qui montre que le rayon de convergence de la série entière qui définit f est $\ge r_0$. Si K est un compact contenu dans D, on a $r = \max\{|z| : z \in \mathrm{K}\} < r_0$; pour tout $\varepsilon > 0$ donné, on peut choisir L tel que $\sum_{k > \mathrm{L}} (r/r_0)^k \le \varepsilon/3$, et pour tout $z \in \mathrm{K}$ et tout $n \ge 0$ on aura

$$\Bigl| \sum_{k > \mathrm{L}} a_n(k) \, z^k \Bigr| \le \sum_{k > \mathrm{L}} (r/r_0)^k \le \varepsilon/3, \quad \Bigl| \sum_{k > \mathrm{L}} a(k) \, z^k \Bigr| \le \sum_{k > \mathrm{L}} (r/r_0)^k \le \varepsilon/3.$$

Posons

$$\mathrm{P}_n(z) = \sum_{k=0}^{\mathrm{L}} a_n(k)\, z^k, \quad \mathrm{P}(z) = \sum_{k=0}^{\mathrm{L}} a(k)\, z^k.$$

D'après l'estimation précédente, on a $|f_n(z) - \mathrm{P}_n(z)| \le \varepsilon/3$ et $|f(z) - \mathrm{P}(z)| \le \varepsilon/3$ pour tout $z \in \mathrm{K}$; la convergence simple des coefficients $(a_n(k))$ vers $a(k)$, pour $k = 0, \ldots, \mathrm{L}$, implique qu'il existe n_0 tel que $|\mathrm{P}_n(z) - \mathrm{P}(z)| < \varepsilon/3$ pour tout $n \ge n_0$ et tout $z \in \mathrm{K}$. Finalement, on aura $|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon$ pour tout $n \ge n_0$ et tout $z \in \mathrm{K}$.

Le raisonnement est identique pour les dérivées ; par exemple, pour étudier la convergence des (f'_n), il suffit de choisir L tel que $\sum_{k>\mathrm{L}} k(r/r_0)^{k-1} \le \varepsilon/3$ et d'adapter la démonstration précédente.

Définition 11.10. On dit qu'une famille $\mathcal{F}$ de fonctions sur Ω est *localement bornée* sur Ω si pour tout $z \in \Omega$ il existe un voisinage ouvert $\mathrm{V} \subset \Omega$ de z et une constante M tels que $|f(z)| \le \mathrm{M}$ pour toute $f \in \mathcal{F}$ et tout $z \in \mathrm{V}$.

Théorème 11.11. *Soit $\mathcal{F}$ une famille localement bornée de fonctions holomorphes sur un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}$; pour toute suite $(f_n) \subset \mathcal{F}$, il existe une sous-suite qui converge uniformément sur tout compact $\mathrm{K} \subset \Omega$ vers une fonction f holomorphe dans Ω ; de plus, toutes les dérivées de cette sous-suite convergent uniformément sur tout compact de Ω vers les dérivées correspondantes de f.*

On appelle classiquement *famille normale* une famille $\mathcal{F}$ de fonctions sur l'ouvert Ω telle que toute suite (f_n) prise dans cette famille admette des sous-suites uniformément convergentes sur tout compact contenu dans Ω. Les familles localement bornées de fonctions holomorphes sont donc normales.

Démonstration. Soit (B_m) une suite de boules ouvertes telles que pour tout $z \in \mathbb{C}$ et tout ouvert $\mathrm{V} \subset \mathbb{C}$ il existe m tel que $z \in \mathrm{B}_m \subset \mathrm{V}$; on peut couvrir Ω par une sous-famille dénombrable $(\mathrm{B}_\alpha)_{\alpha \in \mathrm{A}}$ de ces boules, telles que pour tout $\alpha \in \mathrm{A}$:

$\mathrm{B}_\alpha = \mathrm{D}(z_\alpha, r_\alpha) \subset \Omega$;
il existe M_α tel que $|f(z)| \le \mathrm{M}_\alpha$ pour toute $f \in \mathcal{F}$ et tout $z \in \mathrm{B}_\alpha$.

D'après le lemme 11.8 appliqué à f/M_α et au disque B_α, on a pour tout $k \ge 0$ l'inégalité $r_\alpha^k\, |f^{(k)}(z_\alpha)| \le \mathrm{M}_\alpha\, k!$ pour chaque fonction $f \in \mathcal{F}$.

