Prépa. Agrég écrit d'Analyse, séance n° 7, mercredi 21 novembre 2001.

Parenthèse : les fonctions plateau

La fonction φ de l'exercice **6.2**, définie par $\varphi(x) = \mathrm{e}^{-1/x}$ pour $x > 0$ et $\varphi(x) = 0$, est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$. A partir de cette fonction, on peut construire une autre fonction θ de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \theta(x) = \varphi(2(x+1))\,\varphi(-2(x-1)).$$

On voit que $\theta(x) = 0$ quand $|x| \geq 1$, donc θ est à support compact, et

$$\theta(x) = \exp\Big(\frac{1}{2}\,\frac{1}{x-1} - \frac{1}{2}\,\frac{1}{1+x}\Big) = \exp\Big(-\frac{1}{1-x^2}\Big)$$

quand $|x| < 1$. On peut prolonger cet exemple en plusieurs dimensions, soit en posant $\theta_{1,d}(x_1, \ldots, x_d) = \prod_{j=1}^d \theta(x_j)$, soit $\theta_{2,d}(x_1, \ldots, x_d) = \theta\big(\sqrt{\sum_{j=1}^d x_j^2}\big)$.

Une fois connu un exemple de fonction θ de classe C^∞, à support compact, ≥ 0 et non identiquement nulle, on fabriquera des fonctions "en plateau" facilement par la formule $p_n = \mathbf{1}_{[a,b]} * \theta_n$ où $\theta_n(x) = n\,\theta(nx)$ (en une dimension ; on a des analogues évidents en plusieurs dimensions). Si le support de θ est dans $[-1, 1]$, on voit que p_n est C^∞ sur $\mathbb{R}$, à support dans $[a - 1/n, b + 1/n]$, et constante (non nulle) sur l'intervalle $[a + 1/n, b - 1/n]$ (lorsque $2/n < b - a$).

Exercice 7.1. On suppose que les coefficients (a_n) sont réels > 0 et ont la propriété suivante : pour toute fonction $f \in \mathrm{L}_2(-\pi, \pi)$ telle que $|c_m(f)| \leq a_{|m|}$ pour tout $m \in \mathbb{Z}$, la fonction f "est" continue, c'est à dire presque partout égale à une fonction continue 2π-périodique. Montrer qu'alors $\sum a_n < +\infty$ (autrement dit : on ne peut pas trouver de condition non triviale sur la taille des coefficients de Fourier qui garantisse la continuité de la fonction).

Indications : *a.* Montrer que si $\sum a_n = +\infty$, il existe des coefficients b_n tels que $0 < b_n \leq a_n$, et $\sum b_n^2 < +\infty$, $\sum_n b_n = +\infty$; *b.* Considérer l'application linéaire continue T de $\ell_\infty(\mathbb{Z})$ dans $\mathrm{L}_2(-\pi, \pi)$ définie par $\mathrm{T}(c) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} c_m b_{|m|} e_m$ pour toute suite bornée de scalaires $c = (c_m)_{m \in \mathbb{Z}}$.

7.1. Un peu d'espaces de Hilbert

Définition. On appelle *espace de Hilbert* un espace vectoriel H (réel ou complexe) muni d'un produit scalaire $(x, y) \to \langle x, y\rangle$ tel que la semi-norme $x \to \sqrt{\langle x, x\rangle}$ soit une norme sur H, qui rende cet espace **complet**.

Un *produit scalaire* doit vérifier les trois propriétés suivantes : pour tout $y \in \mathrm{H}$, l'application $x \to \langle x, y\rangle$ est $\mathbb{K}$-linéaire sur H ; on a $\langle y, x\rangle = \overline{\langle x, y\rangle}$ pour tous $x, y \in \mathrm{H}$, et enfin le réel $\langle x, x\rangle$ est ≥ 0 pour tout $x \in \mathrm{H}$.

Si H est un espace de Hilbert, on note $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$ pour tout $x \in \mathrm{H}$. L'inégalité de Cauchy-Schwarz dit que $|\langle x, y\rangle| \leq \|x\|\,\|y\|$.

Exemple. L'espace $\mathrm{L}_2(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ est un espace de Hilbert pour le produit scalaire

$$\langle f, g\rangle = \int_\Omega f(s)\overline{g(s)}\,d\mu(s).$$

L'espace ℓ_2 est un cas particulier, obtenu lorsque $\Omega = \mathbb{N}$ est muni de la mesure de comptage (définie par $\mu(\{n\}) = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$).

Lemme 1. *Soient* $(u_1, \ldots, u_n)$ *des vecteurs deux à deux orthogonaux d'un espace de Hilbert* H *; on a*

$$\Big\|\sum_{k=1}^{n} u_k\Big\|^2 = \sum_{k=1}^{n} \|u_k\|^2.$$

En particulier, des vecteurs orthogonaux non nuls *sont linéairement indépendants.*

Démonstration. Facile, en développant le carré scalaire $\langle \sum_{k=1}^{n} u_k, \sum_{k=1}^{n} u_k \rangle$.

Lemme 2. *Soit* $(e_1, \ldots, e_n)$ *une suite orthonormée finie dans un espace de Hilbert* H *; posons* $\mathrm{F} = \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_n)$ *; pour tout vecteur* $x \in \mathrm{H}$*, le vecteur*

$$\mathrm{P_F}(x) = \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle \, e_i$$

est la projection orthogonale de x *sur* F*, c'est à dire que* $\mathrm{P_F}(x) \in \mathrm{F}$ *et que le vecteur* $x - \mathrm{P_F}(x)$ *est orthogonal à* F*. On a* $\|x - \mathrm{P_F}(x)\| \leq \|x - z\|$ *pour tout* $z \in \mathrm{F}$ *(le point* $\mathrm{P_F}(x)$ *est le point de* F *le plus proche de* x*).*

Démonstration. Il est évident que $y = \mathrm{P_F}(x) \in \mathrm{F}$, et il est clair que $\langle y, e_j \rangle = \langle x, e_j \rangle$ pour tout $j = 1, \ldots, n$, donc $x - y$ est orthogonal à tous les (e_j), ce qui implique que $x - y$ est orthogonal à F. Pour la deuxième affirmation, on écrit $x - z = (x - \mathrm{P_F}(x)) + (\mathrm{P_F}(x) - z)$ et on utilise l'orthogonalité de $x - \mathrm{P_F}(x)$ et de $\mathrm{P_F}(x) - z \in \mathrm{F}$.

Lemme 3 : inégalité de Bessel. *Soient* H *un espace de Hilbert et* $(e_i)_{i \in \mathrm{I}}$ *une famille orthonormée dans* H *; pour tout* $x \in \mathrm{H}$ *la famille* $(|\langle x, e_i \rangle|^2)_{i \in \mathrm{I}}$ *est sommable et*

$$\sum_{i \in \mathrm{I}} |\langle x, e_i \rangle|^2 \leq \|x\|^2.$$

Démonstration. Pour qu'une famille $(u_i)_{i \in \mathrm{I}}$ de réels ≥ 0 soit sommable, il faut et il suffit qu'il existe un majorant M pour l'ensemble des sommes finies $\sum_{i \in \mathrm{J}} u_i$, $\mathrm{J} \subset \mathrm{I}$, J fini. On a alors $\sum_{i \in \mathrm{I}} u_i \leq \mathrm{M}$. Il suffit donc de montrer le résultat du lemme pour une suite finie $e_1, \ldots, e_n$. On a vu que si on pose $y = \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle \, e_i$, le vecteur $x - y$ est orthogonal au sous-espace $\mathrm{F} = \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_n)$, donc $x - y$ est orthogonal à $y \in \mathrm{F}$. On aura puisque $x = y + (x - y)$

$$\|x\|^2 = \|y\|^2 + \|x - y\|^2 \geq \|y\|^2 = \sum_{i=1}^{n} |\langle x, e_i \rangle|^2$$

d'où le résultat.

Lemme 4. *Soit* $(u_i)_{i \in \mathrm{I}}$ *une famille orthogonale dans un espace de Hilbert* H *; la famille est sommable dans* H *si et seulement si* $\sum_{i \in \mathrm{I}} \|u_i\|^2 < +\infty$*, et dans ce cas*

$$\Big\|\sum_{i \in \mathrm{I}} u_i\Big\|^2 = \sum_{i \in \mathrm{I}} \|u_i\|^2.$$

Si $(e_i)_{i \in \mathrm{I}}$ *est une famille orthonormée, la famille de vecteurs* $(c_i e_i)_{i \in \mathrm{I}}$ *est sommable dans* H *si et seulement si* $\sum_{i \in \mathrm{I}} |c_i|^2 < +\infty$*, et dans ce cas on a* $\big\|\sum_{i \in \mathrm{I}} c_i e_i\big\|^2 = \sum_{i \in \mathrm{I}} |c_i|^2$.

Démonstration. Supposons $\sum_{i \in \mathrm{I}} \|u_i\|^2 < +\infty$. On peut trouver une suite croissante d'ensembles finis $\mathrm{I}_n \subset \mathrm{I}$ telle que la suite croissante $s_n = \sum_{i \in \mathrm{I}_n} \|u_i\|^2$ tende vers la

somme $s = \sum_{i\in \mathrm{I}} \|u_i\|^2$ de la famille $(\|u_i\|^2)_{i\in\mathrm{I}}$. Posons $\mathrm{U}_n = \sum_{i\in\mathrm{I}_n} u_i$ pour tout $n \geq 0$. Si $m < n$ on a par orthogonalité

$$\|\mathrm{U}_n - \mathrm{U}_m\|^2 = \sum_{i\in\mathrm{I}_n\setminus\mathrm{I}_m} \|u_k\|^2 = s_n - s_m.$$

A partir de là, il est clair que la suite (U_n) est de Cauchy dans H, donc converge vers un vecteur $x \in \mathrm{H}$. Ce vecteur x est la *somme* de la famille $(u_i)_{i\in\mathrm{I}}$: pour tout $\varepsilon > 0$ donné, on peut trouver un sous-ensemble J_0 fini dans I tel que $\|x - \sum_{i\in\mathrm{J}} u_i\| < \varepsilon$ pour tout J fini contenant J_0 ; il suffit en effet de choisir $\mathrm{J}_0 = \mathrm{I}_n$ pour un entier n tel que $s - s_n < \varepsilon^2$.

La norme de la somme de la famille s'obtient en passant à la limite dans l'égalité du lemme 1, qui donne $\|\mathrm{U}_n\|^2 = s_n$ pour tout $n \geq 0$.

Définition. On appelle *base hilbertienne* d'un espace de Hilbert H une famille orthonormée $(e_i)_{i\in\mathrm{I}}$ qui est de plus *totale* dans H, c'est à dire que l'espace vectoriel engendré $\mathrm{Vect}(e_i : i \in \mathrm{I})$ est dense dans H.

L'un des intérêts (peut-être mineur) de la notion de *famille sommable* est de permettre de définir la notion de base hilbertienne $(e_i)_{i\in\mathrm{I}}$ dans le cas le plus général (l'ensemble d'indices I peut être non dénombrable) et de pouvoir l'utiliser sans trop de périphrases : tout vecteur x de H est la *somme* $x = \sum_{i\in\mathrm{I}} \langle x, e_i\rangle\, e_i$ de la famille sommable $(\langle x, e_i\rangle\, e_i)_{i\in\mathrm{I}}$. Par exemple, pour tout ensemble d'indices I, on a un espace de Hilbert $\ell_2(\mathrm{I})$ des familles $(c_i)_{i\in\mathrm{I}}$ de scalaires telles que $\sum_{i\in\mathrm{I}} |c_i|^2 < +\infty$, qui a une base hilbertienne canonique qu'on devine ; tout espace de Hilbert H est isomorphe à l'un de ces espaces $\ell_2(\mathrm{I})$.

Proposition. *Supposons que* H *admette une base hilbertienne* dénombrable. *Pour toute énumération* $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *de cette base, et pour tout vecteur* x *de* H, *on a*

$$x = \sum_{k=0}^{+\infty} \langle x, e_k\rangle\, e_k \quad \text{et} \quad \|x\|^2 = \sum_{k=0}^{+\infty} |\langle x, e_k\rangle|^2.$$

Démonstration. Pour tout $n \geq 0$, la projection orthogonale de x sur $\mathrm{F}_n = \mathrm{Vect}(e_0, \ldots, e_n)$ est égale à $x_n = \sum_{k=0}^{n} \langle x, e_k\rangle\, e_k$. Par ailleurs, les coefficients $c_k = \langle x, e_k\rangle$ sont de carré sommable d'après Bessel, donc la série $\sum_{k\in\mathbb{N}} c_k e_k$ converge d'après le lemme 4 ; si on pose $y = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k\, e_k$, on a $y = \lim_n x_n$.

Soient $\varepsilon > 0$ donné, et $\mathrm{N}_0 \in \mathbb{N}$ assez grand pour que $\|y - x_n\| < \varepsilon/2$ pour tout $n \geq \mathrm{N}_0$; puisque la famille (e_i) est totale, il existe un vecteur $z \in \mathrm{Vect}(e_i)$ tel que $\|x - z\| < \varepsilon/2$; on peut trouver un entier $n \geq \mathrm{N}_0$ tel que $z \in \mathrm{F}_n$. D'après le lemme 2, on aura $\|x - x_n\| \leq \|x - z\| < \varepsilon/2$. Il en résulte que $\|x - y\| < \varepsilon$, pour tout $\varepsilon > 0$, donc $x = y$.

On voit qu'une base hilbertienne $(e_n)_{n\geq 0}$ de H est une suite orthonormée qui vérifie pour tout $x \in \mathrm{H}$ la première propriété indiquée dans la proposition précédente. En effet, cette propriété implique clairement que la suite $(e_n)_{n\geq 0}$ doit être totale dans H.

Exercice 7.2. Déterminants de Gram. Soient $(x_1, \ldots, x_{n+1})$ des vecteurs d'un espace de Hilbert, tels que $\mathrm{F} = \mathrm{Vect}(x_1, \ldots, x_n)$ soit de dimension n ; montrer que

$$\mathrm{dist}^2(x_{n+1}, \mathrm{F}) = \frac{\det\big(\langle x_i, x_j\rangle\big)_{i,j=1,\ldots,n+1}}{\det\big(\langle x_i, x_j\rangle\big)_{i,j=1,\ldots,n}}\,.$$

Exercice 7.3. Le système de Haar.

On définit une fonction h sur $\mathbb{R}$ par la formule $h = \mathbf{1}_{(0,1/2)} - \mathbf{1}_{(1/2,1)}$. On définit ensuite des fonctions sur $[0,1]$ en posant $h_{0,0}(t) = h(t)$ pour $t \in [0,1]$, puis pour tout $k \geq 0$ et tout $j = 0, \ldots, 2^k - 1$

$$\forall t \in [0,1], \quad h_{k,j}(t) = 2^{k/2}\, h(2^k t - j).$$

Montrer que le système formé de la fonction constante $\mathbf{1}$ et des fonctions $(h_{k,j})$, $k \geq 0$ et $j = 0, \ldots, 2^k - 1$, constitue une base hilbertienne de $\mathrm{L}_2(0,1)$.

7.2. Séries de Fourier : suite

Suivant le cas, on considérera une fonction $\mathrm{F}(z)$ définie sur le cercle unité du plan complexe, ou bien une fonction périodique $f(\theta)$ sur $\mathbb{R}$, ou encore une fonction f sur une période $[a, a+2\pi]$; le passage se fait en posant $z = \mathrm{e}^{i\theta}$.

On a noté e_n la fonction périodique $e_n(t) = \mathrm{e}^{int}$, $n \in \mathbb{Z}$; un polynôme trigonométrique est une combinaison linéaire $\sum c_n e_n$. On notera $\mathcal{P}_n$ l'espace des polynômes trigonométriques de la forme $\sum_{k=-n}^{n} c_k e_k$. On a vu que la convolution d'une fonction L_1 avec un polynôme trigonométrique donne un polynôme trigonométrique, et qu'il existe une approximation de l'unité formée de polynômes trigonométriques.

Quand on travaille avec des fonctions réelles, on préfère parfois écrire le développement en utilisant les fonctions réelles $t \to \cos(nt)$, pour $n = 0, 1, \ldots$ et $t \to \sin(nt)$, pour $n = 1, 2, \ldots$ (pour $n = 0$, le cosinus donne la fonction constante 1). On définit classiquement les coefficients de Fourier réels de la façon suivante :

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cos(nt)\, dt\,; \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \sin(nt)\, dt,$$

où les (a_n) sont définis pour $n \geq 0$ et les (b_n) pour $n \geq 1$; la série de Fourier de f prend la forme

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} \big(a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt)\big).$$

La bizarrerie du traitement de a_0 vient du fait que la fonction constante 1 n'a pas la même norme que les fonctions $t \to \cos(nt)$ pour $n \geq 1$.

Une fonction périodique f est représentée par une série de cosinus si et seulement si elle est paire, $f(x) = f(-x)$ pour tout x. L'unité approchée $\mathrm{R}_n(t) = r_n(1 + \cos(t))^n$ de Rudin étant formée de fonctions paires (des polynômes en cosinus), on voit facilement que si f est paire, les $\mathrm{R}_n * f$ sont des polynômes de cosinus.

Convergence dans L_2 *des séries de Fourier*

Considérons l'espace de Hilbert $\mathrm{L}_2(0, 2\pi)$ des fonctions complexes de carré sommable pour la mesure $dx/2\pi$. Il est facile de vérifier que les fonctions $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ forment une suite orthonormée dans $\mathrm{L}_2(0, 2\pi)$. En revanche, il faut une petite démonstration pour voir que ce système est total. Cela résulte de ce qui a été vu dans la leçon précédente à partir de l'approximation de l'unité de Rudin, qui implique que les polynômes trigonométriques sont denses dans L_p pour tout p tel que $1 \leq p < +\infty$, en particulier pour $p = 2$. La suite $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est donc une base orthonormée de $\mathrm{L}_2([0, 2\pi], dx/2\pi)$.

