Prépa. Agrég écrit d'Analyse, novembre 2002.

Densité des fonctions continues dans les espaces de Lebesgue

La densité dans L_p de l'espace des fonctions continues à support compact est un fait essentiel pour le développement de l'Analyse dans $\mathbb{R}^d$. J'ai essayé de rédiger en détail la démonstration que j'avais présentée oralement.

Proposition 1. *Soient* X *un espace métrique,* $\mathcal{B}$ *sa tribu borélienne et* μ *une mesure finie sur* $(\mathrm{X}, \mathcal{B})$ *; pour tout borélien* $\mathrm{B} \in \mathcal{B}$ *et tout* $\varepsilon > 0$*, il existe un fermé* F *et un ouvert* U *de* X *tels que*

$$\mathrm{F} \subset \mathrm{B} \subset \mathrm{U}, \quad \mu(\mathrm{U} \setminus \mathrm{F}) = \mu(\mathrm{U}) - \mu(\mathrm{F}) < \varepsilon.$$

Démonstration. Considérons la classe $\mathcal{A}$ de parties de X formée de tous les $\mathrm{A} \in \mathcal{B}$ que l'on peut approcher pour tout $\varepsilon > 0$ par un fermé F et un ouvert U, de sorte que $\mathrm{F} \subset \mathrm{A} \subset \mathrm{U}$ et $\mu(\mathrm{U} \setminus \mathrm{F}) < \varepsilon$; on va simplement montrer que la classe $\mathcal{A}$ est une tribu qui contient tous les ouverts de X : on en déduira que $\mathcal{A} = \mathcal{B}$, ce qui est le résultat voulu.

Il est clair d'abord que $\mathcal{A}$ est stable par complémentaire : pour le complémentaire A^c, on utilise l'encadrement $\mathrm{U}^c \subset \mathrm{A}^c \subset \mathrm{F}^c$, et l'évidence ensembliste $\mathrm{F}^c \setminus \mathrm{U}^c = \mathrm{U} \setminus \mathrm{F}$.

Pour la réunion dénombrable d'une suite $(\mathrm{A}_n) \subset \mathcal{A}$, on choisit $\mathrm{F}_n \subset \mathrm{A}_n \subset \mathrm{U}_n$ pour tout $n \geq 0$ tels que $\mu(\mathrm{U}_n \setminus \mathrm{F}_n) < 2^{-n-2}\,\varepsilon$; on considère l'ouvert $\mathrm{U} = \bigcup_{n=0}^{+\infty} \mathrm{U}_n$, on pose $\mathrm{A} = \bigcup_{n=0}^{+\infty} \mathrm{A}_n$ et $\mathrm{Y} = \bigcup_{n=0}^{+\infty} \mathrm{F}_n$; bien sûr Y n'est pas fermé en général, mais on a $\mathrm{Y} \subset \mathrm{A} \subset \mathrm{U}$, et la relation

$$\Big(\bigcup_{n=0}^{+\infty} \mathrm{U}_n\Big) \setminus \Big(\bigcup_{n=0}^{+\infty} \mathrm{F}_n\Big) \subset \bigcup_{n=0}^{+\infty} (\mathrm{U}_n \setminus \mathrm{F}_n)$$

qui entraîne que

$$\mu(\mathrm{U} \setminus \mathrm{Y}) \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \mu(\mathrm{U}_n \setminus \mathrm{F}_n) \leq \sum_{n=0}^{+\infty} 2^{-n-2}\,\varepsilon = \varepsilon/2.$$

Pour n assez grand on aura $\mu(\mathrm{Y}) - \mu(\mathrm{F}_0 \cup \ldots \cup \mathrm{F}_n) < \varepsilon/2$ et le fermé $\mathrm{F} = \mathrm{F}_0 \cup \ldots \cup \mathrm{F}_n$ fournit alors l'encadrement $\mathrm{F} \subset \mathrm{A} \subset \mathrm{U}$ avec $\mu(\mathrm{U}) - \mu(\mathrm{F}) < \varepsilon$.

