Prépa. Agrég écrit d'Analyse, 2001–2002, corrigé d'exercice.

Exercice 5.1.

a. On considère la fonction croissante continue φ définie sur $[0,+\infty[$ par $\varphi(t) = t$ si $0 \le t \le 1$ et $\varphi(t) = 1 + \ln(t)$ si $t \ge 1$. Calculer $\Phi(x) = \int_0^x \varphi(t)\,dt$ pour $x \ge 0$.

On calcule immédiatement $\Phi(x) = x^2/2$ lorsque $0 \le x \le 1$, et pour $x > 1$,

$$\Phi(x) = \Phi(1) + \int_1^x (1 + \ln(t))\,dt = \frac{1}{2} + \Big[t \ln(t)\Big]_1^x = \frac{1}{2} + x\ln(x).$$

On voit que φ est croissante, donc Φ est convexe sur $[0,+\infty[$; on peut prolonger Φ au plan complexe en posant $\Phi(z) = \Phi(|z|)$ pour tout $z \in \mathbb{C}$; il est immédiat de vérifier que cette fonction est convexe sur $\mathbb{C}$ (composition du module, fonction convexe ≥ 0 sur $\mathbb{C}$, avec la fonction convexe *croissante* Φ sur $[0,+\infty[$).

Il résulte encore de la convexité et de la relation $\Phi(0) = 0$ que pour $0 \le \alpha \le 1$, on a

$$(*) \qquad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \Phi(\alpha\, x) \le \alpha\, \Phi(x).$$

On voit de plus que φ est concave sur $[0,+\infty[$, en calculant sa dérivée par exemple ; on en déduit (compte-tenu de $\varphi(0) = 0$) que $\varphi(\alpha t) \ge \alpha\, \varphi(t)$ pour $t \ge 0$, ce qui implique en intégrant que si $0 \le \alpha \le 1$, on a

$$(**) \qquad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \Phi(\alpha\, x) \ge \alpha^2 \Phi(x).$$

b. On considère l'ensemble X *des (classes de) fonctions mesurables f sur $[0,1]$ telles que*

$$\int_0^1 |f(t)|\, \ln_+(|f(t)|)\,dt < +\infty$$

où on a posé $\ln_+(x) = \ln(x)$ pour $x \ge 1$ et $\ln_+(x) = 0$ pour $x \le 1$.

Montrer que X *est un espace vectoriel, contenu dans* $\mathrm{L}_1(0,1)$. *Montrer que $f \in \mathrm{X}$ si et seulement s'il existe $\lambda > 0$ tel que*

$$\int_0^1 \Phi\Big(\frac{|f(t)|}{\lambda}\Big)\,dt \le \Phi(1).$$

Montrer que

$$\mathrm{N}(f) = \inf\{\lambda > 0 : \int_0^1 \Phi\Big(\frac{|f(t)|}{\lambda}\Big)\,dt \le \Phi(1)\}$$

définit une norme sur X *qui le rend complet.*

Pour toute fonction f mesurable sur $[0,1]$, finie presque partout, posons

$$\mathrm{M}(f) = \int_0^1 \Phi(f(t))\,dt,$$

valeur $+\infty$ admise ; il résulte des propriétés $(*)$ et $(**)$ que pour tout $\alpha \in [0,1]$, on a

$$(1) \qquad \alpha^2\, \mathrm{M}(f) \le \mathrm{M}(\alpha\, f) \le \alpha\, \mathrm{M}(f)$$

(toujours avec la valeur $+\infty$ admise). On déduit facilement de la convexité de Φ la convexité de la fonction M : si f, g sont finies presque partout et si $0 \le t \le 1$, on a

$$\mathrm{M}\big((1-t)f + tg\big) \le (1-t)\,\mathrm{M}(f) + t\,\mathrm{M}(g),$$

toujours avec la valeur $+\infty$ admise. Il est utile de remarquer que l'appartenance d'une fonction f à l'ensemble X équivaut à la condition $\mathrm{M}(f) < +\infty$. En effet, on a pour tout nombre réel $u \ge 0$

$$u \ln_+(u) \le \Phi(u) \le \frac{1}{2} + \bigl(u \ln_+(u)\bigr)$$

donc

$$\int_0^1 \bigl(|f(t)| \ln_+(|f(t)|)\bigr)\, dt \le \int_0^1 \Phi(f(t))\, dt \le \frac{1}{2} + \int_0^1 \bigl(|f(t)| + \ln_+(|f(t)|)\bigr)\, dt.$$

Il résulte alors des deux inégalités (1) que si $f \in \mathrm{X}$, alors $\lambda f \in \mathrm{X}$ pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$: on utilise (1)-droite avec $\alpha = |\lambda|$ lorsque $|\lambda| \le 1$ et (1)-gauche avec $\alpha = |\lambda|^{-1}$ lorsque $|\lambda| > 1$. Si $f_1, f_2 \in \mathrm{X}$, on utilise la convexité de M pour déduire que

$$\mathrm{M}\Bigl(\frac{f_1 + f_2}{2}\Bigr) \le \frac{1}{2}\,\mathrm{M}(f_1) + \frac{1}{2}\,\mathrm{M}(f_2) < +\infty,$$

donc $(f_1 + f_2)/2 \in \mathrm{X}$, puis $f_1 + f_2 \in \mathrm{X}$. On a ainsi montré que X est un espace vectoriel.