Pour voir que la suite exponentielle est totale, on aurait pu aussi employer le marteau-pilon Stone-Weierstrass : l'espace vectoriel complexe L engendré par les $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ se trouve être une algèbre, invariante par conjugaison complexe et qui sépare les points du compact $\mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$. Il en résulte que L est dense, pour la norme uniforme, dans l'espace des fonctions continues 2π-périodiques, ce qui implique la densité dans $\mathrm{L}_2(0, 2\pi)$.

Pour toute fonction $f \in \mathrm{L}_2(0, 2\pi)$, les coefficients du développement de f dans cette base sont les coefficients de Fourier complexes

$$c_n(f) = \langle f, e_n\rangle = \int_0^{2\pi} f(s)\,\mathrm{e}^{-ins}\,\frac{ds}{2\pi}.$$

D'après Parseval, on a $\|f\|_2^2 = \int_0^{2\pi} |f(s)|^2\,ds/2\pi = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)|^2$. Cette identité est la source d'une multitude d'exercices calculatoires, tels que par exemple le calcul de la somme de la série numérique $\sum_{n\geq 1} 1/n^2$.

Les polynômes de Tchebychev et le théorème de Weierstrass

Pour toute fonction continue g sur $[-1, 1]$ on construit une fonction continue F sur le cercle unité $\mathbb{T}$ (ou bien une fonction continue périodique f sur $\mathbb{R}$) de la façon suivante : on projette le point $z = \mathrm{e}^{it} \in \mathbb{T}$ sur l'axe réel, obtenant ainsi $x = \cos(t)$, et on pose $\mathrm{F}(\mathrm{e}^{it}) = f(t) = g(\cos(t))$. On obtient ainsi des fonctions périodiques f *paires*, dont les coefficients en sinus sont tous nuls. Posons $f = \mathrm{T}(g)$; l'application T est une isométrie linéaire de $\mathrm{C}([-1, 1])$ dans $\mathrm{C}(\mathbb{T})$. Il est clair qu'elle n'est pas surjective, puisque l'image est formée de fonctions paires.

Si $g(x) = x^k$ pour un entier $k \geq 0$, la fonction correspondante f est $\cos^k(t)$ qui se linéarise sous la forme $\sum_{j=0}^{k} c_{k,j}\cos(jt)$ avec $c_{k,k} = 2^{-k+1} \neq 0$. La transformation est triangulaire à diagonale non nulle, donc elle induit une bijection de $\mathrm{Vect}_{\mathbb{K}}(1, \ldots, x^n)$ sur $\mathrm{Vect}_{\mathbb{K}}(1, \cos(t), \ldots, \cos(nt))$. Il en résulte que l'image par T de $\mathrm{Vect}_{\mathbb{K}}(1, \ldots, x^n)$ est exactement $\mathrm{Vect}_{\mathbb{K}}(1, \cos(t), \ldots, \cos(nt))$. Si on étend à tous les degrés, on voit que T induit une bijection S des fonctions polynomiales sur $[-1, 1]$, vers les polynômes trigonométriques en cosinus. L'image de $\cos(kt)$ par la bijection réciproque S^{-1} est à un coefficient près le k-ième polynôme de Tchebychev T_k,

$$\forall x \in [-1, 1], \quad \mathrm{T}_k(x) = \cos(k \arccos x).$$

La méthode de convolution par les noyaux de Rudin, qui sont pairs, donne la densité des polynômes de cosinus en norme uniforme dans le sous-espace de $\mathrm{C}(\mathbb{T})$ formé des fonctions paires. En changeant de variable, on vient de trouver une des démonstrations du théorème de Weierstrass, dans le cas de l'intervalle $[-1, 1]$ (voir ZQ, chapitre IV, théorème III.3, *vii)*).

Soient en effet g une fonction continue quelconque sur $[-1, 1]$ et $\varepsilon > 0$; posons $f = \mathrm{T}(g)$; on peut trouver un polynôme trigonométrique $\mathrm{P} = \sum_k c_k \cos(kt)$ tel que $\|f - \mathrm{P}\|_\infty < \varepsilon$; alors P est l'image par T de la fonction polynomiale $\mathrm{Q}(x) = \sum_k c_k \mathrm{T}_k(x)$ sur $[-1, 1]$, donc

$$\|g - \mathrm{Q}\|_\infty = \|f - \mathrm{P}\|_\infty < \varepsilon.$$

Les polynômes de Tchebychev apparaissent dans le problème de l'approximation polynomiale (voir Demailly), par l'intermédiaire des *points de Tchebychev*, qui sont les zéros de polynômes de Tchebychev. On pourra voir que ces points de Tchebychev, dont le rôle peut paraître mystérieux, correspondent simplement à des points régulièrement espacés sur le cercle unité, dans notre correspondance T.

Convergence ponctuelle des séries de Fourier de $\mathrm{L}ip_\alpha$

On écrit souvent le développement de Fourier d'une fonction $f \in \mathrm{L}_2$ sous la forme

$$f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)\,\mathrm{e}^{inx},$$

mais cette écriture est *a priori* incorrecte, car rien ne nous dit que la série numérique ci-dessus converge vers $f(x)$: ce que nous savons est que f est la somme de la série de fonctions au sens de L_2. En fait, un théorème très difficile démontré vers 1960 par le mathématicien suédois L. Carleson justifie l'écriture précédente : pour presque tout x, la série de Fourier converge au point x et sa somme est égale à $f(x)$. La convergence ponctuelle est assez facile à obtenir lorsque f est de classe C^1, et dans ce cas elle est valable pour tout x. On va obtenir un tout petit peu mieux ; rappelons qu'on dit qu'une fonction f vérifie une *condition de Hölder* d'ordre $\alpha > 0$ s'il existe une constante M telle que $|f(t) - f(s)| \le \mathrm{M}\,|t-s|^\alpha$ pour tous $s, t \in \mathbb{R}$. On peut aussi limiter la propriété aux couples s, t tel que $|t-s| \le 1$; pour les fonctions périodiques, qui nous intéressent ici, cela ne fait aucune différence. Une notation assez classique pour cet espace de fonctions est $\mathrm{L}ip_\alpha$.

Théorème. *Soit f une fonction 2π-périodique et vérifiant une condition de Hölder d'ordre $\alpha > 0$; pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a*

$$f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)\,\mathrm{e}^{inx}\,.$$

Démonstration. Posons

$$\mathrm{S_N}(f)(x) = \sum_{n=-\mathrm{N}}^{\mathrm{N}} c_n(f)\,\mathrm{e}^{inx} = \int_0^{2\pi} \sum_{n=-\mathrm{N}}^{\mathrm{N}} \mathrm{e}^{in(x-s)}\,f(s)\,\frac{ds}{2\pi} =$$

$$\int_0^{2\pi} \Big(\sum_{n=-\mathrm{N}}^{\mathrm{N}} \mathrm{e}^{int}\Big) f(x-t)\,\frac{dt}{2\pi} = \int_0^{2\pi} \mathrm{D_N}(t) f(x-t)\,\frac{dt}{2\pi},$$

où on a posé

$$\mathrm{D_N}(t) = \sum_{n=-\mathrm{N}}^{\mathrm{N}} \mathrm{e}^{int} = \mathrm{e}^{-i\mathrm{N}t}\;\frac{1-\mathrm{e}^{i(2\mathrm{N}+1)t}}{1-\mathrm{e}^{it}} = \frac{\mathrm{e}^{-i\mathrm{N}t} - \mathrm{e}^{i(\mathrm{N}+1)t}}{1-\mathrm{e}^{it}}.$$

Comme $\int_0^{2\pi} \mathrm{D_N}(t)\,(dt/2\pi) = 1$, on aura

$$\mathrm{S_N} f(x) - f(x) = \int_0^{2\pi} \mathrm{D_N}(t)\,\big(f(x-t) - f(x)\big)\,\frac{dt}{2\pi} =$$

$$= \int_0^{2\pi} (\mathrm{e}^{-i\mathrm{N}t} - \mathrm{e}^{i(\mathrm{N}+1)t})\,\frac{f(x-t)-f(x)}{1-\mathrm{e}^{it}}\,\frac{dt}{2\pi}.$$

Posons $g_x(t) = (f(x-t) - f(x))/(1-\mathrm{e}^{it})$. Comme f est $\mathrm{L}ip_\alpha$ et $|1-\mathrm{e}^{it}| \ge 2|t|/\pi$ quand $|t| \le \pi$, la fonction g_x est bornée par $\mathrm{C}\,|t|^{\alpha-1}$ sur $(-\pi,\pi)$, donc $g_x \in \mathrm{L}_1(-\pi,\pi)$, ce qui entraîne que les coefficients de Fourier de g_x tendent vers 0, par le lemme de Riemann-Lebesgue. Or nous avions

$$\mathrm{S_N} f(x) - f(x) = c_{\mathrm{N}}(g_x) - c_{-\mathrm{N}-1}(g_x),$$

qui tend donc vers 0 quand $\mathrm{N} \to +\infty$.

Le résultat précédent redémontre le fait que la suite exponentielle est totale dans L_2. En effet, le théorème précédent s'applique à toute fonction continue f périodique linéaire par morceaux : les sommes de Fourier $\mathrm{S}_\mathrm{N}(f) = f_\mathrm{N}$ tendent simplement vers la fonction f ; mais par ailleurs, elles tendent pour la norme L_2 vers la somme F de la série $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)\, e_n$, donc d'après un théorème d'intégration une certaine sous-suite tend presque partout vers F. Puisque $\mathrm{S}_\mathrm{N}(f)$ tend simplement vers f, on a nécessairement $\mathrm{F} = f$ presque partout, ce qui implique que f est la limite en norme L_2 des sommes de Fourier $\mathrm{S}_\mathrm{N}(f)$. Ces sommes appartiennent au sous-espace vectoriel L engendré par les exponentielles, et le raisonnement précédent montre que l'adhérence de L dans L_2 contient toutes les fonctions linéaires par morceaux, qui sont denses dans $\mathrm{C}(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$, donc aussi denses dans L_2. Finalement L est dense dans L_2 et on a montré la totalité de la suite $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ directement, sans utiliser Stone-Weierstrass ni l'approximation de l'unité de Rudin.

Exercice 7.4. Si K est un compact de $\mathrm{L}_1(0, 2\pi)$, montrer que le lemme de Riemann-Lebesgue est vrai uniformément sur K.

Montrer que les $(g_x)_{x\in[0,2\pi]}$ de la démonstration précédente forment un compact de $\mathrm{L}_1(0, 2\pi)$. En déduire que pour une fonction f de $\mathrm{L}ip_\alpha$, la série de Fourier converge uniformément vers f.

Remarque. Convergence bilatérale.

On peut voir que dans le théorème de convergence précédent, la série de Fourier de f converge au point x aux deux infinis. La démonstration de cette affirmation est extrêmement simple. On voit qu'en posant $\mathrm{S}_{\mathrm{M},\mathrm{N}} f = \sum_{n=-\mathrm{M}}^{\mathrm{N}} c_n(f)\, e_n$, on a

$$(\mathrm{S}_{\mathrm{M},\mathrm{N}} f)(x) - f(x) = c_\mathrm{M}(g_x) - c_{-\mathrm{N}-1}(g_x)$$

qui tend vers 0 quand $\mathrm{M}, \mathrm{N} \to +\infty$ parce que g_x est intégrable.

Cette convergence aux deux côtés n'est absolument pas la situation générale. Dans la situation du théorème de Dirichlet, où une fonction de classe C^1 par morceaux admet au point x une limite à droite et une limite à gauche, il **faut** prendre les sommes de Fourier symétriques pour obtenir un résultat.

Prépa. Agrég écrit d'Analyse, séance n° 8, mercredi 28 novembre 2001.

8.1. Séries de Fourier : suite et fin

Exercice 8.1. Utiliser la théorie des séries de Fourier pour retrouver, d'une façon ou d'une autre, la relation plus que classique

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

On pourra en particulier utiliser Parseval, qui donne pour toute fonction $f \in \mathrm{L}_2(0, 2\pi)$ l'égalité

$$\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 \, \frac{dt}{2\pi} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)|^2.$$

Convergence ponctuelle de la série de Fourier

Théorème. *On suppose que f est une fonction 2π-périodique sur $\mathbb{R}$, intégrable sur chaque période. En tout point x où la fonction f vérifie la condition*

$$\text{(D)} \qquad \int_{-\pi}^{\pi} \frac{|f(x-t) - f(x)|}{|t|} \, dt < +\infty,$$

il y a convergence de la série de Fourier vers la valeur $f(x)$,

$$f(x) = \lim_{\mathrm{N}\to+\infty} (\mathrm{S_N} f)(x).$$

Explication. Pour qu'en un point donné x on ait convergence des sommes partielles $(\mathrm{S_N} f)(x)$ vers $f(x)$, il suffit que la fonction g_x utilisée dans la séance précédente, qui est définie par $g_x(t) = (f(x-t) - f(x))/(1 - \mathrm{e}^{it})$, soit intégrable. On a vu en effet que

$$(\mathrm{S_N} f)(x) - f(x) = c_{\mathrm{N}}(g_x) - c_{-\mathrm{N}-1}(g_x),$$

et il suffit alors d'appliquer le lemme de Riemann-Lebesgue à la fonction intégrable g_x.

Un exemple. L'indicatrice du demi-intervalle.

Considérons $f_0 = \mathbf{1}_{(0,\pi)}$, ou plus exactement son prolongement 2π-périodique à $\mathbb{R}$, exprimé par exemple par $f_0(x) = \mathbf{1}_{\sin(x)>0}$; on voit que $c_0(f_0) = 1/2$, $c_{2k}(f_0) = 0$ pour tout entier $k \neq 0$ et si $n = 2k+1$, on a $c_n(f_0) = c_{2k+1}(f_0) = \frac{1}{\pi i n}$, ce qui montre à l'évidence que la "partie positive" $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n(f_0)\, \mathrm{e}^{inx}$ de la série de Fourier complexe de f_0 ne peut pas converger au point $x = 0$, alors que le théorème de Dirichlet s'applique en ce point (pour les points différents de 0 et de π, la condition intégrale précédente s'applique, et on a alors la convergence bilatérale de la série). On obtient ainsi, en regroupant les indices k et $-k$ du développement complexe

$$\mathrm{S}_n(f_0; x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{0\le k\le (n-1)/2} \frac{\sin(2k+1)x}{2k+1}.$$

On constate bien qu'au point $x = 0$, la série converge (en stationnant) vers la valeur $1/2$, qui est la demi-somme des limites à droite et à gauche de f_0 au point 0. Par ailleurs, d'après le résultat rappelé au début (condition (D)), on a pour $0 < x < \pi$

$$1 = f_0(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\sin(2k+1)x}{2k+1}$$

alors que pour $\pi < x < 2\pi$

$$0 = f_0(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\sin(2k+1)x}{2k+1}.$$

La deuxième relation se ramène immédiatement à la première, si on écrit cette première sous la forme

$$\forall x \in]0, \pi[, \quad \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\sin(2k+1)x}{2k+1} = \frac{\pi}{4}$$

et qu'on y remplace x par $x - \pi$.

Le théorème de Dirichlet à partir de l'exemple précédent

Supposons maintenant qu'une fonction 2π-périodique localement intégrable f vérifie au point $x = 0$ l'hypothèse de type "théorème de Dirichlet" suivante :

la fonction f admet deux limites (finies) $f(0-)$ et $f(0+)$ à gauche et à droite de 0, et de plus on a $f(t) - f(0+) = \mathrm{O}(t)$ et $f(0-) - f(-t) = \mathrm{O}(t)$ pour $t > 0$ petit.

Les deux propriétés précédentes seront vraies (par la règle de l'Hospital) si on suppose que f est dérivable à gauche et à droite de 0, et que la dérivée f' possède une limite (finie) à gauche et à droite de 0. On va montrer que sous ces hypothèses,

les sommes de Fourier $(\mathrm{S_N} f)(0)$ tendent vers $\big(f(0-) + f(0+)\big)/2$.

Posons $d = f(0+) - f(0-)$; alors la fonction f_1 définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_1(x) = f(x) - d\, f_0(x) = f(x) - d\, \mathbf{1}_{[0,\pi]}(x \bmod 2\pi)$$

est équivalente à une fonction continue au voisinage de 0, égale à $f(0-)$ pour $x = 0$, et f_1 vérifie de plus la condition intégrale (D), parce que les hypothèses impliquent que $f_1(t) - f_1(0) = \mathrm{O}(|t|)$ au voisinage de $t = 0$. Comme on a vérifié à la main le théorème de Dirichlet pour la fonction $f_0 = \mathbf{1}_{[0,\pi]}$, on en déduit le résultat pour $f = f_1 + d\, f_0$ au point 0 : les sommes partielles de la série de Fourier de f convergent vers

$$f_1(0) + d/2 = \big(f(0-) + f(0+)\big)/2.$$

Les noyaux classiques. Théorèmes de Fejér

Posons pour tout entier $k \geq 0$

$$\mathrm{L}_k(t) = \mathrm{e}^{-ikt/2} + \mathrm{e}^{it-ikt/2} + \mathrm{e}^{2it-ikt/2} + \cdots + \mathrm{e}^{ikt/2}.$$

En faisant apparaître une progression géométrique on voit facilement que

$$\mathrm{L}_k(t) = \mathrm{e}^{-ikt/2}\, \frac{\mathrm{e}^{i(k+1)t} - 1}{\mathrm{e}^{it} - 1} = \frac{\sin\big[(k+1)t/2\big]}{\sin(t/2)}.$$

Quand $k = 2n$ on obtient le noyau de Dirichlet,

$$\mathrm{D}_n(t) = \sum_{k=-n}^{n} \mathrm{e}^{ikt} = \frac{\sin\big[(n+1/2)t\big]}{\sin(t/2)}.$$

Le noyau de Fejér est donné par

$$\mathrm{K}_n = \frac{1}{n+1}\big(\mathrm{D}_0 + \cdots + \mathrm{D}_n\big)$$

(tout le monde n'est pas d'accord sur la numérotation : comparer Chatterji et Zuily-Queffélec). Puisque $\mathrm{D}_k = \sum_{j=-k}^{k} e_j$ on obtient facilement (à la Fubini)

$$\mathrm{K}_n = \sum_{k=-n}^{n} \Big(1 - \frac{|k|}{n+1}\Big)\, e_k. \tag{1}$$

Par ailleurs

$$\mathrm{L}_n^2(t) = \mathrm{e}^{-int}\big(1 + \cdots + \mathrm{e}^{int}\big)^2 = \sum_{k=-n}^{n} (n+1-|k|)\,\mathrm{e}^{ikt},$$

ce qui donne $(n+1)\mathrm{K}_n = \mathrm{L}_n^2$,

$$\mathrm{K}_n(t) = \frac{1}{n+1}\,\frac{\sin^2\big[(n+1)t/2\big]}{\sin^2(t/2)}.$$

On a donc $\mathrm{K}_n(t) \geq 0$. En utilisant la forme (1) de K_n on voit que $\int_0^{2\pi} \mathrm{K}_n(t)\,\frac{dt}{2\pi} = 1$. De plus, pour tout α tel que $0 < \alpha < \pi$, on constate que

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \mathbf{1}_{\{|t|>\alpha\}}\mathrm{K}_n(t)\,dt \leq \frac{1}{(n+1)\pi}\int_{\alpha}^{\pi} \frac{1}{\sin^2(\alpha/2)}\,dt \leq \frac{1}{(n+1)\sin^2(\alpha/2)}$$

qui tend vers 0 quand $n \to +\infty$. On voit donc que la suite (K_n) fournit une approximation de l'unité. On aura donc des résultats de convergence pour les *sommes de Fejér*

$$\sigma_n(f;x) = (\mathrm{K}_n * f)(x) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=-n}^{n}\Big(1 - \frac{|k|}{n+1}\Big)\, c_k(f)\ \mathrm{e}^{ikx}\,.$$

On note que $\sigma_{\mathrm{N}} f$ est la moyenne des valeurs des sommes de Fourier usuelles $\mathrm{S}_0 f, \ldots, \mathrm{S}_{\mathrm{N}} f$: dire que les sommes de Fejér convergent en un point x vers $f(x)$ signifie que la série de Fourier au point x converge *au sens de Cesaro* vers $f(x)$,

$$f(x) = \lim_{\mathrm{N}\to+\infty} \frac{1}{\mathrm{N}+1}\sum_{k=0}^{\mathrm{N}} (\mathrm{S}_k f)(x).$$

Les résultats généraux sur l'approximation par convolution donnent donc les deux parties du *théorème de Fejér* qui suit.

