Prépa. Agrég, Ecrit d'Analyse, Exercices.

Exercice 1.1. Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ une suite de nombres réels ≥ 0 ; si $u_{n+p} \leq u_n + u_p$ pour tous entiers $p, n \geq 1$, montrer que la suite $(u_n/n)_{n\geq 1}$ converge (vers une limite finie).

Exercice 1.2. Montrer que $\limsup_n \varphi(n)/n = 1$, $\liminf_n \varphi(n)/n = 0$, où φ désigne l'indicatrice d'Euler.

Exercice 1.3. Soient $(\Omega_1, \mathcal{A}_1)$ et $(\Omega_2, \mathcal{A}_2)$ deux espaces mesurables ; montrer que pour tout ensemble $\mathrm{A} \in \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ et pour tout $x \in \Omega_1$, les sections

$$\mathrm{A}_x = \{y \in \Omega_2 : (x, y) \in \mathrm{A}\}$$

sont des ensembles de $\mathcal{A}_2$.

Exercice 1.4. Montrer que tout ouvert de $\mathbb{R}$ est réunion (finie ou) dénombrable d'intervalles ouverts deux à deux disjoints.

Exercice 1.5. Si (f_n) est une suite de fonctions réelles mesurables sur $(\Omega, \mathcal{A})$, montrer que l'ensemble A des points $\omega \in \Omega$ où la limite $\lim_n f_n(\omega)$ existe est un ensemble de la tribu $\mathcal{A}$.

Exercice 1.6. Soit $g : \Omega \to \mathbb{R}$ une application quelconque, $\mathcal{A} = g^{-1}(\mathcal{B}_\mathbb{R})$ (qu'on appellera en proba la tribu engendrée par la v.a. g) ; montrer que f est mesurable de $(\Omega, \mathcal{A})$ dans $\mathbb{R}$ si et seulement si $f = \varphi(g)$, avec φ borélienne de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Exercice 2.1. On suppose donnée une fonction f sur $[0, 1]$ telle que $0 < f(x) \leq 1 - x$ pour tout $x \in [0, 1]$. Pour chaque $x \in [0, 1[$ on pose $x^+ = x + f(x)$. On a donc $x < x^+ \leq 1$ pour tout $x \in [0, 1[$.

Montrer que l'intervalle semi-ouvert $[0, 1[$ est réunion d'une suite d'intervalles de la forme $[x_n, x_n^+[$, deux à deux disjoints (peut être une suite finie).

Exercice 2.2. Tribu et algèbres de fonctions.

Soit $\mathbf{A}$ une algèbre de fonctions réelles bornées sur un ensemble X, contenant les fonctions constantes et stable par convergence monotone bornée des suites ; montrer que $\mathbf{A}$ est exactement l'algèbre $\mathcal{L}_\infty(\mathrm{X}, \mathcal{A})$ pour une tribu $\mathcal{A}$ convenable de parties de X.

Indications : $\mathcal{A}$ est évidente à deviner ; utiliser Weierstrass pour montrer que $|f| \in \mathbf{A}$ lorsque $f \in \mathbf{A}$. En déduire que $\sup(f, g) \in \mathbf{A}$ lorsque $f, g \in \mathbf{A}$. Utiliser la suite $f_n = \inf(\sup(f, 0), 1)^n$ pour trouver que $\mathbf{1}_{\{f\geq 1\}} \in \mathbf{A}$.

Exercice 2.3. Si μ est une proba sur $\mathbb{R}$ telle que sa transformée de Fourier $\widehat{\mu}$ soit deux fois dérivable à l'origine, alors $\int x^2\, d\mu(x) < +\infty$. Réciproque ?

Exercice 2.4. Montrer que l'ensemble des boréliens de $\mathbb{R}$ a la puissance du continu.

Exercice 2.4.1 Montrer que l'ensemble des ouverts de $\mathbb{R}$ a la puissance du continu. Montrer que l'ensemble des G_δ de $\mathbb{R}$ a la puissance du continu.

Exercice 3.1. Soit f une fonction mesurable sur $(\Omega, \mathcal{A})$, à valeurs dans $\mathbb{R}$ (muni bien sûr de sa tribu borélienne) ; on suppose que f est intégrable par rapport à une mesure positive μ sur (Ω, μ). Si on a $\int_{\mathrm{A}} f \, d\mu \geq 0$ pour tout $\mathrm{A} \in \mathcal{A}$, montrer que f est ≥ 0 μ-presque partout.

Exercice 3.2. Soit f une fonction mesurable sur $(\Omega, \mathcal{A})$, à valeurs dans $\mathbb{C}$ (muni bien sûr de sa tribu borélienne) ; si on se donne une mesure finie (positive) μ sur (Ω, μ), montrer qu'il existe une fonction f_1 mesurable, égale à f presque partout et telle que pour tout $\omega_0 \in \Omega$ et tout $\varepsilon > 0$, l'ensemble $\{|f_1 - f_1(\omega_0)| < \varepsilon\}$ soit de μ-mesure > 0 (la fonction f_1 ne prend que des valeurs *essentielles*).

Dans le cas où f_1 est bornée, montrer que $f_1(\Omega)$ est compact dans $\mathbb{C}$. Montrer que pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, on a

$$\|f - \lambda\|_{\mathrm{L}_\infty(\Omega, \mathcal{A}, \mu)} = \max\{|f_1(\omega) - \lambda| : \omega \in \Omega\}.$$

Exercice 3.3. Soit E un espace de Banach séparable, muni de sa tribu borélienne $\mathcal{B}$, et soit $(\Omega, \mathcal{A})$ un espace mesurable ; montrer qu'une application f de Ω dans E est mesurable si et seulement si f est limite simple d'une suite de fonctions dénombrablement étagées de $(\Omega, \mathcal{A})$ dans E (on dit que g est dénombrablement étagée si elle prend un ensemble fini ou dénombrable V de valeurs et si $\{g = v\} \in \mathcal{A}$ pour toute valeur $v \in \mathrm{V}$).

