Prépa. Agrég. écrit d'Analyse, Annexe n° 7.

Illustrer par des exemples et contre-exemples
la théorie des séries numériques

Développement asymptotique du reste des séries de Riemann convergentes

On considère la série de Riemann $\sum k^{-\alpha}$ avec $\alpha > 1$. Le principe de comparaison série-intégrale donne pour tout entier $n \geq 2$

$$\frac{1}{\alpha - 1} \frac{1}{n^{\alpha-1}} = \int_n^{+\infty} x^{-\alpha} \, dx \leq \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} \leq \int_{n-1}^{n} x^{-\alpha} \, dx + \int_n^{+\infty} x^{-\alpha} \, dx$$

qui implique que

$$\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} = \frac{1}{(\alpha - 1) \, n^{\alpha-1}} + \mathrm{E}(n)$$

avec

$$0 \leq \mathrm{E}(n) \leq (n-1)^{-\alpha}.$$

Remarque. Ce résultat élémentaire, appliqué avec $n = 2$ (par exemple) et $\alpha = s > 1$ suffit pour voir que $\lim_{s \to 1+} (s-1)\zeta(s) = 1$.

Pour poursuivre l'étude on peut appliquer la formule de Taylor ; posons pour tout entier $n \geq 1$ et tout réel $\alpha > 1$

$$\mathrm{R}_n(\alpha) = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}.$$

On a vu ci-dessus que $\mathrm{R}_n(\alpha) = (\alpha - 1)^{-1} n^{1-\alpha} + \mathrm{O}(n^{-\alpha})$, et on va montrer comment préciser plus. Si $f(x) = (1-\alpha)^{-1} x^{1-\alpha}$, la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre 3, appliquée entre $a = k$ et $b = k+1$ donne

$$f(k+1) - f(k) = \frac{1}{k^\alpha} - \frac{\alpha}{2} \frac{1}{k^{\alpha+1}} + \frac{1}{6} f'''(\theta_k)$$

où $k < \theta_k < k+1$; après sommation en k variant de n à $+\infty$ on obtient

$$-f(n) = \mathrm{R}_n(\alpha) - \frac{\alpha}{2} \mathrm{R}_n(\alpha + 1) + \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{f'''(\theta_k)}{6}.$$

On a $f'''(x) = \alpha(\alpha+1) x^{-\alpha-2}$, et une application rudimentaire des premiers résultats ci-dessus donne, puisque $0 < f'''(\theta_k) < \alpha(\alpha+1) k^{-\alpha-2}$

$$\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{f'''(\theta_k)}{6} = \mathrm{O}(n^{-\alpha-1}).$$

On sait déjà que $\mathrm{R}_n(\alpha + 1) = \alpha^{-1} n^{-\alpha} + \mathrm{O}(n^{-\alpha-1})$, donc

$$\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha} = \frac{1}{(\alpha - 1) \, n^{\alpha-1}} + \frac{1}{2 \, n^\alpha} + \mathrm{O}(n^{-\alpha-1}).$$

On conçoit qu'on pourrait continuer aussi longtemps que notre courage le permettrait, mais on va voir ci-dessous un raccourci, proche cousin de la *méthode sommatoire d'Euler-MacLaurin* ; à ce sujet, on consultera avec profit Chatterji volume 2, 6.6, ou bien Godement, tome 2, chapitre VI, paragraphe 2. Il n'y a rien d'étonnant à voir apparaître ces deux variantes : la formule de Taylor avec reste intégral et la formule sommatoire se démontrent de la même façon, par une succession d'intégrations par parties ; la différence vient du choix des constantes d'intégration dans les primitives successives de dt ; pour la formule de Taylor entre 0 et x, on fait apparaître des multiples des fonctions polynomiales $t \to (x-t)^n$, alors que la formule sommatoire fait apparaître les *polynômes de Bernoulli* (voir plus loin).