Théorème. *Si f est continue 2π-périodique sur $\mathbb{R}$, la suite de fonctions $(\sigma_n f)$ converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}$. Si $f \in \mathrm{L}_p(0, 2\pi)$, avec $1 \leq p < +\infty$, on a $\|\sigma_n f - f\|_p \to 0$.*

Exercice 8.2. On considère une fonction $g \in \mathrm{L}_1(0, 2\pi)$, et l'opérateur linéaire borné T_g de $\mathrm{L}_1(0, 2\pi)$ dans lui-même donné par

$$\forall f \in \mathrm{L}_1(0, 2\pi), \quad \mathrm{T}_g(f) = f * g.$$

Montrer que $\|\mathrm{T}_g\|_{\mathcal{L}(\mathrm{L}_1)} = \|g\|_1$. Montrer la même égalité pour l'opérateur T_g, agissant cette fois de $\mathrm{C}_{\mathrm{per}}([0, 2\pi])$ dans lui-même.

Déduire du théorème de Banach-Steinhaus qu'il existe des fonctions continues et 2π-périodiques dont la série de Fourier ne converge pas uniformément, et des fonctions de $\mathrm{L}_1(0, 2\pi)$ dont la série de Fourier ne converge pas en norme L_1.

8.2. Transformation de Fourier

Fourier de L_1

A toute fonction réelle ou complexe $f \in \mathrm{L}_1(\mathbb{R}^d)$ on associe sa transformée de Fourier $\widehat{f}$, définie sur $\mathbb{R}^d$ par la formule

$$\forall t \in \mathbb{R}^d, \quad \widehat{f}(t) = \int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{e}^{-it\,.\,x}\, f(x)\, dx,$$

où la notation $t\,.\,x$ représente le produit scalaire $t_1\, x_1 + \cdots + t_d\, x_d$ des deux vecteurs $t = (t_1, \ldots, t_d)$ et $x = (x_1, \ldots, x_d)$ de $\mathbb{R}^d$. L'application du théorème de convergence dominée à la famille des fonctions $g_t(x) = \mathrm{e}^{-ix\,.\,t}\, f(x)$, dont les modules sont dominés par la fonction intégrable fixe $x \to |f(x)|$, montre que $\widehat{f}$ est continue. Il est clair que

$$\|\widehat{f}\|_\infty \leq \|f\|_1.$$

De plus, l'application linéaire $f \to \widehat{f}$, continue de $\mathrm{L}_1(\mathbb{R}^d)$ dans $\mathrm{C}_b(\mathbb{R}^d)$, envoie les fonctions en escalier (à support borné) dans le sous-espace fermé $\mathrm{C}_0(\mathbb{R}^d)$ de $\mathrm{C}_b(\mathbb{R}^d)$, formé des fonctions continues qui tendent vers 0 à l'infini (vérification immédiate par le calcul sur une fonction indicatrice de pavé). Il en résulte que pour toute fonction $f \in \mathrm{L}_1(\mathbb{R}^d)$, la fonction $\widehat{f}$ est une fonction continue bornée, qui tend vers 0 à l'infini (ce qui entraîne que $\widehat{f}$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}^d$). On peut donc dire que $f \to \widehat{f}$ est un opérateur linéaire de norme ≤ 1, de $\mathrm{L}_1(\mathbb{R}^d)$ dans $\mathrm{C}_0(\mathbb{R}^d)$.

Si g est une autre fonction de $\mathrm{L}_1(\mathbb{R}^d)$ on voit avec Fubini que

$$\int \widehat{f}(t) g(t)\, dt = \int f(x) \widehat{g}(x)\, dx$$

(formule d'échange). En effet, la fonction $h(x, t) = f(x) g(t)\, \mathrm{e}^{-ix\,.\,t}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$, ce qui permet d'appliquer Fubini ; l'interversion de l'ordre d'intégration donne immédiatement le résultat.

Toujours avec Fubini, on voit que lorsque $f, g \in \mathrm{L}_1(\mathbb{R}^d)$, la transformée de Fourier de $f * g$ est égale au produit $\widehat{f}\,\widehat{g}$ des transformées de Fourier. Cette fois, on utilise $h(x, y) = f(x - y) g(y)\, \mathrm{e}^{-ix\,.\,t}$, dont le module est $(x, y) \to |f(x - y) g(y)|$, dont on a vérifié l'intégrabilité lors de l'étude de la convolution.

Dilatations et Fourier

Soit $f \in \mathrm{L}_1(\mathbb{R}^d)$; pour tout $\lambda > 0$ posons

$$\forall x \in \mathbb{R}^d, \quad f_{[\lambda]}(x) = \lambda^d f(\lambda x).$$

On voit par changement de variable que $f_{[\lambda]}$ a la même intégrale et la même norme dans $\mathrm{L}_1(\mathbb{R}^d)$ que f. On trouve immédiatement par le même changement de variable que

$$\forall t \in \mathbb{R}^d, \quad \widehat{f_{[\lambda]}}(t) = \widehat{f}(t/\lambda).$$

Fourier et dérivation

Désignons par $\mathrm{D}_1, \ldots, \mathrm{D}_d$ les d opérateurs de dérivation partielle dans $\mathbb{R}^d$. Ainsi, si $x = (x_1, \ldots, x_d)$ la notation $(\mathrm{D}_1 f)(x)$ désigne la première dérivée partielle de f au point x, qui est égale à la dérivée au point $x_1 \in \mathbb{R}$ de la fonction $t \in \mathbb{R} \to f(t, x_2, \ldots, x_d)$. On a vu en exercice que

Soit j tel que $1 \leq j \leq d$; si f et $x \to x_j f(x)$ sont intégrables sur $\mathbb{R}^d$, alors

$$\forall t \in \mathbb{R}^d, \quad (\mathrm{D}_j \widehat{f})(t) = \int_{\mathbb{R}} \big(-i x_j f(x)\big)\, \mathrm{e}^{-ix\,.\,t}\, dx$$

c'est à dire que $i\mathrm{D}_j \widehat{f}$ est la transformée de Fourier de $x \to x_j f(x)$. Il suffisait de dériver sous l'intégrale, à la Lebesgue dominé. On a aussi le résultat suivant.

Soit j tel que $1 \leq j \leq d$; si f et $\mathrm{D}_j f$ sont dans $\mathrm{L}_1(\mathbb{R}^d)$, alors

$$\forall t \in \mathbb{R}^d, \quad \widehat{\mathrm{D}_j f}(t) = i t_j \widehat{f}(t).$$

Vérification. On commence en dimension $d = 1$, en supposant donc f et f' intégrables sur $\mathbb{R}$. On procède par intégration par parties ;

$$\int_a^b f'(x)\, \mathrm{e}^{-ixt}\, dx = \Big[f(x)\, \mathrm{e}^{-ixt}\Big]_{x=a}^b - \int_a^b f(x)(-it)\, \mathrm{e}^{-ixt}\, dt.$$

Comme f est intégrable, on peut trouver, pour tout $\varepsilon > 0$ donné, deux valeurs a, b telles que $a < -1/\varepsilon$, $1/\varepsilon < b$ et $|f(a)|, |f(b)| < \varepsilon$. On en déduit le résultat annoncé.

En plusieurs variables, on commence avec Fubini par une intégration dans la variable x_j ; on se trouve alors dans le cas qui vient d'être traité ; ensuite on intègre dans les autres variables.

Fourier des Gaussiennes

On montre en dimension un, puis en dimension d, que

$$\int \mathrm{e}^{-it\,.\,x}\, \mathrm{e}^{-|x|^2/2}\, \frac{dx}{(2\pi)^{d/2}} = \mathrm{e}^{-|t|^2/2}$$

où on a noté par $|t|$ la norme euclidienne du vecteur t. Ce résultat se démontre en dimension un, par exemple par des considérations d'intégrales de contour, et le résultat sur $\mathbb{R}^d$ se déduit par Fubini ; on peut aussi utiliser une équation différentielle, ou bien le passage par la transformée de Laplace et l'holomorphie. Développons rapidement cette

dernière approche : posons $g(x) = (2\pi)^{-1/2}\,\mathrm{e}^{-x^2/2}$ pour $x \in \mathbb{R}$; on calcule facilement pour s réel

$$\mathrm{L}(s) = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-sx}\, g(x)\, dx = \mathrm{e}^{s^2/2} \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-(x-s)^2/2}\, \frac{dx}{(2\pi)^{1/2}} = \mathrm{e}^{s^2/2}\,.$$

On montre ensuite que la formule pour $\mathrm{L}(s)$ définit une fonction entière sur $\mathbb{C}$, nécessairement égale à la fonction entière $s \to \mathrm{e}^{s^2/2}$; on conclut en appliquant à $s = it$, t réel. Posons encore en dimension d

$$\forall x \in \mathbb{R}^d, \quad \gamma(x) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}}\, \mathrm{e}^{-|x|^2/2}\,.$$

On obtient pour les dilatées $\gamma_{[k]}$ la formule $\widehat{\gamma_{[k]}}(t) = \mathrm{e}^{-|t|^2/(2k^2)}$. On remarque que $\widehat{\gamma_{[k]}} \to 1$ quand $k \to +\infty$, ce qui correspond au fait que 1 est la transformée de Fourier de la mesure δ_0 (Dirac du point 0), et que la suite $(\gamma_{[k]})$ est une approximation de l'unité.

Inversion de Fourier et Plancherel

Disons que *la formule d'inversion* (I) *est applicable à une fonction* k si $k, \widehat{k} \in \mathrm{L}_1(\mathbb{R}^d)$ et si k est équivalente à une fonction continue et vérifie la *formule d'inversion*

$$\text{(I)} \qquad \forall x \in \mathbb{R}^d, \quad k(x) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{k}(t)\, \mathrm{e}^{it\,\cdot\,x}\, dt.$$

On va montrer qu'à partir de l'inversion pour une seule fonction, on peut étendre considérablement nos possibilités d'inverser Fourier pour d'autres fonctions.

Pas a. Si la formule (I) est applicable à k, alors pour toute fonction $f \in \mathrm{L}_1(\mathbb{R}^d)$, la formule (I) est applicable à $f * k$.

Pour commencer, $\widehat{f * k} = \widehat{f}\,\widehat{k}$ est intégrable comme produit de la fonction bornée $\widehat{f}$ par la fonction intégrable $\widehat{k}$. Pour chaque x fixé, appliquons Fubini à la fonction intégrable $h(y,t) = (2\pi)^{-d} f(y)\widehat{k}(t)\, \mathrm{e}^{-i(y-x)\,\cdot\,t}$ pour obtenir

$$\frac{1}{(2\pi)^d} \int \widehat{f}(t)\widehat{k}(t)\, \mathrm{e}^{ix\,\cdot\,t}\, dt = \int \Big(\int h(y,t)\, dy \Big)\, dt =$$

$$= \int \Big(\int h(y,t)\, dt \Big)\, dy = \int f(y) k(x-y)\, dy = (f * k)(x)$$

ce qui montre que $f * k$ vérifie aussi la formule d'inversion.

Pas b. Si la formule (I) est applicable à k, elle est applicable à $k_n(x) = n^d k(nx)$ pour tout $n \geq 1$.

On obtient ceci par des changements de variables évidents.

Pas c. Si la formule (I) est applicable à une fonction k telle que $\int k = 1$, alors elle est applicable à toute fonction f telle que $f \in \mathrm{L}_1(\mathbb{R}^d)$ et $\widehat{f} \in \mathrm{L}_1(\mathbb{R}^d)$.

En effet, l'hypothèse $\int k = 1$ entraîne que la suite (k_n) de la question précédente est une approximation de l'unité. D'après les pas **a** et **b**, on a pour tout n

$$(k_n * f)(x) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int \widehat{k}_n(t)\widehat{f}(t)\, \mathrm{e}^{ix\,\cdot\,t}\, dt.$$

On voit que $\widehat{k}_n(t) = \widehat{k}(t/n)$ tend simplement vers $\widehat{k}(0) = \int k = 1$, et $|\widehat{k}_n| \leq \|k_n\|_1 = 1$; puisqu'on a supposé que $\widehat{f} \in \mathrm{L}_1(\mathbb{R}^d)$, on peut appliquer le théorème de convergence dominée à la suite d'intégrales ci-dessus pour obtenir que

$$\forall x \in \mathbb{R}^d, \quad \lim_n (k_n * f)(x) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int \widehat{f}(t)\, \mathrm{e}^{ix\,\cdot\,t}\, dt.$$

Par ailleurs, on sait que la suite $(k_n * f)$ tend vers f dans $\mathrm{L}_1(\mathbb{R}^d)$ d'après les résultats généraux sur l'approximation par convolution. Le rapprochement des deux résultats montre que f est presque partout égale à la limite précédente. Autrement dit, la formule

$$\forall x \in \mathbb{R}^d, \quad \frac{1}{(2\pi)^d} \int \widehat{f}(t)\, \mathrm{e}^{ix\,\cdot\,t}\, dt$$

définit un représentant continu de la fonction f.

Pour pouvoir appliquer le pas **c**, il faut connaître une fonction k. On choisit une fonction dont la transformée de Fourier soit calculable et pour laquelle on sache vérifier la formule d'inversion. On peut prendre pour couple $(k, \widehat{k})$ la loi de Cauchy et la fonction $t \to \mathrm{e}^{-|t|}$ (en dimension un), ou bien la densité gaussienne qui présente l'avantage supplémentaire d'être proportionnelle à sa transformée de Fourier. On a donc obtenu finalement le résultat qui suit.

Théorème. *Si f et $\widehat{f}$ sont dans $\mathrm{L}_1(\mathbb{R}^d)$, la fonction f "est" continue et*

$$\forall x \in \mathbb{R}^d, \quad f(x) = (2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{f}(t)\, \mathrm{e}^{ix\,\cdot\,t}\, dt.$$

Exercice traité. On va montrer que la formule précédente peut, sous des hypothèses un peu plus restrictives, être obtenue à partir des *séries* de Fourier, dans le cas $d = 1$.

Supposons que f soit de classe C^2 à support dans un intervalle compact $[-a, a]$. Alors f'' est intégrable, et on sait que la transformée de Fourier de f'' est bornée, puisque $f'' \in \mathrm{L}_1(\mathbb{R})$, et égale à $-t^2 \widehat{f}(t)$; on en déduit que $\widehat{f}(t) = \mathrm{O}(|t|^{-2})$ à l'infini.

