Prépa. Agrég écrit d'Analyse, avril 2003.

Fonctions de Bessel : comportement à l'infini

1. Étude au moyen de l'équation différentielle

Voir Chatterji volume 3, sections 2.6 et 2.7.

On suppose que n est un entier ≥ 0 et que y est solution sur l'intervalle ouvert $(0, +\infty)$ de l'équation de Bessel d'ordre n,

$$t^2 \, y''(t) + t \, y'(t) + (t^2 - n^2) \, y(t) = 0.$$

Si on pose $z(t) = \sqrt{t} \, y(t)$, on trouve facilement pour la fonction z la nouvelle équation différentielle

$$z''(t) + \Bigl(1 - \frac{n^2 - 1/4}{t^2}\Bigr) \, z(t) = 0. \tag{1}$$

Dans cette équation différentielle de la forme $z''(t) + q(t) \, z(t) = 0$, le terme

$$q(t) = 1 - \frac{n^2 - 1/4}{t^2}$$

tend assez vite vers 1 à l'infini, ce qui fait espérer que les solutions de cette équation "perturbée" seront proches "à l'infini" des solutions bien connues de l'équation $z''+z = 0$, équation qui correspond au cas $q = 1$. C'est ce que nous allons montrer dans cette première section.

Le résultat de la proposition qui suit est valable pour toute solution y de l'équation de Bessel d'ordre n (où n est un entier ≥ 0), mais on va s'intéresser surtout à la solution particulière donnée par la fonction de Bessel J_n, qui est – à un multiple près – la solution de l'équation de Bessel d'ordre n qui reste bornée quand $t \to 0$. On rappelle que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{J}_n(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \, \frac{(t/2)^{2k+n}}{k! \, (k+n)!}.$$

Proposition 1. *Pour tout entier $n \geq 0$, il existe deux constantes λ_n et φ_n telles que*

$$\mathrm{J}_n(t) = \lambda_n \frac{\cos(t - \varphi_n)}{\sqrt{t}} + \mathrm{O}(t^{-3/2})$$

lorsque $t \to +\infty$.

Dans la section 2, on calculera les valeurs de λ_0 et φ_0 par une autre approche.

Par la transformation usuelle qui fait passer d'une équation différentielle du second ordre à un système différentiel du premier ordre, on se ramènera à partir de l'équation (1) à un système différentiel du type

$$(*) \qquad \mathrm{Z}'(t) = \big(\mathrm{A} + \mathrm{E}(t)\big)\, \mathrm{Z}(t)$$

où Z est une fonction vectorielle définie sur un intervalle $[t_0, +\infty)$, A une matrice fixée de taille $d \times d$, et $t \to \mathrm{E}(t)$ une fonction à valeurs matricielles, qui est "petite", au sens que

$$\mathcal{E} = \int_{t_0}^{+\infty} \|\mathrm{E}(t)\|\, dt < +\infty.$$

Dans la suite, la norme d'une matrice sera la norme subordonnée à la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^d$. On suppose de plus que A est réelle antisymétrique, ce qui entraîne que l'exponentielle $\mathrm{e}^{s\mathrm{A}}$ est une matrice orthogonale pour tout s réel ; en effet, la transposée

$${}^t(\mathrm{e}^{s\mathrm{A}}) = \mathrm{e}^{s\,{}^t\mathrm{A}} = \mathrm{e}^{-s\mathrm{A}}$$

est bien l'inverse de la matrice $\mathrm{e}^{s\mathrm{A}}$ (on note ${}^t\mathrm{B}$ la transposée d'une matrice B, carrée ou non). Cherchons une solution du système $(*)$ sous la forme $\mathrm{Z}(t) = \mathrm{e}^{t\mathrm{A}}\, \mathrm{V}(t)$; on doit avoir

$$\mathrm{A}\, \mathrm{e}^{t\mathrm{A}}\, \mathrm{V}(t) + \mathrm{e}^{t\mathrm{A}}\, \mathrm{V}'(t) = \mathrm{Z}'(t) = \mathrm{A}\, \mathrm{Z}(t) + \mathrm{E}(t)\, \mathrm{Z}(t),$$

ce qui se transforme en

$$\mathrm{V}'(t) = \mathrm{e}^{-t\mathrm{A}}\, \mathrm{E}(t)\, \mathrm{e}^{t\mathrm{A}}\, \mathrm{V}(t).$$

Posons $\mathrm{B}(t) = \mathrm{e}^{-t\mathrm{A}}\, \mathrm{E}(t)\, \mathrm{e}^{t\mathrm{A}}$; on a $\|\mathrm{B}(t)\| = \|\mathrm{E}(t)\|$ puisque la matrice $\mathrm{e}^{t\mathrm{A}}$ est orthogonale, c'est-à-dire qu'elle définit une isométrie de $\mathbb{R}^d$ muni la norme euclidienne.