Proposition. *Il existe des coefficients $a_0, a_1, \ldots$ tels que : pour tout entier $p > 0$ et pour toute fonction f de classe C^∞ sur un intervalle I, la fonction g définie sur I par*

$$g = a_0 f + a_1 f' + \cdots + a_{p-1} f^{(p-1)}$$

vérifie

$$g' + \frac{1}{2!}\, g'' + \frac{1}{3!}\, g^{(3)} + \cdots + \frac{1}{p!}\, g^{(p)} = f' + \sum_{\ell=1}^{p-1} b_\ell^{(p)}\, f^{(p+\ell)}.$$

Il est facile de montrer par récurrence l'existence de ces coefficients. On trouve d'abord que $a_0 = 1$, et on a ensuite la relation de récurrence

$$(*) \qquad a_{j-1} = -\sum_{i=2}^{j} \frac{a_{j-i}}{i!}$$

pour tout $j \geq 2$, qui permet de calculer les coefficients de proche en proche, en commençant par $a_1 = -1/2$ puis $a_2 = 1/12$.

Lorsque f est une fonction de la forme $x^{-\beta}$, la fonction $\mathrm{R}(x) = \sum_{\ell=1}^{p-1} b_\ell^{(p)}\, f^{(p+\ell)}$ est une combinaison linéaire de fonctions $x^{-\beta-p-\ell}$ qui sont toutes $\mathrm{O}(x^{-\beta-p-1})$, c'est à dire d'ordre nettement plus petit que $f(x)$ lorsque $x \to +\infty$. Quand on appliquera la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre p à la fonction g entre k et $k+1$ il se passera des choses intéressantes, comme on le verra plus bas sur un exemple.

Une autre façon d'introduire ces nombres (a_n) est d'appliquer la proposition à la fonction $f(x) = \mathrm{e}^{sx}$, où s est un paramètre réel qui tendra ensuite vers 0. On obtient alors

$$g(x) = (a_0 + a_1 s + \cdots + a_{p-1} s^{p-1})\, f(x) = \mathrm{P}(s) f(x)$$

et

$$\Bigl(g' + \frac{1}{2!}\, g'' + \frac{1}{3!}\, g^{(3)} + \cdots + \frac{1}{p!}\, g^{(p)}\Bigr)(s) = \mathrm{P}(s)\bigl(s + \frac{s^2}{2!} + \frac{s^3}{3!} + \cdots + \frac{s^p}{p!}\bigr) f(x) =$$

$$s f(x) + \Bigl(\sum_{\ell=1}^{p-1} b_\ell^{(p)}\, s^{p+\ell}\Bigr) f(x).$$

En appliquant avec $x = 0$ on obtient

$$\mathrm{P}(s)\bigl(s + \frac{s^2}{2!} + \frac{s^3}{3!} + \cdots + \frac{s^p}{p!}\bigr) = s + \mathrm{O}(s^{p+1})$$

(s tendant vers 0) donc $\mathrm{P}(s)\big(\mathrm{e}^s -1 + \mathrm{O}(s^{p+1})\big) = s + \mathrm{O}(s^{p+1})$ et

$$\mathrm{P}(s)\Big(\frac{\mathrm{e}^s -1}{s}\Big) = 1 + \mathrm{O}(s^p),$$

ce qui implique que $\mathrm{P}(s)$ est le développement limité à l'ordre $p-1$ de la fonction $s \to s/(\mathrm{e}^s -1)$; cette fonction est en fait une fonction holomorphe dans la bande $|\operatorname{Im} z| < 2\pi$ (on trouve des zéros du dénominateur en $\pm 2i\pi$), donc cette fonction admet un développement en série entière, de rayon de convergence égal à 2π,

$$\frac{s}{\mathrm{e}^s -1} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n s^n$$

où les coefficients (a_n) sont bien les nombres que nous cherchons. On introduit classiquement les *nombres de Bernoulli* par la relation