Si $2\,\mathrm{M}(f) > 1$, si on pose $\alpha = (2\mathrm{M}(f))^{-1}$ et qu'on applique (1), on trouve que

$$\mathrm{M}\Bigl(\frac{f}{2\,\mathrm{M}(f)}\Bigr) \le \frac{1}{2\mathrm{M}(f)}\,\mathrm{M}(f) = \frac{1}{2} = \Phi(1),$$

ce qui prouve qu'il existe toujours des $\lambda > 0$ tels que $\int_0^1 \Phi(f(t)/\lambda)\, dt \le \Phi(1)$, et montre que $\mathrm{N}(f) \le 2\mathrm{M}(f)$ pour toute $f \in \mathrm{X}$ telle que $2\,\mathrm{M}(f) > 1$. Si $\mathrm{M}(f) \le 1/2$, on a évidemment $\mathrm{N}(f) \le 1$ en prenant $\lambda = 1$ dans la définition de $\mathrm{N}(f)$. Inversement, si $\mathrm{N}(f) \le 1$, il existe pour tout $c > 1$ un $\lambda < c$ tel que $\mathrm{M}(f/\lambda) \le 1/2$; on a aussi $\mathrm{M}(f/c) \le 1/2$ puisque Φ est croissante, et on sait que

$$\frac{1}{c^2}\,\mathrm{M}(f) = \frac{1}{c^2}\,\mathrm{M}\Bigl(c\,\frac{f}{c}\Bigr) \le \mathrm{M}\Bigl(\frac{f}{c}\Bigr) \le \frac{1}{2}$$

d'après (1), donc $\mathrm{M}(f) \le 1/2$ en faisant tendre c vers 1. On a ainsi montré que

$$\{f \in \mathrm{X} : \mathrm{N}(f) \le 1\} = \{f \in \mathrm{X} : \mathrm{M}(f) \le \Phi(1) = 1/2\}.$$

Montrons que N est une norme sur X. Il est facile de vérifier que $\mathrm{N}(\lambda f) = |\lambda|\,\mathrm{N}(f)$. Si $\mathrm{N}(f) = 0$, on a $\int_0^1 \Phi(\mathrm{K}\,|f(t)|)\, dt \le 1/2$ pour tout entier K, donc

$$\lambda\bigl(\{t \in [0,1] : |f(t)| \ge \varepsilon\}\bigr) \le \frac{1}{2\,\Phi(\mathrm{K}\varepsilon)}$$

pour tout $\varepsilon > 0$ par l'inégalité de Markov, donc $\lambda\bigl(\{t : |f(t)| \ge \varepsilon\}\bigr) = 0$ (faire tendre K vers l'infini) et f est nulle presque-partout, c'est à dire $f = 0_{\mathrm{X}}$. Il suffit de voir ensuite que l'ensemble des f telles que $\mathrm{N}(f) \le 1$ est convexe. Si f_1, f_2 vérifient $\mathrm{N}(f_i) \le 1$, on a $\mathrm{M}(f_i) \le 1/2$ d'après la discussion précédente, puis $\mathrm{M}((1-t)f_1 + tf_2) \le 1/2$ par la convexité de M.

Un vecteur $f \in \mathrm{X}$ est de norme un si et seulement si $\mathrm{M}(f) = 1/2$; on a donc $\mathrm{M}(f/\mathrm{N}(f)) = 1/2$ pour toute fonction f non nulle de X. En utilisant (1) on voit que si $\mathrm{N}(f) < 1$, alors $\mathrm{N}(f) \ge 2\,\mathrm{M}(f) \ge \mathrm{N}(f)^2$. On voit donc qu'une suite (f_n) tend vers 0 dans X si et seulement si $\mathrm{M}(f_n) \to 0$. Cette condition est un peu plus maniable.

