Prépa. Agrég écrit d'Analyse, 2002–2003, exercices.

1. Intégration, jusqu'à la convergence dominée

Exercices basiques

Exercice 1.1. Montrer que pour toute suite croissante de mesures positives (μ_n) sur un espace mesurable $(\Omega, \mathcal{A})$, la limite $\mathrm{A} \in \mathcal{A} \to \mu(\mathrm{A}) = \lim_n \mu_n(\mathrm{A})$ est une mesure positive sur $(\Omega, \mathcal{A})$.

Exercice 1.2. Si f est une fonction mesurable ≥ 0, montrer que $\int f\,d\mu = 0$ si et seulement si $\mu(\{f > 0\}) = 0$.

Montrer que si $\int f\,d\mu < \infty$, alors $\mu(\{f = +\infty\}) = 0$.

Exercice 1.3. Soit f une fonction mesurable sur $(\Omega, \mathcal{A})$, à valeurs dans $\mathbb{R}$ (muni bien sûr de sa tribu borélienne) ; on suppose que f est intégrable par rapport à une mesure positive μ sur (Ω, μ). Si on a $\int_{\mathrm{A}} f\,d\mu \geq 0$ pour tout $\mathrm{A} \in \mathcal{A}$, montrer que f est ≥ 0 μ-presque partout.

Exercice 1.4. Si f est intégrable sur $\mathbb{R}$, on pose

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \widehat{f}(t) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\,\mathrm{e}^{-ixt}\,dx.$$

a. Montrer que $\widehat{f}$ est bornée, continue, et tend vers 0 à l'infini.

b. Montrer que si $\int_{\mathbb{R}} |x|^k |f(x)|\,dx < +\infty$, alors $\widehat{f}$ est de classe C^k sur $\mathbb{R}$ (k est un entier ≥ 1).

c. Si μ est une mesure ≥ 0 finie sur $\mathbb{R}$, on pose

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \widehat{\mu}(t) = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-ixt}\,d\mu(x).$$

Généraliser les résultats de continuité et dérivabilité.

Exercice 1.5. Si μ est une probabilité sur $\mathbb{R}$, symétrique (c'est-à-dire que la mesure de tout borélien A est égale à la mesure de son symétrique, image par $x \to -x$), vérifier que $\widehat{\mu}(t) = \int \cos(xt)\,d\mu(x)$.

Si pour une probabilité symétrique μ on a $1 - \widehat{\mu}(t) = \mathrm{O}(t^2)$ quand $t \to 0$, en déduire que $\int x^2\,d\mu(x) < +\infty$.

Si μ est une probabilité sur $\mathbb{R}$ telle que sa transformée de Fourier $\widehat{\mu}$ soit deux fois dérivable à l'origine, alors $\int x^2\,d\mu(x) < +\infty$. Réciproque ?

Exercice 1.6.

Si $\int |g_k|\,d\mu \leq 2^{-k}$ pour tout entier $k \geq 0$, montrer que la suite $(g_k(\omega))$ tend vers 0 pour μ-presque tout $\omega \in \Omega$.

Si $(f_n) \subset \mathrm{L}_p(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ tend vers f en norme L_p, trouver une sous-suite (f_{n_j}) qui tend vers f μ-presque partout.

Exercice 1.7. Si f est une fonction Lebesgue-intégrable sur $\mathbb{R}$, montrer que la fonction g définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-|x-t|}\,f(t)\,dt$$

est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

Exercices additionnels

Exercice 1.a.1. Montrer que

$$\int_{-2}^{2} \Bigl(1 - \frac{x^2}{4}\Bigr)^n \, dx$$

tend vers 0 quand $n \to +\infty$. Montrer que pour tout ε tel que $0 < \varepsilon \le 2$ on a

$$\lim_n \sqrt{n} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \Bigl(1 - \frac{x^2}{4}\Bigr)^n \, dx = 2\sqrt{\pi}.$$

Exercice 1.a.2. On suppose que μ est une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{A})$ telle que pour tout $\mathrm{A} \in \mathcal{A}$ tel que $\mu(\mathrm{A}) > 0$, il existe $\mathrm{B} \in \mathcal{A}$, $\mathrm{B} \subset \mathrm{A}$ et $0 < \mu(\mathrm{B}) < \mu(\mathrm{A})$. Montrer que pour tout $c \in [0,1]$, il existe un ensemble $\mathrm{A}_c \in \mathcal{A}$ tel que $\mu(\mathrm{A}_c) = c$.