Soit x un point fixé ; choisissons un entier N tel que $\mathrm{N} > \max(a, |x|)$. On va appliquer à la fonction f les résultats de convergence ponctuelle des séries de Fourier, mais en travaillant sur l'intervalle $[-\mathrm{N}\pi, \mathrm{N}\pi]$ au lieu de notre intervalle habituel $[-\pi, \pi]$. Il faut donc changer la normalisation du système de Fourier ; pour avoir une base orthonormée dans l'espace de Hilbert $\mathrm{H} = \mathrm{L}_2([-\mathrm{N}\pi, \mathrm{N}\pi], dx/(2\mathrm{N}\pi))$, il faut prendre les fonctions $h_n(t) = \mathrm{e}^{int/\mathrm{N}}$, $n \in \mathbb{Z}$. Puisque f est (largement) suffisamment régulière, on a bien au point fixé $x \in]-\mathrm{N}\pi, \mathrm{N}\pi[$ la convergence ponctuelle de la série de Fourier,

$$f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \langle f, h_n \rangle_{\mathrm{H}}\, h_n(x).$$

Comme f est à support dans $[-\mathrm{N}\pi, \mathrm{N}\pi]$, on a

$$\langle f, h_n \rangle_{\mathrm{H}} = \int_{-\mathrm{N}\pi}^{\mathrm{N}\pi} f(y)\, \mathrm{e}^{-iny/\mathrm{N}}\, \frac{dy}{2\pi\mathrm{N}} = \int_{\mathbb{R}} f(y)\, \mathrm{e}^{-iny/\mathrm{N}}\, \frac{dy}{2\pi\mathrm{N}} = \frac{1}{2\pi\mathrm{N}}\, \widehat{f}(n/\mathrm{N}).$$

Il en résulte que

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\, \mathrm{N}^{-1} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(n/\mathrm{N})\, \mathrm{e}^{ixn/\mathrm{N}}\,.$$

Si on pose $g(t) = f(t)\,\mathrm{e}^{ixt}$, l'expression précédente fait intervenir une sorte de somme de Riemann pour la fonction g, correspondant à une subdivision (infinie) de $\mathbb{R}$ en intervalles de longueur $1/\mathrm{N}$, avec les points de subdivision $t_n = n/\mathrm{N}$, $n \in \mathbb{Z}$. Comme on a vu que $g(t) = \mathrm{O}(|t|^{-2})$ à l'infini, il est facile d'approcher ces sommes de Riemann infinies par de vraies sommes sur un intervalle compact, et de justifier ainsi la formule

$$\lim_{\mathrm{N}\to+\infty} \mathrm{N}^{-1}\Big(\sum_{n\in\mathbb{Z}} g(n/\mathrm{N})\Big) = \int_{\mathbb{R}} g(t)\,dt,$$

qui conduit donc à la formule d'inversion

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int \widehat{f}(t)\,\mathrm{e}^{itx}\;dt.$$

Justifions l'approximation par des sommes de Riemann usuelles, sous l'hypothèse $|g(t)| \leq h(t) = t^{-2}$ sur $[1, +\infty[$. On aura si T est un entier > 1

$$\mathrm{N}^{-1}\sum_{n/\mathrm{N}>\mathrm{T}} |g(n/\mathrm{N})| \leq \mathrm{N}^{-1}\sum_{n>\mathrm{TN}} h(n/\mathrm{N}) \leq \int_{\mathrm{T}}^{+\infty} \frac{dt}{t^2} = \frac{1}{\mathrm{T}},$$

par la technique usuelle de comparaison série-intégrale.

Prépa. Agrég écrit d'Analyse, séance n° 9, mercredi 5 décembre 2001.

9.1. Transformation de Fourier : suite et fin

Rappel. *Si f et $\widehat{f}$ sont dans $\mathrm{L}_1(\mathbb{R}^d)$, la fonction f "est" continue et*

$$\forall x \in \mathbb{R}^d, \quad f(x) = (2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{f}(t)\, \mathrm{e}^{ix\,\cdot\,t}\, dt.$$

Remarque. La transformation de Fourier est injective sur $\mathrm{L}_1(\mathbb{R}^d)$.

En effet, si une fonction $f \in \mathrm{L}_1(\mathbb{R}^d)$ vérifie $\widehat{f} = 0$, on a bien $\widehat{f} \in \mathrm{L}_1(\mathbb{R}^d)$ et la formule d'inversion précédente s'applique, donnant $f = 0$.

Fourier dans $\mathrm{L}_2(\mathbb{R}^d)$

Pour toute fonction $f \in \mathrm{L}_1(\mathbb{R}^d)$ telle qu'on ait aussi $\widehat{f} \in \mathrm{L}_1(\mathbb{R}^d)$, on remarque que $f, \widehat{f} \in \mathrm{L}_2(\mathbb{R}^d)$ (parce que les deux fonctions sont dans $\mathrm{L}_1 \cap \mathrm{L}_\infty$: on majore $|f|^2$ par la fonction $\|f\|_\infty\, |f|$ qui est intégrable, et de même pour $\widehat{f}$) ; on déduit alors de la formule d'inversion précédente que

$$(*) \qquad \int_{\mathbb{R}^d} |\widehat{f}(t)|^2\, dt = (2\pi)^d \int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|^2\, dx.$$

En effet, d'après la formule d'inversion, on a

$$\overline{f(x)} = (2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{R}^d} \overline{\widehat{f}(t)}\, \mathrm{e}^{-it\,\cdot\,x}\, dt$$

donc $\overline{f}$ apparaît comme une transformée de Fourier, la transformée de la fonction k définie par $k(t) = (2\pi)^{-d}\overline{\widehat{f}(t)}$ pour tout $t \in \mathbb{R}^d$. Le résultat $(*)$ découle de la formule d'échange,

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x)\overline{f(x)}\, dx = \int_{\mathbb{R}^d} f\, \widehat{k} = \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{f}\, k = (2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{f}(t)\overline{\widehat{f}(t)}\, dt.$$

Supposons maintenant que $f \in \mathrm{L}_1(\mathbb{R}^d) \cap \mathrm{L}_2(\mathbb{R}^d)$. Le résultat précédent s'applique aux fonctions $f_k = f * g_k$, où (g_k) est l'approximation de l'unité gaussienne définie par $g_k(x) = k^d g(kx)$ pour tout entier $k \geq 1$, et où g est la densité gaussienne. On sait que $f_k \in \mathrm{L}_1$, et aussi $\widehat{f_k} = \widehat{f}\,\widehat{g}_k \in \mathrm{L}_1$ pour tout entier k. La suite $f_k = f * g_k$ converge vers f dans L_1 et dans L_2. La formule précédente $(*)$ appliquée à $f_k - f_\ell$ montre que la suite $(\widehat{f_k})$ est de Cauchy dans L_2, donc converge vers une fonction $h \in \mathrm{L}_2$, et d'autre part la convergence L_1 de f_k vers f entraîne la convergence uniforme de $\widehat{f_k}$ vers $\widehat{f}$, donc $h = \widehat{f}$, et on obtient à la limite à partir de l'égalité $(*)$

$$\int_{\mathbb{R}^d} |\widehat{f}(t)|^2\, dt = (2\pi)^d \int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|^2\, dx.$$

Faisons un dernier petit pas pour obtenir la transformation de Fourier pour l'espace de Hilbert $\mathrm{L}_2(\mathbb{R}^d)$.

Théorème. Prolongement à L_2 de la transformation de Fourier. *La transformation de Fourier se prolonge en une application linéaire continue $\mathcal{F}$ de $\mathrm{L}_2(\mathbb{R}^d)$ dans lui-même, et on a pour toute fonction $f \in \mathrm{L}_2(\mathbb{R}^d)$*

$$\int_{\mathbb{R}^d} |(\mathcal{F}f)(t)|^2 \, dt = (2\pi)^d \int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|^2 \, dx.$$

Démonstration. Si f est dans $\mathrm{L}_2(\mathbb{R}^d)$, la suite $f_n = \mathbf{1}_{[-n,n]^d} f$ est dans $\mathrm{L}_1 \cap \mathrm{L}_2$ et converge vers f dans L_2, donc $\mathrm{L}_1 \cap \mathrm{L}_2$ est dense dans $\mathrm{L}_2(\mathbb{R}^d)$; on applique alors le théorème habituel de prolongement par densité : en effet, la formule $(*)$ montre que l'application linéaire $f \to \widehat{f}$ est continue, de $\mathrm{L}_1 \cap \mathrm{L}_2$ muni de la norme de $\mathrm{L}_2(\mathbb{R})$, vers l'espace complet $\mathrm{L}_2(\mathbb{R})$.

Désignons par σ la transformation qui associe à toute fonction mesurable g sur $\mathbb{R}^d$ la fonction σg définie par $(\sigma g)(x) = g(-x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^d$. Cette application σ est une involution isométrique de tous les espaces $\mathrm{L}_p(\mathbb{R}^d)$. On voit que $\sigma \circ \mathcal{F} = \mathcal{F} \circ \sigma$ pour toutes les fonctions de L_1, et de plus $\sigma \circ \mathcal{F} \circ \mathcal{F} = (2\pi)^d \, \mathrm{Id}$ pour toutes les fonctions f telles que $f, \widehat{f} \in \mathrm{L}_1(\mathbb{R}^d)$, qui sont denses dans L_2 (approcher d'abord $f \in \mathrm{L}_2$ par $f_1 \in \mathrm{L}_1 \cap \mathrm{L}_2$, puis utiliser $f_1 * g_n$, convolution avec les noyaux gaussiens). On en déduit, par prolongement des identités par continuité, que $(2\pi)^{-d}\sigma \circ \mathcal{F} = (2\pi)^{-d}\mathcal{F} \circ \sigma$ est l'inverse de $\mathcal{F}$ dans $\mathcal{L}(\mathrm{L}_2(\mathbb{R}^d))$. On voit que $\mathrm{U} = (2\pi)^{-d/2}\mathcal{F}$ est un opérateur unitaire sur $\mathrm{L}_2(\mathbb{R}^d)$.

On peut aussi voir que $(\mathcal{F})^{-1}$ peut être obtenue à partir du calcul de $\overline{(\mathcal{F}\overline{f})}$.

Exercice 9.1. Si $f \in \mathrm{L}_1(\mathbb{R}^d)$ et $g \in \mathrm{L}_2(\mathbb{R}^d)$, montrer que la transformée de Fourier de $f * g$ est le produit des transformées de Fourier de f et de g.

Exercice 9.2. On pose pour tout entier $n \geq 0$ et tout $x \in \mathbb{R}$

$$\mathrm{P}_n(x) = \mathrm{e}^{x^2/2} \, \frac{d^n}{dx^n} \, \mathrm{e}^{-x^2/2} \, .$$

Montrer que P_n est un polynôme de degré n, et que $x \to \mathrm{P}_n(x) \, \mathrm{e}^{-x^2/2}$ est un vecteur propre de la transformée de Fourier. Quelles sont les valeurs propres possibles pour $\mathcal{F}$?

Exercice 9.3. Injectivité de la transformation de Laplace. Soit f une fonction sur $\mathbb{R}$, nulle en dehors d'un intervalle de la forme $[a, +\infty[$ et telle que $x \to f(x) \, \mathrm{e}^{-s_0 x}$ soit intégrable pour un $s_0 \in \mathbb{R}$. On définit la *transformée de Laplace* de la fonction f sur l'ouvert $\mathrm{U} = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\, z > s_0\}$ du plan complexe par

$$\forall z \in \mathrm{U}, \quad (\mathcal{L}f)(z) = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-zx} \, f(x) \, dx.$$

Montrer que $\mathcal{L}f$ est holomorphe dans U. Montrer que si $\mathcal{L}f$ est nulle sur un intervalle non vide de $]s_0, +\infty[$, alors f est nulle presque partout sur $\mathbb{R}$.

9.2. Holomorphie et analyticité

Sur ces questions il y a au moins deux sources qu'il faut lire : Cartan et Rudin. Le volume 2 de Chatterji contient aussi une masse d'informations, qui commence tout doucement, avec la définition des nombres complexes...

Une fonction holomorphe f est une fonction qui est dérivable au sens complexe. Un point tout à fait remarquable est que pour développer la théorie des fonctions holomorphes, on n'a pas pas besoin de supposer que $z \to f'(z)$ soit continue ; on verra en fait que f est développable en série entière au voisinage de chaque point de Ω, ce qui impliquera que f' est elle aussi holomorphe dans Ω, et on peut donc continuer de dériver indéfiniment. On aura ainsi établi l'identité entre le point de vue *holomorphe* et le point de vue *analytique* (fondé sur les développements en séries entières).

Fonctions holomorphes

On dit que f est *holomorphe* dans un ouvert Ω de $\mathbb{C}$ si elle admet en tout point $z \in \Omega$ une dérivée au sens complexe,

$$f'(z) = \lim_{h \to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h}$$

où h tend vers 0 par *valeurs complexes*. Les opérations habituelles sur les dérivées se justifient comme dans le cas réel usuel : dérivée d'un produit, de l'inverse $1/f$ lorsque $f(z) \neq 0$, composition de fonctions $\mathbb{C}$-dérivables, etc... On vérifie à la main facilement que les monômes z^n, $n \geq 0$ sont holomorphes, avec dérivée nz^{n-1}, et que les z^n pour $n < 0$ sont holomorphes en dehors de 0, avec la dérivée qu'on imagine.

Ecrivons $z = x + iy$, avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et posons $f(z) = \mathrm{P}(x, y) + i\mathrm{Q}(x, y)$ avec P et Q fonctions réelles définies sur l'ouvert de $\mathbb{R}^2$ égal à

$$\Omega' = \{(x, y) : x + iy \in \Omega\} ;$$

on voit que la dérivabilité complexe de f au point z implique que pour t réel petit,

$$f(z + it) - f(z) \sim (it)f'(z) = i\,(tf'(z)) \sim i\,(f(z + t) - f(z))$$

(le signe $a \sim b$ signifie ici que $a(t) - b(t) = o(t)$ au voisinage de $t = 0$), ce qui se traduit par $\frac{\partial}{\partial y}(\mathrm{P} + i\mathrm{Q}) = i\,\frac{\partial}{\partial x}(\mathrm{P} + i\mathrm{Q})$, ou encore

$$\frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial x} = -\frac{\partial \mathrm{P}}{\partial y} ; \quad \frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial y} = \frac{\partial \mathrm{P}}{\partial x}$$

en tout point de Ω. On peut visualiser les choses de la façon suivante : le gradient de Q se déduit de celui de P par une rotation d'angle $+\pi/2$ dans $\mathbb{R}^2$.

On verra que l'existence de la dérivée complexe implique en fait que f est indéfiniment dérivable. Une deuxième dérivation des relations de Cauchy-Riemann et le lemme de Schwarz impliquent alors que $\Delta\mathrm{P} = \Delta\mathrm{Q} = 0$ (on a noté Δ le laplacien). On dit que P, Q sont un couple de fonctions *harmoniques conjuguées*.

On peut aussi dire les choses avec l'opérateur $\overline{\partial}$, défini par

$$\overline{\partial} = \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\Big).$$

Si γ est une application C^1 d'un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ à valeurs dans un ouvert Ω de $\mathbb{C}$ où une fonction f est holomorphe, on vérifie facilement que la fonction complexe de variable réelle $f \circ \gamma$ admet pour dérivée $t \to f'(\gamma(t))\,\gamma'(t)$. Cette remarque simple est très utile pour le calcul des intégrales sur des chemins (paragraphe suivant).

Intégrale sur un chemin

On considère une application γ de classe C^1 d'un intervalle fermé borné $[\alpha, \beta]$, à valeurs dans $\mathbb{C}$, et F une fonction à valeurs réelles ou complexes définie et continue sur la courbe image $\gamma^* = \gamma([\alpha, \beta])$. On pose

$$\int_\gamma \mathrm{F}(z)\,dz = \int_\alpha^\beta \mathrm{F}(\gamma(t))\,\gamma'(t)\,dt$$

où la variable z représente un point de $\gamma^* \subset \mathbb{C}$ et où $\gamma'(t)$ désigne la dérivée au point $t \in \mathbb{R}$ de la fonction γ, qui est une fonction de variable réelle à valeurs complexes. Si on a un autre paramétrage $\gamma_1 : [\alpha_1, \beta_1] \to \mathbb{C}$ du même chemin γ^*, de la forme $\gamma_1 = \gamma \circ \psi$, avec ψ bijection croissante de classe C^1 de $[\alpha_1, \beta_1]$ sur $[\alpha, \beta]$, on aura par le changement de variable $t = \psi(s)$

$$\int_{\alpha_1}^{\beta_1} \mathrm{F}(\gamma_1(s))\,\gamma_1'(s)\,ds = \int_{\alpha_1}^{\beta_1} \mathrm{F}(\gamma(\psi(s)))\,\gamma_j'(\psi(s))\psi'(s)\,ds = \int_\alpha^\beta \mathrm{F}(\gamma(t))\,\gamma'(t)\,dt.$$

On peut ensuite considérer des chemins qui sont C^1 par morceaux pour arriver finalement à la notion générale d'intégrale sur un chemin γ

$$\int_\gamma \mathrm{F}(z)\,dz = \sum_{j=1}^n \int_{\gamma_j} \mathrm{F}(z)\,dz$$

où γ est définie et continue sur $[\alpha, \beta]$, et où $\alpha = \alpha_0 < \alpha_1 < \ldots < \alpha_n = \beta$ est une subdivision de $[\alpha, \beta]$ telle que pour tout $j = 1, \ldots, n$, la restriction γ_j de γ à l'intervalle $[\alpha_{j-1}, \alpha_j]$ soit de classe C^1.

Continuons avec une remarque facile. Si f est holomorphe, avec f' continue (on montrera plus loin que cette propriété de continuité de f' est automatique) dans un ouvert contenant un chemin γ, allant du point $a = \gamma(\alpha)$ au point $b = \gamma(\beta)$, alors

$$\int_\gamma f'(z)\,dz = f(b) - f(a).$$

En particulier, le résultat sera nul pour un chemin fermé (c'est à dire quand $\gamma(\alpha) = \gamma(\beta)$). Cette remarque est essentielle pour le développement des arguments qui suivent.