Exercice 3.4. Soit E un espace de Banach séparable ; montrer que la tribu borélienne $\mathcal{B}$ de E est identique à la tribu borélienne *faible* engendrée par la famille des ouverts faibles de E. Si f est une fonction de $(\Omega, \mathcal{A})$ dans E telle que $x^* \circ f$ soit mesurable pour toute forme linéaire continue x^* sur E, montrer que f est mesurable de $(\Omega, \mathcal{A})$ dans $(\mathrm{E}, \mathcal{B})$.

Exercice 3.5. Soit (K, d) un compact métrique muni de sa tribu borélienne $\mathcal{B}$ et soit μ une mesure finie sur $(\mathrm{K}, \mathcal{B})$; montrer que la famille des $\mathrm{A} \in \mathcal{B}$ telles que 1_{A} soit limite dans $\mathrm{L}_1(\mathrm{K}, \mu)$ d'une suite (φ_n) de fonctions réelles continues sur K telles que $0 \leq \varphi_n \leq 1$ est une tribu de parties de K qui contient les ouverts de K.

Montrer que (l'image de) C(K) est dense dans $\mathrm{L}_1(\mathrm{K}, \mathcal{B}, \mu)$.

Exercice 3.6. Mesurabilité et topologie. Montrer qu'une fonction à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ est mesurable si et seulement si elle est limite d'une suite de fonctions étagées.

Montrer que toute limite simple d'une suite (f_n) de fonctions mesurables de $(\Omega, \mathcal{A})$ dans $(\mathrm{X}, \mathcal{B})$ (tribu borélienne) est mesurable.

Montrer que toute application continue de $\mathbb{R}^m$ dans $\mathbb{R}^n$ est borélienne, c'est à dire mesurable pour les tribus boréliennes.

Si f_1, f_2 sont deux applications mesurables de $(\Omega, \mathcal{A})$ dans $(\mathbb{R}^{d_j}, \mathcal{B}_j)$, $j = 1, 2$ (tribus boréliennes) alors l'application $\omega \to (f_1(\omega), f_2(\omega))$ est mesurable de $(\Omega, \mathcal{A})$ dans l'espace produit $\mathbb{R}^{d_1} \times \mathbb{R}^{d_2}$.

Exercice 4.1. Prolongement de mesure, d'une algèbre à une σ-algèbre.

Soit $\mathcal{A}$ une algèbre de parties d'un ensemble Ω et soit $\mu : \mathcal{A} \to [0, 1]$ une mesure additive telle que $\mu(\Omega) = 1$. On suppose que μ vérifie la condition suivante :

si (A_n) *est une suite décroissante d'éléments de* $\mathcal{A}$ *telle que* $\bigcap_n \mathrm{A}_n = \emptyset$, *alors* $\lim \mu(\mathrm{A}_n) = 0$.

Cette condition est évidemment nécessaire pour que μ puisse être prolongée en mesure σ-additive sur une tribu contenant l'algèbre $\mathcal{A}$. Le but de l'exercice est de montrer que cette condition est suffisante.

1. On désigne par $\mathcal{C}$ la classe des ensembles $\mathrm{C} \subset \Omega$ qui sont réunion dénombrable d'une suite (A_n) d'éléments de A, et on pose $\mu_\sigma(\mathrm{C}) = \sup\{\mu(\mathrm{A}) : \mathrm{A} \subset \mathrm{C},\ \mathrm{A} \in \mathcal{A}\}$. Vérifier que $\mathcal{C}$ contient $\mathcal{A}$, est stable par union dénombrable, par intersection finie, que μ_σ prolonge μ et que μ_σ est croissante.

1.a. Si $\mathrm{C} \in \mathcal{C}$ est réunion d'une suite croissante (A_n) d'éléments de $\mathcal{A}$, montrer que $\mu_\sigma(\mathrm{C}) = \lim_n \mu_\sigma(\mathrm{A}_n)$. En déduire la même propriété pour une suite croissante (C_n) d'éléments de $\mathcal{C}$, de réunion C.

1.b. Montrer que pour tous $\mathrm{C}_1, \mathrm{C}_2 \in \mathcal{C}$

$$\mu_\sigma(\mathrm{C}_1 \cup \mathrm{C}_2) + \mu_\sigma(\mathrm{C}_1 \cap \mathrm{C}_2) = \mu_\sigma(\mathrm{C}_1) + \mu_\sigma(\mathrm{C}_2).$$

Montrer que $\mu_\sigma(\bigcup_{n=0}^{+\infty} \mathrm{C}_n) \le \sum_{n=0}^{+\infty} \mu_\sigma(\mathrm{C}_n)$ lorsque (C_n) est une suite d'éléments de $\mathcal{C}$.

1.c. On désigne par $\mathcal{D}$ la classe des ensembles $\mathrm{D} \subset \Omega$ qui sont intersection dénombrable d'une suite (A_n) d'éléments de A, et on pose $\mu_\delta(\mathrm{D}) = \inf\{\mu(\mathrm{A}) : \mathrm{A} \supset \mathrm{D},\ \mathrm{A} \in \mathcal{A}\}$. Vérifier que $\mathcal{D}$ contient $\mathcal{A}$, est stable par intersection dénombrable, par union finie ; vérifier que $\mu_\delta(\mathrm{D}) = 1 - \mu_\sigma(\mathrm{D}^c)$, et $\mu_\delta(\mathrm{D}_1 \cup \mathrm{D}_2) + \mu_\delta(\mathrm{D}_1 \cap \mathrm{D}_2) = \mu_\delta(\mathrm{D}_1) + \mu_\delta(\mathrm{D}_2)$. Si $\mathrm{D} \subset \mathrm{C}$, avec $\mathrm{C} \in \mathcal{C}$, $\mathrm{D} \in \mathcal{D}$, vérifier que $\mu_\delta(\mathrm{D}) + \mu_\sigma(\mathrm{C} \setminus \mathrm{D}) = \mu_\sigma(\mathrm{C})$.