Soit $f \in \mathrm{X}$; on voit que $t \le \Phi(t)+1/2$ pour tout $t \ge 0$ (étudier la fonction différence), donc $\int_0^1 |f(t)|\,dt < +\infty$; en utilisant l'inégalité de Jensen on trouve

$$\text{(J)} \qquad \Phi\Bigl(\int_0^1 |f(t)|\,dt\Bigr) \le \int_0^1 \Phi(f(t))\,dt.$$

Si $\mathrm{N}(f) \le 1$, on a $\mathrm{M}(f) \le 1/2$ et la relation (J) montre que $\Phi\bigl(\|f\|_1\bigr) \le 1/2$, c'est à dire $\|f\|_1 \le 1$. On a donc $\|f\|_1 \le \mathrm{N}(f)$ pour toute $f \in \mathrm{X}$: l'injection de X dans $\mathrm{L}_1(0,1)$ est de norme ≤ 1, en fait égale à 1 (tester sur la fonction constante $f = 1$).

Montrons que X est complet. Soit (f_n) une suite de Cauchy dans X ; on peut supposer que $\mathrm{N}(f_n) \le 1$ pour tout n, donc $\mathrm{M}(f_n) \le 1/2$. Il résulte de ce qui précède que (f_n) est une suite de Cauchy pour la norme de L_1, donc converge dans L_1 vers une fonction $f \in \mathrm{L}_1$. On peut trouver une sous-suite (f_{n_k}) qui converge presque partout vers f, et $(\Phi(f_{n_k}))$ est alors une suite (en k) de fonctions mesurables positives qui converge presque partout vers $\Phi(f(t))$. D'après Fatou,

$$\int_0^1 \Phi(f(t))\,dt \le \liminf_k \int_0^1 \Phi(f_{n_k}(t))\,dt \le \frac{1}{2}.$$

On a maintenant $f \in \mathrm{X}$, il reste à voir que $\mathrm{N}(f_n - f)$ tend vers 0. Pour m, n assez grands on a $\mathrm{N}(f_m - f_n) < 1$, donc $\mathrm{M}(f_m - f_n) \le \mathrm{N}(f_m - f_n) \le \varepsilon$ quand $m, n \ge \mathrm{N}(\varepsilon)$. On réapplique Fatou avec m fixé et $n \to +\infty$ pour obtenir $\mathrm{M}(f_m - f) \le \liminf_k \mathrm{M}(f_m - f_{n_k}) \le \varepsilon$, pour tout $m \ge \mathrm{N}(\varepsilon)$. On a ainsi montré que (f_m) tend vers f pour la norme de X, et X est donc complet.

c. Montrer que si $f \in \mathrm{X}$ et si g est une fonction mesurable sur $[0,1]$ telle que

$$\int_0^1 \mathrm{e}^{\varepsilon |g(t)|}\,dt < +\infty$$

pour un $\varepsilon > 0$, la fonction produit fg est intégrable sur $[0,1]$.

Il serait peut-être temps de calculer la fonction conjuguée (de Young) Ψ de la fonction convexe Φ. Commençons par la fonction inverse de φ, que nous appelons ψ ; il est clair que $\psi(u) = u$ si $0 \le u \le 1$; si $u = \varphi(t) = 1 + \ln(t)$ avec $t > 1$, alors $t = \psi(u) = \mathrm{e}^{u-1}$. Il en résulte que $\Psi(y) = y^2/2$ quand $0 \le y \le 1$, et si $y > 1$ on a

$$\Psi(y) = \Psi(1) + \int_1^y \psi(u)\,du = \frac{1}{2} + \frac{\mathrm{e}^y - \mathrm{e}}{\mathrm{e}} = \mathrm{e}^{y-1} - \frac{1}{2}.$$

Il est facile de voir que $y \to \Psi(|y|)$ est la conjuguée de $x \to \Phi(x)$. Comme on l'a fait pour Φ, il est commode de poser $\Psi(z) = \Psi(|z|)$ pour tout $z \in \mathbb{C}$.

Supposons $\int_0^1 \mathrm{e}^{\varepsilon|g(t)|}\,dt < +\infty$ pour un $\varepsilon > 0$, et soit $f \in \mathrm{X}$; on sait que

$$\mathrm{M}(\mathrm{C}\,f) = \int_0^1 \Phi(\mathrm{C}f(t))\,dt < +\infty$$

pour tout C réel ; écrivons l'inégalité de Young $xy \le \Phi(x) + \Psi(y)$ pour les nombres $x = |f(t)|/\varepsilon$ et $y = \varepsilon\,|g(t)|$; on obtient en intégrant le produit

$$\int_0^1 \frac{|f(t)|}{\varepsilon}\,\varepsilon|g(t)|\,dt \le \int_0^1 \Phi\Bigl(\frac{f(t)}{\varepsilon}\Bigr)\,dt + \frac{1}{2} + \int_{\{|\varepsilon g| > 1\}} \mathrm{e}^{\varepsilon|g(t)|-1}\,dt < +\infty.$$

Si on suppose que $\mathrm{N}(f) \leq 1$, on pourra majorer (avec l'inégalité (1)-gauche)

$$\Bigl|\int_0^1 f(t)g(t)\,dt\Bigr| \leq \frac{\varepsilon^{-2}}{2} + \frac{1}{2} + \int_0^1 \mathrm{e}^{\varepsilon|g(t)|-1}\,dt$$

ce qui montre que g définit une forme linéaire continue ℓ_g sur X.