On peut facilement majorer le module de l'intégrale d'une fonction continue F sur un chemin,

$$\Big|\int_\gamma \mathrm{F}(z)\,dz\Big| \leq \ell(\gamma)\ \max\{|\mathrm{F}(z)| : z \in \gamma^*\}$$

où $\ell(\gamma) = \int_\alpha^\beta |\gamma'(t)|\,dt$ désigne la longueur du chemin γ (avec "répétition" : cette longueur peut être plus longue que celle du chemin géométrique γ^*, si par exemple on a fait plusieurs fois le tour d'un cercle). En particulier, si le segment $\gamma^* = [a, b]$ est contenu dans un ouvert Ω, et si f est holomorphe dans cet ouvert Ω, avec f' continue, on en déduit la majoration

$$|f(b) - f(a)| \leq |b - a|\ \max\{|f'(z)| : z \in \gamma^*\}. \tag{1}$$

Lemme 9.1. *Désignons par γ_r le parcours du cercle de rayon $r > 0$ centré en 0 donné par $\gamma_r(\theta) = r\,\mathrm{e}^{i\theta}$, pour $\theta \in [0, 2\pi]$. Si g est une fonction continue sur le cercle γ_r^*, la fonction* F *définie pour $|\lambda| \neq r$ par*

$$\mathrm{F}(\lambda) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \frac{g(z)\,dz}{z - \lambda}$$

est développable, pour $|\lambda| < r$, en série de puissances de λ,

$$\mathrm{F}(\lambda) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \lambda^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \Big(\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \frac{g(z)\,dz}{z^{n+1}} \Big) \lambda^n$$

(donc la série entière précédente a un rayon de convergence $\geq r$), et développable en série de puissances de $1/\lambda$ pour $|\lambda| > r$,

$$\mathrm{F}(\lambda) = -\sum_{n=0}^{+\infty} \Big(\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} z^n g(z)\,dz \Big) \lambda^{-n-1}.$$

Démonstration. C'est simplement une interversion série-intégrale. Fixons $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $|\lambda| < r$; on écrit pour $|z| = r$

$$\frac{1}{z - \lambda} = \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\lambda^n}{z^n}\,;$$

cette série de fonctions de z converge normalement pour $z \in \gamma_r^*$, donc

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \frac{g(z)\,dz}{z - \lambda} = \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^n \Big(\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \frac{g(z)\,dz}{z^{n+1}} \Big).$$

La démonstration est identique pour $|\lambda| > r$, si on commence par écrire

$$\frac{1}{z - \lambda} = -\frac{1}{\lambda} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{\lambda^n}.$$

Un peu d'indice

On a besoin d'un calcul fondamental. Désignons par γ_r le parcours du cercle de rayon $r > 0$ centré en 0 donné par $\gamma_r(\theta) = r\,\mathrm{e}^{i\theta}$, pour $\theta \in [0, 2\pi]$. On a

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \frac{dz}{z} = 1$$

ce qui se voit immédiatement, puisque

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \frac{dz}{z} = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{ri\,\mathrm{e}^{i\theta}}{r\,\mathrm{e}^{i\theta}}\,d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2\pi} = 1.$$

On a aussi

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \frac{dz}{z^n} = 0 \tag{2}$$

pour tout $n \neq 1$, parce que la fonction z^{-n} admet dans ce cas une primitive complexe dans un voisinage du cercle γ_r^* (on peut aussi paramétriser comme ci-dessus, et trouver une intégrale de $\mathrm{e}^{in\theta}$). Ensuite, pour $|\lambda| < r$, on aura

$$\mathrm{J}(\lambda) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \frac{dz}{z-\lambda} = 1$$

en appliquant le lemme précédent avec $f(z) = 1$, et les équations (2). En revanche, quand $|\lambda| > r$, on aura

$$\mathrm{J}(\lambda) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \frac{dz}{z-\lambda} = 0$$

par le même lemme et équations.

On obtient de même en désignant par $\gamma_r(z_0)$ le cercle de rayon r centré au point z_0 que

$$\mathrm{J}(z_0, \lambda) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r(z_0)} \frac{dz}{z-\lambda}$$

est égal à 1 ou 0 selon que $|\lambda - z_0| < r$ ou $|\lambda - z_0| > r$.

De l'holomorphie à l'analyticité : en passant par le lemme de Goursat

L'un des cheminements classiques est le suivant :

(g continue dans une boule ouverte $\mathrm{D} = \mathrm{B}(z_0, r_0)$, holomorphe dans D, sauf peut-être en un point)

$\Rightarrow_1$ (l'intégrale curviligne de $g(z)\,dz$ sur le bord de tout triangle contenu dans D est nulle)

$\Rightarrow_2$ (g admet une primitive G (au sens complexe) dans D)

$\Rightarrow_3$ (l'intégrale de $g(z)\,dz$ sur tout cercle $\mathrm{S}(z_0, r)$, $r < r_0$ est nulle)

$\Rightarrow_4$ (la formule de Cauchy pour f holomorphe dans D)

$\Rightarrow_5$ (f est développable en série de Taylor $\sum_{n\geq 0} a_n(z-z_0)^n$, convergente pour tout point $z \in \mathrm{D}$)

$\Rightarrow_6$ (f' est holomorphe dans D).

L'implication $\Rightarrow_1$ est le lemme de Goursat ; l'implication $\Rightarrow_2$ est facile : il suffit de poser $\mathrm{G}(z) = \int_{\gamma_z} f(w)\,dw$, où γ_z est le segment de z_0 à z. L'implication $\Rightarrow_3$ a déjà été vue (intégrale d'une dérivée continue sur un chemin fermé). Pour l'implication $\Rightarrow_4$, on utilise la fonction $g(z) = (f(z) - f(\lambda))/(z - \lambda)$ qui est holomorphe, sauf peut-être au point λ. L'implication $\Rightarrow_5$ consiste à développer en série $z \to (z-\lambda)^{-1}$ (lemme 9.1), et le dernier point est du DEUG amélioré (dérivabilité *complexe* de la somme d'une série entière).

Dérivabilité complexe de la somme d'un série entière : DEUG amélioré

Rappelons le fait simple et crucial :

si la série $\sum a_n z_0^n$ converge au point $z_0 \in \mathbb{C}$, alors $\sum |a_n|\,|z^n|$ converge uniformément dans tout disque centré en 0 et de rayon $r < |z_0|$.

Si $\sum a_n z^n$ est une série entière à coefficients complexes (a_n), son rayon de convergence R est donné par la formule

$$1/\mathrm{R} = \limsup |a_n|^{1/n}.$$

On en déduit la convergence de la série dérivée (formelle) $\sum_{n\geq 1} na_n z^{n-1}$ dans le même disque ouvert $\mathrm{D}(0,\mathrm{R})$. Rappelons brièvement pourquoi la somme de la série dérivée est la dérivée (complexe) de $z \to f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$.

Si on prend $0 < r < \mathrm{R}$ et $|z_1|, |z_2| \leq r$ on aura en utilisant une intégrale sur le segment de z_1 à z_2, segment contenu dans le disque fermé de rayon r

$$|z_2^{n-1} - z_1^{n-1}| \leq (n-1)\, r^{n-2}\, |z_2 - z_1|$$

(utiliser par exemple la majoration (1) ci-dessus). On suppose ensuite que $|z_0|, |z_0+h| \leq r$ et on pose pour t réel dans $[0,1]$

$$\varphi(t) = (z_0 + th)^n - z_0^n - nz_0^{n-1}th\,;$$

en appliquant la majoration $|\varphi(1) - \varphi(0)| \leq \int_0^1 |\varphi'(t)|\, dt$, avec

$$|\varphi'(t)| = \big|n(z_0+th)^{n-1}h - nz_0^{n-1}h\big| = n|h|\big|(z_0+th)^{n-1} - z_0^{n-1}\big| \leq n(n-1)r^{n-2}|h|^2\, t$$

on aura

$$\big|(z_0+h)^n - z_0^n - nz_0^{n-1}h\big| \leq \frac{n(n-1)}{2}\, r^{n-2}|h|^2.$$

Il en résulte que

$$\Big|f(z_0+h) - f(z_0) - \big(\sum_{n=1}^{+\infty} na_n z_0^{n-1}\big)\, h\Big| \leq \Big(\sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)|a_n|\, r^{n-2}\Big)|h|^2/2 = \mathrm{K}(r)\, |h|^2$$

ce qui montre la dérivabilité complexe de f au point z_0, et montre aussi que $f'(z_0)$ est égal à la somme de la série dérivée. On a

$$\mathrm{K}(r) = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)|a_n|\, r^{n-2} < +\infty$$

parce que la série dérivée seconde (formelle) est absolument convergente au point $r < \mathrm{R}$.

Prépa. Agrég écrit d'Analyse, séance n° 10, mercredi 12 décembre 2001.

10.1. Lemme de Goursat

Le lemme de Goursat, apparu vers 1900, est un très joli complément à la théorie des fonctions holomorphes, qui avait cependant atteint sans ce lemme l'essentiel de son très grand développement, commencé avec les travaux de Cauchy à partir de 1820. Ce lemme implique que la seule *existence* de la dérivée complexe dans un ouvert Ω entraîne toutes les propriétés voulues.

Si $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}$ sont trois points du plan complexe, on peut considérer le triangle fermé égal à l'enveloppe convexe de ces trois points,

$$\mathrm{T}_{\mathrm{A,B,C}} = \mathrm{conv}\{\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}\} = \{\lambda\mathrm{A} + \mu\mathrm{B} + \nu\mathrm{C} : \lambda, \mu, \nu \geq 0,\ \lambda + \mu + \nu = 1\},$$

et le chemin fermé $\gamma_{\mathrm{A,B,C}}$ qui parcourt les trois segments du bord du triangle, en suivant l'ordre $(\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C})$ des lettres en indice de la lettre γ (considéré comme une permutation circulaire : après C vient A)

$$\int_{\gamma_{\mathrm{A,B,C}}} = \int_{[\mathrm{A,B}]} + \int_{[\mathrm{B,C}]} + \int_{[\mathrm{C,A}]}.$$

Le bord de $\mathrm{T} = \mathrm{T}_{\mathrm{A,B,C}}$ sera noté $\partial\mathrm{T}$, et on écrira aussi de façon un peu imprécise $\int_{\partial\mathrm{T}}$ pour désigner l'intégrale sur le bord de T, parcouru dans l'ordre sous-entendu $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}, \mathrm{A}$. La longueur $\ell(\partial\mathrm{T})$ du bord est la somme des trois longueurs (≥ 0) des segments du bord. On pourra remarquer que pour des raisons de convexité, on a

$$(\delta) \qquad \forall z_1, z_2 \in \mathrm{T}, \quad |z_1 - z_2| \leq \max\{\,|\mathrm{B} - \mathrm{A}|, |\mathrm{C} - \mathrm{B}|, |\mathrm{A} - \mathrm{C}|\,\} \leq \frac{\ell(\partial\mathrm{T})}{2}.$$

Introduisons trois nouveaux points : A' est le milieu de BC, B' celui de CA et C' celui de AB. On introduit ainsi quatre nouveaux triangles $\mathrm{T}_1, \mathrm{T}_2, \mathrm{T}_3, \mathrm{T}_4$: trois sont obtenus en substituant deux des lettres a, b ou c par les lettres accentuées, et en changeant le sens de parcours ; le dernier nouveau triangle est obtenu en accentuant les trois lettres et en gardant le sens de parcours :

$$\mathrm{C}'\mathrm{B}'\mathrm{A}\,,\ \mathrm{C}'\mathrm{B}\mathrm{A}'\,,\ \mathrm{C}\mathrm{B}'\mathrm{A}'\,;\ \mathrm{A}'\mathrm{B}'\mathrm{C}'.$$

Ces triangles T_j ont des côtés de longueur moitié de ceux de T. Il en résulte que

$$\ell(\partial\mathrm{T}_j) = \frac{1}{2}\,\ell(\partial\mathrm{T}),\ j = 1, 2, 3, 4.$$

Le point crucial pour la suite est que

$$\int_{\partial\mathrm{T}} = \sum_{j=1}^{4} \int_{\partial\mathrm{T}_j}.$$

Voici une justification, aussi algébrique qu'il m'est possible : chaque segment bi-accentué provenant d'un des trois segments des bords des T_j, comme $\mathrm{A}'\mathrm{B}'$ par exemple, apparaît deux fois comme constituant d'un bord de l'un des quatre sous-triangles : une fois dans le même ordre, dans $\mathrm{A}'\mathrm{B}'\mathrm{C}'$ et une fois dans l'ordre inverse, dans $\mathrm{C}\mathrm{B}'\mathrm{A}'$; cela implique que la contribution des segments bi-accentués est nulle dans la somme des quatre intégrales ; pour ce qui concerne les segments avec un seul accent, chaque lettre accentuée, par exemple C', apparaît une fois suivie de B, et une fois précédant A (dans la permutation circulaire inversée (cba) utilisée pour les triangles bi-accentués) ; on forme ainsi $\int_{\mathrm{C}'\mathrm{B}} + \int_{\mathrm{A}\mathrm{C}'} = \int_{\mathrm{AB}}$ qui est un morceau du bord du grand triangle.

Lemme 10.1. *On suppose que f est continue dans Ω, holomorphe dans Ω sauf peut être en un point z_1 de Ω. On suppose que* T *est un triangle (fermé) contenu dans Ω. Si ∂T désigne le chemin qui parcourt le bord de* T*, on a*

$$\int_{\partial \mathrm{T}} f(z)\, dz = 0.$$

Démonstration. Supposons que $z_1 \notin \mathrm{T}$ (pour commencer). On pose

$$c := \ell(\partial \mathrm{T})^{-2} \Big| \int_{\partial \mathrm{T}} f(z)\, dz \Big|$$

et on veut montrer que $c = 0$. On considère $\mathrm{T}^{(0)} = \mathrm{T}$ et $\gamma_0 = \partial \mathrm{T}$ comme les premiers termes d'une suite de triangles et de chemins. On considère la décomposition du triangle $\mathrm{T}^{(0)} = \mathrm{T}_{\mathrm{A,B,C}}$ en quatre triangles $\mathrm{T}_j = \mathrm{T}_j^{(0)}$, $j = 1, 2, 3, 4$, comme on l'a expliqué avant l'énoncé du lemme. Puisque l'intégrale sur le bord de $\mathrm{T}^{(0)}$ est la somme des quatre intégrales sur les bords des $\mathrm{T}_j^{(0)}$, on doit avoir pour un triangle T' parmi $\mathrm{T}_1^{(0)}, \ldots, \mathrm{T}_4^{(0)}$ l'inégalité

$$\text{(C)} \qquad \ell(\partial \mathrm{T}^{(0)})^{-2} \Big| \int_{\partial \mathrm{T}'} f(z)\, dz \Big| \geq c/4.$$

Désignons par $\mathrm{T}^{(1)}$ l'un des triangles $\mathrm{T}_j^{(0)}$ qui vérifie l'inégalité (C). Puisque la longueur de $\partial \mathrm{T}^{(1)}$ est la moitié de celle de $\partial \mathrm{T}^{(0)}$ on a, en écrivant γ_1 pour $\partial \mathrm{T}^{(1)}$

$$\ell(\gamma_1)^{-2} \Big| \int_{\gamma_1} f(z)\, dz \Big| \geq c.$$

On continue, par récurrence, à définir des triangles $\mathrm{T}^{(n)}$ qui vérifient pour tout $n \geq 0$

$$(*) \qquad \ell(\gamma_n)^{-2} \Big| \int_{\gamma_n} f(z)\, dz \Big| \geq c$$

où on a désigné pour abréger le chemin $\partial \mathrm{T}^{(n)}$ par γ_n. A chaque étape, le triangle $\mathrm{T}^{(n+1)}$ est obtenu en divisant $\mathrm{T}^{(n)}$ en quatre, comme expliqué précédemment, et en choisissant un sous-triangle dont l'intégrale sur le bord est maximale en module. Il résulte de la construction que la taille des côtés de $\mathrm{T}^{(n)}$ est 2^{-n} fois celle du triangle initial. Les triangles $(\mathrm{T}^{(n)})$ forment une suite décroissante de fermés, de diamètres tendant vers 0 d'après la relation (δ) ; l'intersection de cette suite contient donc un point unique $z_0 \in \Omega$; on conclura en faisant un DL (complexe) au voisinage de z_0 : en posant $g(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0)$, et étant donné $\varepsilon > 0$, on peut trouver $\alpha > 0$ tel que $|f(z) - g(z)| < \varepsilon\, |z - z_0|$ pour tout point z tel que $|z - z_0| < \alpha$. Choisissons N_0 assez grand pour que $\ell(\gamma_n) < \alpha$ pour tout $n \geq \mathrm{N}_0$. On aura alors en utilisant (δ) l'inégalité $|f(z) - g(z)| < \varepsilon\, |z - z_0|$ pour tout point $z \in \gamma_n^*$. Comme l'intégrale de g (qui est une dérivée) est nulle sur γ_n, on obtient

$$\Big| \int_{\gamma_n} f(z)\, dz \Big| = \Big| \int_{\gamma_n} (f(z) - g(z))\, dz \Big| \leq \ell(\gamma_n)\, \max\{|f(z) - g(z)| : z \in \gamma_n^*\} \leq \varepsilon\, \ell(\gamma_n)^2$$

et

$$c \leq \ell(\gamma_n)^{-2} \Big| \int_{\gamma_n} f(z)\, dz \Big| \leq \varepsilon$$

ce qui donne bien $c = 0$ puisque ε est arbitraire.

Dans le cas où le triangle T contient le point exceptionnel z_1, on procède par approximation de l'intégrale sur le bord de T par des intégrales sur des bords de triangles qui ne contiennent pas z_1. Si z_1 est sur le bord de $\mathrm{T}_{\mathrm{A,B,C}}$, on approchera par des triangles intérieurs T_ε dont les sommets sont de la forme $\mathrm{A}_\varepsilon = (1-2\varepsilon)\mathrm{A}+\varepsilon\mathrm{B}+\varepsilon\mathrm{C}$ pour $0 < \varepsilon < 1/2$, et de même pour B_ε, C_ε. La fonction f est holomorphe dans un ouvert contenant T_ε, donc l'intégrale de f sur le bord de T_ε est nulle par ce qui précède, et elle tend vers l'intégrale de f sur le bord de T lorsque $\varepsilon \to 0$: cet argument d'approximation est justifié par la continuité de f.

Finalement, si z_1 est intérieur au triangle T, on découpe T en trois triangles qui ont z_1 pour sommet. L'argument ci-dessus et le découpage de l'intégrale sur le bord de T en trois intégrales sur les bords des sous-triangles termine la preuve.

10.2. Primitives

On dit que $\Omega \subset \mathbb{C}$ est *étoilé* par rapport à $z_0 \in \Omega$ si on peut "voir" tous les points z de Ω depuis le point z_0 : pour tout $z \in \Omega$, le segment $[z_0, z]$ est contenu dans Ω.

Ainsi, un ensemble est convexe s'il est étoilé par rapport à chacun de ses points.

Théorème. *Soit Ω un ouvert étoilé par rapport à un point z_0, soient $z_1 \in \Omega$ et f une fonction continue dans Ω, holomorphe dans $\Omega \setminus \{z_1\}$; la fonction* F *définie par*

$$\forall z \in \Omega, \quad \mathrm{F}(z) = \int_{[z_0,z]} f(w)\, dw$$

est une primitive (au sens complexe) de f dans Ω.