Lemme. *Si $t \to \mathrm{B}(t)$ est continue de $[t_0, +\infty)$ dans $\mathrm{M}_d(\mathbb{R})$ et si*

$$\mathcal{B} = \int_{t_0}^{+\infty} \|\mathrm{B}(t)\|\, dt < +\infty,$$

toute solution V du système différentiel $\mathrm{V}'(t) = \mathrm{B}(t)\mathrm{V}(t)$ sur l'intervalle $[t_0, +\infty)$ tend vers une limite $\mathrm{V}(\infty)$ lorsque $t \to +\infty$, et de plus

$$\forall t \ge t_0, \quad \|\mathrm{V}(t) - \mathrm{V}(\infty)\| \le \mathrm{e}^{\mathcal{B}}\, \|\mathrm{V}(t_0)\| \int_t^{+\infty} \|\mathrm{B}(s)\|\, ds.$$

Preuve. On commence par vérifier que V reste borné, en étudiant $\mathrm{N}(t) = {}^t\mathrm{V}(t)\mathrm{V}(t)$, le carré de la norme du vecteur $\mathrm{V}(t)$. On vérifie que $\mathrm{N}'(t) = 2\,{}^t\mathrm{V}(t)\mathrm{V}'(t)$, ce qui donne

$$\mathrm{N}'(t) = 2\,{}^t\mathrm{V}(t)\mathrm{B}(t)\mathrm{V}(t) \le 2\, \|\mathrm{B}(t)\|\, \|\mathrm{V}(t)\|^2 = 2\, \|\mathrm{B}(t)\|\, \mathrm{N}(t).$$

Il est facile de résoudre cette inéquation différentielle (c'est le lemme de Gronwall si on veut) : si on pose $b(t) = \int_{t_0}^t \|\mathrm{B}(s)\|\, ds$, on voit que la fonction $\varphi(t) = \mathrm{e}^{-2b(t)}\, \mathrm{N}(t)$ est décroissante puisque

$$\varphi'(t) = -2b'(t)\varphi(t) + \mathrm{e}^{-2b(t)}\, \mathrm{N}'(t) \le -2\|\mathrm{B}(t)\|\, \varphi(t) + 2\|\mathrm{B}(t)\|\, \mathrm{e}^{-2b(t)}\, \mathrm{N}(t) = 0.$$

On en déduit que

$$\forall t \ge t_0, \quad \mathrm{N}(t) \le \mathrm{e}^{2b(t)}\, \varphi(t_0) = \mathrm{e}^{2b(t)}\, \mathrm{N}(t_0).$$

D'après l'hypothèse du lemme, la fonction positive b tend en croissant vers $\mathcal{B}$ à l'infini, donc N et $\|\mathrm{V}\|$ restent bornés, avec

$$\forall t \geq t_0, \quad \|\mathrm{V}(t)\| \leq \mathrm{e}^{b(t)} \|\mathrm{V}(t_0)\| \leq \mathrm{e}^{\mathcal{B}} \|\mathrm{V}(t_0)\|.$$

Pour terminer, on a pour $t_0 \leq t_1 \leq t_2$

$$\|\mathrm{V}(t_2) - \mathrm{V}(t_1)\| = \Big\| \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{V}'(s)\, ds \Big\| \leq \Big(\sup_{t \geq t_0} \|\mathrm{V}(t)\| \Big) \int_{t_1}^{t_2} \|\mathrm{B}(s)\|\, ds,$$

ce qui montre que V vérifie la condition de Cauchy à l'infini, donc converge vers un vecteur limite $\mathrm{V}(\infty)$. En faisant passer à la limite la majoration précédente, on obtient

$$\|\mathrm{V}(\infty) - \mathrm{V}(t_1)\| = \Big\| \int_{t_1}^{+\infty} \mathrm{V}'(s)\, ds \Big\| \leq \mathrm{e}^{\mathcal{B}} \|\mathrm{V}(t_0)\| \int_{t_1}^{+\infty} \|\mathrm{B}(s)\|\, ds,$$

ce qui termine la démonstration du lemme.