Puisqu'il est évident que $\emptyset \in \mathcal{A}$, on a fini de vérifier que $\mathcal{A}$ est une tribu ; il reste à voir qu'elle contient tous les ouverts de X. Si Y est un sous-ensemble de X, on posera

$$\forall x \in \mathrm{X}, \quad \mathrm{dist}(x, \mathrm{Y}) = \inf\{d(x, y) : y \in \mathrm{Y}\}$$

où d est la distance de l'espace métrique X. Si Y est vide, on convient de dire que $\mathrm{dist}(x, \mathrm{Y}) = +\infty$.

Si $\mathrm{A} = \mathrm{U}$ est ouvert, on pose pour tout $n \geq 0$

$$\mathrm{F}_n = \{x \in \mathrm{X} : \mathrm{dist}(x, \mathrm{U}^c) \geq 2^{-n}\}.$$

Il est clair que F_n est fermé et que $\mathrm{F}_n \subset \mathrm{U}$; de plus, comme U est ouvert, tout point $x \in \mathrm{U}$ vérifie $\mathrm{dist}(x, \mathrm{U}^c) > 0$ donc appartient à F_n pour n assez grand. Il en résulte que $\mathrm{U} = \bigcup_n \mathrm{F}_n$. Si on donne $\varepsilon > 0$, on aura $\mu(\mathrm{U}) - \mu(\mathrm{F}_n) < \varepsilon$ pour n assez grand. On choisit alors l'encadrement $\mathrm{F}_n \subset \mathrm{U} = \mathrm{A} \subset \mathrm{U} = \mathrm{U}$ qui montre que $\mathrm{U} \in \mathcal{A}$.

Remarque. Le résultat précédent n'est en fait pas très utile ; le résultat très utile est celui qu'on obtient quand on peut remplacer le fermé $\mathrm{F} \subset \mathrm{B}$ par un compact ; on l'aura quasi-gratuitement pour un espace localement compact comme $\mathbb{R}^d$. C'est toujours vrai si l'espace métrique X est de plus complet et séparable, mais il faut travailler pour le voir.

On désignera par $\mathcal{K}(\mathbb{R}^d)$ l'espace des fonctions continues définies sur $\mathbb{R}^d$ et à support compact, c'est à dire que chaque $f \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^d)$ est nulle en dehors d'un certain K borné dans $\mathbb{R}^d$ (dépendant de f) ; rappelons que le *support* de f est l'adhérence de l'ensemble des points où f est non nulle,

$$\operatorname{supp}(f) = \overline{\{x \in \mathbb{R}^d : f(x) \neq 0\}}.$$

On considère la mesure de Lebesgue λ sur la tribu borélienne $\mathcal{B}_d$ de $\mathbb{R}^d$, et on note simplement $\mathrm{L}_p(\mathbb{R}^d)$ l'espace $\mathrm{L}_p(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}_d, \lambda)$. On notera $\mathrm{B}(0, \mathrm{R})$ la boule ouverte centrée au point 0, et de rayon R dans $\mathbb{R}^d$.

Théorème. *Pour tout p tel que $1 \leq p < +\infty$ l'espace $\mathcal{K}(\mathbb{R}^d)$ est dense dans $\mathrm{L}_p(\mathbb{R}^d)$.*

Le résultat est évidemment faux pour $\mathrm{L}_\infty(\mathbb{R}^d)$. En effet, la norme induite par $\mathrm{L}_\infty(\mathbb{R}^d)$ sur $\mathcal{K}(\mathbb{R}^d)$ est la norme uniforme, ce qui entraîne que toutes les fonctions de l'adhérence de $\mathcal{K}(\mathbb{R}^d)$ dans $\mathrm{L}_\infty(\mathbb{R}^d)$ sont continues (exercice : l'adhérence est égale à l'espace $\mathrm{C}_0(\mathbb{R}^d)$ des fonctions continues qui tendent vers 0 à l'infini).

Démonstration. On veut approcher $f \in \mathrm{L}_p(\mathbb{R}^d)$ par une fonction φ continue à support compact, approximation en norme L_p ; on procède d'abord à plusieurs réductions : puisque $f = f^+ - f^-$, il suffit de le faire pour $f \geq 0$; alors f est limite simple d'une suite (f_n) de fonctions étagées, $0 \leq f_n \leq f$. La suite $(f - f_n)^p$ tend vers 0 en étant dominée par la fonction intégrable f^p, donc $\|f - f_n\|_p \to 0$ par convergence dominée. Il suffit donc de pouvoir approcher toute fonction étagée g. Puisque g est combinaison linéaire de fonctions de la forme $\mathbf{1}_\mathrm{B}$ avec $\mathrm{B} \in \mathcal{B}_d$, il suffit d'approcher les fonctions indicatrices $\mathbf{1}_\mathrm{B}$. Enfin, si on pose $\mathrm{B}_n = \mathrm{B} \cap \mathrm{B}(0, n)$, on montre comme avant que $\mathbf{1}_{\mathrm{B}_n}$ tend vers $\mathbf{1}_\mathrm{B}$ dans L_p, par convergence dominée.

