Prépa. Agrég. écrit d'Analyse, Annexe n° 9.

Approximation polynomiale

Interpolation de Lagrange

On considère un intervalle $[a, b]$ et dans cet intervalle $n+1$ points $x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n$. Etant données des valeurs quelconques $y_0, \ldots, y_n$ dans $\mathbb{C}$ il existe un unique polynôme P de degré $\leq n$ à coefficients complexes tel que $\mathrm{P}(x_j) = y_j$ pour $j = 0, \ldots, n$. On l'obtient facilement (du point de vue théorique) à partir des $n+1$ polynômes ℓ_j, $j = 0, \ldots, n$, où ℓ_j est égal à 1 au point x_j et nul aux autres points x_k, $k \neq j$

$$\ell_j = \prod_{k \neq j} \frac{\mathrm{X} - x_k}{x_j - x_k} \ ;$$

il suffit en effet de poser $\mathrm{P} = \sum_{j=0}^{n} y_j \ell_j$, mais dans la pratique on procède autrement (voir le livre de J.P. Demailly, Analyse numérique et équations différentielles, chap II).

A toute fonction continue f sur $[a, b]$ on peut donc faire correspondre un unique polynôme $\mathrm{L}_n f$ de degré $\leq n$ qui prend les mêmes valeurs que f aux points x_0, $x_1, \ldots$, x_n. Il est clair que l'application $f \to \mathrm{L}_n f$ est linéaire, et on va s'intéresser à la norme de l'application linéaire L_n, considérée comme endomorphisme de l'espace de Banach $\mathrm{C}([a, b])$ muni de la norme uniforme.

On peut lire dans Demailly que la norme de L_n peut être assez énorme quand on prend des points équidistants (dans ce cas $\|\mathrm{L}_n\|$ est de l'ordre de $2^n/(n \ln n)$) mais qu'elle est majorée par un multiple de $\ln n$ quand on réalise l'interpolation de Lagrange aux *points de Tchebychev*. On rappelle que les polynômes de Tchebychev correspondent aux fonctions polynomiales $(t_k)_{k \geq 0}$ définies sur $[-1, 1]$ par

$$\forall x \in [-1, 1], \quad t_k(x) = \cos(k \operatorname{Arccos} x).$$

Les points de Tchebychev (lorsque $[a, b] = [-1, 1]$) sont les $n+1$ zéros du polynôme de Tchebychev t_{n+1}. Le but du développement qui suit est de montrer que cette majoration de $\|\mathrm{L}_n\|$ par un terme en C $\ln n$ est essentiellement optimale.

Théorème. *Il existe une constante $c > 0$ telle que pour tout $n \geq 1$ et tout choix de points $x_0 < x_1 < \ldots < x_n$ on ait*

$$\|\mathrm{L}_n\| \geq c \ln n.$$

Le théorème peut être étendu de la façon suivante. Désignons par $\mathcal{P}_n$ l'espace vectoriel (complexe) de dimension $n+1$ des fonctions polynomiales de degré $\leq n$ sur l'intervalle $[a, b]$. Si $f \in \mathcal{P}_n$, il est clair par l'unicité du polynôme d'interpolation de Lagrange que $\mathrm{L}_n f = f$, ce qui signifie que L_n est un projecteur de $\mathrm{C}([a, b])$ sur le sous-espace $\mathcal{P}_n$.

Théorème 2. *Il existe une constante $c > 0$ telle que pour tout $n \geq 1$ et pour toute projection Q_n de $\mathrm{C}([a, b])$ sur $\mathcal{P}_n$ on ait*

$$\|\mathrm{Q}_n\| \geq c \ln n.$$

Le résultat ne dépend pas de l'intervalle considéré, aussi choisirons nous $[-1,1]$ qui est plus agréable pour les polynômes de Tchebychev.

Le *truc* est de se ramener aux polynômes trigonométriques et à des estimations vues pour les séries de Fourier. Désignons par $\mathrm{C}_0([-\pi,\pi])$ l'espace des fonctions continues sur $[-\pi,\pi]$ telles que $f(\pi)=f(-\pi)$, et par $\mathrm{C}_p=\mathrm{C}_p([-\pi,\pi])$ le sous-espace formé des fonctions g qui sont paires, c'est à dire que $g(-\theta)=g(\theta)$ pour tout θ. Si on préfère, on peut travailler avec l'espace $\mathrm{C}(\mathbb{T})$ des fonctions F continues sur le cercle unité, et avec le sous-espace $\mathrm{C}_p(\mathbb{T})$ formé des fonctions G qui sont paires au sens suivant : $\mathrm{G}(\mathrm{e}^{i\theta})=\mathrm{G}(\mathrm{e}^{-i\theta})$ pour tout θ ; la correspondance entre les deux points de vue se fait par la formule $f(\theta)=\mathrm{F}(\mathrm{e}^{i\theta})$ (on peut aussi penser à des fonctions 2π-périodiques sur $\mathbb{R}$).

