Prépa. Agrég écrit d'Analyse, février 2003.

Construction de fonctions continues sur un compact

Si X est un espace métrique, il est facile de construire sur X un certain nombre de fonctions réelles continues, puisque la définition d'un espace métrique nous donne déjà une famille assez riche de fonctions continues, à savoir toutes les fonctions $x \to d(x, y)$, pour y variant dans X. Sur un espace topologique abstrait, on ne sait pas trouver de fonction continue intéressante. Il est donc assez remarquable que sur un espace compact, non nécessairement métrisable, on puisse construire beaucoup de fonctions continues.

Une fonction réelle f sur un espace topologique X est dite *semi-continue inférieurement* si elle est continue vers le bas, c'est à dire si elle ne peut pas chuter trop au voisinage d'un point de X : pour chaque $x \in \mathrm{K}$ et $\varepsilon > 0$, il existe un voisinage V de x tel que $f > f(x) - \varepsilon$ sur V. Cela revient à dire qu'une fonction f est semi-continue inférieurement si et seulement si l'ensemble $\{f > t\}$ est ouvert pour tout réel t. On écrira "fonction s.c.i." en abrégé.

Il en résulte que le sup d'une famille quelconque de fonctions s.c.i. est encore s.c.i. sur X. En passant aux ensembles $\{f \le t\}$ on voit que l'inf d'une famille *finie* de fonctions s.c.i. est s.c.i. sur X. L'ensemble des fonctions s.c.i. est un cône convexe : toute combinaison linéaire à coefficients positifs de fonctions s.c.i. reste s.c.i. sur X ; les exemples de base sont donnés par les indicatrices d'ouverts $\mathbf{1}_{\mathrm{V}}$.

On dit que f est *semi-continue supérieurement* si $-f$ est sci. On écrira "fonction s.c.s." en abrégé. Une fonction qui est à la fois s.c.i. et s.c.s. est continue. C'est l'idée qui sera exploitée pour trouver des fonctions continues sur un compact : on construira deux suites de fonctions, l'une formée de fonctions s.c.i. et l'autre de fonctions s.c.s, et qui convergent uniformément vers une même fonction limite. Comme on voit facilement que les deux semi-continuités sont conservées par limite uniforme, la fonction limite sera continue.

Remarque 1. Soient a, b deux nombres réels tels que $a < b$ et F un fermé de X ; la fonction d égale à a sur F et à b hors de F est s.c.i sur X ; la fonction u égale à b sur F et à a hors de F est s.c.s.

En effet, d est la somme de la fonction constante a et du multiple positif $(b-a)\,\mathbf{1}_{\mathrm{F}^c}$ de l'indicatrice de l'ouvert complémentaire de F, et $u = a + (b-a)\,\mathbf{1}_{\mathrm{F}}$.

1. Le cas compact

Si K est un espace topologique compact, on peut montrer la propriété suivante : étant donné un ouvert W contenant un point x, il existe un autre ouvert V tel que $x \in \mathrm{V} \subset \overline{\mathrm{V}} \subset \mathrm{W}$ (pour le faire, construire un recouvrement ouvert du compact W^c par des ouverts dont l'adhérence ne contient pas x ; ceci est possible parce que K est un espace topologique séparé ; extraire ensuite un sous-recouvrement fini et conclure).

Lemme 1. *Soient f une fonction s.c.s. sur* K *et g une fonction s.c.i. sur* K*, telles que $0 \le f(x) < g(x) \le 1$ pour tout $x \in \mathrm{K}$; il existe une fonction v s.c.i. et une fonction w s.c.s. sur* K *telles que $f < v \le w < g$ sur* K.

Fixons un point $x \in \mathrm{K}$, et posons $t = \frac{1}{2}\,(f(x) + g(x))$. Puisque $f(x) < t < g(x)$ et que f est s.c.s. et g s.c.i., on peut trouver un ouvert W_x contenant x sur lequel on a encore

$f < t$ et $t < g$. On peut ensuite trouver un ouvert V_x tel que $x \in \mathrm{V}_x \subset \overline{\mathrm{V}}_x \subset \mathrm{W}_x$. Posons $\mathrm{F}_x = \overline{\mathrm{V}}_x$, soit v_x la fonction égale à t sur F_x et à 1 hors de F_x, et w_x la fonction égale à t sur F_x et à 0 hors de F_x. On note que $v_x = w_x = t$ sur F_x. Puisque $0 < t < 1$ (en effet, on a $0 \le f(x) < t < g(x) \le 1$), la fonction v_x est s.c.i. et w_x est s.c.s. sur K par la remarque 1 ; de plus, on a $v_x > f$ et $w_x < g$ sur K : en effet, on a $v_x = t > f$ sur F_x et $v_x = 1 \ge g(x) > f(x)$ hors de F_x, et on a $w_x = t < g$ sur F_x et $w_x = 0 \le f(x) < g(x)$ hors du fermé F_x.