$$\frac{s}{\mathrm{e}^s -1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\mathrm{B}_n}{n!}\, s^n$$

ce qui nous dit que les coefficients (a_n) vérifient la relation $n!\; a_n = \mathrm{B}_n$ pour tout entier $n \ge 0$. On voit dans les livres que

$$\mathrm{B}_0 = 1,\ \ \mathrm{B}_1 = -\frac{1}{2},\ \mathrm{B}_2 = \frac{1}{6},$$

et tous les B_{2k+1} sont nuls pour $k \ge 1$. On a donc (et on retrouve)

$$a_0 = 1,\ \ a_1 = -\frac{1}{2},\ a_2 = \frac{1}{12},\ a_3 = 0, \ldots$$

La relation de récurrence $(*)$ trouvée précédemment pour les nombres (a_n) devient

$$(**) \qquad n\, \mathrm{B}_{n-1} = -\sum_{i=2}^{n} \binom{n}{i} \mathrm{B}_{n-i}$$

pour tout entier $n \ge 2$. On trouvera ainsi $\mathrm{B}_4 = -1/30$ et $\mathrm{B}_6 = 1/42$.

Application. On prend $f(x) = -x^{-1}$ et on introduit, conformément à ce qui précède

$$g(x) = f(x) - \frac{1}{2}\, f'(x) + \frac{1}{12}\, f''(x) = -\frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} - \frac{1}{6x^3}.$$

On sait d'après la proposition appliquée avec $p = 4$ que

$$g'(x) + \frac{1}{2!}\, g''(x) + \frac{1}{3!}\, g'''(x) + \frac{1}{4!}\, g^{(4)}(x) = f'(x) + \mathrm{E}(x)$$

où $\mathrm{E}(x)$ est une combinaison linéaire des fonctions dérivées $f^{(p+\ell)}$ avec $p + \ell \ge 5$, ce qui correspond à des termes x^{-m} avec $m \ge 6$. En appliquant Taylor entre k et $k+1$ à la fonction g il vient

$$g(k+1) - g(k) = g'(k) + \frac{1}{2!}\, g''(k) + \frac{1}{3!}\, g'''(k) + \frac{1}{4!}\, g^{(4)}(k) + \frac{1}{5!}\, g^{(5)}(\theta_k) =$$

$$f'(k) + \mathrm{E}(k) + \frac{1}{5!}\, g^{(5)}(\theta_k) = f'(k) + \mathrm{R}(k).$$

A nouveau $g^{(5)}$ est une combinaison linéaire de fonctions x^{-m} avec $m \geq 6$ et le point θ_k est entre k et $k+1$. Il existe donc une constante A telle que $|\mathrm{R}(k)| \leq \mathrm{A}k^{-6}$ pour tout $k \geq 1$. On en déduit

$$-g(n) = \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^2} + \mathrm{O}(n^{-5})$$

c'est à dire

$$\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{6n^3} + \mathrm{O}(n^{-5}).$$

En posant

$$\mathrm{S}_3(n) = \Big(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^2}\Big) + \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{6n^3}$$

on obtiendra une approximation de la somme totale $\zeta(2) = \pi^2/6$. J'ai testé pour vous

$$\begin{aligned} \mathrm{S}_3(100) &= 1,6449340668515\ldots \\ \frac{\pi^2}{6} &= 1,6449340668482\ldots \end{aligned}$$

Méthodes d'accélération de la convergence

Prenons un exemple très simple. Il résulte des discussions précédentes qu'il existe des coefficients (c_n) tels que pour tout entier $p \geq 1$, on ait quand $n \to +\infty$

$$\pi^2/6 = \Big(\sum_{k=1}^{n} k^{-2}\Big) + c_1\, n^{-1} + \cdots + c_{p-1}\, n^{-p+1} + \mathrm{O}(n^{-p}).$$