Soit $\mathrm{I} = \mathrm{A} \times \mathbb{N}$; c'est un ensemble dénombrable ; posons $\Delta = \overline{\mathrm{U}}^{\mathrm{I}}$; muni de la topologie produit, c'est un compact métrisable. Considérons l'application de $\mathcal{F}$ dans Δ qui associe à chaque $f \in \mathcal{F}$ l'élément $\varphi(f) \in \Delta$ défini par

$$\forall i = (\alpha, k) \in \mathrm{I}, \quad \varphi(f)_i = \varphi(f)_{\alpha,k} = \mathrm{M}_\alpha^{-1}\, r_\alpha^k\, \frac{f^{(k)}(z_\alpha)}{k!}.$$

Puisque Δ est métrisable, la suite $(\varphi(f_n))$ admet des sous-suites convergentes ; si $(\varphi(f_{n_j}))$ converge dans Δ, on a en particulier que pour chaque $\alpha \in \mathrm{A}$,

$$\lim_j f_{n_j}^{(k)}(z_\alpha)$$

existe pour tout $k \ge 0$; la proposition 11.9 appliquée au disque $\mathrm{D}(z_\alpha, r_\alpha)$ et à la suite $(\mathrm{M}_\alpha^{-1} f_{n_j})_j$ montre que $f_{n_j}(z)$ converge en tout point $z \in \mathrm{B}_\alpha$; comme les (B_α) recouvrent Ω, on en déduit que (f_{n_j}) converge vers une fonction limite f, simplement sur Ω, et f est holomorphe sur Ω puisqu'elle est développable en série entière sur chaque B_α. Si K est un compact contenu dans Ω, on peut trouver un ensemble fini $\mathrm{A}_0 \subset \mathrm{A}$ d'indices, et des compacts $\mathrm{K}_\alpha \subset \mathrm{B}_\alpha$, $\alpha \in \mathrm{A}_0$, tels que $\mathrm{K} = \bigcup_{\alpha \in \mathrm{A}_0} \mathrm{K}_\alpha$; en effet, on peut par compacité recouvrir K par un nombre fini des ouverts B_α, disons $\mathrm{K} \subset \mathrm{B}_{\alpha_1} \cup \ldots \cup \mathrm{B}_{\alpha_\mathrm{N}}$. La fonction continue $g : x \to \sum_{i=1}^{\mathrm{N}} d(x, \mathrm{B}^c_{\alpha_i})$ est > 0 sur le compact K, donc il existe $\delta > 0$ tel que $g(x) \geq \delta$ pour tout $x \in \mathrm{K}$. On pose alors

$$\mathrm{K}_{\alpha_i} = \{x \in \mathrm{K} : d(x, \mathrm{B}^c_{\alpha_i}) \geq \delta/\mathrm{N}\}$$

pour $i = 1, \ldots, \mathrm{N}$, et on vérifie que $\mathrm{K}_{\alpha_i} \subset \mathrm{B}_{\alpha_i}$ (évident) et que tout point x de K est dans l'un des K_{α_i} (pour que $g(x) \geq \delta$, il faut bien que l'un au moins des N termes de la somme qui définit $g(x)$ soit $\geq \delta/\mathrm{N}$).

Pour finir, la proposition 11.9 nous donne la convergence uniforme des fonctions et des dérivées sur chaque K_α, donc aussi sur K.

Théorème de Riemann de l'application conforme

Voir [Rud] 14.7, 14.8 ; [Car] VI.2, [Cha] 7.7.

Théorème 11.12. *Pour tout ouvert Ω non vide de $\mathbb{C}$, simplement connexe et différent de $\mathbb{C}$, il existe une bijection holomorphe de Ω sur le disque unité ouvert* U.

Deux commentaires sur l'énoncé. Le cas $\Omega = \mathbb{C}$ est impossible : il n'existe aucune injection f de $\mathbb{C}$ dans U, à cause du théorème de Liouville ; la fonction f serait holomorphe bornée sur $\mathbb{C}$, donc constante. Par ailleurs, il est évidemment nécessaire que Ω soit simplement connexe pour qu'il puisse être homéomorphe au disque unité, qui est simplement connexe.

Indiquons la stratégie de la preuve du théorème de Riemann.