Une fois le lemme établi, on obtient facilement la proposition qui suit, qui va nous confirmer que les solutions d'un certain système perturbé sont proches à l'infini de solutions du système sans perturbation.

Proposition 2. *On suppose que $t \to \mathrm{E}(t)$ est continue de $[t_0, +\infty)$ dans $\mathrm{M}_d(\mathbb{R})$, que*

$$\mathcal{E} = \int_{t_0}^{+\infty} \|\mathrm{E}(t)\|\, dt < +\infty,$$

et que A est une matrice réelle antisymétrique ; pour toute solution Z du système différentiel $\mathrm{Z}'(t) = (\mathrm{A} + \mathrm{E}(t))\, \mathrm{Z}(t)$ sur l'intervalle $[t_0, +\infty)$, il existe un vecteur $v \in \mathbb{R}^d$ tel que

$$\forall t \geq t_0, \quad \|\mathrm{Z}(t) - \mathrm{e}^{t\mathrm{A}}\, v\| \leq \mathrm{e}^{\mathcal{E}} \|\mathrm{Z}(t_0)\| \int_t^{+\infty} \|\mathrm{E}(s)\|\, ds.$$

Preuve. On a déjà dit que si on pose $\mathrm{Z}(t) = \mathrm{e}^{t\mathrm{A}}\, \mathrm{V}(t)$, alors V vérifie le système différentiel $\mathrm{V}'(t) = \mathrm{B}(t)\mathrm{V}(t)$, avec $\mathrm{B}(t) = \mathrm{e}^{-t\mathrm{A}}\, \mathrm{E}(t)\, \mathrm{e}^{t\mathrm{A}}$, qui a la même norme que $\mathrm{E}(t)$; d'après le lemme, $\mathrm{V}(t)$ tend vers un vecteur $v = \mathrm{V}(\infty)$ quand t tend vers l'infini, et de plus

$$\|\mathrm{V}(t) - v\| \leq \mathrm{e}^{\mathcal{B}} \|\mathrm{V}(t_0)\| \int_t^{+\infty} \|\mathrm{B}(s)\|\, ds = \mathrm{e}^{\mathcal{E}} \|\mathrm{Z}(t_0)\| \int_t^{+\infty} \|\mathrm{E}(s)\|\, ds.$$

Il ne reste plus qu'à multiplier $\mathrm{V}(t) - v$ par la matrice orthogonale $\mathrm{e}^{t\mathrm{A}}$ pour terminer la preuve de la proposition 2.

On voit ainsi que toute solution du système perturbé par $\mathrm{E}(t)$ est "asymptote" à une solution du système $\mathrm{Z}' = \mathrm{AZ}$. Revenons aux équations (1) qui correspondent au cas des fonctions de Bessel. On pose pour z solution de l'équation (1)

$$\mathrm{Z}(t) = \begin{pmatrix} z'(t) \\ z(t) \end{pmatrix} ;$$

l'équation différentielle (1) pour z fournit le système différentiel

$$\mathrm{Z}'(t) = \begin{pmatrix} 0 & -1 + (n^2 - 1/4)\, t^{-2} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \mathrm{Z}(t).$$

On est dans le cas couvert par la proposition 2, avec

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad \mathrm{E}(t) = \begin{pmatrix} 0 & (n^2 - 1/4)\, t^{-2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Prenons $t_0 = 1$. On a bien $\int_1^{+\infty} \|\mathrm{E}(t)\| \, dt < +\infty$, et de plus le majorant de l'erreur

$$\int_t^{+\infty} \|\mathrm{E}(s)\| \, ds = |n^2 - 1/4| \int_t^{+\infty} \frac{ds}{s^2} = \frac{|n^2 - 1/4|}{t}$$

est de l'ordre de t^{-1}. Par ailleurs si $v = (v_1, v_2)$,

$$\mathrm{e}^{t\mathrm{A}} = \begin{pmatrix} \cos(t) & -\sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix} \quad ; \quad \mathrm{e}^{t\mathrm{A}}\, v = \begin{pmatrix} v_1 \cos(t) - v_2 \sin(t) \\ v_1 \sin(t) + v_2 \cos(t) \end{pmatrix}.$$