Il existe une projection naturelle S de $\mathrm{C}_0([-\pi,\pi])$ sur $\mathrm{C}_p([-\pi,\pi])$ donnée par

$$\forall f\in \mathrm{C}_0,\ \forall\theta,\quad (\mathrm{S}f)(\theta)=\frac{f(\theta)+f(-\theta)}{2}.$$

Cette projection S est clairement de norme ≤ 1. Considérons de plus l'espace E_n de dimension $2n+1$ engendré par les exponentielles e_m pour $|m|\le n$ (on pose $e_m(\theta)=\mathrm{e}^{mi\theta}$) et son sous-espace pair $\mathrm{E}_{n,p}=\mathrm{E}_n\cap \mathrm{C}_p$. Cet espace $\mathrm{E}_{n,p}$ est de dimension $n+1$ et il est engendré par les fonctions cosinus c_m, $0\le m\le n$, où $c_m(\theta)=\cos(m\theta)$.

Il existe une isométrie surjective U de C_p sur $\mathrm{C}([-1,1])$, qui envoie $\mathrm{E}_{n,p}$ sur $\mathcal{P}_n$ et qui explique comment lier les polynômes aux polynômes trigonométriques et justifie le rôle des polynômes de Tchebychev. Posons en effet pour toute $f\in \mathrm{C}_p$

$$\forall x\in[-1,1],\quad (\mathrm{U}f)(x)=f(\operatorname{Arccos} x).$$

Il est clair que $\mathrm{U}f$ est une fonction continue sur $[-1,1]$ et $\|\mathrm{U}f\|=\|f\|$ parce que f est paire et que Arccos décrit $[0,\pi]$ pendant que x décrit $[-1,1]$; inversement, si $\varphi\in \mathrm{C}([-1,1])$ on peut poser $f(\theta)=\varphi(\cos(\theta))$ et ceci définit l'application inverse de U. On voit que $\mathrm{U}(c_m)=t_m$ et ceci entraîne que $\mathrm{U}(\mathrm{E}_{n,p})=\mathcal{P}_n$.

Proposition. *Pour toute projection* Q *de* $\mathrm{C}([-1,1])$ *sur* $\mathcal{P}_n$ *il existe une projection de même norme de* $\mathrm{C}_p([-\pi,\pi])$ *sur* $\mathrm{E}_{n,p}$.

Démonstration. Désignons par V la restriction de U à $\mathrm{E}_{n,p}$. C'est une bijection de $\mathrm{E}_{n,p}$ sur $\mathcal{P}_n$. Si Q est une projection de $\mathrm{C}([-1,1])$ sur $\mathcal{P}_n$, on peut considérer $\mathrm{V}^{-1}\circ \mathrm{Q}$, et poser $\mathrm{Q}_1=\mathrm{V}^{-1}\circ\mathrm{Q}\circ\mathrm{U}$. On vérifie facilement que Q_1 est une projection de C_p sur $\mathrm{E}_{n,p}$, et $\|\mathrm{Q}_1\|=\|\mathrm{Q}\|$ parce que U (et V) sont isométriques.

Proposition. *Pour toute application linéaire* T *de* $\mathrm{C}_0([-\pi,\pi])$ *dans* E_n, *il existe une application* T_s *de* $\mathrm{C}_0([-\pi,\pi])$ *dans* E_n *telle que* $\|\mathrm{T}_s\|\le\|\mathrm{T}\|$ *et telle que*

$$\mathrm{T}_s(e_m)=\langle \mathrm{T}(e_m),e_m\rangle\, e_m$$

pour tout $m\in\mathbb{Z}$.

L'application T_s est diagonale dans la base (e_m), et ses coefficients diagonaux sont les coefficients diagonaux de la "matrice" de T dans cette même base. Ceci implique en particulier que $\mathrm{T}_s(e_m)=0$ si $|m|>n$, puisque T était à valeurs dans E_n.