Posons $u_n = \sum_{k=1}^{n} k^{-2}$. On constate facilement que la combinaison $v_n = 2u_{2n} - u_n$ approche encore la somme $\pi^2/6$, mais le terme du premier ordre c_1/n a disparu,

$$v_n = \pi^2/6 + d_2\, n^{-2} + \cdots + d_{p-1}\, n^{-p+1} + \mathrm{O}(n^{-p}).$$

En formant des combinaisons convenables des (v_n), on fera de même disparaître le terme n^{-2}, etc…

Le nombre e

Exercice. Montrer que le nombre e est irrationnel, en montrant que $q!\,\mathrm{e}$ est non entier pour tout entier q.

(Indication : le nombre $q!\,\mathrm{e}$ est de la forme

$$\mathrm{L} + \frac{1}{q+1} + \frac{1}{(q+1)(q+2)} + \cdots = \mathrm{L} + x$$

avec L entier, $x > 0$ et pour $q \geq 1$ on montrera que $x < 1$).

Nombres de Liouville

Exercice. Montrer que le nombre

$$x = \sum_{n=0}^{+\infty} 10^{-n!}$$

est transcendant.

Indication. Pour m entier ≥ 1 désignons par D_m l'ensemble des nombres décimaux de la forme $j\,10^{-m}$, $j \in \mathbb{Z}$. Lorsque $m = n!$ le nombre $y_m \in \mathrm{D}_m$ défini par $y_m = \sum_{k=0}^{n} 10^{-k!}$ vérifie les inégalités $0 < x - y_m = \sum_{k>n} 10^{-k!} < 2\,.\,10^{-m'}$ où $m' = (n+1)! = (n+1)m$. Prenons par exemple un polynôme P à coefficients entiers de degré 3,

$$\mathrm{P} = \mathrm{A}\,\mathrm{X}^3 + \mathrm{B}\,\mathrm{X}^2 + \mathrm{C}\,\mathrm{X} + \mathrm{D}.$$

Puisque $0 < x, y_m < 1$, on aura

$$\begin{aligned} |\mathrm{P}(x) - \mathrm{P}(y_m)| \leq & \big(\sup_{t\in[0,1]} |\mathrm{P}'(t)|\big)\ |x - y_m| \\ & \leq (3\,|\mathrm{A}| + 2\,|\mathrm{B}| + |\mathrm{C}|)\,2\,.\,10^{-m'} = \mathrm{K}\,10^{-(n+1)m} < 10^{-3m} \end{aligned}$$

si n est assez grand. Par ailleurs, $\mathrm{P}(y_m) \in \mathrm{D}_{3m} \supset \mathrm{D}_m$, parce que A, B, C et D sont entiers et $y_m^2 \in \mathrm{D}_{2m}$, $y_m^3 \in \mathrm{D}_{3m}$; si $\mathrm{P}(x) = 0$ on aura $|\mathrm{P}(y_m)| < 10^{-3m}$, donc nécessairement $\mathrm{P}(y_m) = 0$. Mais quand n varie les y_m sont deux à deux distincts, et ne peuvent être tous racines du polynôme P : le nombre x ne peut donc pas être racine d'un polynôme à coefficients entiers (de degré 3 pour l'instant ; la généralisation à tout autre degré est évidente).

Polynômes de Bernoulli

On définit une suite de fonctions polynomiales $(\mathrm{A}_n(t))_{n\geq 0}$ vérifiant les conditions suivantes :

$$\mathrm{A}_0(t) = 1,\ \mathrm{A}'_{n+1} = \mathrm{A}_n \text{ et } \textstyle\int_0^1 \mathrm{A}_{n+1}(t)\,dt = 0 \text{ pour tout } n \geq 0.$$