Exercice 1.a.3. On suppose que μ est une mesure ≥ 0 sur $(\mathrm{X}, \mathcal{A})$ et f une fonction $\mathcal{A}$-mesurable ≥ 0 ; montrer que la formule

$$\forall \mathrm{A} \in \mathcal{A}, \quad \nu(\mathrm{A}) = \int_{\mathrm{A}} f \, d\mu = \int \mathbf{1}_{\mathrm{A}} f \, d\mu$$

définit une mesure positive ν sur $(\mathrm{X}, \mathcal{A})$.

2. Jeux de tribus, Fubini

Exercices basiques

Exercice 2.1. Montrer que tout ouvert de $\mathbb{R}$ est réunion (finie ou) dénombrable d'intervalles ouverts.

Exercice 2.2. Si (f_n) est une suite de fonctions réelles mesurables définies sur $(\Omega, \mathcal{A})$, montrer que l'ensemble A des points $\omega \in \Omega$ où la limite $\lim_n f_n(\omega)$ existe est un ensemble de la tribu $\mathcal{A}$.

Exercice 2.3. Mesurabilité et topologie. Montrer qu'une fonction à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ est mesurable si et seulement si elle est limite d'une suite de fonctions étagées.

Montrer que toute limite simple d'une suite (f_n) de fonctions mesurables de $(\Omega, \mathcal{A})$ dans $(\mathrm{X}, \mathcal{B})$ (tribu borélienne) est mesurable.

Montrer que toute application continue de $\mathbb{R}^m$ dans $\mathbb{R}^n$ est borélienne, c'est à dire mesurable pour les tribus boréliennes.

Si f_1, f_2 sont deux applications mesurables de $(\Omega, \mathcal{A})$ dans $(\mathbb{R}^{d_j}, \mathcal{B}_j)$, $j = 1, 2$ (tribus boréliennes) alors l'application $\omega \to (f_1(\omega), f_2(\omega))$ est mesurable de $(\Omega, \mathcal{A})$ dans l'espace produit $\mathbb{R}^{d_1} \times \mathbb{R}^{d_2}$.

Exercice 2.4.

a. On désigne par λ la mesure de Lebesgue sur $[0,1]$. Montrer que pour tout borélien B de $[0,1]$ et tout $\varepsilon > 0$ il existe un fermé $\mathrm{F} \subset \mathrm{B}$ tel que $\lambda(\mathrm{B} \setminus \mathrm{F}) < \varepsilon$.

b. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une fonction φ continue sur $[0,1]$ telle que $\int_0^1 |\varphi(x) - \mathbf{1}_{\mathrm{B}}(x)| \, dx < \varepsilon$.

c. Montrer que $\mathrm{C}([0,1])$ est dense dans $\mathrm{L}_1([0,1])$.

d. Les résultats obtenus dépendent-ils beaucoup du fait que la mesure soit la mesure de Lebesgue ?

Exercice 2.5. Soit (K, d) un compact métrique muni de sa tribu borélienne $\mathcal{B}$ et soit μ une mesure finie sur $(\mathrm{K}, \mathcal{B})$; montrer que la famille des $\mathrm{A} \in \mathcal{B}$ telles que 1_{A} soit limite dans $\mathrm{L}_1(\mathrm{K}, \mu)$ d'une suite (φ_n) de fonctions réelles continues sur K telles que $0 \le \varphi_n \le 1$ est une tribu de parties de K qui contient les ouverts de K.

Montrer que (l'image de) $\mathrm{C}(\mathrm{K})$ est dense dans $\mathrm{L}_1(\mathrm{K}, \mathcal{B}, \mu)$.

Exercice 2.6. Soient $(\Omega_1, \mathcal{A}_1)$ et $(\Omega_2, \mathcal{A}_2)$ deux espaces mesurables ; montrer que pour tout ensemble $\mathrm{A} \in \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ et pour tout $x \in \Omega_1$, les sections

$$\mathrm{A}_x = \{y \in \Omega_2 : (x, y) \in \mathrm{A}\}$$

sont des ensembles de $\mathcal{A}_2$.