Démonstration. Posons pour toute $f\in \mathrm{C}_0([-\pi,\pi])$

$$\forall x,\quad (\mathrm{T}_s f)(x)=\int_0^{2\pi}(\tau_\alpha \mathrm{T}(\tau_{-\alpha}f))(x)\,\frac{d\alpha}{2\pi}$$

où les fonctions de C_0 sont étendues librement en fonctions 2π-périodiques sur $\mathbb{R}$ et où τ_α désigne la translation de longueur α,

$$\forall \theta, \quad (\tau_\alpha f)(\theta) = f(\theta - \alpha).$$

Puisque les translations sont isométriques, on a (les normes de fonctions étant encore et toujours les normes uniformes)

$$\|\tau_\alpha(\mathrm{T}(\tau_{-\alpha} f))\| = \|\mathrm{T}(\tau_{-\alpha} f)\| \le \|\mathrm{T}\| \, \|\tau_{-\alpha} f\| = \|\mathrm{T}\| \, \|f\|$$

ce qui montre que la fonction de α dans l'intégrale est majorée par $\|\mathrm{T}\| \, \|f\|$, et montre que le résultat $(\mathrm{T}_s f)(x)$ est majoré par la même quantité, ce qui implique que $\|\mathrm{T}_s\| \le \|\mathrm{T}\|$. Le lecteur vérifiera que $\mathrm{T}_s f$ est bien une fonction continue lorsque $f \in \mathrm{C}_0$, et puisque $\tau_{-\alpha} e_m = \mathrm{e}^{mi\alpha} \, e_m$ on a en posant $g = \mathrm{T}(e_m)$

$$(\mathrm{T}_s e_m)(x) = \int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{mi\alpha} (\tau_\alpha g)(x) \, \frac{d\alpha}{2\pi} = \int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{mi\alpha} \, g(x - \alpha) \, \frac{d\alpha}{2\pi} =$$

$$(g * e_m)(x) = \langle g, e_m \rangle \, e_m = \langle \mathrm{T}(e_m), e_m \rangle \, e_m.$$

Terminons la démonstration du théorème 2. Soit Q une projection quelconque de $\mathrm{C}([-1,1])$ sur $\mathcal{P}_n$ et Q_1 une projection de même norme de C_p sur $\mathrm{E}_{n,p}$. L'opérateur $\mathrm{T} = \mathrm{Q}_1 \circ \mathrm{S}$ est un opérateur de $\mathrm{C}_0([-\pi, \pi])$ dans E_n, et

$$\mathrm{T}(e_m) = \mathrm{Q}_1(\mathrm{S}(e_m)) = \mathrm{Q}_1(c_m) = c_m = \frac{e_m + e_{-m}}{2}$$

si $|m| \le n$, donc $\langle \mathrm{T}(e_m), e_m \rangle = 1/2$ si $0 < |m| \le n$, et $\langle \mathrm{T}(e_0), e_0 \rangle = 1$. L'opérateur T_s correspondant vérifie

$$\|\mathrm{T}_s\| \le \|\mathrm{T}\| \le \|\mathrm{Q}_1\| = \|\mathrm{Q}\|$$

et $\mathrm{T}_s(e_m) = \frac{1}{2} \, e_m$ pour $0 < |m| \le n$, $\mathrm{T}_s(e_0) = e_0$; on a aussi $\mathrm{T}_s(e_m) = 0$ si $|m| > n$. On voit que cet opérateur ressemble beaucoup à la projection de Dirichlet D_n,

$$2 \, \mathrm{T}_s = \mathrm{D}_n + \mathrm{D}_0$$

où D_n est la projection (orthogonale pour la norme L_2) de C_0 sur E_n qui vérifie $\mathrm{D}_n(e_m) = e_m$ si $|m| \le n$ et $\mathrm{D}_n(e_m) = 0$ si $|m| > n$. Pour toute fonction f, la projection $\mathrm{D}_n f$ est obtenue par convolution de f avec le noyau de Dirichlet $\mathcal{D}_n$. Mais on a déjà vu que

$$\|\mathrm{D}_n\| = \|\mathcal{D}_n\|_{\mathrm{L}_1} \ge \mathrm{C} \, \ln n \, ;$$

comme $\mathrm{T}_s(e_0) = e_0$ on a $\|\mathrm{T}_s\| \ge 1$ donc

$$\|\mathrm{Q}\| \ge \|\mathrm{T}_s\| \ge \max\Bigl(1, \frac{\mathrm{C}}{2} \, \ln n - \frac{1}{2}\Bigr)$$

et le résultat voulu en découle.