2. On désigne par $\mathcal{B}$ la classe des ensembles $\mathrm{B} \subset \Omega$ tels que pour tout $\varepsilon > 0$ on puisse trouver $\mathrm{D} \in \mathcal{D}$, $\mathrm{C} \in \mathcal{C}$ tels que $\mathrm{D} \subset \mathrm{B} \subset \mathrm{C}$, et $\mu_\sigma(\mathrm{C}) - \mu_\delta(\mathrm{D}) < \varepsilon$. Pour tout $\mathrm{B} \in \mathcal{B}$ on pose $\nu(\mathrm{B}) = \inf\{\mu_\sigma(\mathrm{C}) : \mathrm{B} \subset \mathrm{C},\ \mathrm{C} \in \mathcal{C}\}$.

2.a. Montrer que $\mathcal{C} \subset \mathcal{B}$ et que ν prolonge μ_σ. Vérifier que $\mathcal{B}$ est stable par passage au complémentaire et que $\nu(\mathrm{B}^c) = 1 - \nu(\mathrm{B})$. Montrer que $\mathcal{B}$ est stable par union dénombrable, donc $\mathcal{B}$ est une tribu.

2.b. Montrer que $\nu(\mathrm{B}_1 \cup \mathrm{B}_2) = \nu(\mathrm{B}_1) + \nu(\mathrm{B}_2)$ quand $\mathrm{B}_1, \mathrm{B}_2 \in \mathcal{B}$ sont disjoints. Montrer que $\nu(\bigcup_{n=0}^{+\infty} \mathrm{B}_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} \nu(\mathrm{B}_n)$ lorsque (B_n) est une suite d'éléments de $\mathcal{B}$ deux à deux disjoints.

On a donc prolongé μ en une mesure σ-additive ν sur une tribu qui contient l'algèbre initiale $\mathcal{A}$.

Exercice 4.2. Soit F une fonction croissante et continue à droite sur $\mathbb{R}$, telle que $\lim_{t\to-\infty} \mathrm{F}(t) = 0$ et $\lim_{t\to+\infty} \mathrm{F}(t) = 1$. Pour tout t posons $\mathrm{F}(t-) = \lim_{s\nearrow t} \mathrm{F}(s)$. On considère l'algèbre $\mathcal{A}$ de parties de $\mathbb{R}$ engendrée par les indicatrices des intervalles $]-\infty, a[$ et les singletons $\{a\}$, pour a variant dans $\mathbb{R}$. Montrer qu'on peut définir une mesure additive μ sur $\mathcal{A}$ telle que $\mu(\{a\}) = \mathrm{F}(a) - \mathrm{F}(a-)$ et $\mu(]-\infty, a]) = \mathrm{F}(a)$ pour tout $a \in \mathbb{R}$.

Montrer que pour tout $\mathrm{A} \in \mathcal{A}$, il existe $\mathrm{K} \in \mathcal{A}$ compact tel que $\mathrm{K} \subset \mathrm{A}$ et $\mu(\mathrm{A}) - \mu(\mathrm{K}) < \varepsilon$. En déduire que μ satisfait la condition de prolongement de l'exercice précédent.

Il existe donc une mesure de probabilité sur la tribu borélienne de $\mathbb{R}$ telle que $\mu(]a, b]) = \mathrm{F}(b) - \mathrm{F}(a)$ pour tous réels $a < b$.

Exercice 4.3. Lemme de Dini. Soit K un espace topologique compact ; montrer que toute suite (φ_n) de fonctions continues qui tend vers 0 simplement, en décroissant, tend uniformément vers 0 sur le compact K.

Exercice 4.4. Un autre lemme de Dini. Soit (f_n) une suite de fonctions continues sur $[0,1]$; on suppose que chaque fonction f_n est croissante sur $[0,1]$. Si la suite (f_n) converge simplement vers une fonction continue f, montrer que la convergence est uniforme sur $[0,1]$.

Exercice 4.5. Montrer qu'il existe une unique fonction f *croissante* (au sens large) sur $[0,1]$ qui vérifie les conditions

$$f(x) + f(1-x) = 1, \quad f(x/3) = f(x)/2$$

pour tout $x \in [0,1]$. Montrer que f est continue.

Exercice 4.6. Soient K un entier ≥ 2 et $w_0, \ldots, w_{\mathrm{K}-1}$ des nombres complexes tels que $\max_i |w_i| < 1$ et $\sum_{i=0}^{\mathrm{K}-1} w_i = 1$. Montrer qu'il existe une fonction continue $f : [0,1] \to \mathbb{C}$ telle que

$$f(0) = 0, \quad f(1) = 1, \quad f\Bigl(\frac{j+t}{\mathrm{K}}\Bigr) = f\Bigl(\frac{j}{\mathrm{K}}\Bigr) + w_j\, f(t)$$

pour tous $j = 0, \ldots, \mathrm{K}-1$ et $t \in [0,1]$.

Examiner les cas où :

$\mathrm{K} = 9$ et la suite de complexes est

$$1/3,\ i/3,\ 1/3,\ -i/3,\ -1/3,\ -i/3,\ 1/3,\ i/3,\ 1/3.$$

$\mathrm{K} = 3$ et la suite de complexes est

$$1/2,\ 0,\ 1/2.$$

Exercice 4.7. On considère une application continue $f : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ telle que $f(1) \neq f(0)$. Montrer qu'il existe un fermé $\mathrm{F} \subset [0,1]$ et une application croissante $\varphi : [0,1] \to \mathrm{F}$ tels que $f \circ \varphi$ soit continue et injective (s'il existe un chemin continu, il existe un chemin continu et injectif).

