Prépa. Agrég écrit d'Analyse, novembre 2002.

Fourier dans L_2

Désignons par X l'ensemble des fonctions $f \in \mathrm{L}_1(\mathbb{R}^d)$ qui sont de plus continues, avec $\widehat{f} \in \mathrm{L}_1(\mathbb{R}^d)$ et qui satisfont la formule *d'inversion de Fourier*

$$\text{(I)} \qquad \forall x \in \mathbb{R}^d, \quad f(x) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{f}(t)\, \mathrm{e}^{it\,.\,x}\, dt.$$

Il est clair que X est un espace vectoriel de fonctions.

Remarque 1. La densité gaussienne $\mathrm{G}(x) = (2\pi)^{-d/2}\, \mathrm{e}^{-|x|^2/2}$ est dans X, où on a noté $|x| = (x_1^2 + \cdots + x_d^2)^{1/2}$ pour tout $x = (x_1, \ldots, x_d)$ de $\mathbb{R}^d$. En effet, on sait que

$$\forall t \in \mathbb{R}^d, \quad \widehat{\mathrm{G}}(t) = \mathrm{e}^{-|t|^2/2} = (2\pi)^{d/2}\, \mathrm{G}(t),$$

d'où on voit que $\mathrm{G}, \widehat{\mathrm{G}}$ sont continues, intégrables sur $\mathbb{R}^d$ et

$$\frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{\mathrm{G}}(t)\, \mathrm{e}^{it\,.\,x}\, dt = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{G}(t)\, \mathrm{e}^{it\,.\,x}\, dt = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}}\, \widehat{\mathrm{G}}(-x) = \mathrm{G}(x).$$

Remarque 2. Si f est dans X, alors $f_a(x) = a^d f(ax)$ est dans X pour tout $a > 0$; en effet

$$\widehat{f_a}(t) = \int_{\mathbb{R}^d} f(ax)\, \mathrm{e}^{-ix.t}\, a^d\, dx = \int_{\mathbb{R}^d} f(y)\, \mathrm{e}^{-iy.t/a}\, dy = \widehat{f}(t/a),$$

ce qui donne déjà les propriétés voulues de continuité et intégrabilité ; ensuite, avec un nouveau changement de variable et en utilisant la relation (I) pour la fonction f

$$\frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{f_a}(t)\, \mathrm{e}^{it\,.\,x}\, dt = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{f}(t/a)\, \mathrm{e}^{it\,.\,x}\, dt =$$

$$\frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{f}(u)\, \mathrm{e}^{iu\,.\,ax}\, a^d\, du = a^d\, f(ax) = f_a(x).$$

Lemme 1. *Si $f \in \mathrm{X}$, alors f et $\widehat{f}$ sont dans $\mathrm{L}_2(\mathbb{R}^d)$ et de plus*

$$\int_{\mathbb{R}^d} |\widehat{f}(t)|^2\, dt = (2\pi)^d \int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|^2\, dx.$$

Démonstration. Si une fonction g est à la fois intégrable et bornée par un nombre M, elle est de carré intégrable puisque dans ce cas

$$\int_{\mathbb{R}^d} |g(x)|^2\, dx \le \mathrm{M} \int_{\mathbb{R}^d} |g(x)|\, dx.$$

Si $f \in \mathrm{X}$, elle est intégrable, et bornée par $\|\widehat{f}\|_1/(2\pi)^d$ d'après la formule (I). De même, $\widehat{f}$ est supposée intégrable, et elle est bornée par $\|f\|_1$. Ainsi on a $f, \widehat{f} \in \mathrm{L}_2(\mathbb{R}^d)$.

De plus, on obtient en prenant le complexe conjugué de la formule (I)

$$\forall x \in \mathbb{R}^d, \quad \overline{f(x)} = \int_{\mathbb{R}^d} \frac{\overline{\widehat{f}(t)}}{(2\pi)^d}\, \mathrm{e}^{-it\,.\,x}\, dt,$$

ce qui montre que $\overline{f}$ est la transformée de Fourier de

$$g(t) = \frac{\overline{\widehat{f}(t)}}{(2\pi)^d}.$$

D'après la formule d'échange,

$$\int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|^2\,dx = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\widehat{g}(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{f}(t)g(t)\,dt = \frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^d} |\widehat{f}(t)|^2\,dt.$$