1. On montre qu'il existe au moins une injection holomorphe f_0 de Ω dans U ; l'ensemble Σ des fonctions holomorphes sur Ω, **injectives** et telles que $|f(z)| < 1$ pour tout $z \in \Omega$ est donc non vide.

2. On fixe $z_0 \in \Omega$, on désigne par Σ_1 l'ensemble des fonctions holomorphes f sur Ω pour lesquelles existe une suite (g_n) d'éléments de Σ, telle que $(g_n^{(k)})_n$ converge vers $f^{(k)}$, uniformément sur tout compact $\mathrm{K} \subset \Omega$, et pour tout entier $k \geq 0$. On montre alors qu'il existe $f_1 \in \Sigma_1$ qui maximise $|f'(z_0)|$ parmi les $f \in \Sigma_1$.

3. On montre que la fonction précédente f_1 est en fait une bijection de Ω sur U.

Premier point

Dans ce premier point, l'ensemble Ω est un ouvert simplement connexe, non vide et différent de $\mathbb{C}$. Le premier point est de construire une fonction holomorphe f_0 sur Ω, bornée et injective ; c'est facile si Ω évite un disque fermé $\overline{\mathrm{D}(w_0, r_0)}$, avec $r_0 > 0$: il suffit de prendre $f_0 : z \to r_0/(z - w_0)$; cette fonction holomorphe est clairement injective, et pour tout $z \in \Omega$ on a $|z - w_0| > r_0$ qui implique $|f_0(z)| < 1$.

Passons au cas général. Puisque $\Omega \neq \mathbb{C}$, on peut considérer un point $\lambda \notin \Omega$. Supposons que $0 \notin \Omega$ pour simplifier l'écriture. Puisque Ω est simplement connexe et que $z \to z$ ne s'annule pas sur Ω, on peut définir une détermination h de $\sqrt{z}$ sur Ω (cas particulier de la proposition 11.1) ; la fonction h est évidemment injective et même plus : $h(z_1) = \pm h(z_2)$ implique $z_1 = h^2(z_1) = h^2(z_2) = z_2$. L'image de Ω par h est un ouvert Ω_1 qui évite l'ouvert non vide $-h(\Omega)$, et on se ramène au cas précédent : il existe une injection holomorphe g de Ω_1 dans U, et $f_0 = g(\sqrt{z})$ est une injection holomorphe de Ω dans U.

Ce premier point peut paraître bête, mais c'est ici que le cas $\Omega = \mathbb{C}$ est écarté : il n'existe aucune injection de $\mathbb{C}$ dans U, à cause du théorème de Liouville.

Deuxième point

Le deuxième point est à peu près évident pour toute personne qui a compris le théorème des familles normales. Par définition de Σ_1, on peut trouver pour toute $f \in \Sigma_1$ et tout $\varepsilon > 0$ une fonction $g \in \Sigma$ telle que $|g'(z_0)| > |f'(z_0)| - \varepsilon$. Il est alors clair qu'on peut trouver dans Σ une suite maximisante (g_n), c'est à dire telle que

$$\lim_n |g_n'(z_0)| = \sup\{|f'(z_0)| : f \in \Sigma_1\}.$$

Cette suite (g_n) est uniformément bornée par 1 sur Ω (les fonctions sont à valeurs dans le disque U), donc d'après le théorème 11.11 on peut en extraire une sous-suite (g_{n_k}) qui converge, *ainsi que les dérivées*, vers une fonction $f_1 \in \Sigma_1$ (et ses dérivées). On a donc

$$|f_1'(z_0)| = \lim_k |g_{n_k}'(z_0)| = \max\{|f'(z_0)| : f \in \Sigma_1\}.$$

Troisième et dernier point

Début du troisième point : puisque f_0 est injective, sa dérivée ne s'annule pas (corollaire 11.4), donc $|f_0'(z_0)| > 0$ et *a fortiori* $|f_1'(z_0)| = \max\{|f'(z_0)| : f \in \Sigma_1\}$ est > 0. La fonction f_1 n'est donc constante au voisinage d'aucun point de Ω (sinon, comme Ω est connexe, f_1 serait constante sur Ω), donc $f_1(\Omega)$ est ouvert dans $\mathbb{C}$ (corollaire 11.3), contenu dans $\overline{\mathrm{U}}$; tout ceci donne $f_1(\Omega) \subset \mathrm{U}$. On montre ensuite que f_1 est injective, et pour finir, on montrera que si on avait $f_1(\Omega) \neq \mathrm{U}$, on pourrait trouver f_2 telle que $|f_2'(z_0)| > |f_1'(z_0)|$, ce qui est contradictoire avec la maximalité de f_1. On va voir d'abord que f_1 est injective sur Ω, ce qui montrera que f_1 est en fait un élément de Σ.