On fait maintenant varier le point x dans K ; les ouverts (V_x) forment un recouvrement ouvert de K ; puisque K est compact, il existe un nombre fini $x_1, \ldots, x_\mathrm{N}$ de points de K tels que $\mathrm{K} = \bigcup_{j=1}^{\mathrm{N}} \mathrm{V}_{x_j}$. Posons

$$v = \inf_{1 \le j \le \mathrm{N}} v_{x_j}, \quad w = \sup_{1 \le j \le \mathrm{N}} w_{x_j}.$$

La fonction v est s.c.i. comme inf *fini* de fonctions s.c.i., et w est s.c.s. comme sup *fini* de fonctions s.c.s. sur K. On a $f < v$ et $w < g$ d'après les inégalités $f < v_x$, $w_x < g$ pour tout x (et le caractère fini du sup et de l'inf). Enfin, si y est un point quelconque de K, il est dans l'un des ouverts V_{x_j} donc aussi dans F_{x_j} et il en résulte que $v(y) \le v_{x_j}(y) = w_{x_j}(y) \le w(y)$, puisque $v_{x_j} = w_{x_j}$ sur F_{x_j}.

Dans ce qui suit nous noterons $\|f\|$ la norme uniforme d'une fonction réelle bornée f définie sur K.

Proposition 1. *Soient f une fonction s.c.s. sur K et g une fonction s.c.i. sur K, telles que $0 \le f(x) < g(x) \le 1$ pour tout $x \in \mathrm{K}$; il existe f_1 s.c.s. et g_1 s.c.i. sur K telles que $f < f_1 < (f+g)/2 < g_1 < g$ et $\|f - f_1\|, \|g - g_1\|, \|g_1 - f_1\| \le \frac{1}{2}\|g - f\|$.*

Introduisons les fonctions v et w du lemme précédent, qui vérifient $f < v \le w < g$ sur K. On pose $f_1 = \frac{1}{2}(f + w)$, qui est s.c.s. sur K, et $g_1 = \frac{1}{2}(v + g)$, qui est s.c.i. sur K. De plus,

$$f = \frac{1}{2}(f + f) < \frac{1}{2}(f + w) = f_1 < \frac{1}{2}(f + g) < \frac{1}{2}(v + g) = g_1 < g.$$

On a aussi pour tout $x \in \mathrm{K}$

$$0 < g_1(x) - f_1(x) = \frac{1}{2}\big(g(x) + v(x) - f(x) - w(x)\big) \le \frac{1}{2}\big(g(x) - f(x)\big) \le \frac{1}{2}\|g - f\|,$$

Les inégalités $\|g - g_1\| \le \frac{1}{2}\|g - f\|$ et $\|f - f_1\| \le \frac{1}{2}\|g - f\|$ sont conséquence immédiate des encadrements $(f+g)/2 < g_1 < g$ et $f < f_1 < (f+g)/2$.

Théorème. *Soient F_0 et F_1 deux fermés non vides et disjoints dans K ; il existe une fonction continue φ sur K, à valeurs dans $[0,1]$ et telle que $\varphi = 0$ sur F_0, $\varphi = 1$ sur F_1.*

On commence une procédure inductive en posant

$$g_0 = \frac{1}{4} + \frac{3}{4}\,\mathbf{1}_{\mathrm{F}_0^c}, \quad f_0 = \frac{3}{4}\,\mathbf{1}_{\mathrm{F}_1}.$$

On a bien $f_0 < g_0$, les fonctions sont à valeurs dans $[0,1]$, f_0 est s.c.s. et g_0 s.c.i. sur K. En itérant la proposition précédente on construit deux suites (f_n) et (g_n) qui vérifient $f_n < f_{n+1} < g_{n+1} < g_n$ pour tout $n \ge 0$, et qui convergent uniformément vers une limite commune ψ ; cette fonction ψ est s.c.i. comme limite uniforme des (g_n) et s.c.s. comme limite uniforme des (f_n), donc ψ est continue. Sur F_0 on a $\psi(x) \le g_0(x) = 1/4$ et sur F_1, $\psi(x) \ge f_0(x) = 3/4$. On peut poser finalement

$$\forall x \in \mathrm{K}, \quad \varphi(x) = \min\big(\max(2\psi(x) - 1/2, 0), 1\big).$$