On vérifie facilement que ces conditions définissent complètement notre suite. On note que A_n est de degré n pour tout $n \geq 0$. On trouve ainsi

$$\mathrm{A}_1(t) = t - 1/2,\ \ \mathrm{A}_2(t) = t^2/2 - t/2 + 1/12,\ \ \mathrm{A}_3(t) = t^3/6 - t^2/4 + t/12,$$

et les polynômes de Bernoulli sont les $\mathrm{B}_n(t) = n!\ \mathrm{A}_n(t)$. Comme $\int_0^1 \mathrm{A}_n(t)\,dt = 0$ à partir de $n = 1$, il en résulte que $\mathrm{A}_n(1) = \mathrm{A}_n(0)$ à partir de $n \geq 2$. On constate que ces valeurs en 0 sont justement les coefficients (a_n) introduits précédemment ; en effet, en posant provisoirement $c_n = \mathrm{A}_n(0)$ pour tout $n \geq 0$ on obtient de proche en proche

$$\mathrm{A}_n(t) = c_0\,\frac{t^n}{n!} + \cdots + c_{n-2}\,\frac{t^2}{2!} + c_{n-1}\,t + c_n,$$

et la condition d'intégrale nulle donne

$$\frac{c_0}{(n+1)!} + \cdots + \frac{c_{n-2}}{3!} + \frac{c_{n-1}}{2!} + c_n = 0$$

ce qui est exactement la relation de récurrence $(*)$. Puisque $c_0 = 1 = a_0$, on en déduit que $c_n = a_n$ pour tout $n \geq 0$.

On voit que $\mathrm{A}_1(t) + \mathrm{A}_1(1-t) = 0$ donc $\mathrm{A}_2(t) - \mathrm{A}_2(1-t)$ est constante, en fait nulle (prendre $t = 1/2$). Donc A_2 est symétrique par rapport à $1/2$, et d'intégrale nulle, donc $\int_{1/2}^1 \mathrm{A}_2(t)\, dt = 0$. Ensuite $\mathrm{A}_3(t) + \mathrm{A}_3(1-t)$ est constante, nulle puisque l'intégrale est nulle ; alors $\mathrm{A}_3(1/2) = 0$ et $\mathrm{A}_3(1) = \mathrm{A}_3(1/2) + \int_{1/2}^1 \mathrm{A}_2(t) = 0$. Ce raisonnement continue pour montrer que tous les $\mathrm{A}_n(0) = \mathrm{A}_n(1)$ avec n impair ≥ 3 sont nuls. On peut aussi obtenir cela à partir de l'équation génératrice (G) ci-dessous, avec $t = 0$, car

$$1 + \sum_{n=2}^{+\infty} a_n\, z^n = \frac{z}{\mathrm{e}^z - 1} + \frac{z}{2} = \frac{z}{2\ \mathrm{th}(z/2)}$$

est une fonction paire.

La relation de récurrence $(*)$ permet de voir que $|a_n| \leq 1$ pour tout n ; en effet, si cette propriété est vraie pour $a_0, \ldots, a_{n-1}$ on aura

$$|a_n| \leq \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{(n+1)!} < \mathrm{e} - 2 < 1.$$

Il en résulte que $|\mathrm{A}_n(t)| \leq \mathrm{e} - 1 < 2$ pour tout $t \in [0,1]$, ce qui montre que la série

$$f(z,t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{A}_n(t)\, z^n$$

converge pour tout $t \in [0,1]$ et tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < 1$ (en fait le rayon de convergence en z est égal à 2π pour tout $t \in [0,1]$, d'après le résultat qu'on trouvera ci-dessous). On en déduit

$$\frac{d}{dt} f(z,t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{A}'_n(t)\, z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{A}_n(t)\, z^{n+1} = z\, f(z,t)$$

ce qui implique que pour tout z fixé il existe un nombre complexe $\varphi(z)$ tel que

$$f(z,t) = \varphi(z)\ \mathrm{e}^{tz}\,.$$

Ensuite

$$1 = \int_0^1 \mathrm{A}_0(t)\, dt = \int_0^1 f(z,t)\, dt = \varphi(z)(\mathrm{e}^z - 1)/z$$

donne la valeur de $\varphi(z)$ et finalement

$$\text{(G)} \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{A}_n(t)\, z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\mathrm{B}_n(t)}{n!}\, z^n = \frac{z\, \mathrm{e}^{tz}}{\mathrm{e}^z - 1}.$$

