Exercice 1.4. *Montrer que tout ouvert de* $\mathbb{R}$ *est réunion (finie ou) dénombrable d'intervalles ouverts deux à deux disjoints.*

Solution. Si on est censé connaître à fond la notion de composante connexe, il n'y a pratiquement rien à faire ; on va commencer comme si on ne connaissait que les notions de DEUG.

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}$; on montre d'abord que pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ tels que $]a, b[\subset \mathrm{U}$ mais $a, b \notin \mathrm{U}$. Commençons par définir b. Soit b la borne inférieure du fermé F de $\overline{\mathbb{R}}$, non vide et minoré, égal à $[x, +\infty] \setminus \mathrm{U}$; alors $b \in \mathrm{F}$ (donc $b \notin \mathrm{U}$), mais pour tout $x \le y < b$, on a $y \in \mathrm{U}$, sinon y serait un élément de F plus petit que b. On procède de même à gauche pour obtenir $a \in \overline{\mathbb{R}}$, $a < x$ et $]a, x] \subset \mathrm{U}$. L'intervalle ouvert $]a, b[$ aura bien les propriétés voulues.

On voit facilement que les intervalles $]a, b[$ obtenus pour différents x sont ou bien disjoints, ou bien égaux : si $]a, b[$ correspondant à x rencontre en y l'intervalle $]a', b'[$ correspondant à x', on aura $a, a' < y < b, b'$. Si $a \ne a'$, on a par exemple $a < a'$; alors $a' \notin \mathrm{U}$ par construction de $]a', b'[$, mais $a < a' < b$ avec $]a, b[\subset \mathrm{U}$ est contradictoire. Il en résulte que $a = a'$ et de même $b = b'$.

La collection de ces intervalles non vides $(]a_i, b_i[)_{i \in \mathrm{I}}$ (qui sont les *composantes connexes* de U) est au plus dénombrable, par l'argument habituel de séparabilité de $\mathbb{R}$: pour chaque $i \in \mathrm{I}$, on peut sélectionner un rationnel $q_i \in \mathbb{Q} \cap]a_i, b_i[$; l'application $i \in \mathrm{I} \to q_i$ est une injection de I dans l'ensemble dénombrable $\mathbb{Q}$, donc I est au plus dénombrable.

Exercice 1.5. *Si* (f_n) *est une suite de fonctions réelles mesurables sur* $(\Omega, \mathcal{A})$*, montrer que l'ensemble* A *des points* $\omega \in \Omega$ *où la limite* $\lim_n f_n(\omega)$ *existe est un ensemble de la tribu* $\mathcal{A}$*.*

Solution. L'énoncé est légèrement ambigu, mais ça n'est pas bien grave ; si on pense à une limite dans $\overline{\mathbb{R}}$, la méthode standard consiste à dire que l'ensemble A est l'ensemble où la fonction $g_1 = \liminf_n f_n$ est égale à $g_2 = \limsup_n f_n$; on vérifie (exercice plus que classique) que g_1 et g_2 sont mesurables ; ensuite, dire que $g_1 \ne g_2$ peut s'exprimer en notant que

$$\{g_1 < g_2\} = \bigcup_{q \in \mathbb{Q}} \big(\{g_1 < q\} \cap \{g_2 > q\}\big) \in \mathcal{A}$$

et de même pour $\{g_1 > g_2\}$, donc $\{g_1 \ne g_2\} = \{g_1 < g_2\} \cup \{g_1 > g_2\} \in \mathcal{A}$, de même que son complémentaire $\mathrm{A} = \{g_1 = g_2\}$. Si on veut une limite dans $\mathbb{R}$ on intersectera l'ensemble précédent avec l'ensemble $\{-\infty < g_1 < +\infty\}$ qui est également dans $\mathcal{A}$.

On peut facilement généraliser l'exercice au cas où les valeurs des fonctions (f_n) sont prises dans un espace métrique complet séparable (X, d). Dire que la suite $(f_n(\omega))_n$ converge dans (X, d) équivaut à dire que la suite est de Cauchy, donc en discrétisant les valeurs de $\varepsilon > 0$ à $\varepsilon = 2^{-k}$, $k \ge 0$ on obtient

$$\mathrm{A} = \bigcap_{k=0}^{+\infty} \bigcup_{\mathrm{N} \ge 0} \bigcap_{m,n \ge \mathrm{N}} \mathrm{B}_{k,m,n}$$

où $\mathrm{B}_{k,m,n} = \{\omega \in \Omega : d(f_m(\omega), f_n(\omega)) < 2^{-k}\}$. Pour terminer il suffit de savoir que $\mathrm{B}_{k,m,n} \in \mathcal{A}$ pour tous k, m, n. Considérons $\mathrm{B} = \{\omega \in \Omega : d(f(\omega), g(\omega)) < \varepsilon\}$, où f, g sont mesurables de $(\Omega, \mathcal{A})$ dans $(\mathrm{X}, \mathcal{B}_\mathrm{X})$. Pour tout $x \in \mathrm{X}$ fixé l'ensemble $\{\omega : d(f(\omega), x) < \varepsilon\}$ est dans $\mathcal{A}$, puisque c'est l'image inverse par f d'un ouvert de X, la boule ouverte $\mathrm{B}(x, \varepsilon)$; si $(x_k)_{k \geq 0}$ est une suite dense dans X, on pourra écrire que

$$\mathrm{B} = \bigcup_{q \in \mathbb{Q}} \bigcup_{k=0}^{+\infty} \big(\{\omega : d(f(\omega), x_k) < q\} \cap \{\omega : d(g(\omega), x_k) < \varepsilon - q\}\big) \in \mathcal{A}.$$

Dans les lignes précédentes on a tourné autour du pot pour ne pas dire franchement : puisque (X, d) est métrique séparable, la tribu borélienne du produit $\mathrm{X} \times \mathrm{X}$ est égale à la tribu produit $\mathcal{B}_\mathrm{X} \otimes \mathcal{B}_\mathrm{X}$. Cela entraîne que l'ouvert $\{(x, y) \in \mathrm{X} \times \mathrm{X} : d(x, y) < \varepsilon\}$ est dans $\mathcal{B}_\mathrm{X} \otimes \mathcal{B}_\mathrm{X}$, ce qui donne immédiatement que son image inverse B par l'application couple $\omega \in \Omega \to (f(\omega), g(\omega))$ est dans $\mathcal{A}$.

Exercice 1.6. *Soit $g : \Omega \to \mathbb{R}$ une application quelconque, $\mathcal{A} = g^{-1}(\mathcal{B}_\mathbb{R})$ (qu'on appellera en proba la tribu engendrée par la v.a. g) ; montrer que f est mesurable de $(\Omega, \mathcal{A})$ dans $\mathbb{R}$ si et seulement si $f = \varphi(g)$, avec φ borélienne de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.*

Solution. Tout ensemble $\mathrm{A} \in \mathcal{A}$ est de la forme $\mathrm{A} = g^{-1}(\mathrm{B})$ pour un borélien B de $\mathbb{R}$. Remarquons que pour toute partition finie $\mathrm{A}_1, \ldots, \mathrm{A}_\mathrm{N}$ de Ω en ensembles $\mathrm{A}_j \in \mathcal{A}$, il existe une partition borélienne de $\mathbb{R}$ en ensembles $\mathrm{B}_j \in \mathcal{B}_\mathbb{R}$ telle que $\mathrm{A}_j = g^{-1}(\mathrm{B}_j)$ pour $j = 1, \ldots, \mathrm{N}$. C'est évident si g est surjective. Sinon, soit $\mathrm{B}_j \in \mathcal{B}_\mathbb{R}$ tel que $\mathrm{A}_j = g^{-1}(\mathrm{B}_j)$, pour $j = 1, \ldots, \mathrm{N}$; posons $\mathrm{B}'_1 = \mathrm{B}_1$, puis $\mathrm{B}'_k = \mathrm{B}_k \setminus \bigcup_{j<k} \mathrm{B}'_j$ pour $1 < k < \mathrm{N}$ et $\mathrm{B}'_\mathrm{N} = \mathbb{R} \setminus \bigcup_{j<\mathrm{N}} \mathrm{B}'_j$; on vérifie que $g^{-1}(\mathrm{B}'_j) = g^{-1}(\mathrm{B}_j)$ pour tout $j = 1, \ldots, \mathrm{N}$ et que les B'_j forment une partition de $\mathbb{R}$.

Si f est $\mathcal{A}$-étagée réelle, on peut trouver un entier N, des réels $(c_k)_{1 \leq k \leq \mathrm{N}}$, une partition $(\mathrm{B}_k)_{1 \leq k \leq \mathrm{N}}$ de $\mathbb{R}$ en boréliens tels qu'en posant $\mathrm{A}_k = g^{-1}(\mathrm{B}_k)$ pour $k = 1, \ldots, \mathrm{N}$ on ait

$$f = \sum_{k=1}^{\mathrm{N}} c_k \, \mathbf{1}_{\mathrm{A}_k}.$$

Posons $\varphi = \sum_{k=1}^{\mathrm{N}} c_k \mathbf{1}_{\mathrm{B}_k}$. On vérifie que $\varphi(g(\omega)) = f(\omega)$ pour tout $\omega \in \Omega$: en effet, il existe k unique tel que $\omega \in \mathrm{A}_k$, donc $g(\omega) \in \mathrm{B}_k$, $\varphi(g(\omega)) = c_k = f(\omega)$.

Si f est mesurable de $(\Omega, \mathcal{A})$ dans $\mathbb{R}$, il existe une suite (f_n) de fonctions $\mathcal{A}$-étagées qui converge simplement vers f. Chacune peut s'écrire $f_n = \varphi_n \circ g$, avec φ_n borélienne. Si on pose $\varphi = \limsup_n \varphi_n$, on obtient une fonction borélienne de $\mathbb{R}$ dans $\overline{\mathbb{R}}$ telle que

$$\varphi(g(\omega)) = \limsup_n \varphi_n(g(\omega)) = \limsup_n f_n(\omega) = \lim_n f_n(\omega) = f(\omega)$$

pour tout $\omega \in \Omega$. Pour finir on peut si on veut corriger φ sur l'ensemble où elle pourrait être $\pm\infty$ pour avoir une vraie solution réelle φ_1 : l'ensemble $\mathrm{B} = \{|\varphi| = +\infty\}$ est borélien, on définit $\varphi_1(t) = \varphi(t)$ si $t \notin \mathrm{B}$ et $\varphi_1(t) = 0$ (par exemple) si $t \in \mathrm{B}$. On a toujours $f = \varphi_1 \circ g$.

Exercice 2.1. *On suppose donnée une fonction f sur $[0, 1]$ telle que $0 < f(x) \leq 1 - x$ pour tout $x \in [0, 1]$. Pour chaque $x \in [0, 1[$ on pose $x^+ = x + f(x)$. On a donc $x < x^+ \leq 1$ pour tout $x \in [0, 1[$.*

Montrer que l'intervalle semi-ouvert $[0, 1[$ est réunion d'une suite d'intervalles de la forme $[x_n, x_n^+[$, deux à deux disjoints (peut être une suite finie).

Solution. Pour tout $x \in [0,1[$ notons $\mathrm{I}(x)$ l'intervalle $[x, x^+[$. Pour tout sous-ensemble $\mathrm{D} \subset [0,1[$, posons $\mathrm{U(D)} = \bigcup_{d \in \mathrm{D}} \mathrm{I}(d)$; on a $\mathrm{D} \subset \mathrm{U(D)}$. Désignons par $\mathcal{D}$ l'ensemble des parties $\mathrm{D} \subset [0,1[$ telles que

(i) les intervalles $\mathrm{I}(d)$, pour $d \in \mathrm{D}$, sont deux à deux disjoints ;
(ii) pour tout $x \in \mathrm{U(D)}$, on a $[0,x] \subset \mathrm{U(D)}$.

