Prépa. Agrég. écrit d'Analyse, Annexe n° 2.

Polynômes et fonctions d'Hermite

Voir Chatterji, vol. 3, paragraphe 4.7.10 et autour.

On veut fabriquer une suite de polynômes orthogonaux dans l'espace $\mathrm{L}_2(\mathbb{R}, d\mu)$, où la mesure μ est donnée par $d\mu(x) = \mathrm{e}^{-x^2}\, dx$. D'après un théorème vu dans la leçon "méthodes hilbertiennes", on sait que la suite des fonctions monômes $m_n : x \to x^n$, $n = 0, 1, \ldots$ est *totale* dans $\mathrm{L}_2(\mathbb{R}, \mu)$, c'est à dire que l'espace des fonctions polynomiales à coefficients complexes est dense dans l'espace complexe $\mathrm{L}_2(\mathbb{R}, \mu)$ (ou bien que l'espace des fonctions polynomiales à coefficients réels est dense dans l'espace réel $\mathrm{L}_2(\mathbb{R}, \mu)$, si on travaille dans le cadre réel). En appliquant la méthode d'orthonormalisation de Schmidt à la suite $(m_n)_{n\ge 0}$ des monômes, on trouvera des polynômes successifs (P_n) de degrés $n = 0, 1, \ldots$ et deux à deux orthogonaux. Si on les normalise dans $\mathrm{L}_2(\mathbb{R}, \mu)$, ils formeront une base hilbertienne de $\mathrm{L}_2(\mathbb{R}, \mu)$: en effet, on a pour des raisons évidentes d'algèbre linéaire

$$\mathrm{Vect}(\mathrm{P}_0, \ldots, \mathrm{P}_n) = \mathrm{Vect}(m_0, \ldots, m_n)$$

pour tout $n \ge 0$, ce qui montre que les polynômes $(\mathrm{P}_n)_{n\ge 0}$ engendrent l'espace de tous les polynômes (cet argument très simple s'applique à tous les exemples de suites de polynômes orthogonaux, qui contiennent un polynôme de chaque degré $n = 0, 1, \ldots$) En fait, on découvre en général les suites classiques de polynômes orthogonaux autrement que par la méthode de Schmidt. C'est ce qui va se passer pour les polynômes d'Hermite.

Posons $\varphi_0(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$ et constatons que pour tout entier $n \ge 0$ la dérivée $n$ième de φ_0 est de la forme

$$\varphi_0^{(n)}(x) = (-1)^n \mathrm{H}_n(x) \varphi_0(x)$$

où H_n est un polynôme de degré n, de coefficient dominant égal à 2^n (récurrence facile, fondée sur la relation $\mathrm{H}_{n+1} = 2x\mathrm{H}_n - \mathrm{H}_n'$). On trouve ainsi les premiers de ces polynômes

$$\mathrm{H}_0 = 1,\ \mathrm{H}_1(x) = 2x,\ \mathrm{H}_2(x) = 4x^2 - 2,\ \mathrm{H}_3(x) = 8x^3 - 12x, \quad \text{etc...}$$

Posons aussi $\varphi_n(x) = \mathrm{H}_n(x)\, \mathrm{e}^{-x^2} = (-1)^n \varphi_0^{(n)}(x)$, pour tout $n \ge 0$. On a $\varphi_n = -\varphi_{n-1}'$ pour tout $n \ge 1$. Pour tous entiers $k, n \ge 1$,

$$\int_{\mathbb{R}} x^k \varphi_n(x)\, dx = \Big[-x^k \varphi_{n-1}(x) \Big]_{-\infty}^{+\infty} + k \int_{\mathbb{R}} x^{k-1} \varphi_{n-1}(x)\, dx = k \int_{\mathbb{R}} x^{k-1} \varphi_{n-1}(x)\, dx$$

($x^k \varphi_{n-1}(x)$ est de la forme $\mathrm{P}(x)\, \mathrm{e}^{-x^2}$, avec P polynôme, donc les limites en $\pm\infty$ sont nulles) d'où on déduit par récurrence, lorsque $k < n$

$$\int_{\mathbb{R}} x^k \varphi_n(x)\, dx = k! \int_{\mathbb{R}} \varphi_{n-k}(x)\, dx = 0$$

(puisque $n - k > 0$, on voit que la fonction φ_{n-k} est la dérivée d'une fonction qui tend vers 0 en $\pm\infty$, d'où la nullité de l'intégrale). On déduit que φ_n est orthogonale aux monômes de degré $< n$; on voit aussi que

$$\int_{\mathbb{R}} x^n \varphi_n(x)\, dx = n! \int_{\mathbb{R}} \varphi_0(x)\, dx = \sqrt{\pi}\, n!$$

