Prépa. Agrég. écrit d'Analyse, Annexe n° 1.

Développement d'une fonction en série de Fourier

Voir Zuily-Queffélec, chapitre IV, sections II.4, III.1, pour l'essentiel des développements qui suivent.

On désigne par f la fonction 2π-périodique sur $\mathbb{R}$, définie par

$$f(x) = \frac{1}{2}\,(\pi - x)$$

lorsque $0 \le x < 2\pi$. Comme il s'agit d'une fonction réelle, on va en profiter pour calculer, pour une fois, ses coefficients de Fourier *réels*,

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(nt)\,dt, \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(nt)\,dt.$$

Les coefficients (a_n) sont calculés pour $n \ge 0$, et les (b_n) pour $n \ge 1$. On retrouve ensuite les sommes de Fourier usuelles sous la forme

$$(\mathrm{S}_n f)(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}\bigl(a_k\cos(kx) + b_k\sin(kx)\bigr).$$

La petite bizarrerie dans le traitement du coefficient a_0 vient de la normalisation : la constante 1 est de norme 1 dans l'espace $\mathrm{L}_2([0,2\pi], dx/(2\pi))$, mais les fonctions sinus ou cosinus sont de norme $1/\sqrt{2}$.

Ici, la fonction f proposée est (Lebesgue-équivalente à une fonction) impaire, donc tous les coefficients (a_n) sont nuls et pour tout $n \ge 1$,

$$b_n(f) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\sin(nt)\,dt = \Bigl[-\Bigl(1 - \frac{t}{\pi}\Bigr)\frac{\cos(nt)}{n}\Bigr]_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\frac{\cos(nt)}{\pi n}\,dt = \frac{1}{n}$$

de sorte que $(\mathrm{S}_n f)(x) = \sum_{k=1}^{n} k^{-1}\sin(kx)$. On posera

$$\mathrm{G}_n(x) = (\mathrm{S}_n f)(x) = \sum_{k=1}^{n}\frac{\sin(kx)}{k}.$$

Il y a beaucoup de choses à dire sur cet exemple, allant de la simple étude d'une série de fonctions par les méthodes du DEUG à des aspects plus sophistiqués tels que le phénomène de Gibbs.

Etude de la convergence simple

On étudie la série de fonctions

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\sin(kx)}{k}. \tag{1}$$

C'est la méthode d'Abel, l'analogue discret de l'intégration par parties, qui permet d'étudier la question. Posons $\mathrm{A}_0(x) = 0$ et pour $n \ge 1$

$$\mathrm{A}_n(x) = \sum_{k=1}^{n}\sin(kx).$$

En considérant cette expression comme la partie imaginaire de $\sum_{k=0}^{n} \mathrm{e}^{ikx}$ on obtient la majoration $|\mathrm{A}_n(x)| \le 2|1-\mathrm{e}^{ix}|^{-1} = 1/\sin(x/2)$. On voit donc que la suite $(\mathrm{A}_n(x))$ est bornée pour tout x tel que $0 < x < 2\pi$. Elle est même bornée uniformément (par $2/|1-\mathrm{e}^{i\varepsilon}| = 1/\sin(\varepsilon/2)$) sur les intervalles de la forme $[\varepsilon, 2\pi-\varepsilon]$, $0 < \varepsilon < \pi$. On écrit ensuite

$$\mathrm{G}_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\bigl(\mathrm{A}_k(x) - \mathrm{A}_{k-1}(x)\bigr) = \sum_{k=1}^{n-1} \Bigl(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\Bigr)\mathrm{A}_k(x) + \frac{\mathrm{A}_n(x)}{n}.$$

Comme $\mathrm{A}_n(x)/n$ tend vers 0, la convergence de la série (1) au point x équivaut à la convergence de la série

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\mathrm{A}_k(x)}{k(k+1)} \tag{2}$$

qui est bien claire maintenant, puisque cette nouvelle série est absolument convergente.

On voit que la série (2) converge normalement sur $[\varepsilon, 2\pi-\varepsilon]$, $0 < \varepsilon < \pi$, et comme $\mathrm{A}_n(x)/n$ tend uniformément vers 0 sur le même intervalle, on conclut que la série (1) converge uniformément sur tout intervalle $[\varepsilon, 2\pi-\varepsilon]$, $0 < \varepsilon < \pi$ (on vient d'effleurer le *critère d'Abel uniforme*). Bien entendu (voir paragraphe suivant) la série (1) ne converge pas uniformément sur $[0, 2\pi]$.