On peut noter en passant que $\mathrm{D} = \{0\}$ est un élément de $\mathcal{D}$, et que tout ensemble $\mathrm{D} \in \mathcal{D}$ est dénombrable (à chaque $d \in \mathrm{D}$ associons un rationnel $r_d \in \mathrm{I}(d)$; c'est une injection de D dans l'ensemble dénombrable $\mathbb{Q}$). On montre d'abord que tout $\mathrm{D} \in \mathcal{D}$ est bien ordonné par l'ordre des réels, c'est à dire que tout sous-ensemble non vide $\mathrm{B} \subset \mathrm{D}$ possède un plus petit élément. Si $\mathrm{B} \subset \mathrm{D}$ est non vide, on peut considérer $b_0 \in \mathrm{B}$ et la borne inférieure m de B ; on a $0 \leq m \leq b_0$ et $b_0 \in \mathrm{U(D)}$; par (ii) il existe $d_0 \in \mathrm{D}$ tel que $d_0 \leq m < d_0^+$. Puisque $\mathrm{D} \in \mathcal{D}$, les intervalles $\mathrm{I}(d)$, $d \in \mathrm{D}$ sont deux à deux disjoints, ce qui montre qu'aucun point de B ne peut se trouver dans l'intervalle ouvert non vide $]d_0, d_0^+[$, mais comme $m = \inf(\mathrm{B})$, il existe $b_1 \in \mathrm{B}$ tel que $m \leq b_1 < d_0^+$. La seule possibilité est que $d_0 = m = b_1$, et $m \in \mathrm{B}$ est donc le plus petit élément de B.

Pour tout ensemble $\mathrm{D} \in \mathcal{D}$ non vide, le plus petit élément de D est 0 : il existe $d \in \mathrm{D} \subset \mathrm{U(D)}$, donc $[0,d] \subset \mathrm{U(D)}$ d'après (ii) ; on a donc $0 \in \mathrm{U(D)}$, et comme $[0, 0^+[$ est le seul intervalle $\mathrm{I}(x)$ qui contienne 0, on en déduit que $0 \in \mathrm{D}$, est c'est bien sûr le plus petit élément de D.

On va montrer que la réunion $\mathrm{D}_\infty = \bigcup \{\mathrm{D} : \mathrm{D} \in \mathcal{D}\}$ est encore un ensemble de $\mathcal{D}$, et cet ensemble sera bien entendu le plus grand ensemble de $\mathcal{D}$. Il est clair que $\mathrm{U}(\mathrm{D}_\infty) = \bigcup_{\mathrm{D} \in \mathcal{D}} \mathrm{U(D)}$, et qu'un tel ensemble vérifie (ii) parce que chaque $\mathrm{U(D)}$ de la réunion le vérifie. Il faut voir en plus que si $d_j \in \mathrm{D}_j \in \mathcal{D}$, avec $j = 1,2$ et $d_1 \neq d_2$, alors $\mathrm{I}(d_1)$ et $\mathrm{I}(d_2)$ sont disjoints. Si c'est faux, on a $d_1 \in \mathrm{I}(d_2)$ ou bien $d_2 \in \mathrm{I}(d_1)$, disons $d_1 \in \mathrm{I}(d_2)$ par exemple ; on peut d'après ce qui précède considérer *le plus petit* $d_1 \in \mathrm{D}_1$ qui soit contenu dans un $\mathrm{I}(d_2)$ avec $d_2 \in \mathrm{D}_2$ et $d_2 \neq d_1$. On a donc $d_2 < d_1 < d_2^+$. Puisque $d_2 < d_1 \in \mathrm{U}(\mathrm{D}_1)$, il existe d'après ($ii$) un $d'_1 \in \mathrm{D}_1$ tel que $d_2 \in \mathrm{I}(d'_1)$. On a $d'_1 \leq d_2 < {d'}_1^+$ et en fait $d'_1 < d_2$ car $d'_1 = d_2$ est impossible (sinon on aurait $d'_1 = d_2 < d_1$ et $d_1 \in \mathrm{I}(d_2) = \mathrm{I}(d'_1)$, ce qui est impossible pour d_1, d'_1 distincts dans D_1, car l'ensemble D_1 vérifie (i)). La propriété (ii) appliquée à $d'_1 < d_2 \in \mathrm{U}(\mathrm{D}_2)$ donne un $d'_2 \in \mathrm{D}_2$ tel que $d'_1 \in \mathrm{I}(d'_2)$, et $d'_1 \neq d'_2$, $d'_1 < d_1$: ceci contredit le fait que d_1 était le plus petit élément de D_1 avec cette propriété (le fait que $d'_1 \neq d'_2$ se voit comme avant : sinon, on aurait $d_2 \in \mathrm{I}(d'_1) = \mathrm{I}(d'_2)$ et $d'_2 < d_2$, ce qui est impossible parce que D_2 vérifie (i) ; de plus $d'_1 < d_2 < d_1$).

Pour finir il faut voir que $\mathrm{U}(\mathrm{D}_\infty) = [0,1[$. La propriété ($ii$) implique que $\mathrm{U}(\mathrm{D}_\infty) = [0, b[$ ou bien $[0,b]$ (raisonnement facile de borne supérieure). Le deuxième cas n'est pas possible, car on aurait $b \in \mathrm{I}(d)$ pour un $d \in \mathrm{D}_\infty$, donc $d \leq b < d^+$ et $\mathrm{U}(\mathrm{D}_\infty)$ serait au moins égal à $[0, d^+[$, qui est strictement plus grand que $[0,b]$.

On a donc $\mathrm{U}(\mathrm{D}_\infty) = [0,b[$, et il ne manque plus que de savoir que $b = 1$. Sinon, on vérifie que $\mathrm{D}' = \mathrm{D}_\infty \cup \{b\}$ est encore dans $\mathcal{D}$, ce qui contredit la définition de D_∞ ; cette vérification est facile : l'intervalle supplémentaire $\mathrm{I}(b)$ est disjoint de $[0,b[$ qui contient tous les autres, et $\mathrm{U}(\mathrm{D}') = \mathrm{U}(\mathrm{D}_\infty) \cup \mathrm{I}(b) = [0, b^+[$, ce qui implique ($ii$) pour D'.

A la toute fin : on a trouvé un ensemble dénombrable D_∞ tel que la famille (dénombrable) des intervalles $[d, d^+[$ pour d variant dans D_∞ est formée d'intervalles deux à deux disjoints et recouvre $[0,1[$. On peut appeler cette famille $([x_n, x_n^+[)_{n \geq 0}$ si on veut.

Si on sait (si on accepte de) travailler par *récurrence ordinale* on raisonne ainsi : on pose $x_0 = 0$; si α est un ordinal et si les (x_β) sont définis pour tous les ordinaux $\beta < \alpha$, et sont tous < 1, on distingue deux cas :

– si $\alpha = \gamma + 1$ pour un certain γ (l'ordinal α est un *successeur*) on pose $x_\alpha = x_\gamma^+$.

– sinon α est un ordinal limite, et on pose dans ce cas $x_\alpha = \sup_{\beta<\alpha} x_\beta$.

Il existe un premier ordinal α tel que $x_\alpha = 1$. Quand on l'a trouvé on voit que $[0, 1[$ est recouvert par tous les intervalles $[x_\beta, x_\beta^+[$ pour $\beta < \alpha$, qui sont deux à deux disjoints. On peut montrer facilement que pour tout ordinal dénombrable α, on peut fabriquer un exemple de correspondance $x \to x^+$ telle que α soit le premier ordinal tel que $x_\alpha = 1$.

Exercice 2.2. *Tribu et algèbres de fonctions.*

Soit $\mathbf{A}$ *une algèbre de fonctions réelles bornées sur un ensemble* X*, contenant les fonctions constantes et stable par convergence monotone bornée des suites ; montrer que* $\mathbf{A}$ *est exactement l'algèbre* $\mathcal{L}_\infty(\mathrm{X}, \mathcal{A})$ *pour une tribu* $\mathcal{A}$ *convenable de parties de* X*.*

Solution. On pose

$$\mathcal{A} = \{\mathrm{B} \in \mathcal{P}(\mathrm{X}) : \mathbf{1}_\mathrm{B} \in \mathbf{A}\}$$

et on vérifie que $\mathcal{A}$ est une tribu de parties de X. Puisque $\mathbf{A}$ contient la constante 1, on a $\mathrm{X} \in \mathcal{A}$; puisque $\mathbf{A}$ est un espace vectoriel, on a $\mathbf{1}_{\mathrm{B}^c} = 1 - \mathbf{1}_\mathrm{B} \in \mathbf{A}$ pour tout $\mathrm{B} \in \mathcal{A}$, ce qui montre que $\mathcal{A}$ est stable par passage au complémentaire. Si $\mathrm{B}_1, \mathrm{B}_2 \in \mathcal{A}$, on a $\mathbf{1}_{\mathrm{B}_1 \cap \mathrm{B}_2} = \mathbf{1}_{\mathrm{B}_1} \mathbf{1}_{\mathrm{B}_2}$ qui est dans $\mathbf{A}$ puisque $\mathbf{A}$ est une algèbre ; enfin, la stabilité de $\mathbf{A}$ par limite de suite monotone bornée implique que si (B_n) est une suite croissante d'éléments de $\mathcal{A}$, la réunion $\mathrm{B} = \bigcup_n \mathrm{B}_n$ est dans $\mathcal{A}$, parce que $\mathbf{1}_\mathrm{B}$ est la limite croissante des fonctions $\mathbf{1}_{\mathrm{B}_n}$ qui sont dans $\mathbf{A}$. En conclusion, $\mathcal{A}$ est une tribu de parties de X.

On montre ensuite que $\mathcal{L}_\infty(\mathrm{X}, \mathcal{A})$ est contenu dans $\mathbf{A}$. Il est clair que toute fonction $\mathcal{A}$-étagée, de la forme $\sum_{i=1}^k b_i \mathbf{1}_{\mathrm{B}_i}$, avec b_i réel et $\mathrm{B}_i \in \mathcal{A}$ pour $i = 1, \ldots, k$, est une fonction de $\mathbf{A}$. Soit f une fonction quelconque de $\mathcal{L}_\infty(\mathrm{X}, \mathcal{A})$; supposons par exemple $\|f\|_\infty < 1$. Par le procédé usuel, on voit que f est limite d'une suite croissante (f_n) de fonctions $\mathcal{A}$-étagées telles que $\|f_n\|_\infty \le 1$, donc $f \in \mathbf{A}$ par l'hypothèse de stabilité de $\mathbf{A}$ par suite monotone bornée. On peut prendre par exemple

$$f_n = \sum_{j=-2^n}^{2^n-1} 2^{-n} j \, \mathbf{1}_{\{2^{-n} j \le f < 2^{-n}(j+1)\}}.$$

Il reste à voir que toute fonction de $\mathbf{A}$ est $\mathcal{A}$-mesurable. On va d'abord montrer que $\mathbf{A}$ est stable par convergence uniforme. Si $(f_n) \subset \mathbf{A}$ converge uniformément sur X vers une fonction f, on peut supposer en passant à une sous-suite que $\|f - f_n\|_\infty < 2^{-n}$ pour tout entier $n \ge 0$. Posons

$$g_n = f_n - \sum_{k \ge n} \|f_{k+1} - f_k\|_\infty = f_n - c_n \,;$$

la fonction g_n est dans $\mathbf{A}$ parce que la série numérique qui définit la constante c_n converge et que $\mathbf{A}$ contient les fonctions constantes. On vérifie que $c_n \to 0$ (reste d'une série numérique convergente), donc g_n tend simplement vers f sur X, et de plus $g_n \le g_{n+1}$ pour tout n donc la limite est monotone ; d'après l'hypothèse sur $\mathbf{A}$, il en résulte que $f \in \mathbf{A}$. Pour vérifier que (g_n) croît, on écrit pour tout $x \in \mathrm{X}$ et $n \ge 0$

$$g_{n+1}(x) - g_n(x) = f_{n+1}(x) - f_n(x) + \|f_{n+1} - f_n\|_\infty \ge 0.$$

D'après le théorème de Weierstrass, il existe une suite (P_n) de polynômes à coefficients réels telle que $\mathrm{P}_n(t) \to |t|$ uniformément pour $|t| \le 1$. Si $f \in \mathbf{A}$ est telle que $\|f\|_\infty \le 1$, il en résulte que les fonctions $x \in \mathrm{X} \to \mathrm{P}_n(f(x))$ tendent uniformément sur X vers la fonction $x \to |f(x)|$; d'après le paragraphe précédent, on en déduit que $|f| \in \mathbf{A}$ pour toute $f \in \mathbf{A}$. Si $f, g \in \mathbf{A}$, on a la relation $\max(f,g) = \frac{1}{2}(f+g) + \frac{1}{2}|f-g|$ qui montre que $\max(f,g)$ est dans $\mathbf{A}$ quand f, g sont dans $\mathbf{A}$. On a aussi l'inf de la même manière.