Démonstration. Soit $z \in \Omega$ un point fixé ; on remarque que lorsque $h \in \mathbb{C}$ est assez petit pour que $[z, z+h] \subset \Omega$, on a

$$f(z) = h^{-1} \int_{[z,z+h]} f(z)\, dw\,;$$

on voit que le triangle $\mathrm{T}_{z_0,z,z+h}$ est contenu dans Ω, grâce à l'hypothèse *étoilé* (tracer tous les segments joignant z_0 aux points du segment $[z, z+h] \subset \Omega$) ; on écrit ensuite, en utilisant la nullité de l'intégrale sur le bord du triangle $\mathrm{T}_{z_0,z,z+h}$ (nullité donnée par le lemme 10.1)

$$\Big|\frac{\mathrm{F}(z+h)-\mathrm{F}(z)}{h} - f(z)\Big| = |h|^{-1}\Big|\int_{[z,z+h]} \big(f(w)-f(z)\big)\, dw\Big| \le \int_0^1 |f(z+th)-f(z)|\, dt$$

qui tend vers 0 quand $h \to 0$, par la continuité de f au point z.

Un peu de logarithme complexe

On considère l'ouvert $\Omega_0 = \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_-$ de tous les nombres complexes z tels que $\operatorname{Re} z > 0$ ou bien $\operatorname{Im} z \neq 0$. Cet ouvert est étoilé par rapport au point $z_0 = 1$. On peut donc poser

$$\forall z \in \Omega_0, \quad \mathrm{F}(z) = \int_{[1,z]} \frac{dw}{w}.$$

On obtient ainsi une primitive de la fonction $1/z$. On voit que $\mathrm{F}(1) = 0$, et on constate que $\mathrm{e}^{\mathrm{F}(z)} = z$ en montrant que $\mathrm{e}^{\mathrm{F}(z)}/z$ est constante dans l'ouvert Ω_0 (la dérivée

$\mathrm{e}^{\mathrm{F}(z)}\,\mathrm{F}'(z)/z - \mathrm{e}^{\mathrm{F}(z)}/z^2$ est nulle dans Ω_0, qui est connexe). La fonction F est une détermination du logarithme complexe.

La conclusion du calcul de dérivée précédent est valable dans tout ouvert connexe ne contenant pas 0, dans lequel serait définie une primitive F de $1/z$: dans un tel ouvert, le quotient $\mathrm{e}^{\mathrm{F}(z)}/z$ sera constant.

Dans l'ouvert Ω_0 que nous avons choisi, il est facile de calculer F, une fois que nous savons que c'est une primitive de $1/z$ dans Ω_0 : nous pouvons maintenant utiliser n'importe quel chemin γ de $z_0 = 1$ à $z = r\,\mathrm{e}^{i\theta}$, où $r > 0$ et $-\pi < \theta < \pi$. Si nous allons d'abord de 1 à r sur l'axe réel, puis de r à $r\,\mathrm{e}^{i\theta}$ sur un arc de cercle $\alpha \to \mathrm{e}^{i\alpha}$, où α varie de 0 à θ, on verra facilement que

$$\mathrm{F}(z) = \ln(r) + i\theta.$$

Si $z = \mathrm{e}^{a+ib}$ est dans Ω_0, on aura donc $\mathrm{F}(z) = a + ib + 2ki\pi$, où $k \in \mathbb{Z}$ est choisi pour que $-\pi < b + 2k\pi < \pi$.

10.3. Développement jusqu'au bord

Théorème. *Soient Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ et f une fonction holomorphe dans Ω ; soient ensuite $z_0 \in \Omega$ et $r_0 = \mathrm{dist}(z_0, \Omega^c) > 0$; la fonction f coïncide dans le disque ouvert $\mathrm{B}(z_0, r_0)$ avec la somme d'une série entière,*

$$\forall z \in \mathrm{B}(z_0, r_0), \quad f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z_0)\,(z - z_0)^n.$$

La fonction f est donc indéfiniment dérivable (au sens complexe) dans le disque $\mathrm{B}(z_0, r_0)$ et on a nécessairement

$$a_n(z_0) = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$$

pour tout entier $n \geq 0$.

Démonstration. Dans l'ouvert $\mathrm{U} = \mathrm{B}(z_0, r_0)$ on fixe un point z_1 et on considère la fonction continue g définie par $g(z) = \big(f(z) - f(z_1)\big)/(z - z_1)$ si $z \neq z_1$ et $g(z_1) = f'(z_1)$. Cette fonction est holomorphe dans $\mathrm{U} \setminus \{z_1\}$. Puisque U est étoilé, il existe une primitive G pour g dans U. Il en résulte que $\int_{\gamma_r(z_0)} g(z)\,dz = 0$ pour tout cercle $\gamma_r(z_0)$ dans U, de centre z_0 et de rayon $r < r_0$. On a donc en découpant g en deux l'égalité

$$\int_{\gamma_r(z_0)} \frac{f(z)}{z - z_1}\,dz = f(z_1) \int_{\gamma_r(z_0)} \frac{1}{z - z_1}\,dz.$$

On choisit r tel que $|z_1 - z_0| < r < r_0$ et on applique le lemme 9.1, modulo une translation $\zeta = z - z_0$ pour ramener le centre du cercle en 0

$$f(z_1) = \frac{f(z_1)}{2i\pi} \int_{\gamma_r(z_0)} \frac{1}{z - z_1}\,dz = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_r(z_0)} \frac{f(z)}{z - z_1}\,dz = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\,(z_1 - z_0)^n$$

où

$$a_n = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_r(z_0)} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}}\,dz$$

pour tout entier $n \geq 0$.

Corollaire. *Si f holomorphe dans l'ouvert Ω s'annule en une suite $(z_n)_{n\geq 1}$ de points de Ω qui tend vers un point $z_0 \in \Omega$, et si $z_0 \neq z_n$ pour tout $n \geq 1$, alors f est nulle au voisinage de z_0. Autrement dit, lorsque l'ensemble des zéros de f ne contient aucun ouvert non vide, chaque zéro de f dans Ω est isolé dans Ω.*

Si Ω est connexe et si f s'annule dans un ouvert non vide $\mathrm{U} \subset \Omega$, alors f est nulle dans Ω.

Démonstration. On écrit

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n \, (z - z_0)^n$$

dans $\mathrm{B}(z_0, r_0)$, $r_0 = \mathrm{dist}(z_0, \Omega^c) > 0$. Si f n'est pas identiquement nulle au voisinage de z_0, il existe au moins un coefficient c_n non nul ; si on désigne par m le premier entier tel que $c_m \neq 0$, on aura pour tout $z \in \mathrm{B}(z_0, r_0)$

$$f(z) = c_m \, (z - z_0)^m \left(1 + d_1 \, (z - z_0) + \cdots + d_k \, (z - z_0)^k + \cdots\right)$$

où $c_m \, d_k = c_{m+k}$, c'est à dire que $f(z) = c_m \, (z - z_0)^m \, g(z)$ dans un voisinage de z_0, avec g continue et $g(z_0) = 1$. Il est alors clair qu'il existe un voisinage de z_0 dans lequel z_0 est le seul zéro de f, contredisant ainsi l'existence d'une suite de zéros (z_n) différents de z_0 et tendant vers z_0.

On en déduit que l'ensemble N des points $z \in \Omega$ tels qu'il existe un ouvert $\mathrm{U} \subset \Omega$ contenant z et dans lequel f est nulle, forme un sous-ensemble ouvert (évident) et fermé (par ce qui précède) de Ω. Si Ω est connexe, on aura $\mathrm{N} = \Omega$ dès que N n'est pas vide.

Points réguliers, points singuliers sur le cercle de convergence d'une série entière

On considère la somme $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ d'une série entière de rayon de convergence r_0, avec $0 < r_0 < +\infty$. On dit que le point λ du cercle de convergence ($|\lambda| = r_0$) est *régulier* pour f s'il existe une boule ouverte $\mathrm{B}(\lambda, \delta)$, $\delta > 0$ et une fonction holomorphe f_1 dans $\mathrm{B}(\lambda, \delta)$ telle que $f_1 = f$ dans l'intersection $\mathrm{B}(0, r_0) \cap \mathrm{B}(\lambda, \delta)$; cela revient à dire que f se prolonge en fonction holomorphe dans l'ouvert réunion $\mathrm{B}(0, r_0) \cup \mathrm{B}(\lambda, \delta)$.

Ne pas confondre le fait que λ soit régulier ou non avec le fait que la série de Taylor de f à l'origine converge ou non au point λ. Par exemple, la série $\sum z^n$ diverge en **tout** point du cercle unité ; pourtant, sa somme $f(z) = (1 - z)^{-1}$ se prolonge à $\mathbb{C} \setminus \{1\}$, donc tous les $\lambda \neq 1$ du cercle unité sont réguliers. Il y a bien un point singulier sur le cercle unité, conformément au théorème qui suit.

Théorème. *Il existe au moins un point singulier sur le cercle de convergence.*

Démonstration. Supposons $r_0 = 1$ pour fixer les idées. Si aucun point singulier n'existe sur le cercle de convergence, on aura pour tout point x du cercle de rayon 1 une boule ouverte B_x de centre x et une fonction holomorphe f_x dans B_x qui coïncide avec f dans $\mathrm{B}(0, 1) \cap \mathrm{B}_x$; par compacité, on trouve un nombre fini $\mathrm{B}_1, \ldots, \mathrm{B}_\mathrm{N}$ de ces boules ouvertes qui couvre le cercle unité, et des fonctions $f_1, \ldots, f_\mathrm{N}$, telles que chaque f_j soit holomorphe dans B_j et coïncide avec f dans $\mathrm{B}_j \cap \mathrm{B}(0, 1)$, pour tout $j = 1, \ldots, \mathrm{N}$. L'ensemble $\Omega = \mathrm{B}_1 \cup \ldots \cup \mathrm{B}_\mathrm{N} \cup \mathrm{B}(0, 1)$ est un ouvert qui contient le disque unité fermé, donc il existe $\delta > 0$ tel que $\mathrm{B}(0, 1 + \delta) \subset \Omega$.

Notons $\mathrm{B}_0 = \mathrm{B}(0, 1)$ et $f_0 = f$. On va montrer qu'on peut définir une fonction holomorphe g dans $\mathrm{B}(0, 1 + \delta)$ en posant $g(z) = f_j(z)$ si $z \in \mathrm{B}_j$, $j = 0, \ldots, \mathrm{N}$. Alors g sera développable en série entière de rayon de convergence $\geq 1 + \delta$; mais cette série

est aussi la série de Taylor de f, puisque $g = f$ au voisinage de 0 ; on aura donc une contradiction au fait que le rayon de convergence était égal à 1.

Pour terminer, il suffit de voir que $f_j(z) = f_k(z)$ lorsque $z \in \mathrm{B}_j \cap \mathrm{B}_k$, $0 \leq j < k \leq \mathrm{N}$. C'est vrai par construction si $j = 0$. Sinon, B_j et B_k sont deux boules centrées en des points x_j et x_k du cercle unité ; si $\mathrm{U} = \mathrm{B}_j \cap \mathrm{B}_k$ n'est pas vide, c'est un ouvert qui contient des points du cercle unité, donc U doit rencontrer B_0 ; sur l'ouvert non vide $\mathrm{V} = \mathrm{B}_0 \cap \mathrm{B}_j \cap \mathrm{B}_k$, on sait que $f_j = f_0 = f_k$; pour finir, U est connexe et $f_j - f_k$ est nulle sur un ouvert non vide $\mathrm{V} \subset \mathrm{U}$: il en résulte que $f_j - f_k = 0$ dans $\mathrm{B}_j \cap \mathrm{B}_k$.

Exercice 10.1. On considère la série entière

$$f(z) = z + z^3 + z^7 + \cdots + z^{2^n - 1} + \cdots$$

a. Vérifier que le rayon de convergence est égal à 1.

b. Pour tout $x \in \mathbb{C}$ on pose $g(x) = (x + x^2)/2$; montrer que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que

$$\big(|x| < 1 + \delta\big) \Rightarrow \big(|g(x)| < 1 \ \text{ ou } \ |x - 1| < \varepsilon\big).$$

c. Montrer que si 1 était régulier pour f, il existerait $\delta > 0$ tel que $x \to f(g(x))$ soit holomorphe dans $\mathrm{B}(0, 1 + \delta)$. Montrer que ceci est impossible en étudiant la série entière de $f(g(x))$ pour $x = 1$.

d. Généraliser à tout point λ du cercle unité : tous les points du cercle unité sont singuliers pour f.

10.4. Fonctions holomorphes dans une couronne. Développement de Laurent

Désignons par $\mathrm{C}(\mathrm{R}_1, \mathrm{R}_2)$ la couronne ouverte du plan complexe centrée en 0 égale à $\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{R}_1 < |z| < \mathrm{R}_2\}$. On suppose $\mathrm{R}_1 < \mathrm{R}_2$, et on peut admettre les cas extrêmes $\mathrm{R}_2 = +\infty$ et $\mathrm{R}_1 = 0$. Ainsi, $\mathrm{C}(0, +\infty)$ est égal à $\mathbb{C}^*$.

Si f est holomorphe dans la couronne $\mathrm{C}(\mathrm{R}_1, \mathrm{R}_2)$, on démontre la constance des intégrales $\int_{\gamma_r} f(z)\, dz$ sur les cercles centrés en 0, de rayon r compris entre R_1 et R_2 : on a posé $\gamma_r(\theta) = r\, \mathrm{e}^{i\theta}$, où θ varie dans $[0, 2\pi]$, et on pose $g(z) = z\, f(z)$; on a

$$\mathrm{J}(r) = \int_{\gamma_r} f(z)\, dz = \int_0^{2\pi} \frac{g(r\, \mathrm{e}^{i\theta})}{r\, \mathrm{e}^{i\theta}}\, ri\, \mathrm{e}^{i\theta}\, d\theta = i \int_0^{2\pi} g(r\, \mathrm{e}^{i\theta})\, d\theta$$

donc

$$r\, \frac{d\mathrm{J}(r)}{dr} = ri \frac{d}{dr} \int_0^{2\pi} g(r\, \mathrm{e}^{i\theta})\, d\theta = \int_0^{2\pi} g'(r\, \mathrm{e}^{i\theta})\, ri\, \mathrm{e}^{i\theta}\, d\theta = \int_{\gamma_r} g'(z)\, dz = 0,$$

ce qui montre que $\mathrm{J}(r)$ reste constant sur l'intervalle $]\mathrm{R}_1, \mathrm{R}_2[$. Autres méthodes pour montrer cette constance : invariance par homotopie (voir Cartan, paragraphe II.1.6), ou bien la démonstration du *Théorème de Cauchy global*, dans Rudin, 3ième édition, théorème 10.35.

Dans ce qui précède, le résultat reste valable si la fonction f est supposée continue dans la couronne, et holomorphe dans la couronne sauf peut-être en un point z_1 : si on pose $\mathrm{R} = |z_1|$, $\mathrm{R}_1 < \mathrm{R} < \mathrm{R}_2$, la fonction $\mathrm{J}(r)$ est continue sur $]\mathrm{R}_1, \mathrm{R}_2[$ (parce que f est continue) et constante sur les deux intervalles $]\mathrm{R}_1, \mathrm{R}[$ et $]\mathrm{R}, \mathrm{R}_2[$, donc elle est constante sur $]\mathrm{R}_1, \mathrm{R}_2[$.

Si f est holomorphe dans $\mathrm{C}(\mathrm{R}_1, \mathrm{R}_2)$, et si λ est un point fixé de cette couronne, on considère la fonction g définie par $g(z) = (f(z) - f(\lambda))/(z - \lambda)$ pour $z \neq \lambda$ et $g(\lambda) = f'(\lambda)$. La fonction g est continue dans la couronne, et holomorphe sur $\mathrm{C}(\mathrm{R}_1, \mathrm{R}_2) \setminus \{\lambda\}$. On choisit r_1 et r_2 de façon que $\mathrm{R}_1 < r_1 < |\lambda| < r_2 < \mathrm{R}_2$. On a dit que

$$(*) \qquad \int_{\gamma_{r_2}} g(z)\, dz - \int_{\gamma_{r_1}} g(z)\, dz = 0.$$

En utilisant de plus le calcul d'indice

$$\frac{1}{2\pi i}\Big(\int_{\gamma_{r_2}} \frac{dz}{z-\lambda} - \int_{\gamma_{r_1}} \frac{dz}{z-\lambda}\Big) = 1$$

on déduit de $(*)$ une formule de Cauchy pour f,

$$f(\lambda) = \frac{1}{2\pi i}\Big(\int_{\gamma_{r_2}} \frac{f(z)}{z-\lambda}\, dz - \int_{\gamma_{r_1}} \frac{f(z)}{z-\lambda}\, dz\Big).$$

En utilisant les développements de $(z-\lambda)^{-1}$ sur les deux cercles on obtient les deux séries suivantes (voir le lemme 9.1)

$$\int_{\gamma_{r_2}} \frac{f(z)}{z-\lambda}\, dz = \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^n \Big(\int_{\gamma_{r_2}} \frac{f(z)}{z^{n+1}}\, dz\Big)$$

et

$$\int_{\gamma_{r_1}} \frac{f(z)}{z-\lambda}\, dz = -\sum_{n=0}^{+\infty} \int_{\gamma_{r_1}} \frac{z^n f(z)}{\lambda^{n+1}}\, dz = -\sum_{m=-\infty}^{-1} \lambda^m \Big(\int_{\gamma_{r_1}} \frac{f(z)}{z^{m+1}}\, dz\Big).$$

En rassemblant les deux développements, et compte tenu du fait que les intégrales des fonctions $f(z)z^{-n-1}$, holomorphes dans $\mathrm{C}(\mathrm{R}_1, \mathrm{R}_2)$, sur les cercles centrés en 0 ne dépendent pas du rayon du cercle, on obtient pour tout r tel que $\mathrm{R}_1 < r < \mathrm{R}_2$ l'expression suivante pour le *développement de Laurent* de f,

$$\forall \lambda \in \mathrm{C}(\mathrm{R}_1, \mathrm{R}_2), \quad f(\lambda) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \Big(\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_r} \frac{f(z)}{z^{n+1}}\, dz\Big) \lambda^n.$$

Il s'agit donc d'un développement de f de la forme $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n z^n$, convergent pour tout $z \in \mathrm{C}(\mathrm{R}_1, \mathrm{R}_2)$. En y regardant de plus près, on voit que les deux parties du développement (en $-\infty$ et en $+\infty$) sont deux séries normalement convergentes sur tout compact K contenu dans la couronne ouverte.