On a donc pour tout $k < n$ la relation d'orthogonalité

$$\text{(O)} \qquad \int_{\mathbb{R}} \mathrm{H}_k(x)\mathrm{H}_n(x)\,\mathrm{e}^{-x^2}\,dx = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{H}_k(x)\varphi_n(x)\,dx = 0$$

puisque H_k est combinaison linéaire de monômes de degrés $< n$. De plus

$$\int_{\mathbb{R}} \mathrm{H}_n(x)\mathrm{H}_n(x)\,\mathrm{e}^{-x^2}\,dx = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{H}_n(x)\varphi_n(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}} 2^n x^n \varphi_n(x)\,dx = \sqrt{\pi}\,2^n n!$$

La fonction φ_0 est une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$ tout entier, donc sa série de Taylor au point x la représente partout, par conséquent

$$\varphi_0(x+h) = \sum_{n=0}^{+\infty} \varphi_0^{(n)}(x)\,\frac{h^n}{n!} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \mathrm{H}_n(x)\,\mathrm{e}^{-x^2}\,\frac{h^n}{n!}$$

pour tout h ; en particulier, pour $h = -t$, on a

$$\mathrm{e}^{-(x-t)^2} = \Bigl(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{n!}\,\mathrm{H}_n(x)\Bigr)\,\mathrm{e}^{-x^2}\,.$$

Après multiplication par e^{x^2}, on obtient la *fonction génératrice* des polynômes d'Hermite,

$$\text{(G)} \qquad \mathrm{G}(x,t) = \mathrm{e}^{2tx-t^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{n!}\,\mathrm{H}_n(x).$$

Moyennant un léger changement de point de vue, ce qui précède nous donne une suite orthogonale de fonctions dans $\mathrm{L}_2(\mathbb{R})$, en posant $\psi_n(x) = \mathrm{H}_n(x)\,\mathrm{e}^{-x^2/2}$ pour tout $n \ge 0$ (ce sont les *fonctions* d'Hermite). En effet, la relation (O) donne quand $m \ne n$

$$\int_{\mathbb{R}} \psi_m(x)\psi_n(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{H}_m(x)\mathrm{H}_n(x)\,\mathrm{e}^{-x^2}\,dx = 0.$$

Les fonctions (ψ_n) ne sont pas de norme 1 dans $\mathrm{L}_2(\mathbb{R})$; pour avoir une suite orthonormée, on prendra pour tout $n \ge 0$ la fonction

$$\widetilde{\psi}_n : x \to \pi^{-1/4}\,2^{-n/2}(n!)^{-1/2}\mathrm{H}_n(x)\,\mathrm{e}^{-x^2/2}\,.$$

Ce système est total, donc c'est une base orthonormée de $\mathrm{L}_2(\mathbb{R})$. La totalité des $(\psi_n)_{n\ge0}$ dans $\mathrm{L}_2(\mathbb{R})$ se déduit de la totalité des $(\mathrm{H}_n)_{n\ge0}$ dans $\mathrm{L}_2(\mathbb{R},\mu)$: si g est une fonction indicatrice d'intervalle borné, on peut trouver un polynôme P (combinaison linéaire de polynômes d'Hermite) tel que

$$\int_{\mathbb{R}} |g(x)\,\mathrm{e}^{x^2/2} - \mathrm{P}(x)|^2\,\mathrm{e}^{-x^2}\,dx = \int_{\mathbb{R}} |g(x) - \mathrm{P}(x)\,\mathrm{e}^{-x^2/2}\,|^2\,dx < \varepsilon$$

ce qui montre que la combinaison linéaire de fonctions d'Hermite $\mathrm{P}(x)\,\mathrm{e}^{-x^2/2}$ approche g dans $\mathrm{L}_2(\mathbb{R})$.

Diagonalisation de la transformation de Fourier

Rappelons que pour $f \in \mathrm{L}_1(\mathbb{R})$ on pose

$$\forall \xi \in \mathbb{R}, \quad \widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{ix\xi} f(x)\, dx,$$

(transformée de Fourier avec la normalisation des probabilistes) et que pour la densité gaussienne ψ_0 on trouve $\widehat{\psi_0} = \sqrt{2\pi}\, \psi_0$.