Finalement on veut approcher une fonction indicatrice $\mathbf{1}_\mathrm{B}$ d'un borélien borné B, disons $\mathrm{B} \subset \mathrm{B}(0, \mathrm{R}) \subset \mathrm{K} = \overline{\mathrm{B}(0, \mathrm{R})}$; introduisons aussi l'ouvert $\mathrm{V} = \mathrm{B}(0, \mathrm{R} + 1)$; on a $\mathrm{B} \subset \mathrm{K} \subset \mathrm{V}$. Désignons par μ la mesure $\mathbf{1}_\mathrm{V}\, \lambda$ sur $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}_d)$, définie par

$$\forall \mathrm{A} \in \mathcal{B}_d, \quad \mu(\mathrm{A}) = \lambda(\mathrm{A} \cap \mathrm{V}).$$

C'est une mesure finie à laquelle la proposition 1 s'applique. On trouve ainsi $\mathrm{F} \subset \mathrm{B} \subset \mathrm{U}$ tels que $\mu(\mathrm{U}) - \mu(\mathrm{F}) < \varepsilon$, c'est à dire $\lambda(\mathrm{U} \cap \mathrm{V}) - \lambda(\mathrm{F}) < \varepsilon$. Le fermé F est borné puisque $\mathrm{F} \subset \mathrm{K}$, donc $\mathrm{K}_1 = \mathrm{F}$ est compact et l'ouvert $\mathrm{U}_1 = \mathrm{U} \cap \mathrm{V}$ contient B. On a donc $\mathrm{K}_1 \subset \mathrm{B} \subset \mathrm{U}_1$ et $\lambda(\mathrm{U}_1 \setminus \mathrm{K}_1) < \varepsilon$.

Il reste à construire une fonction continue $\varphi \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^d)$, que l'on va choisir telle que $\mathbf{1}_{\mathrm{K}_1} \leq \varphi \leq \mathbf{1}_{\mathrm{U}_1}$; posons d'abord

$$\delta = \min\{\operatorname{dist}(y, \mathrm{U}_1^c) : y \in \mathrm{K}_1\} > 0$$

puis

$$\forall x \in \mathbb{R}^d, \quad \varphi(x) = \bigl(1 - \delta^{-1} \operatorname{dist}(x, \mathrm{K}_1)\bigr)^+.$$

On vérifie que $0 \le \varphi(x) \le 1$; si $x \in \mathrm{K}_1$, on a $\mathrm{dist}(x, \mathrm{K}_1) = 0$ et $\varphi(x) = 1$; si $x \notin \mathrm{U}_1$, on a $\mathrm{dist}(x, \mathrm{K}_1) \ge \delta$ et $\varphi(x) = 0$. Tout ceci montre que $\mathbf{1}_{\mathrm{K}_1} \le \varphi \le \mathbf{1}_{\mathrm{U}_1}$. Comme on a aussi $\mathbf{1}_{\mathrm{K}_1} \le \mathbf{1}_{\mathrm{B}} \le \mathbf{1}_{\mathrm{U}_1}$, il en résulte que

$$|\mathbf{1}_{\mathrm{B}} - \varphi| \le \mathbf{1}_{\mathrm{U}_1} - \mathbf{1}_{\mathrm{K}_1} = \mathbf{1}_{\mathrm{U}_1 \setminus \mathrm{K}_1},$$

et

$$\int_{\mathbb{R}^d} |\mathbf{1}_{\mathrm{B}}(x) - \varphi(x)|^p \, dx \le \int_{\mathbb{R}^d} |\mathbf{1}_{\mathrm{U}_1 \setminus \mathrm{K}_1}|^p \, dx = \lambda(\mathrm{U}_1 \setminus \mathrm{K}_1) < \varepsilon.$$