Lemme 11.13. *Soit (g_n) une suite de fonctions holomorphes sur un disque ouvert* D*, sans zéro dans* D*, convergeant uniformément vers g sur tout compact* $\mathrm{K} \subset \mathrm{D}$ *; si g n'est pas identiquement nulle sur* D*, elle n'a pas de zéro dans* D.

Démonstration. On sait que la fonction limite g est holomorphe (par exemple en appliquant le théorème 11.11 : ça n'est pas la méthode la plus naturelle !). Soit $z_0 \in \mathrm{D}$; si g n'est pas identiquement nulle, ses zéros sont isolés et on peut trouver un rayon $r_0 > 0$ tel que $\overline{\mathrm{D}(z_0, r_0)} \subset \mathrm{D}$, et tel que $g(z) \neq 0$ pour tout z sur le cercle $\mathrm{S}(z_0, r_0)$ de rayon r_0 et de centre z_0. On aura $|g(z)| \geq \delta > 0$ pour $z \in \mathrm{S}(z_0, r_0)$; pour n assez grand, on aura, par convergence uniforme sur le compact $\mathrm{S}(z_0, r_0)$, l'inégalité $|g_n(z)| \geq \delta/2$ pour tout $z \in \mathrm{S}(z_0, r_0)$; la fonction $1/g_n$ est définie et holomorphe dans $\mathrm{D}(z_0, r_0)$, donc par le principe du maximum, $|1/g_n(z_0)| \leq 2/\delta$, ce qui implique $g(z_0) \neq 0$ à la limite.

Corollaire 11.14. *Si (g_n) est une suite de fonctions holomorphes, injectives sur l'ouvert connexe* V*, qui converge vers g non constante, uniformément sur tout compact contenu dans* V*, alors g est injective sur* V.

Démonstration. Soient $z_1, z_2 \in \mathrm{V}$, $z_1 \neq z_2$ et D un disque centré en z_1, ne contenant pas z_2, contenu dans V ; les fonctions $g_n - g_n(z_2)$ n'ont pas de zéro dans D, donc la limite $g - g(z_2)$, qui n'est pas identiquement nulle sur D (sinon elle serait nulle sur V par connexité, et g constante), n'a pas de zéro dans D, donc $g(z_1) \neq g(z_2)$.

Reprenons le fil du troisième point. La fonction f_1, limite de la suite maximisante $(g_n) \subset \Sigma$, ne peut pas être constante puisque $|f_1'(z_0)| \geq |f_0'(z_0)| > 0$; d'après le corollaire précédent 11.14, la limite f_1 est injective ; de plus, on a vu que $f_1(\Omega) \subset \mathrm{U}$, ce qui montre que la fonction limite f_1 est en fait dans Σ. Il reste à voir que $f_1(\Omega) = \mathrm{U}$. Le résultat découle immédiatement des deux lemmes suivants.

Soient V un ouvert non vide de $\mathbb{C}$ et $z_0 \in \mathrm{V}$; désignons par $\mathrm{H}(\mathrm{V}, \mathrm{U})$ l'ensemble des fonctions holomorphes sur V qui prennent leurs valeurs dans U. Disons que $f \in \mathrm{H}(\mathrm{V}, \mathrm{U})$ est *extrémale* au point z_0 si $|f'(z_0)|$ est égal au maximum de $|g'(z_0)|$ lorsque g varie dans $\mathrm{H}(\mathrm{V}, \mathrm{U})$. Disons que $f \in \mathrm{H}(\mathrm{V}, \mathrm{U})$ extrémale en z_0 est *non triviale* si $|f'(z_0)| > 0$.