Si z est solution de l'équation (1), le vecteur $\mathrm{Z} = (z', z)$ vérifie la conclusion de la proposition 2, c'est à dire que $\|\mathrm{Z}(t) - \mathrm{e}^{t\mathrm{A}}\, v\| = \mathrm{O}(1/t)$ pour un certain $v \in \mathbb{R}^2$. En particulier, la deuxième coordonnée $z(t)$ de $\mathrm{Z}(t)$ est proche de la deuxième coordonnée de $\mathrm{e}^{t\mathrm{A}}\, v$, donnée par

$$v_1 \sin(t) + v_2 \cos(t) = \lambda \cos(t - \varphi),$$

pour certains λ, φ calculables à partir de v_1, v_2. Si on applique les résultats obtenus à la fonction de Bessel J_n, on obtient l'énoncé suivant :

pour tout entier $n \ge 0$, il existe deux constantes λ_n et φ_n telles que

$$\sqrt{t}\, \mathrm{J}_n(t) = \lambda_n \cos(t - \varphi_n) + \mathrm{O}(1/t),$$

lorsque $t \to +\infty$. On obtiendra les valeurs exactes de ces constantes, pour $n = 0$, par une méthode différente dans la section qui suit.

2. Étude au moyen de la définition intégrale

Un cas particulier de la méthode de la phase stationnaire

Voir Zuily–Queffélec, Chapitre IX, section VI.2.

Soit z un nombre réel positif fixé ; on sait que la fonction $x \in \mathbb{R} \to \mathrm{e}^{-z^2 x^2/2}$ est la transformée de Fourier de la probabilité gaussienne γ_z sur $\mathbb{R}$ définie par

$$d\gamma_z(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, \mathrm{e}^{-x^2/(2z^2)}\, \frac{dx}{z}.$$

Soit d'autre part a une fonction réelle sur $\mathbb{R}$, Lebesgue-intégrable ainsi que sa transformée de Fourier $\widehat{a}$; on sait que a est en fait continue sur $\mathbb{R}$ et que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad a(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{ixy}\, \widehat{a}(y)\, dy.$$

La formule d'échange $\int a\, \widehat{b} = \int \widehat{a}\, b$ (qui est une conséquence immédiate de Fubini) donne

$$\text{(2)} \qquad \forall z > 0, \quad \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-z^2 x^2/2}\, a(x)\, dx = \frac{1}{z\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-x^2/(2z^2)}\, \widehat{a}(x)\, dx.$$

On considère maintenant dans $\mathbb{C}$ le quart de plan ouvert

$$\Omega = \{z \in \mathbb{C} : z = a + ib,\ a, b \in \mathbb{R},\ |b| < a\}.$$

On vérifie facilement que l'ensemble Ω est invariant par la transformation $z \to 1/z$, et que $\operatorname{Re} z^2 = a^2 - b^2 > 0$ pour tout $z \in \Omega$; on a encore $\operatorname{Re} z^2 \ge 0$ quand z est dans l'adhérence $\overline{\Omega}$, ce qui permet de voir que

$$\bigl|\mathrm{e}^{-z^2x^2/2}\bigr| = \mathrm{e}^{-(\operatorname{Re} z^2)x^2/2} \le 1$$

pour tout x réel et $z \in \overline{\Omega}$; puisqu'on a supposé a intégrable, on peut poser pour tout $z \in \overline{\Omega}$

$$f(z) = z \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-z^2x^2/2}\, a(x)\, dx\,;$$

pour les mêmes raisons, puisque $\widehat{a}$ est intégrable, on peut poser pour tout $z \in \overline{\Omega} \setminus \{0\}$

$$g(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-x^2/(2z^2)}\, \widehat{a}(x)\, dx\,;$$

(il y a maintenant un problème pour $z = 0$, qui n'existait pas pour la fonction f). On voit (avec le théorème de Lebesgue) que ces définitions donnent deux fonctions f et g continues sur $\overline{\Omega} \setminus \{0\}$.