Exercice 4.8. Soient $\alpha, \beta, \gamma \in]0,1[$ tels que $\alpha + \beta + \gamma = 1$; montrer que pour tous réels $u, v, w \geq 0$ on a $u^\alpha v^\beta w^\gamma \leq \alpha u + \beta v + \gamma w$. En déduire pour trois fonctions positives $u, v, w \in \mathrm{L}_1$

$$\int u^\alpha v^\beta w^\gamma \, d\mu \leq \Bigl(\int u \, d\mu\Bigr)^\alpha \Bigl(\int v \, d\mu\Bigr)^\beta \Bigl(\int w \, d\mu\Bigr)^\gamma.$$

Soient maintenant $f, g, h \in \mathrm{L}_1(\mathbb{R}^n)$ et $a, b, c > 0$ tels que $a + b + c = 2$; montrer que

$$\int |f(x)|^a |g(x-y)|^b |h(y)|^c \, dx \, dy \leq \|f\|_1 \, \|g\|_1 \, \|h\|_1.$$

En déduire que si $1/p + 1/q = 1 + 1/r$, on a $\mathrm{L}_p * \mathrm{L}_q \subset \mathrm{L}_r$ (inégalité de convolution de Young).

Exercice 4.9. Soit A un borélien de mesure finie > 0 dans $\mathbb{R}^n$; on pose $-\mathrm{A} = \{-x : x \in \mathrm{A}\}$. Montrer que la fonction $1_\mathrm{A} * 1_{-\mathrm{A}}$ est continue. En déduire que l'ensemble $\mathrm{A} - \mathrm{A} = \{a - b : a, b \in \mathrm{A}\}$ est un voisinage de 0 dans $\mathbb{R}^n$.

Exercice 4.10. Soient φ une fonction convexe sur $\mathbb{R}$ et f une fonction intégrable sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$; montrer que $(\varphi(f))^- = \max(-\varphi(f), 0)$ est intégrable. Montrer que

$$\varphi\Big(\int f(\omega)\, d\mu(\omega)\Big) \le \int \varphi(f(\omega))\, d\mu(\omega)$$

(valeur $+\infty$ admise ; c'est *l'inégalité de Jensen* ; indication : considérer une tangente au graphe de φ au point $t = \int f\, d\mu$).

Exercice 4.11. Montrer que pour toute suite croissante de mesures positives (μ_n) sur un espace mesurable $(\Omega, \mathcal{A})$, la limite $\mathrm{A} \in \mathcal{A} \to \mu(\mathrm{A}) = \lim_n \mu_n(\mathrm{A})$ est une mesure sur $(\Omega, \mathcal{A})$.

Exercice 5.1. Soit f une fonction continue sur $[0, 1]$ et soit $([x_n, y_n[)_{n\ge 0}$ un recouvrement de $[0, 1[$ en intervalles deux à deux disjoints, tels que $0 \le x_n < y_n \le 1$ et $f(y_n) - f(x_n) \ge u_n$ pour tout $n \ge 0$, où $\sum |u_n| < +\infty$. Montrer que $f(1) - f(0) \ge \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.

On suppose que f continue sur $[0, 1]$ possède une dérivée à droite > 0, sauf peut-être aux points d'un ensemble dénombrable $\mathrm{D} = (d_n)_{n\ge 0} \subset [0, 1]$. Montrer qu'à tout $x \in [0, 1[$ on peut associer x^+, de façon que $x < x^+ \le 1$, et que $f(x^+) > f(x)$ si $x \notin \mathrm{D}$ et $f(x^+) - f(x) > -\varepsilon 2^{-n}$ si $x = d_n$. En déduire que $f(1) \ge f(0)$.

On suppose que f continue sur $[0, 1]$ possède une dérivée à droite ≥ 0, sauf peut-être aux points d'un ensemble dénombrable $\mathrm{D} = (d_n)_{n\ge 0} \subset [0, 1]$. Montrer que f est croissante (au sens large) sur $[0, 1]$ (ce théorème a été énoncé par Dini, démontré pour la première fois en toute généralité par Ludwig Scheeffer ; l'idée de démonstration précédente est de Lebesgue).

Exercice 5.2. Soit $(\Omega, \mathcal{A})$ un espace mesurable et E un espace de Banach ; on dit que $g : \Omega \to \mathrm{E}$ est *dénombrablement étagée* s'il existe une partition $(\mathrm{A}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de Ω en ensembles de $\mathcal{A}$, telle que g soit constante sur chaque A_n, égale à $x_n \in \mathrm{E}$. Soit μ une mesure ≥ 0 sur $(\Omega, \mathcal{A})$; sous l'hypothèse $\int \|g(\omega)\|\, d\mu(\omega) < +\infty$, montrer que le vecteur $\sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(\mathrm{A}_n) x_n$ ne dépend pas de la représentation de g. On le note $\int g\, d\mu \in \mathrm{E}$ (intégrale vectorielle).

On dit que $f : \Omega \to \mathrm{E}$ est *fortement mesurable* si elle est limite simple sur Ω d'une suite (g_n) de fonctions dénombrablement étagées (quand E est séparable, la mesurabilité abstraite de $(\Omega, \mathcal{A})$ dans $(\mathrm{E}, \mathcal{B}_\mathrm{E})$ suffit, exercice 3.3). Montrer qu'alors $\omega \to \|f(\omega)\|$ est mesurable. Montrer qu'on peut choisir la suite (g_n) telle que $\|g_n(\omega)\| \le \|f(\omega)\|$ pour tout $\omega \in \Omega$.