Lemme 2. *Si $f \in \mathrm{L}_1$ et $g \in \mathrm{X}$, alors $f * g \in \mathrm{X}$.*
Démonstration. Posons $h = f * g$; la transformée de Fourier de h est $\widehat{f}(t)\,\widehat{g}(t)$, qui est intégrable puisque $\widehat{f}(t)$ est bornée, et que $\widehat{g}(t)$ est intégrable par définition de l'espace X. De plus h est continue d'après les propriétés de la convolution (la fonction g est continue bornée). Il reste à vérifier la formule (I). On écrit

$$\mathrm{J} = \frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^d} \widehat{h}(t)\,\mathrm{e}^{it\,.\,x}\ dt = \frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^d}\Bigl(\int_{\mathbb{R}^d} f(y)\,\mathrm{e}^{-iy.t}\ dy\Bigr)\widehat{g}(t)\,\mathrm{e}^{it\,.\,x}\ dt.$$

On va appliquer Fubini, qui est justifié car

$$h(y,t) = f(y)\,\mathrm{e}^{-iy.t}\ \widehat{g}(t)\,\mathrm{e}^{it\,.\,x}$$

est mesurable, et son module $|f(y)|\,|\widehat{g}(t)|$ est intégrable sur $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$. On peut donc continuer, en utilisant la formule (I) pour g au passage,

$$\mathrm{J} = \int_{\mathbb{R}^d} f(y)\Bigl(\frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^d}\widehat{g}(t)\,\mathrm{e}^{it\,.\,(x-y)}\ dt\Bigr)\,dy = \int_{\mathbb{R}^d} f(y)g(x-y)\,dy = h(x).$$

Lemme 3. *L'espace vectoriel* X *est dense dans* $\mathrm{L}_2(\mathbb{R}^d)$.
Démonstration. On procède en deux étapes : si f est dans $\mathrm{L}_2(\mathbb{R}^d)$, on peut l'approcher par $f_1 = \mathbf{1}_{[-a,a]^d}\,f$ qui est dans $\mathrm{L}_1(\mathbb{R}^d)$ et dans $\mathrm{L}_2(\mathbb{R}^d)$. Considérons ensuite l'approximation de l'unité gaussienne (g_n) définie par $g_n(x) = n^d\,\mathrm{G}(nx)$ pour $n \ge 1$. D'après les remarques 1 et 2, on sait que $g_n \in \mathrm{X}$ pour tout n. Alors $f_1 * g_n$ est dans X d'après le lemme 2, et tend vers f_1 en norme L_2 d'après les résultats sur les approximations de l'unité.

Théorème. *Il existe un opérateur linéaire borné $\mathcal{F}$ défini sur $\mathrm{L}_2(\mathbb{R}^d)$, qui coïncide avec $f \to \widehat{f}$ sur $\mathrm{L}_1(\mathbb{R}^d) \cap \mathrm{L}_2(\mathbb{R}^d)$, et vérifie*

$$\text{(P)}\qquad \forall f \in \mathrm{L}_2(\mathbb{R}^d),\quad \int_{\mathbb{R}^d} |(\mathcal{F}f)(t)|^2\,dt = (2\pi)^d\int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|^2\,dx.$$

Démonstration. On dispose pour l'instant d'une application linéaire T de X dans $\mathrm{L}_2(\mathbb{R}^d)$, définie par $\mathrm{T}(f) = \widehat{f}$ pour toute $f \in \mathrm{X}$, et qui est continue de X muni de la norme L_2, à valeurs dans $\mathrm{L}_2(\mathbb{R}^d)$ (on utilise la relation du lemme 1).

D'après le théorème sur le prolongement d'applications uniformément continues définies sur un sous-espace dense et à valeurs dans un métrique complet, on sait qu'on peut définir $\mathcal{F}(f)$ comme la limite dans $\mathrm{L}_2(\mathbb{R}^d)$ de $\widehat{f_n}$, pour n'importe quelle suite $(f_n) \subset \mathrm{X}$ qui tend vers f dans $\mathrm{L}_2(\mathbb{R}^d)$. L'égalité (P) est obtenue en passant à la limite dans l'égalité du lemme 1.

Si f est dans $\mathrm{L}_1 \cap \mathrm{L}_2$, on peut considérer la suite $(f_n) = (f * g_n)$ de la démonstration précédente. Cette suite converge en norme $\mathrm{L}_1(\mathbb{R}^d)$ vers f, donc $\widehat{f_n}$ tend uniformément vers $\widehat{f}$, et en norme $\mathrm{L}_2(\mathbb{R}^d)$ vers $\mathcal{F}f$. On en déduit que la fonction continue $\widehat{f}$ est dans la classe de $\mathcal{F}f$, c'est-à-dire que $\mathcal{F}f = \widehat{f}$ en termes moins corrects.