2. Espaces topologiques normaux

Le théorème précédent est vrai sous une hypothèse topologique plus faible que la compacité : on dit qu'un espace topologique séparé X est *normal* si pour tous fermés disjoints A_0 et A_1, on peut trouver deux ouverts disjoints V_0 et V_1 tels que $\mathrm{A}_0 \subset \mathrm{V}_0$ et $\mathrm{A}_1 \subset \mathrm{V}_1$.

Il revient au même de dire que si $\mathrm{F} \subset \mathrm{V}$, avec F fermé et V ouvert, on peut trouver F_1 fermé et V_1 ouvert tels que $\mathrm{F} \subset \mathrm{V}_1 \subset \mathrm{F}_1 \subset \mathrm{V}$. Si K est un espace topologique compact, on peut montrer assez facilement que K est normal (exercice pour le lecteur).

Si A_0 *et* A_1 *sont deux fermés non vides et disjoints dans un espace normal* X, *il existe une fonction continue* φ *sur* K, *à valeurs dans* $[0, 1]$ *et telle que* $\varphi = 0$ *sur* A_0, $\varphi = 1$ *sur* A_1.

On suppose donc que A_0 et A_1 sont deux fermés disjoints dans un espace topologique normal X. On désigne par D l'ensemble des dyadiques de $[0, 1]$, c'est à dire tous les nombres d de la forme $k\,2^{-n}$, pour un entier $n \ge 0$ et un entier k tel que $0 \le k \le 2^n$. Si on est en mesure de construire une fonction continue φ égale à 0 sur A_0 et à 1 sur A_1, nous aurons à notre disposition une grande collection d'ouverts et de fermés : tous les ouverts $\mathrm{V}_d = \{\varphi > d\}$ et tous les fermés $\mathrm{F}_d = \{\varphi \ge d\}$, pour d variant dans D. On a évidemment $\mathrm{F}_d \supset \mathrm{V}_d$ pour tout d, et de plus $\mathrm{V}_{d_1} \supset \mathrm{F}_{d_2}$ lorsque $d_1 < d_2$. Dans le lemme qui suit, nous allons suivre le chemin inverse, en commençant par construire une telle famille d'ensembles.

Lemme 2. *Il existe une famille d'ouverts* $(\mathrm{V}_d)_{d \in \mathrm{D}}$ *et une famille de fermés* $(\mathrm{F}_d)_{d \in \mathrm{D}}$ *telles que*

– *on a* $\mathrm{F}_{d_1} \supset \mathrm{V}_{d_1} \supset \mathrm{F}_{d_2} \supset \mathrm{V}_{d_2}$ *pour tous dyadiques* $d_1, d_2 \in \mathrm{D}$ *tels que* $d_1 < d_2$ *(les deux familles d'ensembles sont décroissantes, et elles sont emboîtées) ;*

– *on a de plus* $\mathrm{F}_0 = \mathrm{X}$, $\mathrm{V}_0 = \mathrm{A}_0^c$, $\mathrm{F}_1 = \mathrm{A}_1$ *et* $\mathrm{V}_1 = \emptyset$.

Preuve. On désigne par D_n le sous-ensemble de D formé des nombres de la forme $k\,2^{-n}$, $k = 0, \ldots, 2^n$. On construit les familles d'ouverts et de fermés par récurrence sur n, en construisant les ensembles $(\mathrm{V}_d)_{d \in \mathrm{D}_n}$ et $(\mathrm{F}_d)_{d \in \mathrm{D}_n}$ de proche en proche.

Pour $n = 0$, $\mathrm{D}_0 = \{0, 1\}$ et tous les choix sont dictés par l'énoncé du lemme : $\mathrm{F}_0 = \mathrm{X}$, $\mathrm{V}_0 = \mathrm{A}_0^c$, $\mathrm{F}_1 = \mathrm{A}_1$ et $\mathrm{V}_1 = \emptyset$. On a bien $\mathrm{V}_0 \supset \mathrm{F}_1$ puisque A_0 et A_1 sont disjoints.