Montrer que pour toute suite (g_n) de fonctions dénombrablement étagées qui tend simplement vers f, avec $\|g_n(\omega)\| \le h(\omega)$ pour tout $\omega \in \Omega$ et tout $n \ge 0$, et h μ-intégrable, la limite $\lim_n \int g_n\, d\mu$ existe et ne dépend que de f. On la note $\int f\, d\mu$.

Soient $f \in \mathrm{L}_1(\mathbb{R})$ et $g \in \mathrm{L}_p(\mathbb{R})$, $1 \le p < +\infty$. Montrer que $f * g \in \mathrm{L}_p(\mathbb{R})$ est égale à l'intégrale vectorielle $\int g_t\, f(t)\, dt \in \mathrm{L}_p(\mathbb{R})$, où g_t désigne la translatée de g, définie par $g_t(x) = g(x - t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Exercice 5.3. Montrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 0$ si $x \le 0$ et $f(x) = \exp(-1/x)$ si $x > 0$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$. Utiliser f pour construire des fonctions C^∞ à support compact (non identiquement nulles) sur $\mathbb{R}$, puis sur $\mathbb{R}^d$.

Exercice 5.4. Soit f une fonction continue 2π-périodique sur $\mathbb{R}$; on pose

$$c_n(f) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x)\, \mathrm{e}^{-inx}\, dx$$

pour tout $n \in \mathbb{Z}$. Montrer que si $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)| < +\infty$, on a $f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)\, \mathrm{e}^{inx}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Soient F une fonction continue sur $\mathbb{R}$, telle que $|\mathrm{F}(x)| \le \mathrm{C}\,(1+|x|)^{-a}$ pour un $a > 1$ et tout $x \in \mathbb{R}$, et $\widehat{\mathrm{F}}$ sa transformée de Fourier (avec la normalisation des probabilistes)

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \widehat{\mathrm{F}}(t) = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{F}(x)\, \mathrm{e}^{ixt}\, dx.$$

Montrer que la fonction $f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \mathrm{F}(x+2\pi n)$ est définie, continue, 2π-périodique. Trouver une relation entre les valeurs $\widehat{\mathrm{F}}(n)$, $n \in \mathbb{Z}$ et les coefficients de Fourier de f.

Démontrer la *formule de Poisson*,

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \mathrm{F}(n) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{\mathrm{F}}(n).$$

Exercice 6.1. Utiliser la théorie des séries de Fourier pour retrouver, d'une façon ou d'une autre, la relation plus que classique

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Exercice 6.2. Soit K un compact de $\mathrm{L}_1(0, 2\pi)$; montrer que le lemme de Riemann-Lebesgue est vrai uniformément sur K, c'est à dire que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe N tel que $|n| \ge \mathrm{N}$ implique $|c_n(f)| < \varepsilon$ pour toute $f \in \mathrm{K}$.

On suppose que f est une fonction continue 2π-périodique, telle que

$$\int_0^1 \frac{\omega_f(t)}{t}\, dt < +\infty$$

(où ω_f désigne le module de continuité de f, voir compte-rendu de la séance 5). Pour tout $s \in \mathbb{R}$ on désigne par g_s la fonction définie par $g_s(t) = f(s-t)/(1-\mathrm{e}^{it})$. Montrer que $s \to g_s$ est continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathrm{L}_1(0, 2\pi)$. En déduire que les fonctions (g_s) vérifient le lemme de Riemann-Lebesgue uniformément.

En déduire que la série de Fourier de f est uniformément convergente vers f.

Exercice 6.3. On dit qu'une fonction réelle f, définie dans un ouvert Ω de $\mathbb{R}^2$, possède la *propriété de moyenne spatiale* si

$$\text{(M)} \qquad f(x) = \frac{1}{\pi r^2} \int_{\mathrm{B}(x,r)} f(y)\, dy$$

pour tout $x \in \Omega$ et toute boule ouverte $\mathrm{B}(x, r)$ telle que $r > 0$ et $\overline{\mathrm{B}(x, r)} \subset \Omega$; la distance est la distance euclidienne usuelle.

Montrer que si f est C^2 et vérifie la propriété (M), alors $\Delta f = 0$ dans Ω (où Δf désigne le laplacien de f).

Montrer qu'on peut trouver une fonction $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, telle que ψ soit paire, ≥ 0 sur $\mathbb{R}$ et constante > 0 dans un voisinage de 0. Montrer qu'alors la fonction φ définie sur $\mathbb{R}^2$ par $\varphi(x_1, x_2) = \psi(\sqrt{x_1^2 + x_2^2})$ est dans $\mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$.

Si f vérifie la propriété (M) dans l'ouvert Ω et si $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$ est une fonction radiale d'intégrale 1, de support contenu dans $\mathrm{B}(0, \varepsilon)$, montrer que $f = f * \varphi$ dans l'ouvert

$$\Omega_\varepsilon = \{x \in \Omega : \mathrm{dist}(x, \Omega^c) < \varepsilon\}.$$

En déduire que toute fonction f qui vérifie (M) est une fonction C^∞ qui vérifie $\Delta f = 0$ dans Ω (c'est à dire une fonction harmonique dans Ω). Etudier la réciproque.

Exercice 7.1. Si deux fonctions $f, g \in \mathrm{L}_1(0, 2\pi)$ vérifient $c_n(f) = c_n(g)$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$, montrer que $f = g$.

Exercice 7.2. Si deux fonctions $f, g \in \mathrm{L}_1(0, 2\pi)$ sont égales dans un intervalle non vide $]s - \varepsilon, s + \varepsilon[$, montrer que $\lim_n \bigl(\mathrm{S}_n(f; s) - \mathrm{S}_n(g; s)\bigr) = 0$ (principe de localisation).

Exercice 7.3. Soit $\mathrm{K}_n(t) = (n+1)^{-1} \sin^2((n+1)t/2)/\sin^2(t/2)$ le noyau de Fejér ; montrer qu'il existe une constante $c > 0$ telle que $k_n = \int_0^{2\pi} \mathrm{K}_n^2(t)\,(dt/2\pi) \geq c\,n$ pour tout $n \geq 1$.

