Prépa. Agrég écrit d'Analyse, 2001–2002, énoncé d'exercice.

Exercice 5.1.

a. On considère la fonction croissante continue φ définie sur $[0,+\infty[$ par $\varphi(t)=t$ si $0\leq t\leq 1$ et $\varphi(t)=1+\ln(t)$ si $t\geq 1$. Calculer $\Phi(x)=\int_0^x \varphi(t)\,dt$ pour $x\geq 0$.

b. On considère l'ensemble X des (classes de) fonctions mesurables f sur $[0,1]$ telles que

$$\int_0^1 |f(t)|\,\ln_+(|f(t)|)\,dt<+\infty$$

où on a posé $\ln_+(x)=\ln(x)$ pour $x\geq 1$ et $\ln_+(x)=0$ pour $x\leq 1$.

Montrer que X est un espace vectoriel, contenu dans $\mathrm{L}_1(0,1)$. Montrer que $f\in \mathrm{X}$ si et seulement s'il existe $\lambda>0$ tel que

$$\int_0^1 \Phi\Big(\frac{|f(t)|}{\lambda}\Big)\,dt\leq \Phi(1).$$

Montrer que

$$\mathrm{N}(f)=\inf\{\lambda>0:\int_0^1 \Phi\Big(\frac{|f(t)|}{\lambda}\Big)\,dt\leq \Phi(1)\}$$

définit une norme sur X qui le rend complet.

c. Montrer que si $f\in \mathrm{X}$ et si g est une fonction mesurable sur $[0,1]$ telle que

$$\int_0^1 \mathrm{e}^{\varepsilon|g(t)|}\,dt<+\infty$$

pour un $\varepsilon>0$, la fonction produit fg est intégrable sur $[0,1]$.

d. Montrer que $\mathrm{L}_2(0,1)\subset \mathrm{X}$, et que l'image de $\mathrm{L}_2(0,1)$ est dense dans X. En déduire que toute forme linéaire ℓ continue sur X peut être représentée par une fonction g sous la forme

$$\forall f\in \mathrm{X},\quad \ell(f)=\int_0^1 f(t)g(t)\,dt.$$