Application du théorème de Dirichlet

Le théorème de Dirichet nous redonne la convergence simple de la série (1), qui est la série de Fourier d'une fonction C^1 par morceaux. D'après ce théorème, la série de Fourier de f converge en tout point, et la somme est égale à $f(x)$ en tout point de continuité de f. On a donc pour tout x tel que $0 < x < 2\pi$

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\sin(kx)}{k} = \frac{\pi - x}{2}.$$

Bien sûr, la série converge en 0 et sa somme est nulle ; cette valeur correspond bien à la demi-somme des limites à droite et à gauche de f. On voit que la fonction somme de la série (1) est discontinue en 0, ce qui explique que la série de fonctions ne peut pas converger uniformément sur $[0, 2\pi]$. Ce défaut de convergence uniforme au voisinage de 0 sera précisé par l'étude du phénomène de Gibbs.

Bricoles classiques

On sait que la série (1) converge dans L_2 vers la fonction f. On obtient donc, en utilisant l'orthogonalité et la valeur de la norme des fonctions sinus dans $\mathrm{L}_2([0, 2\pi], dx/2\pi)$,

$$\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 \,\frac{dt}{2\pi} = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \Bigl(\frac{\pi - t}{2}\Bigr)^2 dt = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{u^2}{4}\,du = \frac{\pi^2}{12}.$$

Intégrons l'égalité, valable au sens de L_2,

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{n} \;;$$

fixons x tel que $0 < x < 2\pi$; comme pour toute fonction $g \in \mathrm{L}_2$, l'intégrale $\int_0^x g(t)\,dt$ est le produit scalaire de g avec $\mathbf{1}_{[0,x]}$, la convergence L_2 de la série implique que pour $0 < x < 2\pi$

$$\int_0^x \frac{\pi - t}{2}\,dt = \int_0^x f(t)\,dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^x \frac{\sin(nt)}{n}\,dt$$

ce qui donne

$$\frac{\pi}{2}\,x - \frac{\pi}{4}\,x^2 = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1 - \cos(nx)}{n^2}$$

qui redonne la fameuse relation $\sum_{n\geq 1} n^{-2} = \pi^2/6$ en prenant la valeur en $x = \pi$ et en travaillant un tout petit peu. On a

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(nx)}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} - \frac{\pi}{2}\,x + \frac{\pi}{4}\,x^2$$

pour $0 < x < 2\pi$; on peut s'en servir pour calculer $\sum_{n\geq 1} n^{-4}$, comme on a calculé $\sum_{n\geq 1} n^{-2}$ précédemment, ou continuer d'intégrer pour trouver de nouvelles égalités.

Phénomène de Gibbs

Pour en savoir plus, voir Chatterji, volume 3, section 4.4.1, en particulier figures 4.2, 4.3 et 4.4, ainsi que le paragraphe de remarques 4.4.2.

On fixe $\alpha > 0$, et on s'intéresse à la suite $(\mathrm{G}_n(\alpha/n))$ (autrement dit, on examine la suite (G_n) avec un effet de zoom, qui dilate la région $[0, 1/n]$ pour nous la montrer avec une taille constante). On a

$$\mathrm{G}_n(\alpha/n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin(k\alpha/n)}{n} = \frac{\alpha}{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin(k\alpha/n)}{k\alpha/n}$$

et on reconnaît une somme de Riemann pour la fonction $x \to \sin(x)/x$, donc

$$\lim_n \mathrm{G}_n(\alpha/n) = \int_0^\alpha \frac{\sin(x)}{x}\,dx = \mathrm{F}(\alpha).$$

Cette fonction $\mathrm{F}(x) = \int_0^x (\sin(t)/t)\,dt$ est nulle en 0, puis croît jusqu'à son maximum $\mathrm{F}(\pi) \simeq 1.85$, puis présente des oscillations et converge à l'infini vers $\pi/2$. On voit donc que le graphe de G_n, vu à l'échelle convenable, reproduit une approximation du graphe de F. En particulier, il y a un dépassement de la valeur $f(0+) = \pi/2$, jusqu'au niveau $\mathrm{F}(\pi) > \pi/2$, qui est approché aux points π/n.

En revanche, si on regarde le graphe de G_n à l'échelle normale, pour n assez grand, il semble présenter une pointe en $x = 0$, qui monte au dessus de $f(0+) = \pi/2$, jusqu'à la valeur $\mathrm{F}(\pi)$ (voir Chatterji, figure 4.2).