Montrer que la suite (J_n) définie par $\mathrm{J}_n(t) = k_n^{-1}\,\mathrm{K}_n^2$ fournit une approximation de l'identité par convolution.

Montrer que de plus, $\int_0^{2\pi} |t|\,\mathrm{J}_n(t)\,dt = \mathrm{O}(1/n)$.

En déduire qu'il existe une constante M telle que pour tout $n \geq 1$ et pour toute fonction f continue et 2π-périodique, on puisse trouver un polynôme trigonométrique $\mathrm{P}_n = \sum_{k=-n}^{n} a_k e_k$ tel que

$$\|f - \mathrm{P}_n\|_\infty \leq \mathrm{M}\,\omega_f(1/n)$$

(si $|x - y| \leq j/n$, j entier > 0, on remarquera que $|f(x) - f(y)| \leq j\,\omega_f(1/n)$; la fonction ω_f est le module de continuité de f).

Exercice 7.4. Déduire de l'exercice précédent le résultat de convergence uniforme suivant :

si f est une fonction continue et 2π-périodique telle que $\lim_n \bigl(\ln(n)\,\omega_f(1/n)\bigr) = 0$, *alors $(\mathrm{S}_n f)$ converge uniformément vers f.*

On remplacera f par le polynôme P_n de l'exercice précédent ; on remarquera que la norme L_1 du noyau de Dirichlet D_n est de l'ordre de $\ln n$, pour $n \geq 2$. On notera que $\mathrm{P}_n = \mathrm{P}_n * \mathrm{D}_n$.

Exercice 7.5. On considère l'opérateur linéaire borné T_g de $\mathrm{L}_1(0, 2\pi)$ dans lui-même donné par $\mathrm{T}_g(f) = f * g$, où g est une fonction fixée de L_1. Montrer que $\|\mathrm{T}_g\| = \|g\|_1$.

Montrer la même égalité pour l'opérateur T_g, agissant cette fois de $\mathrm{C}_{\mathrm{per}}([0, 2\pi])$ dans lui-même.

Déduire du théorème de Banach-Steinhaus qu'il existe des fonctions continues et 2π-périodiques dont la série de Fourier ne converge pas uniformément, et des fonctions de $\mathrm{L}_1(0, 2\pi)$ dont la série de Fourier ne converge pas en norme L_1.

Exercice 8.1. Si $f \in \mathrm{L}_1(\mathbb{R}^d)$ et $g \in \mathrm{L}_2(\mathbb{R}^d)$, montrer que la transformée de Fourier de $f * g$ est le produit des transformées de Fourier de f et de g.

Exercice 8.2. Calculer la transformée de Fourier de la fonction h_ε définie sur $\mathbb{R}$ par $h_\varepsilon(x) = x^{-1}\,\mathbf{1}_{\{|x|>\varepsilon\}}$ (où $\varepsilon > 0$).
Indication. Considérer pour $x > 0$

$$\mathrm{F}(x) = \int_x^{+\infty} \frac{\sin y}{y}\,dy.$$

Montrer que $\mathrm{F}(x) = \mathrm{O}(x^{-1})$ quand $x \to +\infty$. Exprimer la transformée de Fourier de h_ε à l'aide de F (on pourra étudier la limite de la transformée de Fourier de $\mathbf{1}_{[-n,n]}\,h_\varepsilon$ lorsque $n \to +\infty$).

Montrer que pour toute $f \in \mathrm{L}_2(\mathbb{R})$, la limite $\mathrm{H}(f) = \lim_\varepsilon f * h_\varepsilon$ existe, en norme L_2, lorsque $\varepsilon \to 0$.

Montrer que la limite existe, en norme uniforme, lorsque f est C^1 à support compact.

Exprimer la transformée de Fourier de $\mathrm{H}(f)$. Montrer qu'il existe une constante $c > 0$ telle que $c\,\mathrm{H}$ soit un opérateur unitaire de $\mathrm{L}_2(\mathbb{R})$.

Exercice 8.3.

Soient U et V deux fonctions réelles continues de classe C^1 dans le disque ouvert $\mathrm{D} = \mathrm{D}(0,1) \subset \mathbb{R}^2$, telles que $\frac{\partial \mathrm{U}}{\partial y} = \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial x}$ pour tout point de D. Montrer qu'il existe une fonction F de classe C^1 dans D telle que $\mathrm{U} = \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial x}$ et $\mathrm{V} = \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial y}$. On pourra montrer que

$$\int_0^x \mathrm{U}(s,0)\,ds + \int_0^y \mathrm{V}(x,t)\,dt = \int_0^y \mathrm{V}(0,t)\,dt + \int_0^x \mathrm{U}(s,y)\,ds$$

en se ramenant à une intégrale double dans le rectangle dont deux sommets sont $(0,0)$ et $(x,y) \in \mathrm{D}$.

Dans toute la suite F est une fonction réelle de classe C^2 dans D, harmonique dans ce disque.

Montrer qu'il existe une fonction réelle G, harmonique dans D, et telle que $f(x+iy) = \mathrm{F}(x,y) + i\mathrm{G}(x,y)$ soit holomorphe dans D (on dit que G est une fonction harmonique *conjuguée* de F). Montrer que G est unique si on impose que $\mathrm{G}(0,0) = 0$.

Montrer que

$$\mathrm{F}(0,0) = \int_0^{2\pi} \mathrm{F}(r\cos\theta, r\sin\theta)\,\frac{d\theta}{2\pi}$$

pour tout $r \in [0,1[$.