Formule sommatoire

Par intégration par parties successives

$$f(1) - f(0) = \int_0^1 \mathrm{A}_0(t) f'(t)\, dt = \Big[\mathrm{A}_1(t) f'(t)\Big]_0^1 - \int_0^1 \mathrm{A}_1(t) f''(t)\, dt =$$

$$\Big[\mathrm{A}_1(t) f'(t)\Big]_0^1 - \Big[\mathrm{A}_2(t) f''(t)\Big]_0^1 + \int_0^1 \mathrm{A}_2(t) f'''(t)\, dt$$

ce qui donne pour tout entier $q \geq 1$

$$f(1) - f(0) = \sum_{j=1}^{q} (-1)^{j+1} \Big[\mathrm{A}_j(t) f^{(j)}(t) \Big]_0^1 + (-1)^q \int_0^1 \mathrm{A}_q(t) f^{(q+1)}(t)\, dt.$$

En tenant compte de $\mathrm{A}_{2j-1}(0) = 0$ et $\mathrm{A}_j(0) = \mathrm{A}_j(1)$ pour $j \geq 2$ on obtient pour $q = 2p+1$

$$f(1) - f(0) = \frac{1}{2}\big(f'(0) + f'(1)\big) - \sum_{j=1}^{p} a_{2j} \big(f^{(2j)}(1) - f^{(2j)}(0)\big) - \int_0^1 \mathrm{A}_{2p+1}(t) f^{(2p+2)}(t)\, dt.$$

Lorsque toutes les dérivées de f tendent vers 0 à l'infini, on obtiendra en appliquant ce qui précède à $f_k(t) = f(k+t)$, pour chaque $k \geq n$, puis en sommant en k

$$-f(n) = -\frac{1}{2} f'(n) + \sum_{k=n}^{+\infty} f'(k) + \sum_{j=1}^{p} a_{2j}\, f^{(2j)}(n) - \int_n^{+\infty} \mathrm{A}^*_{2p+1}(t) f^{(2p+2)}(t)\, dt,$$

où on a posé $\mathrm{A}^*_j(t) = \mathrm{A}_j(t - [t])$, c'est à dire qu'on a prolongé la fonction A_j définie sur $[0,1]$ en fonction de période 1. On obtient le même résultat qu'avec la proposition 1, mais on a maintenant une autre estimation de l'erreur,

$$\sum_{k=n}^{+\infty} f'(k) = -f(n) + \frac{1}{2} f'(n) - \sum_{j=1}^{p} a_{2j}\, f^{(2j)}(n) + \int_n^{+\infty} \mathrm{A}^*_{2p+1}(t) f^{(2p+2)}(t)\, dt.$$

Si on revient au même exemple $f(x) = -1/x$, on écrira avec $p = 2$

$$\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{6n^3} - \frac{1}{30\, n^5} - 720 \int_n^{+\infty} \mathrm{A}^*_5(t) t^{-7}\, dt.$$

(comme ici $f^{(j)}(x) = (-1)^{j+1} j!\, x^{-j-1}$, le coefficient qui apparaît dans la formule précédente en facteur de n^{-2j-1} pour $j \geq 1$ est exactement le nombre de Bernoulli B_{2j}). Le lecteur acharné pourra calculer

$$720 \,.\, \mathrm{A}_5(t) = 6t^5 - 15t^4 + 10t^3 - t,$$

puis justifier que le maximum du module pour $t \in [0,1]$ est atteint sur $[0, 1/2]$ et majorer ce maximum (à la grosse louche) par 2 (une étude numérique donne plutôt $0{,}14675\ldots$ pour ce maximum). Le terme intégral se trouve alors majoré par