Il est facile de voir que ces deux fonctions f et g sont holomorphes dans l'ouvert Ω, en utilisant le théorème usuel d'holomorphie sous l'intégrale ; elles sont donc égales dans Ω puisqu'elles coïncident pour tout z réel > 0 d'après (2). On a aussi en prolongeant par continuité à l'adhérence de Ω

$$\forall z \in \overline{\Omega} \setminus \{0\}, \quad z \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-z^2x^2/2}\, a(x)\, dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-x^2/(2z^2)}\, \widehat{a}(x)\, dx.$$

Lorsque $|z| \to +\infty$ avec $z \in \overline{\Omega}$, on voit que $\mathrm{e}^{-x^2/(2z^2)}$ tend vers 1 en restant dominé en module par 1 ; l'intégrabilité de $\widehat{a}$ et le théorème de Lebesgue donnent alors

$$(3) \qquad \lim_{|z|\to\infty, z\in\overline{\Omega}} z \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-z^2x^2/2}\, a(x)\, dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \widehat{a}(x)\, dx = \sqrt{2\pi}\, a(0).$$

Introduisons $\xi = \mathrm{e}^{i\pi/4} = (1+i)/\sqrt{2}$, qui est dans $\overline{\Omega}$ et vérifie $\xi^2 = i$. Pour tout $t > 0$, le point $z = \xi\sqrt{t}$ est dans $\overline{\Omega}$ et on obtient comme cas particulier de ce qui précède

$$(4) \qquad \lim_{t\to+\infty} \xi\sqrt{t} \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-itx^2/2}\, a(x)\, dx = \sqrt{2\pi}\, a(0),$$

ce qui s'écrit aussi

$$\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-itx^2/2}\, a(x)\, dx \sim \overline{\xi}\, a(0) \sqrt{\frac{2\pi}{t}} = \mathrm{e}^{-i\pi/4}\ a(0) \sqrt{\frac{2\pi}{t}}$$

lorsque $t \to +\infty$. En utilisant la demi-droite conjuguée on aura de même

$$\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{itx^2/2}\, a(x)\, dx \sim \xi\, a(0) \sqrt{\frac{2\pi}{t}} = \mathrm{e}^{i\pi/4}\ a(0) \sqrt{\frac{2\pi}{t}}$$

lorsque $t \to +\infty$.

Comportement à l'infini de la fonction de Bessel J_0

On va appliquer ce qui précède à la fonction de Bessel J_0. On écrit

$$\mathrm{J}_0(t) = \int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{it\cos(\theta)}\ \frac{d\theta}{2\pi} = \int_{-\pi/2}^{3\pi/2} \mathrm{e}^{it\cos(\theta)}\ \frac{d\theta}{2\pi}.$$

On commencera avec l'étude de

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \mathrm{e}^{it\cos(\theta)}\ d\theta\,;$$

sur cet intervalle la dérivée $-\sin(\theta)$ de la fonction "phase" $\theta \to \cos(\theta)$ possède un seul zéro, à savoir $\theta = 0$ (au point 0 la "phase est stationnaire"). On considérera ensuite l'intervalle $[\pi/2, 3\pi/2]$ sur lequel on aura à nouveau un unique point critique pour la phase, le point $\theta = \pi$. Chacun de ces deux points critiques fera, après un petit changement de variable, apparaître le phénomène étudié dans le paragraphe précédent, mais avec des paramètres différents. Il est donc naturel de découper le problème en deux morceaux présentant une singularité unique.

En fait il est techniquement plus rusé de procéder à un découpage plus doux, du type partition de l'unité. On considère donc une fonction φ_1 de classe C^∞ et 2π-périodique sur $\mathbb{R}$, telle que $\varphi_1(\theta) = 1$ au voisinage de $\theta = 0$ et $\varphi_1(\theta) = 0$ au voisinage de $\theta = \pi$; on définit ensuite φ_2 par l'égalité $\varphi_1(\theta) + \varphi_2(\theta) = 1$ pour tout θ. Alors

$$\mathrm{J}_0(t) = \int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{it\cos(\theta)}\ \bigl(\varphi_1(\theta) + \varphi_2(\theta)\bigr)\, \frac{d\theta}{2\pi}.$$