A toute fonction réelle $f \in \mathrm{L}_2(\mathbb{T})$ on associe la fonction harmonique $\mathrm{F} = \mathrm{P}(f)$ telle que

$$\mathrm{F}(r\cos\theta, r\sin\theta) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f) r^{|n|}\,\mathrm{e}^{in\theta}$$

pour tout $r \in [0,1[$, $\theta \in [0,2\pi]$. Déterminer la fonction $g \in \mathrm{L}_2(\mathbb{T})$ telle que $\mathrm{G} = \mathrm{P}(g)$ soit la conjuguée de F nulle en 0. Montrer que $f \to g$ est linéaire de norme ≤ 1 sur $\mathrm{L}_2(\mathbb{T})$.

Exercice 9.1. Calculer pour tout t réel l'intégrale

$$f(t) = \int_{\mathbb{R}} \frac{\mathrm{e}^{ixt}}{1+x^2}\,dx.$$

Exercice 9.2. Soient Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ et $\gamma : [\alpha, \beta] \to \Omega$ un chemin continu ; montrer qu'il existe une suite (γ_n) de chemins de classe C^1, $\gamma_n : [\alpha, \beta] \to \Omega$, qui converge uniformément sur $[\alpha, \beta]$ vers γ.

Soit f une fonction holomorphe sur Ω ; montrer que $\int_{\gamma_n} f(z)\,dz$ converge, et que la limite ne dépend que du chemin continu γ. On appellera donc cette limite $\int_{\gamma} f(z)\,dz$.

Soit $\varphi : [0,1]^2 \to \Omega$ une application continue ; pour tout $s \in [0,1]$ on définit un chemin continu $\gamma_s : [0,1] \to \Omega$ par $\gamma_s(t) = \varphi(s,t)$. Montrer que

$$\int_{\gamma_1} f(z)\,dz = \int_{\gamma_0} f(z)\,dz.$$

Exercice 9.3. On considère une fonction $z \to \mathrm{A}(z)$, définie sur un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}$, et à valeurs dans $\mathrm{M}_d(\mathbb{C})$ (les matrices de taille $d \times d$ à coefficients complexes) ; autrement dit, la donnée de $z \to \mathrm{A}(z) = (a_{i,j}(z))$ correspond à la donnée de d^2 fonctions scalaires. On dira que A est holomorphe sur Ω si toutes les fonctions coordonnées $(a_{i,j})$ sont holomorphes sur Ω.

On désigne par B une matrice fixée, de taille $d \times d$, et par K son spectre, c'est à dire l'ensemble de ses valeurs propres. On considère un chemin fermé γ dans $\mathbb{C}$ qui ne rencontre pas K. Montrer que la matrice

$$\mathrm{P} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} (z\mathrm{I}_d - \mathrm{B})^{-1}\,dz$$

est un projecteur. Montrer que pour r assez grand et $\gamma = \gamma_r$ (le parcours habituel du cercle de rayon r), la matrice P est égale à la matrice unité I_d.

Dans le cas où γ décrit un cercle contenant exactement une valeur propre λ de B, montrer que la matrice P projette sur le sous-espace caractéristique de B associé à la valeur propre λ.

Exercice 9.4. Soit f une fonction holomorphe dans le disque unité ouvert, bornée dans le disque unité ; si on a

$$\lim_{r \to 1} f(r\,\mathrm{e}^{i\theta}) = 0$$

uniformément pour $\theta_0 \le \theta \le \theta_1$, où $0 \le \theta_0 < \theta_1 \le 2\pi$, montrer que $f = 0$.

Exercice 10.1. Si f est holomorphe dans un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}$ et si $|f|$ admet un minimum local au point $z_0 \in \Omega$, alors $f(z_0) = 0$, ou bien f est constante dans un voisinage de z_0.

Soit D un disque ouvert tel que $\overline{\mathrm{D}} \subset \Omega$; si f est holomorphe dans Ω, non constante sur D et si le module de f est constant sur le bord du disque D, en déduire que f s'annule dans D.

Déterminer les fonctions holomorphes sur $\mathbb{C}$ telles que $|f(\mathrm{e}^{i\theta})| = 1$ pour tout $\theta \in \mathbb{R}$.

Exercice 10.2. Montrer que la fonction $z \to \tanh(\pi z/4)$ est une bijection de la bande ouverte $\{x + iy : |y| < 1\}$ sur le disque unité ouvert.

Trouver une fonction holomorphe sur le disque unité ouvert qui réalise une bijection du disque unité ouvert sur le demi-plan ouvert $\{x + iy : y > 0\}$.

Exercice 10.3. Montrer que la fonction U définie sur $\mathbb{R}^2$ par $\mathrm{U}(x, y) = \mathrm{e}^x \cos y$ est harmonique. Trouver une fonction f holomorphe sur $\mathbb{C}$ telle que $f(0) = 1$ et $\operatorname{Re} f = \mathrm{U}$.

On pose $g(z) = \mathrm{e}^{2\,\mathrm{ch}(z)}$. Vérifier que $|g(z)| = 1$ pour tout point z sur les deux droites horizontales D_+ et D_- définies par $\operatorname{Im} z = \pm\pi/2$. Soit Ω la bande ouverte du plan complexe limitée par ces deux droites ; la fonction g est-elle bornée sur Ω ?

Soit φ une fonction continue sur la bande fermée $\overline{\Omega}$, holomorphe dans la bande Ω, telle que $|\varphi(z)| \le 1$ pour tout $z \in \mathrm{D}_+ \cup \mathrm{D}_-$ et telle que de plus

$$|\varphi(x + iy)| \le \exp(\mathrm{ch}(x) \cos(y))$$

pour tout $x + iy \in \Omega$. Vérifier que $z \to \varphi(z)g(z)^\varepsilon$ tend vers 0 à l'infini pour tout $\varepsilon > 0$. En déduire que φ est en fait bornée par 1 sur la bande Ω.