Intégrons l'expression

$$\mathrm{J}(x,t) = \mathrm{e}^{-t^2} \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{ix\xi}\, \mathrm{e}^{2tx - x^2/2}\ dx\,;$$

en reformant un carré, en effectuant un petit changement de variable linéaire $y = x - 2t$ et en utilisant le rappel ci-dessus on trouve

$$\mathrm{J}(x,t) = \mathrm{e}^{t^2} \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{ix\xi}\, \mathrm{e}^{-(x-2t)^2/2}\ dx = \sqrt{2\pi}\ \mathrm{e}^{t^2}\, \mathrm{e}^{2it\xi}\, \mathrm{e}^{-\xi^2/2}\,.$$

On a trouvé

$$\mathrm{J}(x,t) = \sqrt{2\pi}\ \mathrm{e}^{-\xi^2/2}\, \mathrm{e}^{2it\xi + t^2}$$

où l'on revoit la fonction génératrice, mais en ξ et it au lieu de x et t. Grâce à l'analyticité, on peut écrire

$$\mathrm{J}(x,t) = \sqrt{2\pi}\, \mathrm{G}(\xi, it)\ \mathrm{e}^{-\xi^2/2} = \sqrt{2\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(it)^n}{n!}\, \mathrm{H}_n(\xi)\, \mathrm{e}^{-\xi^2/2} = \sqrt{2\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(it)^n}{n!}\, \psi_n(\xi).$$

Par ailleurs on voit que

$$\mathrm{J}(x,t) = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{ix\xi}\, \mathrm{e}^{-t^2 + 2tx - x^2/2}\ dx = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{ix\xi} \Bigl(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{n!}\, \mathrm{H}_n(x)\, \mathrm{e}^{-x^2/2} \Bigr)\, dx$$

et si on arrive à intervertir série et intégrale on aura

$$\mathrm{J}(x,t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{n!} \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{ix\xi}\, \psi_n(x)\, dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{n!}\, \widehat{\psi}_n(\xi)\,;$$

on trouvera alors en égalant les résultats des deux méthodes

$$\mathrm{J}(x,t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{n!}\, \widehat{\psi}_n(\xi) = \sqrt{2\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(it)^n}{n!}\, \psi_n(\xi).$$

On trouve donc par identification, pour tout $n \ge 0$

$$\widehat{\psi}_n(\xi) = \sqrt{2\pi}\, i^n\, \psi_n(\xi).$$

On a donc trouvé une base orthonormée de $\mathrm{L}_2(\mathbb{R})$ dans laquelle la transformation de Fourier est diagonale. On voit aussi que la transformation de Fourier $\mathcal{F}$ a exactement quatre valeurs propres ; si on considère l'isométrie $\mathrm{U} = (2\pi)^{-1/2}\mathcal{F}$, les valeurs propres sont $\{1, i, -1, -i\}$; il en résulte que $\mathrm{U}^4 = \mathrm{Id}$, mais en fait on aurait plutôt pu remarquer que $\mathrm{U}^4 = \mathrm{Id}$ directement, et en déduire que les seules valeurs propres possibles pour U sont celles qu'on vient de trouver.

Donnons une justification pour l'interversion : il suffit de montrer que la série $\sum (n!)^{-1} t^n \psi_n$ converge dans $\mathrm{L}_1(\mathbb{R})$. On note que le développement en série de

$$\mathrm{e}^{2tx+t^2} = \mathrm{G}(ix, -it) = \sum_{n=0}^{n} \frac{t^n}{n!} (-i)^n \mathrm{H}_n(ix)$$

n'a que des coefficients ≥ 0. Ainsi, pour tout n, le polynôme $(-i)^n \mathrm{H}_n(ix)$ est réel à coefficients positifs, et ses coefficients sont les valeurs absolues des coefficients de $\mathrm{H}_n(x)$. Il en résulte que pour $t \geq 0$

$$\Bigl| \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{n!} \mathrm{H}_n(x) \Bigr| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{n!} |\mathrm{H}_n(x)| \leq \mathrm{e}^{2t\,|x|+t^2}$$

relation qui donne la convergence L_1 de la série (de fonctions de x) et justifie l'interversion que nous avons faite.

Donnons une autre justification, de portée légèrement plus générale. Pour x fixé, les inégalités de Cauchy, appliquées au développement de Taylor de la fonction holomorphe $t \in \mathbb{C} \to \mathrm{e}^{2tx-t^2}$ et au cercle de rayon $r > 0$ donnent pour tout entier $n \geq 0$

$$\Bigl| \frac{\mathrm{H}_n(x)}{n!} \Bigr| \leq \frac{\mathrm{e}^{2r|x|+r^2}}{r^n}$$

(on a majoré trivialement $|\,\mathrm{e}^{2tx-t^2}\,|$ par $\mathrm{e}^{|2tx-t^2|} \leq \mathrm{e}^{2r|x|+r^2}$, lorsque t est un complexe de module r). Si on fixe maintenant t réel et qu'on choisit $r > |t|$, on aura