Pour clore ce paragraphe, il faut mentionner que le phénomène de Gibbs est général : il se produit chaque fois que le théorème de Dirichlet est applicable en un point x à une fonction C^1 par morceaux qui présente un saut d'amplitude s au point x ; la “pointe” dont on parlait ci-dessus est proportionnelle à la valeur de s, et ne dépend que de s.

Construction d'une série de Fourier divergente en un point

La suite (G_n) est uniformément bornée. En effet, on voit que la somme de Fejér $\sigma_n f$ est donnée par

$$(\sigma_n f)(x) = \sum_{k=1}^{n} (1 - k/n) \frac{\sin(kx)}{k} = \mathrm{G}_n(x) - \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin(kx)}{n}$$

et on sait que $\|\sigma_n f\|_\infty \leq \|f\|_\infty = \pi/2$ par les propriétés du noyau de Fejér. Mais

$$\Bigl|(\sigma_n f)(x) - \mathrm{G}_n(x)\Bigr| = \Bigl|(\sigma_n f)(x) - \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin(kx)}{k}\Bigr| = \Bigl|\sum_{k=1}^{n} \frac{\sin(kx)}{n}\Bigr| \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} = 1,$$

ce qui montre que $|\mathrm{G}_n(x)| \leq \frac{\pi}{2} + 1$ pour tout n et tout x.

On va retrouver l'ordre de grandeur de la norme de l'application $g \in \mathrm{C}_{\mathrm{per}} \to \mathrm{S}_n g$. On a vu que cette norme est exactement égale à la norme L_1 du noyau de Dirichlet D_n, et cette dernière est de l'ordre de $\ln n$. Les coefficients de Fourier complexes de f s'obtiennent facilement à partir des coefficients réels, $c_n(f) = 1/(2in)$ pour tout $n \neq 0$. La fonction $g : x \to \mathrm{e}^{-inx}\, \mathrm{G}_{2n}(x)$ est continue, de norme uniforme $\leq \frac{\pi}{2} + 1$, et

$$(\mathrm{S}_n g)(x) = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{2ik}\, \mathrm{e}^{i(k-n)x}$$

qui donne

$$\|\mathrm{S}_n g\|_\infty \geq |(\mathrm{S}_n g)(0)| = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} \geq \frac{1}{2} \ln n.$$

Si on a compris ce phénomène il est facile d'imaginer comment fabriquer une série de Fourier dont la somme *au sens de* L_2 sera une fonction continue, mais qui divergera en un point, disons au point 0.

On appelle *spectre* d'un polynôme trigonométrique P l'ensemble des entiers $n \in \mathbb{Z}$ tels que $c_n(\mathrm{P}) \neq 0$; ainsi, G_n est un polynôme trigonométrique dont le spectre est contenu dans $\{-n, \ldots, n\}$ (transformer les sinus en exponentielles complexes). Si on multipie G_n par la fonction e^{ibx}, b entier, on translate son spectre de b. Ainsi, si au lieu de considérer $x \to \mathrm{e}^{-inx}\, \mathrm{G}_n(x)$ comme ci dessus on considère $\mathrm{P} : x \to \mathrm{e}^{ibx}\, \mathrm{G}_n(x)$ avec $b \geq n$, le spectre de P sera contenu dans $\{b-n, \ldots, b+n\} \subset \mathbb{N}$, et on aura

$$(\mathrm{S}_b \mathrm{P})(x) = \sum_{j=-n}^{-1} \frac{\mathrm{e}^{i(b+j)x}}{2ij} = -\sum_{j=1}^{n} \frac{\mathrm{e}^{i(b-j)x}}{2ij}$$

qui est très grand en $x = 0$,

$$|(\mathrm{S}_b \mathrm{P})(0)| = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{2j} \geq \frac{1}{2} \ln n.$$

En revanche la somme de Fourier $\mathrm{S}_{b+n}\mathrm{P}$ contient tous les coefficients non nuls de P, donc $\mathrm{S}_{b+n}\mathrm{P} = \mathrm{P}$ et

$$|(\mathrm{S}_{b+n}\mathrm{P})(0)| \leq \|\mathrm{S}_{b+n}\mathrm{P}\|_\infty = \|\mathrm{P}\|_\infty = \|\mathrm{G}_n\|_\infty \leq \frac{\pi}{2} + 1.$$