Si $f \in \mathrm{A}$, la fonction $g = \sup(0, \inf(f,1))$ est dans $\mathbf{A}$ d'après le paragraphe précédent, elle vaut 1 sur l'ensemble $\{f \ge 1\}$, et $0 \le g(x) < 1$ ailleurs ; il en résulte que la suite bornée (g^n) des puissances de g tend en décroissant vers $\mathbf{1}_{\{f \ge 1\}}$, qui est donc une fonction de $\mathbf{A}$, donc $\{f \ge 1\} \in \mathcal{A}$. En remplaçant f par $f + \mathrm{C}te$, on voit que $\{f \ge c\} \in \mathcal{A}$ pour tout réel c, ce qui implique que f est $\mathcal{A}$-mesurable. On a ainsi montré que $\mathbf{A} \subset \mathcal{L}_\infty(\mathrm{X}, \mathcal{A})$, et l'exercice est terminé.

Exercice 2.3. *Si μ est une proba sur $\mathbb{R}$ telle que sa transformée de Fourier $\widehat{\mu}$ soit deux fois dérivable à l'origine, alors $\int x^2\, d\mu(x) < +\infty$. Réciproque ?*

Solution. Posons pour tout $t \in \mathbb{R}$

$$\mathrm{F}(t) = \widehat{\mu}(t) = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{ixt}\, d\mu(x).$$

On voit que

$$g(t) = \mathrm{F}(0) - \frac{\mathrm{F}(t) + \mathrm{F}(-t)}{2} = \int_{\mathbb{R}} \bigl(1 - \cos(xt)\bigr)\, d\mu(x).$$

Si on pose $\varphi_t(x) = \bigl(1 - \cos(tx)\bigr)/t^2$, on voit que $\varphi_t \ge 0$ et $\lim_{t\to 0} \varphi_t(x) = x^2/2$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Lorsque la fonction F est deux fois dérivable à l'origine, il en résulte que la quantité $\bigl(\mathrm{F}(-t) - 2\mathrm{F}(0) + \mathrm{F}(t)\bigr)/t^2 = -2g(t)/t^2$ converge vers $\mathrm{F}''(0)$. Or

$$\frac{g(t)}{t^2} = \int_{\mathbb{R}} \varphi_t(x)\, d\mu(x),$$

donc le lemme de Fatou donne

$$\frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} x^2\, d\mu = \int_{\mathbb{R}} (\lim_t \varphi_t)\, d\mu \le \lim_t \int_{\mathbb{R}} \varphi_t\, d\mu = \lim_t \frac{g(t)}{t^2} = -\frac{\mathrm{F}''(0)}{2}$$

ce qui donne en particulier $\int_{\mathbb{R}} x^2 d\mu(x) < +\infty$.

Inversement, la condition $\int_{\mathbb{R}} x^2\, d\mu(x) < +\infty$ implique d'abord que $\int |x|\, d\mu(x)$, ce qui permet de dériver $\mathrm{F}(t)$ par le critère de dérivation à base de Lebesgue dominé : la fonction ψ_t définie par $\psi_t(x) = \mathrm{e}^{ixt}$ à une dérivée par rapport à t, égale à $ix\, \mathrm{e}^{ixt}$, dont le module est majoré par la fonction μ-intégrable g indépendante du paramètre t, donnée par $g : x \to |x|$; il en résulte que $\mathrm{F}(t)$ est de classe C^1 et $\mathrm{F}'(t) = i \int x\, \mathrm{e}^{ixt}\, d\mu(x)$. En utilisant $\int x^2\, d\mu(x) < +\infty$, on peut dériver une deuxième fois, et on obtient en fait que F est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$.

Exercice 2.4. *Montrer que l'ensemble des boréliens de $\mathbb{R}$ a la puissance du continu.*

Solution. Je n'ai pas encore trouvé de solution qui me plaise vraiment, en voici donc une qui ne me plaît qu'à moitié.

On définit par récurrence sur les ordinaux $\alpha < \aleph_1$ des classes G_α de boréliens de la façon suivante : G_0 est la famille des ouverts ; si α est un ordinal limite, on pose $\mathrm{G}_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} \mathrm{G}_\beta$; si $\alpha = \beta + 2k$, avec β ordinal limite et k entier > 0, on définit G_α comme la famille de toutes les réunions dénombrables $\bigcup_n \mathrm{A}_n$ d'éléments (A_n) de la classe précédente $\mathrm{G}_{\beta+2k-1}$; si $\alpha = \beta + 2k + 1$, avec β ordinal limite et k entier ≥ 0, on définit G_α comme la famille de toutes les intersections dénombrables $\bigcap_n \mathrm{A}_n$ d'éléments (A_n) de la classe précédente $\mathrm{G}_{\beta+2k}$.

On sait que la tribu borélienne est la réunion de toutes ces classes G_α, lorsque α varie dans la famille des ordinaux dénombrables ; la famille des ordinaux dénombrables n'est pas dénombrable, mais son cardinal est justement $\aleph_1$, qui est le plus petit cardinal non dénombrable, donc la famille des ordinaux dénombrables a au plus la puissance du continu (savoir si elle a exactement la puissance du continu est la fameuse *hypothèse du continu*, qui est indépendante des axiomes usuels de la théorie des ensembles).

Si on arrive à montrer que chaque classe G_α, $\alpha < \aleph_1$, a au plus la puissance du continu, la tribu borélienne apparaîtra comme réunion au plus continue d'ensembles continus ; un tel ensemble est image surjective d'un produit de deux continus, donc il est au plus continu. En effet, si $(\mathrm{X}_i)_{i\in\mathrm{I}}$ est une famille d'ensembles au plus continus, on peut trouver pour chaque i une surjection s_i de $\mathbb{R}$ sur X_i. On a ensuite une surjection s de $\mathrm{I} \times \mathbb{R}$ sur $\bigcup_i \mathrm{X}_i$ obtenue en posant $s(i, t) = s_i(t)$.

Il nous reste à montrer (par récurrence ordinale) que pour tout ordinal dénombrable α, la classe G_α a la puissance du continu. Si α est ordinal limite, G_α est réunion (dénombrable) des classes G_β précédentes, donc ce cas est facile (comme ci-dessus en plus simple).

Le dernier cas est celui où G_α est obtenue à partir des suites (A_n) d'éléments de la classe précédente. Dans les deux cas, pair ou impair, on a une surjection, de l'ensemble des suites (A_n) d'éléments de la classe précédente, sur G_α. Or l'ensemble des suites d'un continu est continue :

$$\left(2^{\mathbb{N}}\right)^{\mathbb{N}} \simeq 2^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}} \simeq 2^{\mathbb{N}} \simeq \mathbf{c}.$$

Voici maintenant le principe d'une démonstration beaucoup plus jolie, mais qui demande d'être beaucoup plus savant. Munissons $\mathbb{N}$ de la distance induite par $\mathbb{R}$, qui lui donne la topologie discrète. L'espace $\mathbb{N}$ est alors métrique complet, et bêtement séparable ; on dit qu'un espace topologique X séparable, dont la topologie peut être définie par une distance qui le rend complet, est un *espace polonais*. Ainsi $\mathbb{N}$ est un exemple, pas passionnant, d'espace polonais.

Il est facile de vérifier que tout produit dénombrable de polonais est polonais pour la topologie produit, et alors l'espace $\mathrm{U} = \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ devient un exemple fondamental : on peut en effet montrer assez facilement que tout polonais X est image continue de U.

Maintenant, un autre exercice classique, qu'on peut trouver chez Chambert-Loir/Fermigier par exemple, dit que tout borélien A de $\mathbb{R}$ est image continue d'un polonais. On obtient alors en deux coups que tout borélien A de $\mathbb{R}$ est image continue de U, c'est à dire qu'il existe une application continue φ de U dans $\mathbb{R}$ telle que $\varphi(\mathrm{U}) = \mathrm{A}$.

Soit $\Delta = (u_n)_{n\geq 0}$ un ensemble dénombrable dense dans U ; si φ est continue, elle est complètement connue quand on connaît toutes les images $\varphi(u_n) \in \mathbb{R}$; il n'y a donc pas plus d'applications continues de U dans $\mathbb{R}$, qu'il n'y a de suites de nombres réels, c'est à dire la puissance du continu à nouveau. Par ailleurs, les résultats évoqués ci-dessus nous disent qu'il n'y a pas plus de boréliens de $\mathbb{R}$ que d'applications continues de U dans $\mathbb{R}$.

Les images continues de polonais constituent la classe des *sousliniens*, d'après le nom du mathématicien russe Souslin. Si A est un borélien de $\mathbb{R}^2$, sa projection sur $\mathbb{R}$ par la première coordonnée n'est pas toujours borélienne, contrairement à une affirmation qu'avait faite Lebesgue. En revanche, on voit de la même façon que les boréliens de $\mathbb{R}^2$ sont sousliniens, et les sousliniens sont faits pour pouvoir être projetés ! Par ailleurs, on peut montrer qu'un souslinien de $\mathbb{R}^d$ est μ-mesurable pour toute mesure finie μ sur la tribu borélienne (on dit que les sousliniens sont *universellement mesurables*). Il n'y a donc pas de catastrophe du point de vue de la mesure : la projection d'un borélien de $\mathbb{R}^2$ peut toujours être mesurée, même si elle peut ne pas être borélienne.

Exercice 3.1. *Soit f une fonction mesurable sur $(\Omega, \mathcal{A})$, à valeurs dans $\mathbb{R}$ (muni bien sûr de sa tribu borélienne) ; on suppose que f est intégrable par rapport à une mesure positive μ sur (Ω, μ). Si on a $\int_{\mathrm{A}} f \, d\mu \geq 0$ pour tout $\mathrm{A} \in \mathcal{A}$, montrer que f est ≥ 0 μ-presque partout.*

Solution. Si f n'est pas ≥ 0 μ-presque partout, cela signifie que l'ensemble

$$\mathrm{B} = \{f < 0\}$$

(qui est un ensemble de $\mathcal{A}$) vérifie $\mu(\mathrm{B}) > 0$. Comme B est la réunion dénombrable des ensembles $\mathrm{A}_k = \{f < -2^{-k}\}$ quand k varie dans $\mathbb{N}$, il existe un entier k tel que $\mu(\mathrm{A}_k) > 0$. En intégrant sur A_k on obtient d'après l'hypothèse

$$0 \leq \int_{\mathrm{A}_k} f \, d\mu \leq -2^{-k} \mu(\mathrm{A}_k) < 0,$$

ce qui donne une contradiction. On avait donc $\mu(\mathrm{B}) = 0$ (on pourrait tout aussi bien rédiger la solution en raisonnant dans le sens direct, sans contradiction).

Exercice 3.2. *Soit f une fonction mesurable sur $(\Omega, \mathcal{A})$, à valeurs dans $\mathbb{C}$ (muni bien sûr de sa tribu borélienne) ; si on se donne une mesure finie (positive) μ sur (Ω, μ), montrer qu'il existe une fonction f_1 mesurable, égale à f presque partout et telle que pour tout $\omega_0 \in \Omega$ et tout $\varepsilon > 0$, l'ensemble $\{|f_1 - f_1(\omega_0)| < \varepsilon\}$ soit de μ-mesure > 0 (la fonction f_1 ne prend que des valeurs essentielles).*

Dans le cas où f_1 est bornée, montrer que $f_1(\Omega)$ est compact dans $\mathbb{C}$. Montrer que pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, on a

$$\|f - \lambda\|_{\mathrm{L}_\infty(\Omega, \mathcal{A}, \mu)} = \max\{|f_1(\omega) - \lambda| : \omega \in \Omega\}.$$

Solution. Elle est fondée sur le fait que la topologie d'un espace métrique séparable (en l'occurrence le plan complexe) est à base dénombrable, ce qui signifie qu'on peut trouver une suite $(\mathrm{B}_n)_{n \geq 0}$ d'ouverts de $\mathbb{C}$ telle que tout ouvert U de $\mathbb{C}$ soit la réunion des B_m qu'il contient,

$$\mathrm{U} = \bigcup \{\mathrm{B}_m : \mathrm{B}_m \subset \mathrm{U}\}.$$

On suppose μ non nulle, sinon l'exercice n'a aucun intérêt. Pour éliminer les *valeurs inutiles* de la fonction f, on va poser

$$\mathrm{M} = \{m \geq 0 : \mu\{f \in \mathrm{B}_m\} = 0\} ; \quad \mathrm{V} = \bigcup \{\mathrm{B}_m : m \in \mathrm{M}\}.$$

On a $\mu\{f \in \mathrm{V}\} = 0$ (réunion dénombrable d'ensembles μ-négligeables) ce qui montre puisque $\mu(\Omega) > 0$ que $\mathrm{V} \neq \mathbb{C}$. L'ensemble V est ouvert et son complémentaire F est donc un fermé non vide. Soit $z_1 \in \mathrm{F}$; on peut définir f_1 en posant pour tout $\omega \in \Omega$

$$f_1(\omega) = f(\omega) \ \text{ si } \ f(\omega) \in \mathrm{F}, \quad f_1(\omega) = z_1 \ \text{ si } \ f(\omega) \in \mathrm{V}.$$

On n'a modifié f que sur l'ensemble négligeable $\{f \in \mathrm{V}\}$, donc f_1 est μ-presque partout égale à f.