$$2 \int_n^{+\infty} t^{-7}\, dt = \frac{1}{3n^6}.$$

Si $n = 100$ par exemple, cette erreur est donc de l'ordre de 10^{-12}, ce qui est bien sympathique. En fait le calcul numérique montre que l'erreur est encore plus petite que cet ordre prévu. En posant

$$\mathrm{S}_5(n) = \Big(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^2}\Big) + \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{6n^3} - \frac{1}{30\, n^5}$$

on obtient

$$\mathrm{S}_5(100) = 1{,}6449340668482262\ldots$$

$$\frac{\pi^2}{6} = 1{,}6449340668482264\ldots$$

Attention ! les développements asymptotiques **ne donnent pas** des séries convergentes, lorsque la longueur $q = 2p$ du développement augmente : si $n = 100$ (par exemple) est fixé, il faut choisir le bon moment pour arrêter... Dans l'exemple présent, le terme suivant, égal à $n^{-7}/42$, améliorerait encore la précision ; mais au bout d'un certain temps, le résultat donné par les nombres de Bernoulli se détériorera, puis divergera totalement.

Compléments sur le signe de l'erreur

On va voir que les polynômes (A_n) (ou bien leurs multiples de même signe (B_n)) ont les propriétés suivantes, pour tout $j \geq 0$:

la fonction A_{4j+2} est décroissante sur $[0, 1/2]$, et la fonction A_{4j+4} est croissante sur $[0, 1/2]$; elles s'annulent exactement une fois entre 0 et 1/2 ; la fonction A_{4j+1} est négative sur $[0, 1/2]$, et la fonction A_{4j+3} est positive sur $[0, 1/2]$.

On a vu à propos des propriétés de symétrie par rapport à 1/2 que l'intégrale de A_{2k} sur $[0, 1/2]$ est nulle, et $\mathrm{A}_{2k+1}(0) = \mathrm{A}_{2k+1}(1/2) = 0$, pour $k \geq 1$.

On voit que A_1 est < 0 sur $[0, 1/2]$, donc A_2 est décroissante sur $[0,\ 1\ /\ 2]$, et la condition d'intégrale nulle pour A_2 impose $\mathrm{A}_2(0) > 0 > \mathrm{A}_2(1/2)$; la fonction A_3 est donc d'abord croissante, puis décroissante sur $[0, 1/2]$, et sa nullité aux bornes implique que $\mathrm{A}_3(t) > 0$ pour $0 < t < 1/2$; maintenant A_4 est croissante sur $[0, 1/2]$ et on continue...

Si g est croissante sur $[0, 1]$ il en résulte que

$$\int_0^1 \mathrm{A}_{4j+1}(t) g(t)\, dt \geq 0$$

puisqu'à cause de l'antisymétrie de A_{4j+1} par rapport à 1/2 l'intégrale précédente vaut

$$\int_0^{1/2} \mathrm{A}_{4j+1}(t) \big(g(t) - g(1-t)\big)\, dt$$

et la fonction à intégrer est ≥ 0 sur $[0, 1/2]$ comme produit de deux quantités négatives. On a bien sûr le signe opposé pour A_{4j+3}.

Dans le cas où $f(x) = -x^{-1}$, les dérivées paires sont toutes croissantes (et négatives), donc

$$\int_n^{+\infty} \mathrm{A}^*_{4j+1}(t) f^{(4j+2)}(t)\, dt \geq 0$$

et le signe opposé pour $4j+3$. On avait donc, avec les notations précédentes,

$$\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{6n^3} - 24 \int_n^{+\infty} \mathrm{A}^*_3(t) t^{-5}\, dt \geq \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{6n^3}$$