d. Montrer que $\mathrm{L}_2(0,1) \subset \mathrm{X}$, *et que l'image de* $\mathrm{L}_2(0,1)$ *est dense dans* X. *En déduire que toute forme linéaire* ℓ *continue sur* X *peut être représentée par une fonction* g *sous la forme*

$$\forall f \in \mathrm{X}, \quad \ell(f) = \int_0^1 f(t)g(t)\,dt.$$

On montre facilement que $\Phi(t) \leq t^2$ pour tout t (étudier la fonction différence), ce qui implique que $\mathrm{L}_2(0,1) \subset \mathrm{X}$. Les fonctions bornées sont denses dans X, donc *a fortiori* l'espace $\mathrm{L}_2(0,1)$ est dense dans X (on montrera que si $f_n = \mathbf{1}_{\{|f|\leq n\}} f$, on a $\mathrm{M}(f - f_n) \to 0$, en appliquant le théorème de convergence dominée).

Si ℓ est une forme linéaire continue sur X elle définit par restriction une forme linéaire continue m sur L_2 ; on sait que m peut être représentée par une fonction $g \in \mathrm{L}_2$ sous la forme

$$\forall f \in \mathrm{L}_2, \quad m(f) = \int_0^1 f(t)g(t)\,dt\,;$$

il faudrait voir qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\int_0^1 \mathrm{e}^{\varepsilon|g(t)|}\,dt < +\infty$ pour boucler la boucle. En effet, on aura alors la forme linéaire continue ℓ_g de la question précédente, qui coïncidera avec ℓ sur le sous-espace dense L_2, donc $\ell = \ell_g$.

Supposons que $\|\ell\| < 1/2$ (norme dans le dual de X). Pour chaque $t \in [0,1]$, soit $h(t) \geq 0$ tel que $h(t)\,|g(t)| = \Phi(h(t)) + \Psi(g(t))$ (on connaît la formule : $h(t) = \psi(|g(t)|)$). Choisissons ensuite un nombre complexe $u(t)$ de module un tel que $u(t)g(t) = |g(t)|$ pour tout t. Posons $f(t) = u(t)h(t)$. On aura $f(t)g(t) = h(t)|g(t)| = \Phi(f(t)) + \Psi(g(t))$ pour tout t. Posons

$$\mathrm{A}_n = \{t \in [0,1] : |g(t)| \leq n\}\,;$$

d'après la formule $h(t) = \psi(|g(t)|)$, la fonction h est bornée par $\psi(n)$ sur A_n. La fonction $f_n(t) = u(t)h(t)\mathbf{1}_{\mathrm{A}_n}(t)$ est mesurable bornée, donc élément de $\mathrm{L}_2(0,1)$, donc

$$\Bigl|\int_{\mathrm{A}_n} f(t)g(t)\,dt\Bigr| = \Bigl(\int_0^1 f_n(t)g(t)\,dt\Bigr) = |\ell(f_n)| \leq \frac{1}{2}\,\mathrm{N}(f_n)$$

et on a même $|\ell(f_n)| < \mathrm{N}(f_n)/2$ si f_n n'est pas nulle. Mais

$$\int_{\mathrm{A}_n} f(t)g(t) = \int_{\mathrm{A}_n} \Phi(f(t))\,dt + \int_{\mathrm{A}_n} \Psi(g(t))\,dt.$$

On a donc en particulier $\int_{\mathrm{A}_n} \Phi(f(t))\,dt = \int_0^1 \Phi(f_n(t))\,dt = \mathrm{M}(f_n) < \mathrm{N}(f_n)/2$ si $f_n \neq 0$, ce qui implique $2\,\mathrm{M}(f_n) \leq 1$ (on a vu en effet que la condition $2\,\mathrm{M}(f) > 1$ implique que $\mathrm{N}(f) \leq 2\,\mathrm{M}(f)$). On en déduit en passant à la limite en n que $\mathrm{M}(f) = \int_0^1 \Phi(f(t))\,dt \leq 1/2$, donc $f \in \mathrm{X}$ et $\mathrm{N}(f) \leq 1$. Finalement,

$$\int_0^1 \Psi(g(t))\,dt \leq \int_0^1 \Phi(f(t))\,dt + \int_0^1 \Psi(g(t))\,dt \leq \frac{1}{2}\,\mathrm{N}(f) \leq \frac{1}{2}.$$

Finalement, on a trouvé $\varepsilon > 0$ (ici $\varepsilon = 1$) tel que $\int_0^1 \mathrm{e}^{\varepsilon\,|g(t)|}\,dt < +\infty$, et on a identifié le dual topologique de X.