Exercice 10.2. Calculer par la méthode des résidus

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-itx}}{\pi(1+x^2)}\, dx$$

où t est un paramètre réel (utiliser un demi-cercle ayant l'intervalle $[-\mathrm{R}, \mathrm{R}]$ comme diamètre, et tournant dans $\operatorname{Im} z > 0$ ou bien $\operatorname{Im} z < 0$ selon le signe de t).

Calculer

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx$$

à partir de e^{iz}/z.

Prépa. Agrég écrit d'Analyse, séance n° 11, mercredi 19 décembre 2001.

11.1. Applications du développement de Laurent

Si $\mathrm{R}_1, \mathrm{R}_2$ sont deux nombres tels que $0 \leq \mathrm{R}_1 < \mathrm{R}_2 \leq +\infty$ et si f est une fonction holomorphe dans la couronne ouverte $\mathrm{C}(\mathrm{R}_1, \mathrm{R}_2) = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{R}_1 < |z| < \mathrm{R}_2\}$, on a vu qu'elle admet un développement en série de la forme

$$\text{(L)} \qquad \forall z \in \mathrm{C}(\mathrm{R}_1, \mathrm{R}_2), \quad f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n\, z^n$$

où les coefficients $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ peuvent s'exprimer par

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad a_n = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_r} \frac{f(z)}{z^{n+1}}\, dz$$

pour tout cercle γ_r centré en 0 et tel que $\mathrm{R}_1 < r < \mathrm{R}_2$. La série précédente (L), appelée *série de Laurent* de f, converge uniformément sur tout compact K contenu dans la couronne.

On obtient par translation le même type de résultat pour une fonction f holomorphe dans une couronne $\mathrm{C}(z_0; \mathrm{R}_1, \mathrm{R}_2)$ centrée en z_0 : on aura un développement de la forme $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n\, (z - z_0)^n$ dans la couronne en question. On a bien sûr posé

$$\mathrm{C}(z_0; \mathrm{R}_1, \mathrm{R}_2) = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{R}_1 < |z - z_0| < \mathrm{R}_2\}.$$

Inégalités de Cauchy

A partir de ce qui précède, on obtient pour tout r tel que $\mathrm{R}_1 < r < \mathrm{R}_2$ les inégalités de Cauchy,

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad |a_n| \leq \frac{\mathrm{M}_r(f)}{r^n}$$

où $\mathrm{M}_r(f) = \max\{|f(z)| : |z| = r\}$. En effet,

$$|a_n| = \frac{1}{2\pi} \Big| \int_0^{2\pi} \frac{f(r\,\mathrm{e}^{i\theta})}{r^{n+1}\,\mathrm{e}^{i(n+1)\theta}}\, ri\,\mathrm{e}^{i\theta}\, d\theta \Big| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{|f(r\,\mathrm{e}^{i\theta})|}{r^n}\, d\theta \leq \frac{\mathrm{M}_r(f)}{r^n}.$$

Singularité artificielle

Nous appellerons *boule épointée* une boule ouverte privée de son centre, par exemple $\mathrm{B}(z_0, \mathrm{R}) \setminus \{z_0\}$; on notera $\mathrm{B}'(z_0, \mathrm{R}) = \mathrm{B}(z_0, \mathrm{R}) \setminus \{z_0\}$; une telle boule épointée est un cas particulier de couronne, $\mathrm{B}'(z_0, \mathrm{R}) = \mathrm{C}(z_0; 0, \mathrm{R})$.

Proposition. *Si f est holomorphe dans $\mathrm{B}(z_0, \mathrm{R}) \setminus \{z_0\}$ et si $(z - z_0) f(z)$ tend vers 0 quand $|z - z_0| \to 0$, alors f se prolonge en fonction holomorphe sur $\mathrm{B}(z_0, \mathrm{R})$. En particulier, si f reste bornée quand $|z - z_0| \to 0$, alors f se prolonge en fonction holomorphe sur $\mathrm{B}(z_0, \mathrm{R})$. Si f est définie et continue sur $\mathrm{B}(z_0, \mathrm{R})$ et holomorphe dans $\mathrm{B}(z_0, \mathrm{R}) \setminus \{z_0\}$, alors f est holomorphe sur $\mathrm{B}(z_0, \mathrm{R})$.*

Démonstration. Par translation on se ramène à $z_0 = 0$. En considérant la boule épointée $\mathrm{B}'(0, \mathrm{R}) = \mathrm{B}(0, \mathrm{R}) \setminus \{0\}$ comme une couronne, on écrit un développement de Laurent $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n z^n$ dans $\mathrm{B}'(0, \mathrm{R})$. Puisque $z f(z)$ tend vers 0, on a $r\mathrm{M}_r(f) \to 0$ lorsque $r \to 0$, et *a fortiori* on a $r^m \mathrm{M}_r(f) \to 0$ pour tout $m \geq 1$. D'après les inégalités de

Cauchy, on a $|a_n| \leq r^{-n}\mathrm{M}_r(f)$ pour tout r tel que $0 < r < \mathrm{R}$ et tout $n < 0$; en posant $m = -n \geq 1$ et en faisant tendre r vers 0, on en déduit que $a_n = 0$ pour tout $n < 0$; la série de Laurent se réduit donc à une série entière. Le prolongement voulu pour f est donné par la formule

$$\forall z \in \mathrm{B}(0, \mathrm{R}), \quad \widetilde{f}(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n.$$

Définitions. Soit f une fonction holomorphe dans la boule épointée $\mathrm{B}'(z_0, \mathrm{R})$; on dit que z_0 est un *pôle* de f si le développement de Laurent $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z - z_0)^n$ de f dans $\mathrm{B}'(z_0, \mathrm{R})$ comporte un nombre **fini non nul** de coefficients $a_n \neq 0$ avec $n < 0$.

Le *résidu* de f au point z_0 est le coefficient a_{-1} ; on le note $\mathrm{Res}(f, z_0)$; on a donc

$$\text{(R)} \qquad \mathrm{Res}(f, z_0) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_r(z_0)} f(z)\, dz$$

pour tout r tel que $0 < r < \mathrm{R}$.

Dans certains cas on dispose de méthodes simples de développement limité pour identifier ce résidu, et alors on disposera en fait d'une méthode pour calculer les intégrales du type (R) : c'est la base du calcul d'intégrale par la *méthode des résidus*.

Supposons par exemple que $f(z) = \mathrm{P}(z)/\mathrm{Q}(z)$, où P, Q sont holomorphes au voisinage de z_0 et $\mathrm{Q}(z) = (z - z_0)\mathrm{R}(z)$ admet un zéro simple au point z_0, c'est à dire $\mathrm{R}(z_0) \neq 0$. Puisque $\mathrm{Q}'(z) = \mathrm{R}(z) + (z - z_0)\mathrm{R}'(z)$, on a $\mathrm{R}(z_0) = \mathrm{Q}'(z_0)$. Ensuite le quotient $\mathrm{P}(z)/\mathrm{R}(z)$ est holomorphe au voisinage de z_0, donc développable en série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n(z - z_0)^n$, et la formule

$$f(z) = \frac{1}{z - z_0} \frac{\mathrm{P}(z)}{\mathrm{R}(z)} = \frac{b_0}{z - z_0} + \sum_{n=0}^{+\infty} b_{n+1}(z - z_0)^n$$

montre que $a_{-1} = b_0 = \mathrm{P}(0)/\mathrm{R}(0)$, c'est à dire

$$\mathrm{Res}(f, z_0) = \frac{\mathrm{P}(z_0)}{\mathrm{Q}'(z_0)}.$$

Définition. Soient Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ et A un ensemble discret dans Ω (pour chaque $a \in \mathrm{A}$, il existe $r > 0$ tel que $\mathrm{A} \cap \mathrm{B}(a, r) = \{a\}$) ; on dit que f est *méromorphe* dans Ω si elle est holomorphe dans $\Omega \setminus \mathrm{A}$ et si chaque point de A est un pôle pour f.

Théorème : théorème de Liouville. *On suppose que f est une fonction entière, c'est à dire une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$.*

– *Si f tend vers 0 à l'infini, f est nulle.*

– *Si f est bornée sur $\mathbb{C}$, alors f est constante.*

– *Si $f(z) = \mathrm{O}(|z|^m)$ lorsque $|z| \to +\infty$, avec $m \geq 0$, alors f est un polynôme de degré $\leq m$.*

Démonstration. Prouvons la dernière variante. L'hypothèse implique qu'il existe C tel que $\mathrm{M}_r(f) \leq \mathrm{C}\, r^m$ pour $r \geq 1$. D'après les inégalités de Cauchy, on a $|a_n| \leq \mathrm{C}\, r^{m-n}$ pour les coefficients (a_n) du développement en série entière de f, quand $r \geq 1$. Lorsque $n > m$, on en déduit $a_n = 0$ en faisant tendre r vers $+\infty$. Le développement en série de f se limite donc à un polynôme de degré $\leq m$.

Corollaire : théorème de D'Alembert. *Tout polynôme* P *de degré* ≥ 1 *à coefficients complexes admet au moins une racine dans* $\mathbb{C}$.

Démonstration : sinon, la fonction $z \to 1/\mathrm{P}(z)$ serait holomorphe sur $\mathbb{C}$, tendrait vers 0 à l'infini mais ne serait pas nulle, ce qui contredirait le théorème de Liouville.

Variante de Liouville avec $\operatorname{Re} f$

En utilisant la partie réelle de f on obtient une variante des inégalités de Cauchy

$$\text{(V)} \qquad \forall n \geq 1, \quad |a_n| \leq \sqrt{2}\, \frac{\mathrm{M}_r(\operatorname{Re} f)}{r^n}.$$

On obtient alors avec les mêmes raisonnements la variante suivante du théorème de Liouville.

Supposons f *entière.*

– *Si* $\operatorname{Re} f$ *tend vers* 0 *à l'infini,* f *est nulle.*

– *Si* $\operatorname{Re} f$ *est bornée sur* $\mathbb{C}$, *alors* f *est constante.*

– *Si* $\operatorname{Re} f(z) = \mathrm{O}(|z|^m)$ *lorsque* $|z| \to +\infty$, *avec* $m \geq 0$, *alors* f *est un polynôme de degré* $\leq m$.

Démontrons les inégalités (V). Ecrivons $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$, puis $a_n = \alpha_n + i\beta_n$, avec $\alpha_n, \beta_n \in \mathbb{R}$. Pour z de module r écrivons $z = r\,\mathrm{e}^{i\theta}$, puis $z^n = r^n\big(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)\big)$; alors $\operatorname{Re}(a_n z^n) = r^n(\alpha_n \cos(n\theta) - \beta_n \sin(n\theta))$, donc par orthogonalité dans $\mathrm{L}_2(0, 2\pi)$ des fonctions sinus et cosinus

$$\mathrm{M}_r(\operatorname{Re} f)^2 \geq \int_0^{2\pi} |\operatorname{Re} f(r\,\mathrm{e}^{i\theta})|^2\, \frac{d\theta}{2\pi} = |\alpha_0|^2 + \sum_{n=1}^{+\infty} r^{2n} \Big(\frac{|\alpha_n|^2 + |\beta_n|^2}{2}\Big).$$

Pour tout $n \geq 1$ on a donc $r^{2n}\, |a_n|^2 \leq 2\, \mathrm{M}_r(\operatorname{Re} f)^2$.

11.2. Théorème de Morera et applications

Du cercle d'implications qui mène de fonction holomorphe à fonction analytique, on gardera le théorème de Morera, qui est bien commode pour vérifier que l'holomorphie est préservée dans certaines intégrales dépendant d'un paramètre, ainsi que par certaines limites de suites de fonctions.

Théorème. *Soit* f *une fonction continue dans un ouvert* Ω *; si on a*

$$\int_{\partial \mathrm{T}} f(z)\, dz = 0$$

pour tout triangle T *contenu dans* Ω, *alors* f *est holomorphe dans* Ω.

Dans l'énoncé, "triangle" signifie triangle "plein", et $\partial\mathrm{T}$ est un chemin qui parcourt le bord du triangle T.

Démonstration. Soient $z_0 \in \Omega$ et $\mathrm{C} = \mathrm{B}(z_0, r)$ une boule ouverte contenue dans Ω ; on a vu que la nullité de l'intégrale de f sur les bords des triangles permet de définir une primitive de f si l'ouvert considéré est étoilé ; dans le convexe C la fonction f admet donc une primitive F, qui est par conséquent holomorphe dans C ; la chaîne d'implications vue précédemment donnera que F est développable en série entière dans $\mathrm{B}(z_0, r)$, donc sa dérivée f sera elle aussi dérivable au sens complexe dans C, et en particulier au point z_0, point quelconque de Ω.

Conséquence 1 : intégrales dépendant d'un paramètre

On a un phénomène un peu paradoxal : pour savoir que f est dérivable au sens complexe, il suffit de vérifier que certaines intégrales de f sont nulles. On en déduit un théorème d'holomorphie pour les intégrales dépendant d'un paramètre, qui ne demande pas de contrôle de la "grandeur" de la dérivée, mais seulement de celle de la fonction !

Théorème. *Soit $f(z,t)$ une fonction définie sur $\Omega \times \mathrm{X}$, où Ω est un ouvert non vide de $\mathbb{C}$ et $(\mathrm{X}, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré σ-fini ; on suppose que*

– *pour tout $t \in \mathrm{X}$, la fonction $z \to f(z,t)$ est holomorphe sur Ω,*
– *la fonction $(z,t) \to f(z,t)$ est mesurable sur $(\Omega \times \mathrm{X}, \mathcal{B}_\Omega \otimes \mathcal{A})$,*
– *pour tout compact $\mathrm{K} \subset \Omega$, il existe une fonction μ-intégrable $g_\mathrm{K}(t)$ sur X telle que $|f(z,t)| \leq g_\mathrm{K}(t)$ pour tous $z \in \mathrm{K}$, $t \in \mathrm{X}$.*

Il en résulte que la fonction F définie sur Ω par

$$\mathrm{F}(z) = \int_\mathrm{X} f(z,t)\, d\mu(t)$$

est holomorphe dans Ω.

Démonstration. Il suffit d'appliquer Fubini pour faire passer le théorème de Morera des fonctions $z \to f(z,t)$, $t \in \mathrm{X}$, à la fonction F. Soit T un triangle quelconque contenu dans Ω. Considérons l'intégrale de F sur un segment $[\mathrm{A}, \mathrm{B}]$; on aura

$$\int_{[\mathrm{A},\mathrm{B}]} \mathrm{F}(z)\, dz = \int_0^1 \mathrm{F}((1-s)\mathrm{A} + s\mathrm{B})(\mathrm{B} - \mathrm{A})\, ds =$$

$$\int_0^1 \Big(\int_\mathrm{X} f\big((1-s)\mathrm{A} + s\mathrm{B}, t\big)\, d\mu(t) \Big) (\mathrm{B} - \mathrm{A})\, ds =$$

$$= \int_\mathrm{X} \Big(\int_0^1 f\big((1-s)\mathrm{A} + s\mathrm{B}, t\big)(\mathrm{B} - \mathrm{A})\, ds \Big)\, d\mu(t) = \int_\mathrm{X} \Big(\int_{[\mathrm{A},\mathrm{B}]} f(z,t)\, dz \Big)\, d\mu(t).$$

Justifions l'application du théorème de Fubini : pour le compact $\mathrm{K} = [\mathrm{A}, \mathrm{B}]$ il existe une fonction μ-intégrable g sur X telle que $|f(z,t)| \leq g(t)$ pour $z \in [\mathrm{A}, \mathrm{B}]$ et $t \in \mathrm{X}$. La fonction $(s,t) \to f((1-s)\mathrm{A} + s\mathrm{B}, t)$ est donc intégrable sur $[0,1] \times \mathrm{X}$. En additionnant les trois côtés du triangle T on obtient

$$\int_{\partial \mathrm{T}} \mathrm{F}(z)\, dz = \int_\mathrm{X} \Big(\int_{\partial \mathrm{T}} f(z,t)\, dz \Big)\, d\mu(t) = 0.$$

Par ailleurs la fonction F est continue sur Ω par les théorèmes usuels de continuité d'une intégrale à paramètre. La fonction F est donc holomorphe dans Ω par le théorème de Morera.

Remarque. Le théorème précédent est voisin du théorème I.7 du chapitre IX de Zuily-Queffélec. L'énoncé de ZQ est plus naturel et donne aussi la dérivée de F. Le point clé dans ces questions est le lemme suivant.

Lemme. *On suppose que Ω est un ouvert de $\mathbb{C}$, $\mathrm{K} \subset \Omega$ un compact et r un nombre réel tel que $0 < r < \min\{\mathrm{dist}(z, \Omega^c) : z \in \mathrm{K}\}$. Alors l'ensemble $\mathrm{K}_1 = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{dist}(z, \mathrm{K}) \leq r\}$ est un compact contenu dans Ω, et pour toute fonction $f \in \mathrm{H}(\Omega)$ on a*

$$\max\{|f'(z)| : z \in \mathrm{K}\} \leq \frac{1}{r} \max\{|f(z)| : z \in \mathrm{K}_1\}.$$

Il est alors clair qu'une hypothèse de majoration de f sur tout compact contenu dans Ω implique une majoration de f' sur tout compact contenu dans Ω.

Démonstration. Soit $z_0 \in \mathrm{K}$; on a $\mathrm{R} = \mathrm{dist}(z_0, \Omega^c) > r$, et $f(z)$ est représentable dans $\mathrm{B}(z_0, \mathrm{R})$ par une série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\,(z - z_0)^n$; on a $f'(z_0) = a_1$ et on sait que

$$a_1 = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_r(z_0)} \frac{f(w)}{(w - z_0)^2}\, dw$$

d'où par le paramétrage habituel $w = z_0 + r\,\mathrm{e}^{i\theta}$,

$$|a_1| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{|f(z_0 + r\,\mathrm{e}^{i\theta})|}{r}\, d\theta \leq \frac{1}{r}\, \max\{|f(z)| : z \in \mathrm{K}_1\}$$

puisque $\gamma_r(z_0)^* \subset \mathrm{K}_1$.