et l'opposé pour le cran suivant ; on a donc

$$\mathrm{S}_5(n) \leq \pi^2/6 \leq \mathrm{S}_3(n)$$

et cet encadrement vaut aussi avec S_5 et S_7. Il en résulte que l'erreur est en fait majorée par la valeur absolue du dernier terme écrit dans le développement asymptotique ; ceci permet aussi de choisir *la bonne longueur*, question évoquée précédemment ; on choisira $q = 2p+1$ de façon que le dernier terme du développement soit minimal. Dans l'exemple précis, le terme en n^{-2p-1} est $\mathrm{B}_{2p} n^{-2p-1}$; avec $n = 100$, on pourra continuer encore un bon moment avant que $B_{2p}100^{-2p-1}$ ne se mette à remonter, ce qui signifie que $B_{2p+2} > 10000\, B_{2p}$.

La morale est la suivante : si on avait fait un peu plus de théorie avant, on n'aurait pas additionné 100 termes : on aurait pu se contenter de $n = 10$, aller jusqu'au moment où B_{2p+2}/B_{2p} dépasse $n^2 = 100$, ce qui se produit à peu près pour B_{62}, et récolter avec une trentaine de termes pairs du développement asymptotique, plus la somme des dix premiers termes de la série, une erreur $\leq B_{62}\, 10^{-63} < 3\,.\,10^{-27}$. Mais c'est tellement facile, avec les outils modernes, d'ajouter les 100 premiers termes sans réfléchir !

Bernoulli et Fourier

Les séries de Fourier apportent un autre éclairage à cette question des polynômes de Bernoulli. Si on prolonge $A_1(t)$, définie sur $[0, 1[$, en une fonction 1-périodique sur $\mathbb{R}$, on obtient pour tout $t \in]0, 1[$

$$A_1(t) = -\frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(2\pi nt)}{n}$$

puis par intégration à moyenne nulle, pour tout $t \in [0, 1]$ cette fois

$$A_2(t) = \frac{1}{2\pi^2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(2\pi nt)}{n^2}\ ;$$

en particulier $a_2 = A_2(0) = \frac{1}{2}\pi^{-2}\zeta(2) = 1/12$. En itérant les intégrations, on trouve pour tout entier $p \geq 1$

$$\forall t \in [0, 1], \quad A_{2p}(t) = (-1)^{p+1} \frac{1}{2^{2p-1}\pi^{2p}} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(2\pi nt)}{n^{2p}}$$

et

$$a_{2p} = A_{2p}(0) = (-1)^{p+1} \frac{\zeta(2p)}{2^{2p-1}\pi^{2p}}.$$

Les propriétés de symétrie de la fonction A_{2p} par rapport à $1/2$ sont évidentes sur ces formules. On voit de plus que

$$(-1)^{p+1} 2^{2p-1}\pi^{2p}\, A_{2p}(t) = \cos(2\pi t) + \frac{1}{2^{2p}}\cos(4\pi t) + \frac{1}{3^{2p}}\cos(6\pi t) + \cdots$$

converge assez rapidement sur $[0, 1]$ vers la fonction $t \to \cos(2\pi t)$, ce qui permet de comprendre le comportement graphique des polynômes A_{2p} pour p assez grand ; les polynômes de degré impair tendent eux (sur $[0, 1]$ et à des constantes multiplicatives près) vers $t \to \sin(2\pi t)$.

Le quotient a_{2p+2}/a_{2p}, qui intervient dans la décision d'arrêter le développement asymptotique (au moins lorsque les erreurs successives ont le bon goût d'être alternées), converge donc rapidement vers $1/(4\pi^2) \sim 1/40$. Le rapport

$$q_p = B_{2p+2}/B_{2p} = (2p + 1)(2p + 2)\, a_{2p+2}/a_{2p}$$

est donc de l'ordre de $p^2/10$. Pour atteindre une valeur $q_p \geq 10000$ (question qui a été évoquée précédemment), il faut aller à $p \sim 300$, ce qui est hautement improbable...