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \Bigl| \frac{t^n}{n!} \mathrm{H}_n(x) \Bigr| \; \mathrm{e}^{-x^2} \leq \Bigl(\sum_{n=0}^{+\infty} \Bigl(\frac{|t|}{r} \Bigr)^n \Bigr) \; \mathrm{e}^{2r|x|+r^2} \; \mathrm{e}^{-x^2} = \frac{r}{r-|t|} \, \mathrm{e}^{r^2} \; \mathrm{e}^{2r|x|-x^2},$$

fonction intégrable (en x) sur $\mathbb{R}$, ce qui montre que la série

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{n!} \mathrm{H}_n(x) \; \mathrm{e}^{-x^2} \; \mathrm{e}^{ix\xi}$$

peut être intégrée terme à terme, dans la variable $x \in \mathbb{R}$.

Une autre normalisation

Dans ce point de vue on s'intéresse à la probabilité gaussienne standard

$$d\gamma(x) = (2\pi)^{-1/2} \, \mathrm{e}^{-x^2/2} \; dx,$$

et on va trouver une base orthonormée de $\mathrm{L}_2(\mathbb{R}, \gamma)$, en gros avec les fonctions d'Hermite.

On veut transformer la relation (O) en

$$\int_{\mathbb{R}} \hbar_n(x) \hbar_m(x) \, \mathrm{e}^{-x^2/2} \; \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} = 0$$

pour tous $m \neq n$, où $(\hbar_n)$ est une nouvelle suite de polynômes. Changeons x en $x/\sqrt{2}$ et t en $t/\sqrt{2}$ dans la fonction génératrice,

$$\mathrm{G}(\frac{x}{\sqrt{2}}, \frac{t}{\sqrt{2}}) = \mathrm{e}^{tx-t^2/2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{n!} \, 2^{-n/2} \, \mathrm{H}_n(x/\sqrt{2})$$

et posons

$$\hbar_n(x) = 2^{-n/2}\,\mathrm{H}_n(x/\sqrt{2}).$$

On obtient l'orthogonalité des $\hbar_n$ dans $\mathrm{L}_2(\gamma)$ par le changement de variable linéaire $y = x/\sqrt{2}$. On trouve les premières de ces fonctions,

$$\hbar_0 = 1,\ \hbar_1(x) = x,\ \hbar_2(x) = x^2 - 1,\ \hbar_3(x) = x^3 - 3x, \quad \text{etc.}\dots$$

L'équation génératrice devient

$$\mathrm{e}^{-(x-t)^2/2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{n!}\,\hbar_n(x)\ \mathrm{e}^{-x^2/2}$$

ou bien

$$\mathrm{e}^{tx-t^2/2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{n!}\,\hbar_n(x).$$

On trouve la norme $\mathrm{L}_2(\gamma)$ des $\hbar_n$,

$$\|\hbar_n\|^2_{\mathrm{L}_2(\gamma)} = \int_{\mathbb{R}} \hbar_n(x)\hbar_n(x)\ \mathrm{e}^{-x^2/2}\ \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} = n!$$

(intégrations par parties successives) et on montre leur totalité dans $\mathrm{L}_2(\gamma)$: pour tout t, la fonction

$$g_t(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{\sqrt{n!}}\,\frac{\hbar_n(x)}{\sqrt{n!}} = \mathrm{e}^{tx-t^2/2}$$

est une série convergente (en norme) dans $\mathrm{L}_2(\gamma)$, donc si $f \in \mathrm{L}_2(\gamma)$ est orthogonale à toutes les $(\hbar_n)_{n\geq 0}$ on aura

$$\langle f, g_t\rangle_{\mathrm{L}_2(\gamma)} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{n!}\,\langle f, \hbar_n\rangle_{\mathrm{L}_2(\gamma)} = 0,$$

c'est à dire

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\,\mathrm{e}^{tx-t^2/2}\,\mathrm{e}^{-x^2/2}\ \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} = \int_{\mathbb{R}} f(x)\,\mathrm{e}^{-(x-t)^2/2}\ \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} = 0,$$

ce qui signifie que $(f * \chi_0)(t) = 0$, pour tout t. Comme la transformée de Fourier de χ_0 ne s'annule jamais, on en déduit que $f = 0$ (on a redémontré la totalité des (H_n) dans $\mathrm{L}_2(\mathbb{R}, \mu)$: en effet, par changement de variable $y = x/\sqrt{2}$, la totalité des $(\hbar_n)$ dans $\mathrm{L}_2(\gamma)$ est équivalente à la totalité des (H_n) dans $\mathrm{L}_2(\mathbb{R}, \mu)$).