Soit $\omega_0 \in \Omega$; par construction de f_1 la valeur $z_0 = f_1(\omega_0)$ est un point de F ; soit $\varepsilon > 0$; la boule ouverte $\mathrm{B}(z_0, \varepsilon)$ contient au moins un ensemble B_{m_0} contenant z_0 et contenu dans $\mathrm{B}(z_0, \varepsilon)$. On ne peut pas avoir $\mu\{f_1 \in \mathrm{B}_{m_0}\} = 0$, sinon on aurait aussi $\mu\{f \in \mathrm{B}_{m_0}\} = 0$, ce qui donnerait $m_0 \in \mathrm{M}$ et $z_0 \in \mathrm{B}_{m_0} \subset \mathrm{V}$, ce qui est exclu ; on a donc

$$\mu\{|f_1 - f_1(\omega_0)| < \varepsilon\} = \mu\{f_1 \in \mathrm{B}(z_0, \varepsilon)\} \geq \mu\{f_1 \in \mathrm{B}_{m_0}\} > 0.$$

Supposons que f_1 soit bornée en module par M et vérifie les propriétés précédentes. Alors on peut en conclure que $|f|$ était μ-presque partout $\leq$ M, ce qui aurait dû être la bonne hypothèse pour cette question. Si f_1 a la propriété énoncée dans la première partie de l'exercice, il est clair que $|f_1(\omega)| \leq \mathrm{M}$ **pour tout** $\omega \in \Omega$ puisque pour tout z tel que $|z| > \mathrm{M}$, on aura $\mu\{|f - z| < \varepsilon\} = 0$ si $0 < \varepsilon < |z| - \mathrm{M}$.

ATTENTION. Le reste de cette question est évidemment idiot : il est impossible de montrer que l'ensemble des valeurs de f_1 est **fermé**, et le max de la ligne suivante n'existe pas en général ! Si Ω est partitionné en ensembles $(\mathrm{A}_n)_{n\geq 0}$ de mesure > 0, on peut très bien avoir $f_1 = 2^{-n}$ sur A_n ; l'ensemble des valeurs n'est pas fermé : la limite 0 n'est jamais valeur de f_1. La fonction $|f_1 - 1|$ n'atteint pas son max.

Ce qui est vrai : si $f \in \mathrm{L}_\infty(\mu)$, l'ensemble des $z \in \mathbb{C}$ tels que $\mu\{|f - z| < \varepsilon\} > 0$ pour tout $\varepsilon > 0$ forme un compact $\mathrm{K} \subset \mathbb{C}$, et on peut trouver f_1, μ-presque partout égale à f qui prend toutes ses valeurs dans K.

Le compact K est le spectre de l'opérateur M_f de $\mathrm{L}_2(\Omega, \mu)$ dans lui-même, défini par la multiplication par la fonction $f \in \mathrm{L}_\infty(\Omega, \mu)$,

$$\forall g \in \mathrm{L}_2(\Omega, \mu), \quad \mathrm{M}_f(g) = f\, g.$$

Pour tout λ complexe, $f_1 - \lambda$ est un représentant de $f - \lambda$ qui ne prend que des valeurs essentielles. Il en résulte que $\sup_{\omega\in\Omega} |f_1(\omega) - \lambda| \leq \|f - \lambda\|_\infty$, et ce sup ne peut pas être plus petit que $\|f - \lambda\|_\infty$, d'où l'égalité $\|f - \lambda\|_\infty = \sup_{\omega\in\Omega} |f_1(\omega) - \lambda|$.

Exercice 3.4. *Soit* E *un espace de Banach séparable ; montrer que la tribu borélienne* $\mathcal{B}$ *de* E *est identique à la tribu borélienne faible engendrée par la famille des ouverts faibles de* E*. Si* f *est une fonction de* $(\Omega, \mathcal{A})$ *dans* E *telle que* $x^* \circ f$ *soit mesurable pour toute forme linéaire continue* x^* *sur* E*, montrer que* f *est mesurable de* $(\Omega, \mathcal{A})$ *dans* $(\mathrm{E}, \mathcal{B})$*.*

Solution. Pour la démonstration on a besoin de rappeler un résultat classique d'Analyse Fonctionnelle : si C est un convexe fermé d'un espace de Banach E, l'ensemble C est également faiblement fermé.

Ce résultat provient du théorème de séparation de Hahn-Banach, qui montre que C est intersection de demi-espaces fermés ; un demi-espace fermé est un ensemble de la forme $\{x^* \leq a\}$, où x^* est une forme linéaire continue sur E. Un tel ensemble est donc faiblement fermé, et il en résulte que C est faiblement fermé.

On sait maintenant que toute boule fermée dans E est un borélien faible, donc toute boule ouverte aussi (une boule ouverte de rayon $r > 0$ est réunion dénombrable de boules fermées de même centre, de rayons $r_n < r$ tendant vers r). Si E est séparable, on sait que la topologie de E est à base dénombrable : il existe une suite $(\mathrm{B}_n)_{n\geq 0}$ de boules ouvertes de E, telle que tout ouvert U de E soit réunion (bien sûr dénombrable) d'une sous famille de la famille (B_n) ; il en résulte que tout ouvert U de la topologie de la norme est borélien faible, d'où le résultat voulu en passant à la tribu engendrée.

Il existe un théorème plus général, appelé théorème de Lusin. On dit qu'un espace topologique X est *polonais* s'il est séparable et si sa topologie peut être définie par une métrique d qui le rende complet. On a le résultat suivant : si X est polonais, et si $\mathcal{T}_w$ est une topologie **séparée** sur X, plus faible que la topologie de X, la tribu borélienne faible est égale à la tribu borélienne initiale.

Traitons la fin de l'exercice. Il suffit de vérifier que si $x^* \circ f$ est mesurable pour tout x^*, alors f est mesurable de $(\Omega, \mathcal{A})$ dans E muni de la tribu borélienne faible. Les sous-ensembles de E de la forme $\{x^* < a\}$ engendrent par intersection finie une base d'ouverts faibles qui sont de la forme

$$\mathrm{W} = \bigcap_{i=1}^{n} \{x_i^* < a_i\}$$

et $f^{-1}(\mathrm{W}) = \bigcap_{i=1}^{n} \{x_i^* \circ f < a_i\} \in \mathcal{A}$ d'après l'hypothèse.

Soit V un ouvert faible général ; il est réunion d'une famille $(\mathrm{W}_i)_{i \in \mathrm{I}}$ d'ouverts élémentaires de la forme précédente, mais I n'est pas *a priori* dénombrable. Désignons par M le sous-ensemble des entiers $m \geq 0$ tels que $\mathrm{B}_m \subset \mathrm{W}_i$ pour un $i \in \mathrm{I}$. On a clairement $\bigcup_{m \in \mathrm{M}} \mathrm{B}_m \subset \bigcup_{i \in \mathrm{I}} \mathrm{W}_i = \mathrm{V}$; inversement si $x \in \mathrm{V}$, il existe $i \in \mathrm{I}$ tel que $x \in \mathrm{W}_i \subset \mathrm{V}$; puisque W_i est ouvert pour la topologie de la norme, il existe m tel que $x \in \mathrm{B}_m \subset \mathrm{W}_i$ ce qui montre que $m \in \mathrm{M}$ et $\bigcup_{m \in \mathrm{M}} \mathrm{B}_m = \mathrm{V}$.

Si on sélectionne pour chaque $m \in \mathrm{M}$ un indice $i_m \in \mathrm{I}$ tel que $\mathrm{B}_m \subset \mathrm{W}_{i_m} \subset \mathrm{V}$, on aura *a fortiori* que $\bigcup_{m \in \mathrm{M}} \mathrm{W}_{i_m} = \mathrm{V}$, ce qui permet de dire que $\{f \in \mathrm{V}\} = \bigcup_{m \in \mathrm{M}} \{f \in \mathrm{W}_{i_m}\} \in \mathcal{A}$ et termine l'exercice (on dit qu'un espace topologique X est fortement Lindelöf si toute réunion d'ouverts de cet espace est égale à la réunion d'une sous-famille dénombrable. On vient de montrer que lorsque X a une topologie à base dénombrable, toute topologie plus faible sur X est fortement Lindelöf — et en particulier la topologie de départ est fortement Lindelöf — Ce type d'argument est souvent utile en théorie de la mesure, où seules les opérations dénombrables sont permises).

Exercice 3.5. *Soit* (K, d) *un compact métrique muni de sa tribu borélienne* $\mathcal{B}$ *et soit* μ *une mesure finie sur* $(\mathrm{K}, \mathcal{B})$ *; montrer que la famille des* $\mathrm{A} \in \mathcal{B}$ *telles que* $\mathbf{1}_\mathrm{A}$ *soit limite dans* $\mathrm{L}_1(\mathrm{K}, \mu)$ *d'une suite* (φ_n) *de fonctions réelles continues sur* K *telles que* $0 \leq \varphi_n \leq 1$ *est une tribu de parties de* K *qui contient les ouverts de* K.

Montrer que (l'image de) $\mathrm{C}(\mathrm{K})$ *est dense dans* $\mathrm{L}_1(\mathrm{K}, \mathcal{B}, \mu)$.

Solution. Désignons par $\mathcal{C}$ la famille des parties $\mathrm{A} \in \mathcal{B}$ telles que 1_A soit limite dans $\mathrm{L}_1(\mathrm{K}, \mu)$ d'une suite (φ_n) de fonctions réelles continues sur K telles que $0 \leq \varphi_n \leq 1$; montrons que $\mathcal{C}$ est une tribu. On a d'abord $\mathrm{K} \in \mathcal{C}$ puisque $\mathbf{1}_\mathrm{K}$ est la fonction continue égale à 1 sur K ; si $\mathbf{1}_\mathrm{A}$ est limite dans $\mathrm{L}_1(\mu)$ de la suite (φ_n), alors $\mathbf{1}_{\mathrm{A}^c} = 1 - \mathbf{1}_\mathrm{A}$ est limite de la suite $(1 - \varphi_n)$, qui est formée de fonctions continues dont les valeurs sont dans $[0, 1]$. On a donc la stabilité de $\mathcal{C}$ par passage au complémentaire.

C'est pour la stabilité par intersection que la condition sur les valeurs va servir. Si $\mathbf{1}_\mathrm{A} = \lim \varphi_n$ et $\mathbf{1}_\mathrm{B} = \lim \psi_n$, on écrira

$$\mathbf{1}_\mathrm{A}\, \mathbf{1}_\mathrm{B} - \varphi_n \psi_n = (\mathbf{1}_\mathrm{A} - \varphi_n)\mathbf{1}_\mathrm{B} + \varphi_n(\mathbf{1}_\mathrm{B} - \psi_n),$$

et en utilisant $|\varphi_n| \leq 1$ il vient

$$\|\mathbf{1}_\mathrm{A}\, \mathbf{1}_\mathrm{B} - \varphi_n \psi_n\|_1 \leq \|\mathbf{1}_\mathrm{A} - \varphi_n\|_1 + \|\mathbf{1}_\mathrm{B} - \psi_n\|_1$$

qui tend vers 0. On a donc $A \cap B \in \mathcal{C}$, puisque $\mathbf{1}_{A\cap B} = \mathbf{1}_A \mathbf{1}_B$ est limite dans $L_1(\mu)$ de la suite $(\varphi_n \psi_n)$. On sait maintenant que $\mathcal{C}$ est une algèbre de parties de K.