Supposons que $n \ge 0$ et que les deux familles $(\mathrm{V}_d)_{d \in \mathrm{D}_n}$ et $(\mathrm{F}_d)_{d \in \mathrm{D}_n}$ sont déjà construites, avec les propriétés voulues (restreintes à D_n). Soit d un élément de D_{n+1} qui ne soit pas déjà dans D_n ; on a $d = (2p + 1)\,2^{-n-1}$, et ce nombre est le milieu des deux éléments de D_n égaux à $d_1 = p\,2^{-n}$ et $d_2 = (p + 1)\,2^{-n}$. On a d'après l'hypothèse de récurrence

$$\mathrm{V}_{d_1} \supset \mathrm{F}_{d_2}.$$

Puisque X est normal, on peut trouver un ouvert V et un fermé F tels que $\mathrm{V}_{d_1} \supset \mathrm{F} \supset \mathrm{V} \supset \mathrm{F}_{d_2}$. Nous décidons de poser $\mathrm{V}_d = \mathrm{V}$, $\mathrm{F}_d = \mathrm{F}$, et nous faisons ceci pour chaque élément d de $\mathrm{D}_{n+1} \setminus \mathrm{D}_n$; de cette façon nous pouvons définir deux familles $(\mathrm{V}_d)_{d \in \mathrm{D}_{n+1}}$ et $(\mathrm{F}_d)_{d \in \mathrm{D}_{n+1}}$ qui vérifient les propriétés voulues.

Construisons maintenant une fonction continue φ sur X, égale à 0 sur A_0 et à 1 sur A_1, à partir du résultat donné par le lemme 2. L'idée est que V_d sera à peu près l'ensemble $\{\varphi > d\}$. On pose

$$\forall x \in X, \quad \varphi(x) = \sup \{d \in D : x \in V_d\},$$

en entendant que $\varphi(x) = 0$ si aucun d ne convient, c'est à dire si $x \notin V_0$, ce qui veut dire que $x \in A_0$; la fonction φ est donc nulle sur A_0. Si $x \in A_1 = F_1$, alors $x \in V_d$ pour tout $d < 1$ et $\varphi(x) = 1$: la fonction est égale à 1 sur A_1. Faisons deux observations :

a. Sur chaque ensemble V_d, $d \in D$, on a clairement $\varphi \geq d$. Comme F_d est contenu dans tous les ouverts $V_{d'}$ pour $d' < d$, on en déduit aussi que $\varphi \geq d$ sur le fermé F_d.

b. Notons que si $\varphi(x) > d$, alors $x \in V_d$; en effet, il existe un dyadique $d' > d$ tel que $x \in V_{d'}$, donc $x \in V_{d'} \subset V_d$; comme $V_d \subset F_d$ on en déduit aussi que $\varphi \leq d$ sur le complémentaire de F_d.

Montrons la continuité de φ sur X. Soient $x \in X$, $\varepsilon > 0$; posons $t = \varphi(x)$ et supposons $0 < t < 1$ pour commencer ; soient d_1 et d_2 dans D tels que $d_1 < t < d_2$ et $d_2 - d_1 < \varepsilon$; puisque $\varphi(x) > d_1$, on a $x \in V_{d_1}$ par la première partie du point **b**, et $x \notin F_{d_2}$ par le point **a**, puisque $\varphi(x) < d_2$. Notre élément x est donc contenu dans l'ouvert $U = V_{d_1} \setminus F_{d_2}$, sur lequel la fonction φ vérifie $d_1 \leq \varphi \leq d_2$ par les points **a** et **b**, donc on a trouvé un voisinage de x sur lequel on a $|\varphi - \varphi(x)| < \varepsilon$.

Si $t = 0$ ou $t = 1$, on n'utilisera que la moitié applicable des arguments précédents.