Exercice 10.4. Soit

$$\mathrm{P}_t = a_0(t) + a_1(t)\,\mathrm{X} + \cdots + a_n(t)\,\mathrm{X}^n \in \mathbb{C}[\mathrm{X}]$$

un polynôme dont les coefficients sont des fonctions continues du paramètre t. On suppose que P_0 n'a pas de racine sur le cercle unité et qu'il a exactement k racines dans le disque unité ouvert (comptées avec leur multiplicité). Montrer que pour t suffisamment proche de 0, le polynôme P_t n'a pas de racine sur le cercle unité et a exactement k racines dans le disque unité ouvert (comptées. . .).

Exercice 10.5. Le but de cet exercice est de montrer que tout fermé F de $\mathbb{R}^d$ est l'ensemble où une fonction $f \ge 0$ de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^d$ s'annule. On suppose $\mathrm{F} \ne \mathbb{R}^d$.

Soit Ω_n l'ouvert des points $x \in \mathbb{R}^d$ tels que $d(x, \mathrm{F}) > 2^{-n}$; construire une fonction φ_n continue sur $\mathbb{R}^d$ telle que $0 \le \varphi_n \le 1$, et telle que

$$\Omega_n = \{x \in \mathbb{R}^d : \varphi_n(x) > 0\}.$$

Soit ψ une fonction de classe C^∞ à support compact contenu dans la boule unité ouverte, $\psi(0) > 0$, $\psi \ge 0$ et d'intégrale 1, et pour tout k considérons $\psi_k(x) = 2^{kd}\psi(2^k x)$. Montrer que $f_n = \varphi_n * \psi_n$ est C^∞, $0 \le f_n \le 1$, $f_n > 0$ sur Ω_n et $f_n = 0$ sur F. Estimer la norme uniforme des dérivées partielles $\mathrm{D}^\alpha f_n$ de tout ordre $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_d) \in \mathbb{N}^d$ de f_n, en fonction de n, de $|\alpha| = \sum |\alpha_j|$ et des normes L_1 des dérivées partielles de ψ.

Montrer qu'on peut trouver des coefficients $a_n > 0$ tels que la série $f = \sum a_n f_n$ et toutes ses séries dérivées partielles soient normalement convergentes. Conclure.

Exercice 11.1. Si f est holomorphe dans Ω et ne s'annule pas dans Ω, montrer que la fonction $\ln |f|$ est harmonique dans Ω.

Exercice 11.2. Soient U le disque unité ouvert et H(U) l'espace des fonctions holomorphes dans U ; pour tout $\alpha > 0$ on introduit l'espace E_α des fonctions complexes f dans le disque unité telles que

$$\|f\|^2_{\mathrm{E}_\alpha} = \int_{\mathrm{U}} |f(x+iy)|^2 (x^2+y^2)^\alpha \, dx\, dy < +\infty.$$

Montrer que pour tout compact $\mathrm{K} \subset \mathrm{U}$, il existe une constante c_{K} telle que

$$\forall f \in \mathrm{H(U)} \cap \mathrm{E}_\alpha,\ \forall z \in \mathrm{K}, \quad |f(z)| \le c_{\mathrm{K}} \, \|f\|_{\mathrm{E}_\alpha}$$

(on pourra appliquer la formule de Cauchy à une famille de cercles centrés en 0 de rayons r tels que $r_1 < r < r_2 < 1$, où r_1 est choisi de façon que $\mathrm{K} \subset \mathrm{D}(0, r_1)$, et intégrer par rapport au paramètre r).

Montrer que $\mathrm{H(U)} \cap \mathrm{E}_\alpha$ est un sous-espace vectoriel fermé de E_α.

Montrer que l'appartenance de f à $\mathrm{H(U)} \cap \mathrm{E}_\alpha$ peut se caractériser au moyen des coefficients de Taylor de f en 0. Montrer que $\mathrm{H(U)} \cap \mathrm{E}_\alpha$ est l'adhérence dans E_α de l'ensemble des polynômes.

Exercice 11.3. Soit $a \in \mathbb{C}$ tel que $|a| < 1$; vérifier que la fonction

$$\varphi_a(z) = \frac{z-a}{1-\overline{a}z}$$

est une bijection de U sur lui-même, qui se prolonge en bijection du disque unité fermé sur lui-même.

On suppose que $(a_n)_{n\ge1} \subset \mathrm{U}$ est telle que $\sum(1-|a_n|) < +\infty$. Montrer que la suite de fonctions (F_n) définie par

$$\mathrm{F}_n(z) = \prod_{j=1}^{n} \overline{a}_j \, \frac{a_j - z}{1-\overline{a}_j z}$$

converge uniformément sur tout compact $\mathrm{K} \subset \mathrm{U}$ vers une fonction holomorphe F dans U, dont les zéros sont exactement les points de la suite (a_n) (on écrira $\overline{a}_j\,(a_j - z)/(1-\overline{a}_j z)$ sous la forme $1 + \varepsilon_j(z)$).

Montrer qu'on peut choisir la suite $(a_n)_{n\ge1}$ de façon que l'adhérence de l'ensemble des zéros de la fonction F dans U contienne le cercle unité. Montrer que la fonction F ainsi obtenue ne peut pas être prolongée en fonction holomorphe sur un ouvert plus grand que U.

Exercice 11.4. Montrer que la fonction f définie dans un voisinage épointé de 0 par $f(z) = (\cos z/\sin z) - 1/z$ possède une singularité artificielle à l'origine.

Montrer que la formule

$$\mathrm{F}(z) = \lim_n \sum_{j=-n}^{n} \frac{1}{z - j\pi}$$

définit une fonction holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \pi\mathbb{Z}$.

Comparer $\mathrm{F}(z)$ et $\operatorname{cotan} z$ (on montrera que $\mathrm{F}(z) - \operatorname{cotan} z$ se prolonge en fonction holomorphe bornée sur $\mathbb{C}$).