On pose

$$\mathrm{I}_1(t) = \int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{it\cos(\theta)}\ \varphi_1(\theta)\, d\theta.$$

On écrit

$$\mathrm{I}_1(t) = \mathrm{e}^{it} \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{e}^{it(\cos(\theta)-1)}\ \varphi_1(\theta)\, d\theta = \mathrm{e}^{it} \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{e}^{-2it\sin^2(\theta/2)}\ \varphi_1(\theta)\, d\theta.$$

On pose $x = 2\,\sin(\theta/2)$, qui est bien monotone sur l'intervalle $(-\pi/2, \pi/2)$ étudié ; la bijection réciproque, définie sur l'intervalle image $\mathrm{I} = (-2, 2)$, est donnée par la relation $\theta = f(x) = 2 * \operatorname{Arcsin}(x/2)$; la fonction f est de classe C^∞ sur l'intervalle I (elle est en fait développable en série entière sur cet intervalle). L'expression de $\mathrm{I}_1(t)$ devient

$$\mathrm{I}_1(t) = \mathrm{e}^{it} \int_{-2}^{2} \mathrm{e}^{-itx^2/2}\ \frac{\varphi_1(f(x))}{\sqrt{1 - x^2/4}}\, dx.$$

On remarque que $\varphi_1(f(x))$ s'annule au voisinage de $x = -2$ et de $x = 2$, parce que φ_1 est nulle au voisinage de $\pm\pi$: si φ_1 est nulle sur $[\pi - \varepsilon, \pi + \varepsilon]$, où $0 < \varepsilon < \pi$, alors $\eta = 2\,\sin(\varepsilon/2)$ vérifie $0 < \eta < 2$, et $\varphi_1(f(x))$ est nulle sur les deux intervalles ouverts $(-2, -\eta)$ et $(\eta, 2)$; ceci permet de définir une fonction a de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, à support compact, telle que

$$a(x) = \frac{\varphi_1(f(x))}{\sqrt{1 - x^2/4}} \tag{5}$$

pour $x \in (-2,2)$ et $a(x) = 0$ lorsque $|x| \geq 2$. Alors

$$\mathrm{I}_1(t) = \mathrm{e}^{it} \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-itx^2/2}\, a(x)\, dx,$$

et d'après le paragraphe précédent, puisque $a(0) = 1$, on a pour $t \to +\infty$

$$\mathrm{I}_1(t) \sim \mathrm{e}^{it}\, \overline{\xi} \sqrt{\frac{2\pi}{t}} = \mathrm{e}^{i(t-\pi/4)} \sqrt{\frac{2\pi}{t}}.$$

Pour le résultat final il faudra ajouter $\mathrm{I}_1(t)$ et $\mathrm{I}_2(t)$, et les équivalents sont mal adaptés à l'addition. Mais en fait on avait obtenu à l'équation (4) un résultat un peu plus précis,

$$\lim_{t \to +\infty} \sqrt{t} \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-itx^2/2}\, a(x)\, dx = \mathrm{e}^{-i\pi/4} \sqrt{2\pi},$$

qui donne par multiplication avec la fonction bornée $t \to \mathrm{e}^{it}$

$$\lim_{t \to +\infty} \Bigl(\sqrt{t}\, \mathrm{I}_1(t) - \mathrm{e}^{i(t-\pi/4)} \sqrt{2\pi} \Bigr) = 0.$$

En procédant de façon analogue avec

$$\mathrm{I}_2(t) = \int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{it\cos(\theta)}\, \varphi_2(\theta)\, d\theta$$

on obtient

$$\lim_{t \to +\infty} \Bigl(\sqrt{t}\, \mathrm{I}_2(t) - \mathrm{e}^{-i(t-\pi/4)} \sqrt{2\pi} \Bigr) = 0.$$

Finalement on obtient pour $\mathrm{J}_0(t) = (\mathrm{I}_1(t) + \mathrm{I}_2(t))/(2\pi)$ que

$$\sqrt{t}\, \mathrm{J}_0(t) - \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, \cos(t - \pi/4)$$

tend vers 0 lorsque $t \to +\infty$. On a donc identifié les constantes λ_0 et φ_0 introduites dans le paragraphe 1. En rapprochant les deux résultats, on trouve finalement que

$$\mathrm{J}_0(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi t}}\, \cos(t - \pi/4) + \mathrm{O}(t^{-3/2})$$

lorsque $t \to +\infty$.