Si (A_k) est une suite croissante d'éléments de $\mathcal{C}$, de réunion $A = \bigcup_k A_k$, la suite $(\mathbf{1}_{A_k})$ tend vers $\mathbf{1}_A$ dans $L_1(\mu)$ d'après le lemme des suites croissantes. Etant donné $\varepsilon > 0$, on peut d'abord trouver k tel que $\|\mathbf{1}_A - \mathbf{1}_{A_k}\|_1 < \varepsilon/2$, et ensuite, puisque $A_k \in \mathcal{C}$, une fonction continue φ telle que $0 \le \varphi \le 1$ et $\|\mathbf{1}_{A_k} - \varphi\|_1 < \varepsilon/2$. Finalement, on voit que $\mathbf{1}_A$ est dans l'adhérence au sens de $L_1(\mu)$ de l'ensemble des fonctions continues sur K, à valeurs dans $[0, 1]$. On vient de montrer que l'algèbre $\mathcal{C}$ est stable par limite croissante, donc $\mathcal{C}$ est une tribu.

Montrons que tout ouvert U de K est dans $\mathcal{C}$. Posons

$$\forall t \in K, \quad \varphi_n(t) = \min(1, n \operatorname{dist}(t, U^c)).$$

La fonction φ_n est continue, à valeurs dans $[0, 1]$; de plus la suite (φ_n) est croissante et tend simplement vers $\mathbf{1}_U$, donc elle tend aussi dans $L_1(\mu)$. La tribu $\mathcal{C}$ contient donc tous les ouverts de K, donc elle contient la tribu borélienne $\mathcal{B}$.

On va en déduire que pour toute fonction $f \in L_1(\mu)$, il existe une fonction continue φ telle que $\|f - \varphi\|_1 < \varepsilon$. D'après la construction de l'intégrale, on sait qu'on peut approcher f au sens de L_1 par une fonction f_1 étagée, $f_1 = \sum_{j=1}^n a_j \mathbf{1}_{A_j}$, avec $A_j \in \mathcal{B}$. Pour terminer il suffit de savoir approcher f_1 par des fonctions continues, et pour cela il suffit d'approcher les fonctions $\mathbf{1}_{A_j}$: mais c'est précisément ce que l'égalité $\mathcal{C} = \mathcal{B}$ permet de faire.

La nuance de l'énoncé sur *l'image* de C(K) est là pour rappeler que l'application naturelle de C(K) dans $L_1(K, \mu)$ n'est pas toujours injective ; elle est injective si et seulement si le *support* de μ est égal à K.

Si on travaillait sur un cube K de $\mathbb{R}^d$, muni de la mesure de Lebesgue, on pourrait remplacer l'espace C(K) des fonctions continues sur K par l'espace E des fonctions continues sur K **et** nulles au bord de K, ce qui permet de les prolonger en fonction continue sur $\mathbb{R}^d$ en leur donnant la valeur 0 hors de K. On désignerait alors par $\mathcal{C}$ la famille des parties $A \subset K$ telles que pour tout $\varepsilon > 0$, on puisse trouver $\varphi \in E$, à valeurs dans $[0, 1]$ et telle que

$$\int_K \bigl|\mathbf{1}_A(x) - \varphi(x)\bigr| \, dx < \varepsilon.$$

Dans ce cadre un peu modifié on peut montrer que $\mathcal{C}$ contient tous les boréliens contenus dans K. Il y a quelques petits points à modifier : le fait que $K \in \mathcal{C}$ n'est plus complètement gratuit, il faut travailler un tout petit peu ; même chose pour passer au complémentaire et pour voir que $U \in \mathcal{C}$ pour tout ouvert U de K. Une fois ce travail effectué, on en déduira que l'espace $\mathcal{K}(\mathbb{R}^d)$ des fonctions continues à support compact sur $\mathbb{R}^d$ est dense dans $L_1(\mathbb{R}^d)$.

Pour finir, tout ce qui a été dit marche de la même façon avec L_p, pourvu que $1 \le p < +\infty$.

Exercice 4.3. *Lemme de Dini. Soit* K *un espace topologique compact ; montrer que toute suite* (φ_n) *de fonctions continues qui tend vers* 0 *simplement, en décroissant, tend uniformément vers* 0 *sur le compact* K.

Solution. L'énoncé suggère que les fonctions φ_n sont réelles (la suite est *décroissante*). Il aurait mieux valu le dire clairement. Puisque $\varphi_n(t)$ décroît vers 0, on déduit que $\varphi_n(t) \ge 0$ pour tout entier n et tout $t \in K$.

Fixons $\delta > 0$ et considérons pour chaque entier $n \geq 0$ le sous-ensemble ouvert Ω_n de K défini par

$$\Omega_n = \{t \in \mathrm{K} : \varphi_n(t) < \delta\}.$$

Puisque $\varphi_{n+1} \leq \varphi_n$, il est clair que $\Omega_{n+1} \supset \Omega_n$: la suite d'ouverts est croissante. Par ailleurs pour tout $t \in \mathrm{K}$ il existe n tel que $\varphi_n(t) < \delta$, puisque la suite $(\varphi_n(t))$ tend vers 0. On voit que tout point de K est contenu dans un des ouverts ; on a donc un recouvrement ouvert du compact K, dont on peut extraire un recouvrement fini $\Omega_{n_0}, \ldots, \Omega_{n_k}$, avec par exemple $n_0 < n_1 < \ldots < n_k$. Mais puisque les ouverts sont croissants, la réunion finie est simplement égale au plus grand d'entre eux, Ω_{n_k}, qui est donc égal à K. Ceci signifie que la fonction φ_{n_k} est partout $< \delta$, et de même pour les fonctions φ_n pour $n \geq n_k$. On a montré la convergence uniforme vers 0.

Exercice 4.4. *Un autre lemme de Dini. Soit (f_n) une suite de fonctions continues sur* $[0,1]$ *; on suppose que chaque fonction f_n est croissante sur* $[0,1]$. *Si la suite (f_n) converge simplement vers une fonction continue f, montrer que la convergence est uniforme sur* $[0,1]$.

Solution. Pour $0 \leq s \leq t \leq 1$ et pour tout n on a $f_n(s) \leq f_n(t)$, ce qui donne $f(s) \leq f(t)$ à la limite : la fonction f est donc croissante (au sens large), et elle est continue par hypothèse.

Commençons par un cas particulier très simple : celui où $f(0) = f(1)$, c'est à dire que la limite f est constante. Posons $x_0 = 0$ et $x_1 = 1$. Pour $n \geq n_0(\varepsilon)$ on aura $|f_n(x_j) - f(x_j)| < \varepsilon/2$ pour $j = 0, 1$. Soit $x \in [0,1]$ quelconque ; on aura si $n \geq n_0(\varepsilon)$

$$f(x_0) - \varepsilon/2 < f_n(x_0) \leq f_n(x) \leq f_n(x_1) < f(x_1) + \varepsilon/2$$

et l'écart entre les extrêmes est $< \varepsilon$ puisque $f(1) = f(0)$. On a donc $|f_n(x) - f(0)| = |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ pour tout x, dès que $n \geq n_0(\varepsilon)$: ceci montre la convergence uniforme de la suite (f_n) vers la fonction f.

On n'était pas obligé de traiter ce premier cas à part, mais cela permet de bien dégager la toute petite idée qui est le moteur de cet exercice.

On suppose maintenant que $f(0) < f(1)$. Découpons l'intervalle $[f(0), f(1)]$ au moyen de points $y_0 = f(0) < y_1 < \ldots < y_{\mathrm{N}} = f(1)$, de façon que $y_{j+1} - y_j < \varepsilon/3$ pour tout $j = 0, \ldots, \mathrm{N}-1$. Par le théorème des valeurs intermédiaires on peut trouver $x_0 = 0 < x_1 < \ldots < x_{\mathrm{N}} = 1$, de façon que $f(x_j) = y_j$ pour $j = 0, \ldots, \mathrm{N}$.

On reprend maintenant l'argument du premier cas. Soit $\varepsilon > 0$ fixé ; pour $n \geq n_0(\varepsilon)$ on aura $|f_n(x_j) - f(x_j)| < \varepsilon/3$ pour $j = 0, \ldots, \mathrm{N}$. Soit $x \in [0,1]$ quelconque ; on peut trouver j tel que $x_j \leq x \leq x_{j+1}$. On aura alors si $n \geq n_0(\varepsilon)$

$$y_j - \varepsilon/3 = f(x_j) - \varepsilon < f_n(x_j) \leq f_n(x) \leq f_n(x_{j+1}) < f(x_{j+1}) + \varepsilon/3 = y_{j+1} + \varepsilon/3.$$

L'écart entre les extrêmes est $\leq y_{j+1} - y_j + 2\varepsilon/3 < \varepsilon$. De plus on a aussi

$$y_j - \varepsilon/3 = f(x_j) - \varepsilon/3 < f(x) < f(x_{j+1}) + \varepsilon/3 = y_{j+1} + \varepsilon/3$$

ce qui implique $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$, pour tout x, dès que $n \geq n_0(\varepsilon)$: ceci montre la convergence uniforme de la suite (f_n) vers la fonction f. On peut remarquer qu'on n'a pas utilisé la continuité des fonctions (f_n).

Exercice 4.5. *Montrer qu'il existe une unique fonction f croissante (au sens large) sur $[0, 1]$ qui vérifie les conditions*

$$f(x) + f(1 - x) = 1, \quad f(x/3) = f(x)/2$$

pour tout $x \in [0, 1]$. Montrer que f est continue.

Cette fonction a été introduite par Cantor, et utilisée par un de ses élèves, Ludwig Scheeffer, pour donner des contre-exemples dans la théorie de l'intégrale de Riemann étendue. En effet, cette fonction est constante sur tous les intervalles qui forment le complémentaire dans $[0, 1]$ du fameux ensemble triadique de Cantor Δ. Cet ensemble Δ est un compact de mesure nulle. La fonction f est donc une fonction continue dont la dérivée existe et est nulle presque partout, et pourtant f n'est pas constante.

Solution. On construira f comme limite uniforme d'une suite de fonctions continues. On pose d'abord $f_0(x) = x$, dont on vérifie qu'elle est dans la classe $\mathcal{G}$ des fonctions g telles que

g est croissante continue sur $[0, 1]$, $g(0) = 0$ *et* $g(x)+g(1-x) = 1$ *pour tout* $x \in [0, 1]$.

Après que la fonction f_n est définie, on pose $f_{n+1}(x) = \frac{1}{2} f_n(3x)$ pour $0 \leq x < 1/3$, $f_{n+1}(x) = 1/2$ pour $1/3 \leq x \leq 1/2$ et $f_{n+1}(x) = 1 - f_{n+1}(1 - x)$ pour $1/2 < x \leq 1$.

On note que $f_{n+1}(1/3 - \varepsilon) = \frac{1}{2} f_n(1 - 3\varepsilon)$ tend vers $\frac{1}{2} f_n(1)$ par la continuité de f_n, et $\frac{1}{2} f_n(1) = 1/2$ d'après les propriétés de la classe $\mathcal{G}$. On a ainsi recollement continu au point $1/3$ avec la deuxième partie de la définition, sur $[1/3, 1/2]$. Par ailleurs la valeur $1/2$ assure la continuité du recollement au point $1/2$ avec la troisième partie de la définition.

On a croissance de f_{n+1} sur $[0, 1/3]$ d'après la croissance de f_n, puis par vérification directe sur $[1/3, 1/2]$ (la fonction y est constante), et enfin par une autre vérification directe sur $[1/2, 1]$, en ramenant à l'intervalle $[0, 1/2]$ déjà traité. On a $f_{n+1}(0) = f_n(0) = 0$ et la propriété $f_{n+1}(x) + f_{n+1}(1 - x) = 1$ est vraie par construction.

On estime maintenant la norme uniforme $\|f_{n+1} - f_n\|_\infty$, en fonction de celle de $f_n - f_{n-1}$ (pour $n \geq 1$). D'après la définition par récurrence, on a

$$|f_{n+1}(x) - f_n(x)| = \frac{1}{2} |f_n(3x) - f_{n-1}(3x)| \leq \frac{1}{2} \|f_n - f_{n-1}\|_\infty$$

lorsque $0 \leq x < 1/3$, $|f_{n+1}(x) - f_n(x)| = 0$ lorsque $1/3 \leq x \leq 1/2$, et $|f_{n+1}(x) - f_n(x)| = |f_{n+1}(1 - x) - f_n(1 - x)| \leq \frac{1}{2} \|f_n - f_{n-1}\|_\infty$ quand $1/2 < x \leq 1$. On a donc finalement

$$\|f_{n+1} - f_n\|_\infty \leq \frac{1}{2} \|f_n - f_{n-1}\|_\infty$$

pour tout $n \geq 1$, ce qui entraîne la convergence uniforme de la suite (f_n) vers une fonction f. Il est clair que $\mathcal{G}$ est stable par limite uniforme, donc f vérifie les propriétés de la classe $\mathcal{G}$. La propriété $f(x/3) = f(x)/2$ s'obtient par passage à la limite sur les propriétés spécifiques des fonctions f_n : si $y = x/3$, on a $0 \leq y \leq 1/3$ et on a posé $f_{n+1}(y) = \frac{1}{2} f_n(3y) = \frac{1}{2} f_n(x)$; il suffit d'écrire $f(x/3) = \lim f_{n+1}(x/3)$ et $f(x) = \lim f_n(x)$.