Exercice. Montrer que pour tout réel t,

$$\{\varphi > t\} = \bigcup_{d>t} V_d, \quad \{\varphi \geq t\} = \bigcap_{d<t} F_d.$$

3. Dernières remarques

On va pour finir faire le lien entre la première démonstration avec deux suites de fonctions, et la précédente avec des ensembles. On va retrouver avec les ensembles du paragraphe précédent le contenu de la proposition 1. Soit $n \geq 0$, posons $h = 2^{-n-1}$, $N = 2^n$ et supposons donnée une chaîne d'ouverts et de fermés emboîtés, indexés par les dyadiques de D_n,

$$V_0 \supset F_{2h} \supset V_{2h} \supset F_{4h} \supset V_{4h} \supset \ldots \supset V_{(2N-2)h} = V_{1-2h} \supset F_1 ;$$

considérons les deux fonctions

$$g = 2h \sum_{j=0}^{N-1} \mathbf{1}_{V_{2jh}}, \quad f = 2h \sum_{j=1}^{N} \mathbf{1}_{F_{2jh}}.$$

Il est clair que f est s.c.s. et g s.c.i. sur X, et on voit que $0 \leq f, g \leq 1$. De plus, on a $f \leq g$ parce que $F_{(2j+2)h} \subset V_{2jh}$ pour tout $j = 0, \ldots, N-1$. Nous sommes donc à peu près dans la situation de l'hypothèse de la proposition 1.

On augmente ensuite la famille en introduisant des ensembles indexés par D_{n+1}, c'est-à-dire qu'on intercale des ouverts et des fermés dont les indices sont des multiples impairs de h,

$$\mathrm{V}_0 \supset \mathrm{F}_h \supset \mathrm{V}_h \supset \mathrm{F}_{2h} \supset \mathrm{V}_{2h} \supset \mathrm{F}_{3h} \supset \mathrm{V}_{3h} \supset \mathrm{F}_{4h} \supset \ldots \supset \mathrm{V}_{1-2h} \supset \mathrm{F}_{1-h} \supset \mathrm{V}_{1-h} \supset \mathrm{F}_1.$$

On pose maintenant

$$g_1 = h \sum_{j=0}^{2\mathrm{N}-1} \mathbf{1}_{\mathrm{V}_{jh}}, \quad f_1 = h \sum_{j=1}^{2\mathrm{N}} \mathbf{1}_{\mathrm{F}_{jh}}$$

On peut écrire

$$f_1 = h \sum_{j=1}^{\mathrm{N}} (\mathbf{1}_{\mathrm{F}_{(2j-1)h}} + \mathbf{1}_{\mathrm{F}_{2jh}}),$$

et on a alors

$$f_1 - f = h \sum_{j=1}^{\mathrm{N}} (\mathbf{1}_{\mathrm{F}_{(2j-1)h}} - \mathbf{1}_{\mathrm{F}_{2jh}}) = h \sum_{j=1}^{\mathrm{N}} \mathbf{1}_{\mathrm{F}_{(2j-1)h} \setminus \mathrm{F}_{2jh}} ;$$

les ensembles $\mathrm{F}_{(2j-1)h} \setminus \mathrm{F}_{2jh}$ sont disjoints à cause de la décroissance de la suite des fermés ; il en résulte que $0 \le f_1 - f \le h$. De même

$$g_1 = h \sum_{j=0}^{\mathrm{N}-1} (\mathbf{1}_{\mathrm{V}_{2jh}} + \mathbf{1}_{\mathrm{V}_{(2j+1)h}}),$$

$$g - g_1 = h \sum_{j=0}^{\mathrm{N}-1} (\mathbf{1}_{\mathrm{V}_{2jh}} - \mathbf{1}_{\mathrm{V}_{(2j+1)h}}) = h \sum_{j=0}^{\mathrm{N}-1} \mathbf{1}_{\mathrm{V}_{2jh} \setminus \mathrm{V}_{(2j+1)h}}$$

vérifie $0 \le g - g_1 \le h$. Pour finir

$$g_1 - f_1 = h \sum_{j=0}^{2\mathrm{N}-1} (\mathbf{1}_{\mathrm{V}_{jh}} - \mathbf{1}_{\mathrm{F}_{(j+1)h}}) = h \sum_{j=0}^{2\mathrm{N}-1} \mathbf{1}_{\mathrm{V}_{jh} \setminus \mathrm{F}_{(j+1)h}}$$

est encore une somme d'indicatrices d'ensembles disjoints, multipliée par h et il en résulte que $0 \le g_1 - f_1 \le h = 2^{-n}$.

On construit ainsi deux suites (f_n), (g_n) comme on l'a fait précédemment, qui convergent uniformément sur X vers une limite commune φ. La suite décroissante (g_n) est constamment nulle sur le fermé A_0, et la suite croissante (f_n) constamment égale à 1 sur A_1, ce qui donne les propriétés voulues pour la limite uniforme φ.