Une fois le résultat précédent établi, on peut remarquer que pour toute fonction $f \in \mathrm{L}_2(\mathbb{R}^d)$, la suite (f_n) définie par $f_n = \mathbf{1}_{[-n,n]^d}\, f$ est dans $\mathrm{L}_1(\mathbb{R}^d) \cap \mathrm{L}_2(\mathbb{R}^d)$ et tend vers f en norme L_2. D'après la continuité de $\mathcal{F}$ et son expression sur $\mathrm{L}_1(\mathbb{R}^d) \cap \mathrm{L}_2(\mathbb{R}^d)$, on voit que pour toute $f \in \mathrm{L}_2(\mathbb{R}^d)$, la transformée de Fourier $\mathcal{F}f$ est la limite en norme L_2 de la suite des fonctions

$$t \in \mathbb{R}^d \to \int_{[-n,n]^d} f(x)\,\mathrm{e}^{-ix.t}\; dx.$$

Ainsi, s'il n'est pas correct de définir brutalement la transformée de Fourier sur $\mathrm{L}_2(\mathbb{R}^d)$ par l'intégrale de Fourier, on arrive à une solution correcte très voisine.

Explicitons un peu plus le cas de la dimension 1. Puisque la suite précédente converge vers $\mathcal{F}f$ en norme L_2, il existe des sous-suites qui convergent presque partout. Si l'intégrale semi-convergente

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{e}^{-ix.t}\; dx$$

existe pour tout $t \in \mathbb{R}$, on en déduit que la fonction

$$t \in \mathbb{R} \to \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{e}^{-ix.t}\; dx$$

appartient à la classe de $\mathcal{F}f$.

Pour finir, on va formuler un théorème d'inversion de Fourier relativement sympathique, qui revient à caractériser en termes plus simples la classe X qui a servi pour les démonstrations précédentes.

Théorème. *Si $f \in \mathrm{L}_1(\mathbb{R}^d)$ et $\widehat{f} \in \mathrm{L}_1(\mathbb{R}^d)$, alors f "est" continue et*

$$\forall x \in \mathbb{R}^d, \quad f(x) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{f}(t)\,\mathrm{e}^{it\,.\,x}\; dt.$$

Autrement dit, la classe X est tout simplement la classe des $f \in \mathrm{L}_1(\mathbb{R}^d)$ telles que $\widehat{f} \in \mathrm{L}_1(\mathbb{R}^d)$.

Démonstration. Reprenons l'approximation de l'unité (g_n) définie avec la fonction gaussienne. On a vu que $f_n = f * g_n$ appartient à X, donc vérifie la formule (I). On voit que $\widehat{g}_n(t) = \widehat{\mathrm{G}}(t/n)$ est borné par 1 et tend simplement vers $\widehat{\mathrm{G}}(0) = 1$. La suite $\widehat{f}_n(t) = \widehat{f}(t)\,\widehat{g}_n(t)$ est dominée en module par $|\widehat{f}(t)|$ qui est intégrable par hypothèse, et converge simplement vers $\widehat{f}(t)$. D'après le théorème de convergence dominée,

$$h(x) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{f}(t)\,\mathrm{e}^{it\,.\,x}\; dt = \lim_n \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{f}_n(t)\,\mathrm{e}^{it\,.\,x}\; dt = \lim_n f_n(x).$$

par ailleurs, $f_n = f * g_n$ converge vers f dans L_1, ce qui montre que la fonction continue h est dans la classe de f.

Si $f \in \mathrm{X}$, alors $\mathcal{F}f \in \mathrm{X}$ et on peut lire la formule d'inversion sous la forme

$$f = \frac{1}{(2\pi)^d}\,\overline{\mathcal{F}\big(\overline{\mathcal{F}f}\big)}.$$

Par densité, cette formule se prolonge à $\mathrm{L}_2(\mathbb{R}^d)$,

Pour toute fonction $f \in \mathrm{L}_2(\mathbb{R}^d)$, *on a*

$$f = \frac{1}{(2\pi)^d}\,\overline{\mathcal{F}\big(\overline{\mathcal{F}f}\big)}.$$

Si on n'aime pas la conjugaison complexe, on peut interpréter autrement la formule d'inversion dans X et dire que pour presque tout x on a

$$\mathcal{F}(\mathcal{F}f)(-x) = (2\pi)^d\, f(x).$$

On en déduit que $\mathcal{F}^4$ est un multiple de l'identité de $\mathrm{L}_2(\mathbb{R}^d)$, $\mathcal{F}^4 = (2\pi)^{2d}\,\mathrm{Id}$.