Passons à l'unicité de f. La condition $f(x/3) = f(x)/2$, appliquée à $x = 0$, implique que $f(0) = 0$. L'autre condition donne $f(1) = 1$. On déduit des deux conditions que $f(1/3) = 1/2 = f(2/3)$, et la croissance montre que $f = 1/2$ sur l'intervalle $[1/3, 2/3]$. Ensuite, on voit que $f(1/9) = f(2/9) = 1/4$, $f(7/9) = f(8/9) = 3/4$, $f(3/9) = f(4/9) = f(5/9) = f(6/9) = 1/2$ est déjà connu. On montrera par récurrence sur n que $f(j/3^n)$ est complètement déterminé, pour $j = 0, \ldots, 3^n$. L'ensemble des $(j3^{-n})$, $n \geq 0$, $j = 0, \ldots, 3^n$

étant dense dans $[0,1]$, on en déduit qu'il y a au plus une fonction continue f qui vérifie les conditions voulues.

On pourrait utiliser la construction par récurrence : supposons que g continue soit une autre solution du problème. On montrera pour tout $n \geq 1$ que $\|f_{n+1} - g\|_\infty \leq \frac{1}{2}\|f_n - g\|_\infty$, ce qui donnera $g = f$ à la limite. On pourrait systématiser un peu plus en introduisant une transformation contractante T de l'ensemble complet $\mathcal{G}$ de fonctions continues, dont on trouvera un point fixe par le théorème de point fixe classique (souvent dit *de Picard*).

Voici une autre façon de voir la fonction f : c'est la fonction de répartition pour un certain processus aléatoire. Soit $(\mathrm{X}_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes prenant les valeurs 0 et 1 avec probabilité $1/2$, et posons

$$\mathrm{Y} = 2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\mathrm{X}_n}{3^n}.$$

On peut vérifier que

$$\forall x \in [0,1], \quad f(x) = \mathrm{P}(\mathrm{Y} \leq x) = \mathrm{P}(\mathrm{Y} < x).$$

La loi de Y est la probabilité "naturelle" sur l'ensemble triadique de Cantor ; elle est invariante par la transformation $x \to (3x \bmod 1)$ de Δ dans lui-même.

Exercice 4.9. *Soit* A *un borélien de mesure finie* > 0 *dans* $\mathbb{R}^n$ *; on pose* $-\mathrm{A} = \{-x : x \in \mathrm{A}\}$*. Montrer que la fonction* $1_\mathrm{A} * 1_{-\mathrm{A}}$ *est continue. En déduire que l'ensemble* $\mathrm{A} - \mathrm{A} = \{a - b : a, b \in \mathrm{A}\}$ *est un voisinage de* 0 *dans* $\mathbb{R}^n$*.*

Solution. Puisque A est de mesure finie, la fonction $\mathbf{1}_\mathrm{A}$ est dans tous les $\mathrm{L}_p(\mathbb{R}^n)$, par exemple dans $\mathrm{L}_2(\mathbb{R}^n)$. On a vu que $\mathrm{L}_2 * \mathrm{L}_2$ est formé de fonctions continues, donc la fonction $g = \mathbf{1}_\mathrm{A} * \mathbf{1}_{-\mathrm{A}}$ est continue. On a

$$g(0) = \int \mathbf{1}_\mathrm{A}(t)\mathbf{1}_{-\mathrm{A}}(0-t)\,dt = \int \mathbf{1}_\mathrm{A}(t)\mathbf{1}_\mathrm{A}(t)\,dt = \int \mathbf{1}_\mathrm{A}(t)\,dt = \lambda(\mathrm{A}) > 0.$$

Puisque g est continue et $g(0) > 0$, l'ensemble $\mathrm{V} = \{g > 0\}$ est un voisinage de 0 dans $\mathbb{R}^n$. Pour tout $x \in \mathrm{V}$, on a

$$g(x) = \int \mathbf{1}_\mathrm{A}(t)\mathbf{1}_{-\mathrm{A}}(x-t)\,dt > 0$$

ce qui entraîne que $t \to \mathbf{1}_\mathrm{A}(t)\mathbf{1}_{-\mathrm{A}}(x-t)$ n'est pas identiquement nulle : il existe donc $t \in \mathbb{R}$ tel que $\mathbf{1}_\mathrm{A}(t)\mathbf{1}_{-\mathrm{A}}(x-t) \neq 0$, ce qui donne $t \in \mathrm{A}$ et $x - t \in -\mathrm{A}$, donc $x = t + (x-t) \in \mathrm{A} - \mathrm{A}$. L'ensemble $\mathrm{A} - \mathrm{A}$ contient donc V, donc c'est un voisinage de 0.

Exercice 4.10. *Soient* φ *une fonction convexe sur* $\mathbb{R}$ *et* f *une fonction intégrable sur un espace de probabilité* $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ *; montrer que* $(\varphi(f))^- = \max(-\varphi(f), 0)$ *est intégrable. Montrer que*

$$\varphi\Bigl(\int f(\omega)\,d\mu(\omega)\Bigr) \leq \int \varphi(f(\omega))\,d\mu(\omega)$$

(valeur $+\infty$ *admise ; c'est l'inégalité de Jensen ; indication : considérer une tangente au graphe de* φ *au point* $t = \int f\,d\mu$*).*

Solution. Rappelons d'abord quelques faits élémentaires sur les fonctions convexes. On sait qu'une fonction φ convexe sur $\mathbb{R}$ est continue, qu'elle admet en tout point $x \in \mathbb{R}$ une dérivée à droite $\varphi'_d(x)$ et une dérivée à gauche $\varphi'_g(x)$, qui vérifient $\varphi'_g(x) \leq \varphi'_d(x)$. Cette propriété provient du fait que la fonction

$$y \to \frac{\varphi(y) - \varphi(x)}{y - x}$$

est croissante sur $\mathbb{R} \setminus \{x\}$. Il en résulte que

$$\varphi'_d(x) \leq \frac{\varphi(y) - \varphi(x)}{y - x}$$

pour tout $y > x$, et l'analogue pour $\varphi'_g(x)$. On en déduit que pour tout réel a tel que $\varphi'_g(x) \leq a \leq \varphi'_d(x)$, on a pour tout y

$$\varphi(x) + a(y - x) \leq \varphi(y).$$

Il existe donc des fonctions affines $g : y \to \varphi(x) + a(y - x)$ qui sont plus petites que φ sur $\mathbb{R}$ et égales à φ au point fixé x, $g(x) = \varphi(x)$. Rappelons encore que $f'_g(x) = f'_d(x)$ sauf au plus en une infinité dénombrable de points.

Posons $m = \int f \, d\mu$ (c'est la *moyenne* de f) et appliquons ce qui précède au point $x = m$: il existe une fonction affine $g : y \to \varphi(m) + a(y - m)$ qui est plus petite que φ. On voit donc que la fonction intégrable $\varphi(m) + a(f(\omega) - m)$ minore $\varphi(f(\omega))$, ce qui implique immédiatement que $(\varphi \circ f)^-$ est intégrable. On peut donc parler de l'intégrale de $\varphi(f)$, valeur $+\infty$ admise. On aura

$$\varphi(m) + a\big(\big(\int f \, d\mu\big) - m\big) \leq \int \varphi(f) \, d\mu,$$

c'est à dire

$$\varphi\Big(\int f \, d\mu\Big) \leq \int \varphi(f) \, d\mu.$$

Exercice 5.3. *Montrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 0$ si $x \le 0$ et $f(x) = \exp(-1/x)$ si $x > 0$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$. Utiliser f pour construire des fonctions C^∞ à support compact (non identiquement nulles) sur $\mathbb{R}$, puis sur $\mathbb{R}^d$.*

On montre par récurrence sur $n \ge 1$ qu'il existe un polynôme P_n tel que pour tout $x > 0$, la dérivée $n$ième de f au point x s'exprime par

$$f^{(n)}(x) = \mathrm{e}^{-1/x} \, \frac{\mathrm{P}_n(x)}{x^{2n}} \cdot$$

Ensuite, les comparaisons de croissance entre exponentielles et puissances permettent de voir que pour tout n, si on a déjà justifié que $f^{(n)}(0)$ existe et vaut 0,

$$\lim_{x\to 0, x>0} \frac{f^{(n)}(x) - f^{(n)}(0)}{x} = \lim_{x\to 0, x>0} \frac{f^{(n)}(x)}{x} = 0$$

ce qui montre que $f^{(n+1)}(0)$ existe et vaut 0.

A partir de cette fonction f, on construit par translation, retournement et produit la fonction de $\mathcal{D}$ la plus classique, $\varphi(x) = f(2+2x)\, f(2-2x)$ qui donne

$$\varphi(x) = \mathrm{e}^{-1/(1-x^2)} \quad \text{si} \quad |x| < 1, \quad \varphi(x) = 0 \quad \text{si} \quad |x| \ge 1.$$

On a souvent besoin de construire des fonctions plateau, égales à 1 dans un voisinage de 0, positives ou nulles et C^∞ à support compact sur $\mathbb{R}$. Une façon de procéder est de prendre pour $n > 0$, un multiple convenable de la primitive nulle en $-\infty$ de la fonction $x \to \varphi(x+n) - \varphi(x-n)$; une autre façon, équivalente en dimension un mais plus générale en dimension d, est de convoler φ avec $\mathbf{1}_{\mathrm{A}}$, où A est un long intervalle.

Pour passer à $\mathbb{R}^d$ le plus simple est de considérer $\psi(x_1, \ldots, x_d) = \prod_{i=1}^d \varphi(x_i)$, mais on peut aussi vérifier que la formule

$$\forall x \in \mathbb{R}^d, \quad \psi(x) = \mathrm{e}^{-1/(1-|x|^2)}$$

lorsque $|x| < 1$ (la notation $|x|$ désigne la norme euclidienne de x), et $\psi(x) = 0$ si $|x| \ge 1$, fournit aussi une fonction de classe C^∞ à support compact.

Exercice 5.4. *Soit f une fonction continue 2π-périodique sur $\mathbb{R}$; on pose*

$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x)\, \mathrm{e}^{-inx} \, dx$$

pour tout $n \in \mathbb{Z}$. Montrer que si $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)| < +\infty$, on a $f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)\, \mathrm{e}^{inx}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Soient F une fonction continue sur $\mathbb{R}$, telle que $|\mathrm{F}(x)| \le \mathrm{C}\,(1+|x|)^{-a}$ pour un $a > 1$ et tout $x \in \mathbb{R}$, et $\widehat{\mathrm{F}}$ sa transformée de Fourier (avec la normalisation des probabilistes)

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \widehat{\mathrm{F}}(t) = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{F}(x)\, \mathrm{e}^{ixt} \, dx.$$

Montrer que la fonction $f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \mathrm{F}(x+2\pi n)$ est définie, continue, 2π-périodique. Trouver une relation entre les valeurs $\widehat{\mathrm{F}}(n)$, $n \in \mathbb{Z}$ et les coefficients de Fourier de f.

Démontrer la formule de Poisson,

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \mathrm{F}(n) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{\mathrm{F}}(n).$$

Attention ! L'énoncé comporte une faute de frappe sérieuse, et une omission d'hypothèse. Le résultat qu'il faut démontrer est

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \mathrm{F}(2\pi n) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{\mathrm{F}}(n).$$

et pour y arriver, **on supposera qu'en plus** des hypothèses déjà données, on ait aussi $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\widehat{\mathrm{F}}(n)| < +\infty$.