Remarque 1. On aurait pu obtenir le terme complémentaire en $\mathrm{O}(t^{-3/2})$ en précisant l'erreur dans l'équation (3). En exploitant le fait que $|1 - \mathrm{e}^{\zeta}\,| \leq |\zeta|$ lorsque $\mathrm{Re}\, \zeta \geq 0$, on obtient pour $z \in \overline{\Omega} \setminus \{0\}$ la majoration

$$\bigl|1 - \mathrm{e}^{-x^2/(2z^2)}\bigr| \leq \frac{x^2}{2z^2}$$

qui permet d'étudier l'erreur, sous l'hypothèse supplémentaire que $\int_{\mathbb{R}} x^2\, \widehat{a}(x)\, dx < +\infty$. Cette hypothèse supplémentaire sera en particulier satisfaite quand a est C^∞ à support compact. On aura

$$\lim_{|z| \to \infty, z \in \overline{\Omega}} z^2 \Bigl(\sqrt{2\pi}\, a(0) - z \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-z^2x^2/2}\, a(x)\, dx \Bigr) =$$

$$\lim_{|z| \to \infty, z \in \overline{\Omega}} \frac{z^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \bigl(1 - \mathrm{e}^{-x^2/(2z^2)}\bigr) \widehat{a}(x)\, dx = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} x^2\, \widehat{a}(x)\, dx = -\sqrt{\frac{\pi}{2}}\, a''(0).$$

Remarque 2. Il est très facile de faire le même travail pour toutes les fonctions J_n, pour n entier ≥ 0. On a en effet avec le changement de variable $\alpha = \pi/2 - \theta$

$$\mathrm{J}_n(t) = \int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{it\sin(\alpha) - in\alpha} \, \frac{d\alpha}{2\pi} = \mathrm{e}^{-in\pi/2} \int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{it\cos(\theta) + in\theta} \, \frac{d\theta}{2\pi}.$$

Dans l'intégrale, le facteur nouveau $\mathrm{e}^{in\theta}$ ne contribuera qu'à changer la fonction a définie à l'équation (5) ; la valeur de a ne sera pas changée au point critique $\theta = 0$, mais elle sera multipliée par $(-1)^n$ au point critique $\theta = \pi$. Il faut de plus tenir compte du multiple $\mathrm{e}^{-in\pi/2}$ situé devant l'intégrale ; les calculs sont laissés au lecteur. On remarquera seulement que pour $n = 4k$ multiple de 4, le premier terme du développement asymptotique de J_{4k} est identique à celui de J_0,

$$\mathrm{J}_{4k}(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi t}} \cos(t - \pi/4) + \mathrm{O}(t^{-3/2})$$

lorsque $t \to +\infty$. On pourra vérifier que

$$\mathrm{J}_{4k+1}(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi t}} \sin(t - \pi/4) + \mathrm{O}(t^{-3/2})$$

et que

$$\mathrm{J}_{4k+2}(t) = -\mathrm{J}_{4k}(t) + \mathrm{O}(t^{-3/2}), \quad \mathrm{J}_{4k+3}(t) = -\mathrm{J}_{4k+1}(t) + \mathrm{O}(t^{-3/2})$$

lorsque $t \to +\infty$.

Remarque 3. Si on tend vers l'infini par valeurs réelles dans la formule (3), et si on adapte l'étude précédente à celle de l'intégrale

$$\mathrm{J}_0(it) = \int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{-t\cos(\theta)} \, \frac{d\theta}{2\pi}\,, \tag{6}$$

on passe de la méthode de la phase stationnaire à la *méthode de Laplace*. Une différence est à noter : dans ce nouveau cas, c'est le seul point critique $\theta = \pi$ qui sera important pour l'étude de l'intégrale (6) lorsque $t \to +\infty$, parce que $\mathrm{e}^{-t\cos(0)} = \mathrm{e}^{-t}$ est bien plus petit que $\mathrm{e}^{-t\cos(\pi)} = \mathrm{e}^{t}$ lorsque $t \to +\infty$. La situation sera inversée quand $t \to -\infty$; cette étude en $-\infty$ est inutile ici à cause de la parité de J_0.