Supposons que (P_k) soit une suite de polynômes trigonométriques, telle que la série $\sum_{k \ge 0} \mathrm{P}_k$ soit normalement convergente, et que les spectres des P_k soient des intervalles I_k deux à deux disjoints et successifs contenus dans $\mathbb{N}$. La fonction $g = \sum_k \mathrm{P}_k$ est continue, et la convergence normale implique que $c_n(g) = \sum_k c_n(\mathrm{P}_k)$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$, ce qui se calcule facilement : il y a au plus un entier k tel que $c_n(\mathrm{P}_k) \ne 0$, correspondant au seul k possible tel que I_k contienne n. Pour chaque entier $k > 0$, choisissons un entier n situé au milieu de I_k ; tous les intervalles $\mathrm{I}_0, \ldots, \mathrm{I}_{k-1}$ sont entièrement situés avant n (ils sont contenus dans $\{0, \ldots, n\}$), ce qui entraîne que $\mathrm{S}_n \mathrm{P}_j = \mathrm{P}_j$ pour tout $j < k$, alors que $\mathrm{S}_n \mathrm{P}_j = 0$ lorsque $j > k$. On a donc

$$(\mathrm{S}_n g)(0) = (\mathrm{P}_0 + \cdots + \mathrm{P}_{k-1})(0) + (\mathrm{S}_n \mathrm{P}_k)(0).$$

La première somme $(\mathrm{P}_0 + \cdots + \mathrm{P}_{k-1})(0)$ ne pose aucun problème grâce à la convergence normale. En revanche, on peut *sans casser la convergence normale*, rendre la dernière expression arbitrairement grande (de l'ordre de $(\ln |\mathrm{I}_k|)\, \|\mathrm{P}_k\|_\infty$, où $|\mathrm{I}_k|$ désigne le cardinal de I_k, comme on l'a vu avec $x \to \mathrm{e}^{ibx}\, \mathrm{G}_m(x)$). Entrons dans les détails.

On pose $b_k = 2^{k^2}$ pour tout $k \ge 0$ et on choisit $\mathrm{I}_k = \{b_{k+1} - b_k, \ldots, b_{k+1} + b_k\}$. On vérifie que les intervalles (I_k) sont deux à deux disjoints (on a $b_{k+1} \ge 8 b_k$ dès que $k \ge 1$). Posons

$$\mathrm{P}_k(x) = \frac{1}{k^{3/2}}\, \mathrm{e}^{i b_{k+1} x}\, \mathrm{G}_{b_k}(x).$$

On a $\|\mathrm{P}_k\| \le k^{-3/2} \, (\frac{\pi}{2} + 1)$ d'après l'étude précédente, donc la série est normalement convergente. Par ailleurs on vérifie que le spectre de P_k est contenu dans I_k (parce que le spectre de G_{b_k} est contenu dans $\{-b_k, \ldots, b_k\}$).

On a pour un certain $c > 0$ indépendant de k

$$|(\mathrm{S}_{b_{k+1}} \mathrm{P}_k)(0)| = k^{-3/2} \sum_{p=1}^{b_k} \frac{1}{2p} \ge \frac{1}{2}\, k^{-3/2} \ln b_k \ge c\, k^{1/2},$$

et

$$|(\mathrm{S}_{b_{k+1}} g)(0)| = \bigl|(\mathrm{P}_0 + \cdots + \mathrm{P}_{k-1})(0) + (\mathrm{S}_{b_{k+1}} \mathrm{P}_k)(0)\bigr| \ge$$

$$\ge |(\mathrm{S}_{b_{k+1}} \mathrm{P}_k)(0)| - |(\mathrm{P}_0 + \cdots + \mathrm{P}_{k-1})(0)| \ge c\, k^{1/2} - \sum_{j=1}^{k-1} j^{-3/2}$$

qui tend vers $+\infty$ avec k.

La fonction g est donc un exemple d'une fonction continue dont la série de Fourier diverge en au moins un point. On peut facilement modifier l'exemple pour obtenir une fonction continue dont la série de Fourier diverge sur un ensemble dénombrable donné à l'avance. En revanche, la série de Fourier d'une fonction continue f converge vers $f(x)$ pour presque toute valeur de x : cela résulte du (très) difficile théorème de Carleson.

Dans le cas de L_1, la méthode Banach-Steinhaus prouve l'existence de fonctions $f \in \mathrm{L}_1$ dont la série de Fourier ne converge pas en norme L_1. Un exemple de Kolmogorov donne une fonction de L_1 dont la série de Fourier diverge presque partout. C'est nettement plus difficile que l'exemple présenté ci-dessus.