Solution. Soit f une fonction continue 2π-périodique sur $\mathbb{R}$, telle que $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)| < +\infty$. La série de fonctions $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)\, e_n$ est alors normalement convergente sur $\mathbb{R}$, donc sa somme est une fonction continue (on a posé $e_n(t) = \mathrm{e}^{int}$). Les sommes de Fourier $\mathrm{S}_n f$ convergent donc uniformément sur $\mathbb{R}$ vers la fonction g définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)\ \mathrm{e}^{inx},$$

donc $\mathrm{S}_n f$ converge aussi dans $\mathrm{L}_2(0, 2\pi)$ vers g ; il en résulte que $g = f$ presque partout ; comme f et g sont continues, il en résulte qu'elles sont égales partout (si $\mathrm{N} \subset \mathbb{R}$ est un ensemble Lebesgue-négligeable, son complémentaire est dense : en effet, tout ouvert non vide a une mesure de Lebesgue > 0).

Soit F une fonction continue sur $\mathbb{R}$, telle que $|\mathrm{F}(x)| \le \mathrm{C}\,(1+|x|)^{-a}$ pour un $a > 1$ et tout $x \in \mathbb{R}$. Définissons une suite (h_n) de fonctions continues sur $[0, 2\pi]$ par la formule $h_n(x) = \mathrm{F}(x + 2\pi n)$. On va vérifier que la série $\sum_{n\in\mathbb{Z}} h_n$ converge normalement sur $[0, 2\pi]$. Pour $n \ge 0$, on a quand $x \in [0, 2\pi]$

$$|h_n(x)| = |\mathrm{F}(x + 2\pi n)| \le \mathrm{C}\,(1 + 2\pi n)^{-a} = u_n$$

ce qui donne une série numérique majorante $\sum_{n\ge 0} u_n$ pour $\sum_{n\ge 0} h_n$, qui est convergente parce que $a > 1$; pour $n < 0$ le raisonnement est identique, mais dans ce cas

$$|h_n(x)| = |\mathrm{F}(x + 2\pi n)| \le \mathrm{C}\,\bigl(1 + 2\pi(|n| - 1)\bigr)^{-a}.$$

Posons $h(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} h_n(x)$; d'après la convergence normale on obtient par interversion série-intégrale, pour tout $k \in \mathbb{Z}$

$$c_k(h) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \int_0^{2\pi} \mathrm{F}(x + 2\pi n)\, \mathrm{e}^{-ikx}\ \frac{dx}{2\pi} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \int_{2\pi n}^{2\pi(n+1)} \mathrm{F}(y)\, \mathrm{e}^{-iky}\ \frac{dy}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\, \widehat{\mathrm{F}}(-k).$$

Sous l'hypothèse $\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\widehat{\mathrm{F}}(k)| < +\infty$ on aura d'après la première question

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \mathrm{F}(2\pi n) = h(0) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k(h) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \widehat{\mathrm{F}}(k).$$

Exercice 7.1. *Si deux fonctions $f, g \in \mathrm{L}_1(0, 2\pi)$ vérifient $c_n(f) = c_n(g)$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$, montrer que $f = g$.*

Solution. Par linéarité on se ramène à montrer que si $f \in \mathrm{L}_1(0, 2\pi)$ est telle que $c_n(f) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$, alors $f = 0$. L'exercice est complètement trivial si on connaît le théorème de Fejér, qui nous garantit que pour tout p tel que $1 \le p < +\infty$ et pour toute $f \in \mathrm{L}_p(0, 2\pi)$, la somme de Fejér

$$\sigma_n(f) = \sum_{k=-n}^{n} \Bigl(1 - \frac{|k|}{n}\Bigr)\, c_k(f)\, e_k$$

converge vers f pour la norme L_p lorsque $n \ge 1$ tend vers $+\infty$. Evidemment, $\sigma_n(f) = 0$ pour tout $n \ge 1$ lorsque les coefficients de Fourier de f sont tous nuls, ce qui donne $f = \lim_n \sigma_n(f) = 0$.

Si on ne connaît pas ce théorème, il faut ramer, et se ramener d'une façon ou d'une autre à des faits basiques sur la théorie de l'intégration. Supposons f réelle pour simplifier. Tout d'abord, l'ensemble des fonctions continues périodiques g telles que $\int_0^{2\pi} fg = 0$ est un sous-espace vectoriel fermé de $\mathrm{C}_{\mathrm{per}}(0, 2\pi)$, qui contient toutes les exponentielles, donc c'est l'espace de toutes les fonctions continues périodiques. Ensuite, considérons l'ensemble mesurable

$$\mathrm{A} = \{t : f(t) > 0\}$$

et un compact $\mathrm{K} \subset \mathrm{A}$ qui ait presque la même mesure que A, et aussi tel que $\int_\mathrm{A} f \sim \int_\mathrm{K} f$ (pourquoi peut-on trouver K ?). On peut trouver une suite décroissante de fonctions continues (g_n) telle que $0 \le g_n \le 1$, et $\mathbf{1}_\mathrm{K} = \lim_n g_n$ (limite simple). Par le théorème de convergence dominée, $\int f \mathbf{1}_\mathrm{K} = 0$. On en déduit que $\int_\mathrm{A} f = 0$, ce qui montre que A est négligeable ; on procèdera de même avec l'ensemble $\{f < 0\}$, pour en déduire que $f = 0$ presque partout.

En fait on est en train de tourner autour du théorème d'unicité pour les mesures σ-additives : si deux mesures σ-additives coïncident sur une algèbre $\mathcal{D}$, elles coïncident aussi sur la tribu engendrée par $\mathcal{D}$. On applique ce résultat à la mesure $f(x)\,dx$, qui coïncide avec la mesure nulle sur l'algèbre des réunions finies d'intervalles. On peut aussi invoquer la clause d'unicité dans le théorème de représentation de Riesz : étant donnée une forme linéaire continue ℓ sur C(K), il existe une **unique** mesure μ sur $(\mathrm{K}, \mathcal{B})$ telle que $\int g\, d\mu = \ell(g)$ pour toute $g \in \mathrm{C}(\mathrm{K})$.

Exercice 7.2. *Si deux fonctions $f, g \in \mathrm{L}_1(0, 2\pi)$ sont égales dans un intervalle non vide $]s - \varepsilon, s + \varepsilon[$, montrer que $\lim_n \bigl(\mathrm{S}_n(f; s) - \mathrm{S}_n(g; s)\bigr) = 0$ (principe de localisation).*

Solution. Il est agréable de prolonger les fonctions f, g en fonctions périodiques sur $\mathbb{R}$, de période 2π. Par translation on peut se ramener à $s = 0$, et par linéarité, il suffit de voir que si $f = 0$ dans $[-\varepsilon, \varepsilon]$, $\varepsilon > 0$, alors $\lim_n \mathrm{S}_n(f; 0) = 0$. Cela résulte bien sûr des théorèmes à la Dirichlet-Dini (voir séances des 8 et 15 novembre), mais c'est aussi très facile directement, comme on va le voir. On écrit

$$\mathrm{S}_n f(0) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin((n+1/2)x)}{\sin(x/2)}\, f(x)\, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx + x/2)\, h(x)\, dx$$

où h est la fonction intégrable sur $[-\pi, \pi]$, égale à 0 sur $[-\varepsilon, \varepsilon]$ et à $f(x)/\sin(x/2)$ en dehors ; si $x \in [-\pi, \pi]$ est en dehors de $[-\varepsilon, \varepsilon]$ on a $|\sin(x/2)| \geq \sin(\varepsilon/2) > 0$, donc $|h|$ est bornée par $|f|/\sin(\varepsilon/2)$, donc $h \in \mathrm{L}_1(0, 2\pi)$. Le résultat découle maintenant du lemme de Riemann-Lebesgue appliqué à h (et Riemann-Lebesgue se démontre par densité des fonctions continues dans L_1, ou bien densité des fonctions en escalier).

Exercice 7.5. *On considère l'opérateur linéaire borné T_g de $\mathrm{L}_1(0, 2\pi)$ dans lui-même donné par $\mathrm{T}_g(f) = f * g$, où g est une fonction fixée de L_1. Montrer que $\|\mathrm{T}_g\| = \|g\|_1$.*

Montrer la même égalité pour l'opérateur T_g, agissant cette fois de $\mathrm{C}_{\mathrm{per}}([0, 2\pi])$ dans lui-même.

Déduire du théorème de Banach-Steinhaus qu'il existe des fonctions continues et 2π-périodiques dont la série de Fourier ne converge pas uniformément, et des fonctions de $\mathrm{L}_1(0, 2\pi)$ dont la série de Fourier ne converge pas en norme L_1.

Solution. On sait déjà que
$$\|f * g\|_1 \leq \|g\|_1 \, \|f\|_1$$
pour toute $f \in \mathrm{L}_1(0, 2\pi)$, ce qui montre que $\|\mathrm{T}_g\|_{\mathcal{L}(\mathrm{L}_1)} \leq \|g\|_1$. Considérons une suite (f_n) de fonctions ≥ 0 d'intégrale 1 qui fournit une approximation de l'identité, par exemple la suite des noyaux de Fejér. On sait que $f_n * g$ tend vers g dans L_1, donc
$$\|g\|_1 = \lim_n \|f_n * g\|_1 \leq \lim_n \big(\|\mathrm{T}_g\|_{\mathcal{L}(\mathrm{L}_1)} \, \|f_n\|_1\big) = \|\mathrm{T}_g\|_{\mathcal{L}(\mathrm{L}_1)},$$
ce qui donne le premier résultat.

Pour la norme uniforme le début est le même,
$$\|f * g\|_\infty \leq \|g\|_1 \, \|f\|_\infty$$
pour toute $f \in \mathrm{C}_{\mathrm{per}}(0, 2\pi)$, ce qui montre que $\|\mathrm{T}_g\|_{\mathcal{L}(\mathrm{C})} \leq \|g\|_1$. Cette inégalité nous montre que l'application linéaire $g \in \mathrm{L}_1 \to \mathrm{T}_g$ est continue de L_1 dans $\mathcal{L}(\mathrm{C})$; si nous montrons qu'elle est isométrique sur un sous-espace dense, elle sera isométrique sur L_1 tout entier.

Supposons donc que $g \in \mathrm{L}_1(0, 2\pi)$ soit de plus continue, à valeurs complexes, et posons $g(\theta) = \rho(\theta)\, \mathrm{e}^{ia(\theta)}$ avec $\rho(\theta) \geq 0$ et $a(\theta)$ réel. La fonction $\rho = |f|$ est continue. Posons $f_n(\theta) = \min(n\rho(-\theta), 1)\, \mathrm{e}^{ia\theta}$; on vérifie que f_n est continue, de norme uniforme ≤ 1 et
$$\|\mathrm{T}_g\|_{\mathcal{L}(\mathrm{C})} \geq (f_n * g)(0) = \int_0^{2\pi} f_n(-\theta) g(\theta) \, \frac{d\theta}{2\pi} \geq \int_{\{\rho \geq 1/n\}} |g(\theta)| \, \frac{d\theta}{2\pi}$$
tend vers $\|g\|_1$. Il en résulte que $g \to \mathrm{T}_g$ est isométrique, de $\mathrm{C}_{\mathrm{per}}$ muni de la norme L_1 dans $\mathcal{L}(\mathrm{C}_{\mathrm{per}})$. On en déduit $\|\mathrm{T}_g\| = \|g\|_1$ en général.

Posons $\mathrm{E} = \mathrm{L}_1(0, 2\pi)$ ou bien $\mathrm{E} = \mathrm{C}_{\mathrm{per}}([0, 2\pi])$. C'est un espace de Banach ; la suite d'opérateurs $\mathrm{T}_n : f \in \mathrm{E} \to \mathrm{S}_n f$ est formée d'opérateurs continus de E dans E ; si on avait convergence dans E de $\mathrm{S}_n f$ vers une limite, pour tout $f \in \mathrm{E}$, on en déduirait que $\sup_n \|\mathrm{T}_n\| < +\infty$ d'après le théorème de Banach-Steinhaus. Or T_n est l'opérateur de convolution avec $g_n = \mathrm{D}_n$, le noyau de Dirichlet. D'après la première partie de l'exercice, on a $\|\mathrm{T}_n\| = \|\mathrm{D}_n\|_1$. On va vérifier que $\|\mathrm{D}_n\|_1$ tend vers l'infini, ce qui nous donnera le résultat de non convergence suivant : il existe des fonctions $f \in \mathrm{E}$ telle que les sommes de Fourier ne convergent pas vers f dans E, lorsque $\mathrm{E} = \mathrm{L}_1$ ou bien $\mathrm{E} = \mathrm{C}_{\mathrm{per}}$.