Ainsi, dans notre théorème précédent, l'hypothèse de majoration pour $f(z,t)$ passe à la dérivée complexe $\frac{\partial f}{\partial z}(z,t)$, qui sera (en utilisant les notations de l'énoncé du lemme) majorée sur K par la fonction $r^{-1} g_{\mathrm{K}_1}(t)$, et ce travail peut être fait pour tout compact $\mathrm{K} \subset \Omega$. Notre application du théorème de Fubini à un segment $[\mathrm{A}, \mathrm{B}]$ et à la fonction dérivée partielle permet alors de montrer directement que

$$\int_{\mathrm{X}} \frac{\partial f}{\partial z}(z,t)\, d\mu(t)$$

est la dérivée complexe de F.

Conséquence 2 : limites de suites de fonctions holomorphes

Proposition. *Si une suite (f_n) de fonctions holomorphes sur un ouvert Ω de $\mathbb{C}$ tend simplement sur Ω vers une fonction f, et si pour tout compact $\mathrm{K} \subset \Omega$ il existe une constante c_{K} telle que $|f_n(z)| \leq c_{\mathrm{K}}$ pour tout n et tout $z \in \mathrm{K}$, alors $f \in \mathrm{H}(\Omega)$.*

Il résulte en fait de l'hypothèse que la suite (f_n) converge vers f uniformément sur tout compact $\mathrm{K} \subset \Omega$.

Démonstration. On va d'abord montrer que la suite (f_n) converge uniformément vers f sur toute boule $\mathrm{B}(z_0, r)$ telle que $\overline{\mathrm{B}(z_0, 2r)} \subset \Omega$. Soit $z \in \mathrm{B}(z_0, r)$; d'après la formule intégrale de Cauchy,

$$f_n(z) - f_m(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_{2r}(z_0)} \frac{f_n(w) - f_m(w)}{w - z}\, dw.$$

En posant $w = z_0 + 2r\,\mathrm{e}^{i\theta}$ on obtient, en notant que $|w - z| \geq r$ lorsque $w \in \gamma^*_{2r(z_0)}$

$$|f_n(z) - f_m(z)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\big|(f_n - f_m)(z_0 + 2r\,\mathrm{e}^{i\theta})\big|}{r}\, 2r\, d\theta.$$

Sur le compact $\mathrm{K} = \gamma_{2r}(z_0)^*$ la suite $(f_n - f_m)$ tend vers 0 en étant dominée par $2c_{\mathrm{K}}$: d'après le théorème de convergence dominée de Lebesgue, il en résulte que

$$\varepsilon_{n,m} := \int_0^{2\pi} \big|(f_n - f_m)(z_0 + 2r\,\mathrm{e}^{i\theta})\big|\, \frac{d\theta}{2\pi}$$

tend vers 0 lorsque m, n tendent vers $+\infty$. On en déduit

$$|f_n(z) - f_m(z)| \leq 2\,\varepsilon_{m,n}$$

pour tout $z \in \mathrm{B}(z_0, r)$. La suite (f_n) est donc de Cauchy uniforme dans $\mathrm{B}(z_0, r)$; elle converge uniformément vers f dans $\mathrm{B}(z_0, r)$ puisqu'on avait supposé la convergence simple de $(f_n(z))$ vers $f(z)$ en tout point z de Ω.

Si $\mathrm{K} \subset \Omega$ est compact, on peut le recouvrir par un nombre fini de boules $\mathrm{B}(z_i, r_i)$ telles que $\overline{\mathrm{B}(z_i, 2r_i)} \subset \Omega$: puisque f_n converge uniformément vers f sur chaque boule $\mathrm{B}(z_i, r_i)$ on en déduit la convergence uniforme sur K.

Une fois la convergence uniforme sur tout compact démontrée, on peut par exemple faire passer le théorème de Morera à la limite ; on pourrait aussi tout aussi simplement faire passer la formule de Cauchy pour f_n à la limite.

Exercice 11.1. Soient U le disque unité ouvert et H(U) l'espace des fonctions holomorphes dans U ; pour tout $\alpha > 0$ on introduit l'espace E_α des fonctions complexes f mesurables dans le disque unité telles que

$$\|f\|^2_{\mathrm{E}_\alpha} = \int_{\mathrm{U}} |f(x+iy)|^2 (x^2+y^2)^\alpha \, dx\, dy < +\infty.$$

Montrer que pour tout compact $\mathrm{K} \subset \mathrm{U}$, il existe une constante $c_{\mathrm{K}} = c_{\mathrm{K},\alpha}$ telle que

$$\forall f \in \mathrm{H(U)} \cap \mathrm{E}_\alpha,\ \forall z \in \mathrm{K}, \quad |f(z)| \leq c_{\mathrm{K}}\, \|f\|_{\mathrm{E}_\alpha}$$

(on pourra appliquer la formule de Cauchy à une famille de cercles centrés en 0 de rayons r tels que $r_1 < r < r_2 < 1$, où r_1 est choisi de façon que $\mathrm{K} \subset \mathrm{D}(0, r_1)$, et intégrer par rapport au paramètre r).

Montrer que $\mathrm{H(U)} \cap \mathrm{E}_\alpha$ est un sous-espace vectoriel fermé de E_α.

Montrer que l'appartenance de f à $\mathrm{H(U)} \cap \mathrm{E}_\alpha$ peut se caractériser au moyen des coefficients de Taylor de f en 0. Montrer que $\mathrm{H(U)} \cap \mathrm{E}_\alpha$ est l'adhérence dans E_α de l'ensemble des polynômes.

11.3. La notion d'indice d'un chemin fermé

On trouvera, par exemple dans Rudin, théorème 10.10, le résultat suivant.

Théorème. *Soit γ un chemin fermé ; pour tout $z \notin \gamma^*$, on considère l'intégrale*

$$\mathrm{Ind}_\gamma(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_\gamma \frac{dw}{w-z}\,.$$

La fonction Ind_γ, définie hors de γ^*, est à valeurs dans $\mathbb{Z}$, constante sur chaque composante connexe de $\mathbb{C} \setminus \gamma^*$, et nulle sur la composante non bornée de $\mathbb{C} \setminus \gamma^*$.

Démonstration. Montrons pour commencer que l'indice est entier. On se ramène à $z = 0$ par translation. Supposons que γ soit une courbe C^1, définie sur un intervalle $[\alpha, \beta]$, et ne passant pas par 0. On va montrer que la fonction g définie par

$$g(t) = \gamma(t)^{-1} \exp\Big(\int_\alpha^t \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s)}\, ds\Big)$$

est constante sur $[\alpha, \beta]$, en calculant sa dérivée. Posons $h(t) = \int_\alpha^t \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s)}\, ds$. On voit que $h'(t) = \gamma'(t)/\gamma(t)$, donc

$$g'(t) = -\gamma'(t)\gamma(t)^{-2}\, \mathrm{e}^{h(t)} + \gamma(t)^{-1}\, \mathrm{e}^{h(t)}\, h'(t) = 0.$$

Pour un chemin C^1 par morceaux, on procède en découpant en un nombre fini de morceaux C^1. On a finalement $g(\beta) = \gamma(\beta)^{-1}\,e^{h(\beta)} = g(\alpha) = \gamma(\alpha)^{-1}\,e^0 = \gamma(\alpha)^{-1}$. Lorsque γ est un chemin fermé ne passant pas par 0, il résulte de tout ceci l'égalité $e^{h(\beta)} = \gamma(\beta)/\gamma(\alpha) = 1$, c'est à dire $\exp(\int_\gamma dw/w) = 1$, ce qui implique que

$$\int_\gamma \frac{dw}{w} \in 2i\pi\,\mathbb{Z}.$$

Par translation, on voit que

$$\mathrm{N}(z) = \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{dw}{w-z}$$

est un entier pour tout $z \notin \gamma^*$. Par ailleurs, on montre facilement que $z \to \mathrm{N}(z)$ est continue sur $\mathbb{C} \setminus \gamma^*$ (continuité d'une intégrale dépendant d'un paramètre) ; il en résulte que $\mathrm{N}(z)$ est localement constant, donc constant sur les composantes connexes du complémentaire de γ^*. Comme γ^* est compact, il est contenu dans une boule $\mathrm{B}(0,\mathrm{R})$, donc le complémentaire de γ^* contient l'ouvert connexe $\mathrm{B}(0,\mathrm{R})^c$ qui est un voisinage de l'infini, et cet ouvert est contenu dans **la** composante connexe de l'infini de l'ouvert $\mathbb{C}\setminus\gamma^*$. On voit facilement que $\mathrm{N}(z)$ tend vers 0 à l'infini (majorer le module de $(w-z)^{-1}$ par $(|z|-\mathrm{R})^{-1}$, et en déduire $|\mathrm{N}(z)| \le (2\pi)^{-1}\,\ell(\gamma)\,(|z|-\mathrm{R})^{-1}$), donc $\mathrm{N}(z)$ est en fait nul pour $|z|$ grand, donc nul sur la composante de l'infini de $\mathbb{C} \setminus \gamma^*$ (qui est **la** composante connexe non bornée, ici).

Indice et Brouwer dans $\mathbb{R}^2$

On assimile $\mathbb{R}^2$ au plan complexe $\mathbb{C}$. Désignons par D le disque unité fermé du plan complexe. Le théorème de Brouwer en dimension deux affirme que

toute fonction continue de D *dans* D *possède un point fixe.*

Soit φ une fonction continue de D dans D ; on commence par la prolonger en fonction à support compact définie sur $\mathbb{C}$ tout entier, de la façon suivante : soit θ une fonction réelle, continue à support compact, définie sur $\mathbb{C}$, telle que $0 \le |z|\,\theta(z) \le 1$ partout et $\theta(z) = 1$ pour tout $z \in \mathrm{D}$. Posons $\psi(z) = \theta(z)\,\varphi(\theta(z)\,z)$ pour tout $z \in \mathbb{C}$. Alors ψ est continue sur $\mathbb{C}$, à support compact et à valeurs dans D. De plus on a $\psi(z) = \varphi(z)$ quand $z \in \mathrm{D}$. Il est clair que $\psi(z) \ne z$ pour $|z| > 1$ puisque dans ce cas $|\psi(z)| \le 1 < |z|$. Il est ainsi clair que φ admet un point fixe si et seulement si ψ en admet un.

Dans le cas contraire, la fonction $z \to z - \psi(z)$ ne s'annulerait pas sur $\mathbb{C}$; comme $|z-\psi(z)| \ge |z|-1$ tend vers l'infini à l'infini, le minimum du module existe sur $\mathbb{C}$ et est donc un nombre $\delta > 0$. Par convolution avec une fonction réelle $k \ge 0$, de classe C^∞ à support compact et d'intégrale un, on pourra obtenir $\psi_1 = k * \psi$ de classe C^∞ à support compact telle que $\|\psi_1 - \psi\|_\infty < \delta/2$, ce qui entraîne que $|z - \psi_1(z)| \ge \delta/2$ pour tout $z \in \mathbb{C}$.

Posons $g(z) = z - \psi_1(z)$; cette fonction est de classe C^1 sur $\mathbb{C}$, ne s'annule jamais, et on a $g(z) = z$ lorsque $|z| \ge \mathrm{R}$ puisque ψ_1 est à support compact. On va montrer qu'une telle fonction g ne peut pas exister.

Pour $r \in [0,\mathrm{R}]$ considérons le chemin fermé χ_r paramétré par $\theta \in [0,2\pi]$ et défini par $\chi_r(\theta) = g(r\,e^{i\theta})$. Puisque g ne s'annule pas, on a une famille de chemins C^1 qui ne passent pas par 0, ce qui permet de considérer les indices

$$\mathrm{N}(r) = \mathrm{Ind}_{\chi_r}(0) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\chi_r} \frac{dz}{z} \in \mathbb{Z}.$$

On montrera plus loin que $r \to \mathrm{N}(r)$ est continue, par un argument usuel d'intégrale dépendant d'un paramètre. Puisque le résultat est entier, il doit être constant sur $[0, \mathrm{R}]$. Mais on a $g(z) = z$ lorsque $|z| = \mathrm{R}$, donc χ_{R} est le parcours du cercle de rayon R,

$$\mathrm{N}(\mathrm{R}) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_{\mathrm{R}}} \frac{dz}{z} = 1$$

alors que $\mathrm{N}(0) = 0$ (le chemin χ_0 est de longueur nulle). Cette contradiction montre que l'hypothèse que φ soit sans point fixe est absurde.

Ecrivons le paramétrage qui nous convaincra de la continuité de $r \to \mathrm{N}(r)$. Posons $\mathrm{G}(x, y) = g(x + iy)$ pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$; cette fonction G à valeurs complexes définie sur $\mathbb{R}^2$ est de classe C^1 puisque g est de classe C^1. Pour r fixé dans $[0, \mathrm{R}]$ on écrit $\chi_r(\theta) = g(r\,\mathrm{e}^{i\theta}) = \mathrm{G}(r\cos(\theta), r\sin(\theta))$, et on a

$$\chi_r'(\theta) = \Big(\frac{\partial \mathrm{G}}{\partial x}(\mathrm{M}_\theta)(-r\sin\theta) + \frac{\partial \mathrm{G}}{\partial y}(\mathrm{M}_\theta)(r\cos\theta)\Big) =: h(r, \theta)$$

où $\mathrm{M}_\theta = (r\cos\theta, r\sin\theta)$. La fonction h est un peu désagréable, mais il est clair qu'elle est continue en (r, θ) puisque G est de classe C^1. On a maintenant

$$\mathrm{N}(r) = \frac{1}{2i\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\chi_r'(\theta)}{\chi_r(\theta)}\, d\theta = \frac{1}{2i\pi} \int_0^{2\pi} \frac{h(r, \theta)}{g(r\,\mathrm{e}^{i\theta})}\, d\theta$$

qui est continue en r d'après les théorème usuels sur la continuité d'intégrales dépendant d'un paramètre.

Théorème de Cauchy global

D'après Rudin, théorème 10.35.

Un *cycle* Γ est une combinaison formelle finie à coefficients entiers relatifs de chemins fermés (γ_i) dans $\mathbb{C}$, de la forme $\Gamma = \sum_{i=1}^n c_i\gamma_i$; on pose

$$\int_\Gamma = \sum_{i=1}^n c_i \int_{\gamma_i}$$

et $\Gamma^* = \cup_i \gamma_i^*$. Si $z \notin \Gamma^*$ on peut calculer *l'indice de z par rapport au cycle* Γ

$$\mathrm{Ind}_\Gamma(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_\Gamma \frac{dw}{w - z} = \sum_{i=1}^n c_i\, \mathrm{Ind}_{\gamma_i}(z).$$

Théorème. *On suppose que Γ est un cycle contenu dans un ouvert Ω de $\mathbb{C}$, et que*

$$\mathrm{Ind}_\Gamma(z) = 0$$

pour tout $z \notin \Omega$. Pour toute $f \in \mathrm{H}(\Omega)$, on a

$$\forall z \in \Omega \setminus \Gamma^*, \quad \mathrm{Ind}_\Gamma(z)\, f(z) = \int_\Gamma \frac{f(t)}{t - z}\, dt.$$

De plus, $\int_\Gamma f(t)\, dt = 0$.

Démonstration. On pose pour $z, t \in \Omega$

$$g(z, t) = \frac{f(t) - f(z)}{t - z}$$

lorsque $z \neq t$ et $g(z,t) = g'(t)$ quand $z = t$. Pour $t \in \Omega$ fixé, la fonction $z \in \Omega \to g(z,t)$ présente une singularité artificielle au point t, donc elle est holomorphe dans Ω. Le théorème sur l'holomorphie d'intégrales à paramètres implique que

$$h(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_\Gamma \frac{f(t) - f(z)}{t - z}\, dt$$

est holomorphe dans Ω (paramétrer chaque intégrale sur les chemins fermés γ_i qui forment Γ, pour ramener à une intégrale sur un espace mesuré fini $\mathrm{X} = [\alpha_i, \beta_i]$ muni de la mesure de Lebesgue). Posons par ailleurs

$$\Omega_1 = \{z \in \mathbb{C} \setminus \Gamma^* : \mathrm{Ind}_\Gamma(z) = 0\}.$$

Par hypothèse, Ω_1 contient le complémentaire de Ω, et c'est un ouvert d'après la continuité de l'indice ; l'ouvert Ω_1 est aussi un voisinage de l'infini d'après les propriétés de l'indice. On pose pour tout $z \in \Omega_1$

$$h_1(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_\Gamma \frac{f(t)}{t - z}\, dt\,;$$

on montre facilement que h_1 est holomorphe dans Ω_1. De plus, lorsque $z \in \Omega_1 \cap \Omega$, on a

$$h_1(z) - h(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_\Gamma \frac{f(z)}{t - z}\, dt = f(z)\ \mathrm{Ind}_\Gamma(z) = 0$$

par définition de Ω_1. Ceci permet de définir une fonction holomorphe k sur $\Omega_1 \cup \Omega = \mathbb{C}$ en posant $k(z) = h(z)$ si $z \in \Omega$ et $k(z) = h_1(z)$ si $z \in \Omega_1$. La fonction k est entière, mais la forme de h_1 montre que $k(z) = h_1(z)$ tend vers 0 lorsque $|z|$ tend vers l'infini. D'après Liouville, on a $k = 0$, donc $h = 0$, ce qui donne le premier résultat voulu.

Pour le deuxième, on suppose que $g \in \mathrm{H}(\Omega)$, on prend $a \in \Omega \setminus \Gamma^*$ et on pose $f(z) = (z - a)\, g(z)$. Puisque f est nulle au point a, l'application de la formule précédente à cette fonction f et au point $z = a \in \Omega \setminus \Gamma^*$ donne le résultat voulu, $\int_\Gamma g(t)\, dt = 0$.