Lemme 11.15. *Si $f \in \mathrm{H}(\mathrm{V}, \mathrm{U})$ est extrémale en z_0, non triviale, alors $f(z_0) = 0$; si $f = \mathrm{G} \circ \mathrm{F}$, avec $\mathrm{F} \in \mathrm{H}(\mathrm{V}, \mathrm{U})$ et $\mathrm{G} \in \mathrm{H}(\mathrm{U}, \mathrm{U})$, alors G est une bijection holomorphe de U telle que $\mathrm{G}(\mathrm{F}(z_0)) = 0$.*

Démonstration. Commençons par le deuxième point. Faisons une petite manipulation pour que la factorisation de f devienne $f = \mathrm{G}_1 \circ \mathrm{F}_1$, avec $\mathrm{F}_1 \in \mathrm{H}(\mathrm{V}, \mathrm{U})$ et $\mathrm{G}_1 \in \mathrm{H}(\mathrm{U}, \mathrm{U})$, mais aussi $\mathrm{F}_1(z_0) = 0$. Il suffit de poser $b = \mathrm{F}(z_0)$, d'écrire ensuite

$$f = \bigl(\mathrm{G} \circ \varphi_{-b}\bigr) \circ \bigl(\varphi_b \circ \mathrm{F}\bigr)$$

et de poser $\mathrm{G}_1 = \mathrm{G} \circ \varphi_{-b} \in \mathrm{H}(\mathrm{U}, \mathrm{U})$ et $\mathrm{F}_1 = \varphi_b \circ \mathrm{F} \in \mathrm{H}(\mathrm{V}, \mathrm{U})$. On aura maintenant

$$f'(z_0) = \mathrm{G}_1'(\mathrm{F}_1(z_0))\, \mathrm{F}_1'(z_0) = \mathrm{G}_1'(0)\, \mathrm{F}_1'(z_0), \quad |f'(z_0)| = |\mathrm{G}_1'(0)|\, |\mathrm{F}_1'(z_0)|.$$

D'après le lemme de Schwarz 11.5, on a $|\mathrm{G}_1'(0)| \leq 1$, donc $|f'(z_0)| \leq |\mathrm{F}_1'(z_0)|$. Mais la maximalité impose que $|f'(z_0)| = |\mathrm{F}_1'(z_0)|$, donc $|\mathrm{G}_1'(0)| = 1$ puisque $f'(z_0) \neq 0$, donc par le lemme 11.5, la fonction G_1 est une bijection holomorphe de U, de la forme $z \to \lambda z$ avec $|\lambda| = 1$. En particulier $\mathrm{G}_1(0) = 0$, et $\mathrm{G} = \mathrm{G}_1 \circ \varphi_b$ est bien une bijection holomorphe de U telle que $\mathrm{G}(\mathrm{F}(z_0)) = \mathrm{G}(b) = \mathrm{G}_1(\varphi_b(b)) = \mathrm{G}_1(0) = 0$.

Ce qui précède peut s'appliquer à la factorisation évidente $f = \mathrm{Id} \circ f$, dans laquelle $\mathrm{F} = f$ et $\mathrm{G}(z) = z$ pour tout z. Les lignes précédentes donnent $0 = \mathrm{G}(\mathrm{F}(z_0)) = f(z_0)$ dans ce cas.

Lemme 11.16. *Si Ω est simplement connexe et si $f \in \mathrm{H}(\Omega, \mathrm{U})$ n'est pas surjective de Ω sur U, on peut factoriser $f = \mathrm{G} \circ \mathrm{F}$, avec $\mathrm{F} \in \mathrm{H}(\Omega, \mathrm{U})$ et $\mathrm{G} \in \mathrm{H}(\mathrm{U}, \mathrm{U})$ qui n'est pas une bijection holomorphe de U.*

Démonstration. On suppose qu'il existe un point $a \in \mathrm{U}$ qui ne soit pas dans l'image de f. Alors 0 n'est pas dans l'image de $\varphi_a \circ f$. La fonction $\varphi_a \circ f$ ne s'annule pas sur le simplement connexe Ω, ce qui permet d'introduire F holomorphe sur Ω telle que $\mathrm{F}^2 = \varphi_a \circ f$ (appliquer la proposition 11.1). Il est clair que F est à valeurs dans U. Soit s l'application $z \to z^2$; on a

$$f = (\varphi_{-a} \circ s) \circ \mathrm{F}.$$

Si on pose $\mathrm{G} = \varphi_{-a} \circ s$, on a $f = \mathrm{G} \circ \mathrm{F}$ avec $\mathrm{F} \in \mathrm{H}(\Omega, \mathrm{U})$, la fonction G est holomorphe de U dans U et elle n'est pas injective parce que s n'est pas injective.