Terminons. En utilisant $|\sin(x)| \le |x|$ pour $|x| \le \pi/2$

$$\|\mathrm{D}_n\|_1 = \int_0^{2\pi} \Bigl|\frac{\sin(n+1/2)t}{\sin(t/2)}\Bigr| \,\frac{dt}{2\pi} \ge \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} |\sin(n+1/2)t| \,\frac{dt}{t}$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi n+\pi/2} |\sin(s)| \,\frac{ds}{s} \ge \frac{2}{\pi^2}\Bigl(\int_0^{\pi} \sin(s)\,ds\Bigr)(1+1/2+\cdots+1/n)$$

qui tend certainement vers $+\infty$. Si on veut être un peu plus précis, on écrit une ligne de plus,

$$\|\mathrm{D}_n\|_1 \ge \frac{4}{\pi^2}\,(1+1/2+\cdots+1/n) \ge \frac{4}{\pi^2}\,\ln(n).$$

En fait, la démonstration du théorème de Banach-Steinhaus dit même que dans un certain sens, l'ensemble des fonctions f de E pour lesquelles la série de Fourier converge dans E est très petit dans E : c'est la réunion d'une suite d'ensembles fermés d'intérieur vide, les ensembles F_k formés des fonctions $f \in \mathrm{E}$ telles que $\sup_n \|\mathrm{S}_n f\|_{\mathrm{E}} \le k$; si l'un de ces ensembles F_k était d'intérieur non vide, on en déduirait que $\sup_n \|\mathrm{T}_n\| < +\infty$, ce qui n'est pas le cas.

Exercice 8.1. *Si $f \in \mathrm{L}_1(\mathbb{R}^d)$ et $g \in \mathrm{L}_2(\mathbb{R}^d)$, montrer que la transformée de Fourier de $f * g$ est le produit des transformées de Fourier de f et de g.*

Solution. On sait que le résultat est vrai quand f et g sont dans L_1. Si $g \in \mathrm{L}_2$, on peut trouver une suite (g_n) dans $\mathrm{L}_1 \cap \mathrm{L}_2$ qui tend vers g dans L_2 (il suffit de tronquer g à l'intervalle $[-n,n]$). On sait que la transformation de Fourier $h \to \mathcal{F}(h)$ est continue de L_2 dans L_2, donc $\mathcal{F}(f*g)$ est la limite dans L_2 de $\mathcal{F}(f*g_n) = \widehat{f}\,\widehat{g}_n$; d'autre part, $\widehat{g}$ est la limite dans L_2 de $\widehat{g}_n$ et $\widehat{f}$ est bornée par $\|f\|_1$, donc

$$\|\widehat{f}\,\widehat{g} - \mathcal{F}(f*g_n)\|_2^2 = \int \bigl|\widehat{f} * (\widehat{g} - \widehat{g}_n)\bigr|^2 \le \|f\|_1^2 \int \bigl|\widehat{g} - \widehat{g}_n\bigr|^2 \to 0.$$

De l'unicité de la limite dans L_2 résulte que $\mathcal{F}(f*g) = \widehat{f}\,\widehat{g}$.

Exercice 8.2. *Calculer la transformée de Fourier de la fonction h_ε définie sur $\mathbb{R}$ par $h_\varepsilon(x) = x^{-1}\,\mathbf{1}_{\{|x|>\varepsilon\}}$ (où $\varepsilon > 0$).*

Indication. Considérer pour $x > 0$

$$\mathrm{F}(x) = \int_x^{+\infty} \frac{\sin y}{y}\,dy.$$

Montrer que $\mathrm{F}(x) = \mathrm{O}(x^{-1})$ quand $x \to +\infty$. Exprimer la transformée de Fourier de h_ε à l'aide de F (on pourra étudier la limite de la transformée de Fourier de $\mathbf{1}_{[-n,n]}\,h_\varepsilon$ lorsque $n \to +\infty$).

Montrer que pour toute $f \in \mathrm{L}_2(\mathbb{R})$, la limite $\mathrm{H}(f) = \lim_\varepsilon f * h_\varepsilon$ existe, en norme L_2, lorsque $\varepsilon \to 0$.

Montrer que la limite existe, en norme uniforme, lorsque f est C^1 à support compact.

Exprimer la transformée de Fourier de $\mathrm{H}(f)$. Montrer qu'il existe une constante $c > 0$ telle que $c\,\mathrm{H}$ soit un opérateur unitaire de $\mathrm{L}_2(\mathbb{R})$.

Solution. Etudions d'abord la fonction F définie par

$$\mathrm{F}(x) = \int_x^{+\infty} \frac{\sin y}{y}\, dy$$

pour $x > 0$, et $\mathrm{F}(x) = -\mathrm{F}(-x)$ pour $x < 0$. On verra un peu plus bas une justification de l'existence de l'intégrale généralisée ci-dessus. On a

$$\lim_{x\to 0, x>0} \mathrm{F}(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin y}{y}\, dy = \frac{\pi}{2}\cdot$$

Cette égalité s'obtient de diverses manières, par exemple par calcul de résidu. En revanche la convergence de l'intégrale se justifie de la même façon que le fait que $\mathrm{F}(x) = \mathrm{O}(x^{-1})$ quand $x \to +\infty$. Par intégration par parties, on a pour $0 < x < \mathrm{A}$

$$\int_x^{\mathrm{A}} \frac{\sin y}{y}\, dy = \Big[\frac{\cos x - \cos y}{y}\Big]_{y=x}^{\mathrm{A}} + \int_x^{\mathrm{A}} \frac{\cos x - \cos y}{y^2}\, dy.$$

La dernière intégrale tend, quand A tend vers $+\infty$, vers l'intégrale absolument convergente $\int_x^{+\infty} (\cos x - \cos y) y^{-2}\, dy$, alors que le terme tout intégré tend vers 0. On en déduit que $\mathrm{F}(x)$ est bien défini et que

$$|\mathrm{F}(x)| = \Big| \int_x^{+\infty} \frac{\cos x - \cos y}{y^2}\, dy \Big| \le 2 \int_x^{+\infty} \frac{dy}{y^2} = \frac{2}{x}\cdot$$

Il en résulte que $\mathrm{F} \in \mathrm{L}_2(\mathbb{R})$, et aussi que F est bornée (pour $x > 1$, appliquer ce qui précède, et au voisinage de 0 utiliser l'existence de la limite

$$\mathrm{F}(0+) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin y}{y}\, dy = \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos y}{y^2}\, dy.$$

En fait l'étude de la dérivée de F et le fait que $\mathrm{F}(2k\pi + \pi) \le \mathrm{F}(2k\pi + 3\pi) \le 0 \le \mathrm{F}(2k\pi + 2\pi) \le \mathrm{F}(2k\pi)$ pour k entier ≥ 0 impliquent que $|\mathrm{F}(x)| \le \mathrm{F}(0+) = \pi/2$ pour tout x).

Passons à la transformée de Fourier de h_ε ; cette fonction n'est pas dans $\mathrm{L}_1(\mathbb{R})$, donc on procèdera par limite dans L_2 de fonctions L_1, en posant $h_{\varepsilon,n} = \mathbf{1}_{\{\varepsilon \le |x| \le n\}}\, x^{-1}$ et en utilisant $\lim_{n\to+\infty} \|h_\varepsilon - h_{\varepsilon,n}\|_2 = 0$. La fonction $h_{\varepsilon,n}$ est impaire, donc pour $t > 0$

$$\widehat{h}_{\varepsilon,n}(t) = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{itx}\, h_{\varepsilon,n}(x)\, dx = i \int_{\mathbb{R}} \sin(tx) h_{\varepsilon,n}(x)\, dx =$$

$$= 2i \int_\varepsilon^n \frac{\sin(tx)}{x}\, dx = 2i \int_{\varepsilon t}^{nt} \frac{\sin(y)}{y}\, dy = 2i\big(\mathrm{F}(\varepsilon\, t) - \mathrm{F}(n\, t)\big).$$

Pour $t < 0$ on obtient le même résultat, compte tenu de notre définition de F pour les valeurs < 0 de la variable. La fonction $k_n : t \to \mathrm{F}(n\, t)$ vérifie $\|k_n\|_2 = n^{-1/2} \|\mathrm{F}\|_2 \to 0$, donc en passant à la limite dans $\mathrm{L}_2(\mathbb{R})$ on obtient

$$\widehat{h}_\varepsilon(t) = 2\, \mathrm{F}(\varepsilon\, t).$$

On note en particulier que $\|\widehat{h}_\varepsilon\|_\infty \le \mathrm{C} = 2\, \|\mathrm{F}\|_\infty$, et quand $\varepsilon > 0$ tend vers 0, on a si $t \ne 0$

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \widehat{h}_\varepsilon(t) = i\pi\, \mathrm{sign}(t) = \mathrm{V}(t).$$

Pour montrer que $f * h_\varepsilon$ converge dans L_2, il suffit d'après Parseval de regarder la convergence L_2 du côté Fourier. Or

$$\widehat{f * h_\varepsilon} = \widehat{f}\,\widehat{h_\varepsilon}$$

converge simplement vers $\widehat{f}\,\mathrm{V}$, et

$$\Big|\widehat{f * h_\varepsilon} - \widehat{f}\,\mathrm{V}\Big|^2 \le 4\mathrm{C}^2 |\widehat{f}|^2$$

qui est intégrable, ce qui permet d'appliquer le théorème de convergence dominée. Si $\mathrm{H}(f)$ désigne la limite dans $\mathrm{L}_2(\mathbb{R})$ de $f * h_\varepsilon$, ce qui précède montre que

$$\widehat{\mathrm{H}(f)}(t) = i\pi \widehat{f}(t) \ \text{ si } \ t > 0, \ \widehat{\mathrm{H}(f)}(t) = -i\pi \widehat{f}(t) \ \text{ si } \ t < 0.$$

Par Parseval il est clair que $\|\mathrm{H}f\|_2 = \pi\,\|f\|_2$, donc $\mathrm{U} = \pi^{-1}\mathrm{H}$ est un opérateur isométrique de $\mathrm{L}_2(\mathbb{R})$. Mais comme il est clair avec Fourier que $\mathrm{U}^2 = -\,\mathrm{Id}$, on déduit que l'opérateur U est unitaire.

Supposons que φ soit de classe C^1 et à support compact. On a

$$(\varphi * h_\varepsilon)(x) = \int_{|y|>\varepsilon} \frac{\varphi(x-y)}{y}\,dy$$

et on va voir que la limite quand $\varepsilon \to 0$ existe pour tout x. Soit θ une fonction paire, de classe C^2, à support compact, et telle que $\theta = 1$ dans un voisinage de 0. On a $\int_{|y|>\varepsilon} \theta(y) y^{-1}\,dy = 0$ par imparité donc

$$(\varphi * h_\varepsilon)(x) = \int_{|y|>\varepsilon} \frac{\varphi(x-y) - \varphi(x)\theta(y)}{y}\,dy\,;$$

la nouvelle fonction sous l'intégrale se prolonge par continuité en $y = 0$, et elle est toujours à support compact, donc bornée à support compact, donc dans $\mathrm{L}_1(\mathbb{R})$. La limite $\mathrm{L}(x)$ de $(\varphi * h_\varepsilon)(x)$ est alors tout simplement l'intégrale sur $\mathbb{R}$,

$$\mathrm{L}(x) = \int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi(x-y) - \varphi(x)\theta(y)}{y}\,dy.$$

En fait $y \to \big(\varphi(x-y) - \varphi(x)\theta(y)\big)/y$ est bornée sur $\mathbb{R}$ par une constante $\mathrm{C}(\varphi,\theta)$ indépendante de x (je trouve $\mathrm{C}(\varphi,\theta) \le \|\varphi'\|_\infty + \|\varphi\|_\infty \max_y |\big(1-\theta(y)\big)/y|$), et

$$\Big|\mathrm{L}(x) - (\varphi * h_\varepsilon)(x)\Big| = \Big|\int_{|y|\le\varepsilon} \frac{\varphi(x-y) - \varphi(x)\theta(y)}{y}\,dy\Big| \le 2\varepsilon\,\mathrm{C}(\varphi,\theta)$$

montre que la limite est uniforme en x. Puisque par ailleurs on avait convergence L_2 on en déduit

$$\mathrm{L}(x) = (\mathrm{H}\varphi)(x) = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{|y|>\varepsilon} \frac{\varphi(x-y)}{y}\,dy.$$

On dit qu'on a pris la *valeur principale* (de Cauchy) de l'intégrale non convergente. L'opérateur H sur $\mathrm{L}_2(\mathbb{R})$ s'appelle la *transformation de Hilbert*.