Exercice 2.7. Si f est mesurable ≥ 0 montrer que

$$\int f \, d\mu = \int_0^{+\infty} \mu(\{f > t\} \, dt.$$

Exercice 2.8. Si f et g sont intégrables sur $\mathbb{R}$ posons

$$\mathrm{F}(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t) \, dt, \quad \mathrm{G}(x) = \int_{-\infty}^{x} g(t) \, dt.$$

Montrer que pour tous $a < b$ réels on a

$$\int_a^b \mathrm{F}(t) g(t) \, dt = \big[\mathrm{FG}\big]_a^b - \int_a^b f(t) \mathrm{G}(t) \, dt.$$

Exercices additionnels

Exercice 2.a.1. Montrer que tout ouvert de $\mathbb{R}$ est réunion (finie ou) dénombrable d'intervalles ouverts *deux à deux disjoints*.

Exercice 2.a.2. Soit $g : \Omega \to \mathbb{R}$ une application quelconque, $\mathcal{A} = g^{-1}(\mathcal{B}_{\mathbb{R}})$ (qu'on appellera en proba la tribu engendrée par la v.a. g) ; montrer que f est mesurable de $(\Omega, \mathcal{A})$ dans $\mathbb{R}$ si et seulement si $f = \varphi(g)$, avec φ borélienne de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Exercice 2.a.3. Tribus et algèbres de fonctions.

Soit $\mathbf{A}$ une algèbre de fonctions réelles bornées sur un ensemble X, contenant les fonctions constantes et stable par convergence monotone bornée des suites ; montrer que $\mathbf{A}$ est exactement l'algèbre $\mathcal{L}_\infty(\mathrm{X}, \mathcal{A})$ pour une tribu $\mathcal{A}$ convenable de parties de X.

Indications : $\mathcal{A}$ est évidente à deviner ; utiliser Weierstrass pour montrer que $|f| \in \mathbf{A}$ lorsque $f \in \mathbf{A}$. En déduire que $\sup(f, g) \in \mathbf{A}$ lorsque $f, g \in \mathbf{A}$. Utiliser la suite $f_n = \inf(\sup(f, 0), 1)^n$ pour trouver que $\mathbf{1}_{\{f \ge 1\}} \in \mathbf{A}$.

Exercice 2.a.4. Soit E un espace de Banach séparable, muni de sa tribu borélienne $\mathcal{B}$, et soit $(\Omega, \mathcal{A})$ un espace mesurable ; montrer qu'une application f de Ω dans E est mesurable si et seulement si f est limite simple d'une suite de fonctions dénombrablement étagées de $(\Omega, \mathcal{A})$ dans E (on dit que g est dénombrablement étagée si elle prend un ensemble fini ou dénombrable V de valeurs et si $\{g = v\} \in \mathcal{A}$ pour toute valeur $v \in \mathrm{V}$).

Exercice 2.a.5. Théorème d'Egorov.

On suppose que μ est une mesure ≥ 0 finie sur $(\Omega, \mathcal{A})$.

a. Si la suite (f_n) de fonctions $\mathcal{A}$-mesurables tend simplement vers 0 sur Ω, trouver pour tout $k \geq 0$ un entier n_k tel que

$$\mu\{|f_{n_k}| > 2^{-k}\} \leq 2^{-k}.$$

b. Montrer que pour tout entier k_0, la sous-suite $(f_{n_j})_j$ trouvée en *a* tend uniformément vers 0 sur l'ensemble

$$\mathrm{A}(k_0) = \bigcap_{k \geq k_0} \{|f_{n_k}| \leq 2^{-k}\}$$

et que cet ensemble $\mathrm{A}(k_0)$ a une mesure qui tend vers $\mu(\Omega)$ lorsque $k_0 \to +\infty$.

c. Théorème de Lusin. Montrer que pour toute fonction f borélienne sur $[0, 1]$, il existe pour tout $\varepsilon > 0$ un compact $\mathrm{K}_\varepsilon \subset [0, 1]$ tel que $\lambda([0, 1] \backslash \mathrm{K}_\varepsilon) < \varepsilon$ et que la restriction de f à K_ε soit continue.

Exercice 2.a.6. Soient g et h deux fonctions continues strictement croissantes et inverses l'une de l'autre, telles que $g(0) = 0$; montrer que

$$\int_0^x g(s)\, ds = \int_0^{g(x)} h(t)\, dt = xg(x).$$

3. Convolution, inégalités

Exercice 3.1. Soient $f, g \in \mathrm{L}_1(\mathbb{R}^d)$; calculer la transformée de Fourier de $f * g$.

Exercice 3.2. On suppose $0 < r < p < +\infty$. Montrer que

$$\Big(\int_{\mathrm{X}} \Big(\int_{\mathrm{Y}} |f(x, y)|^r\, d\nu(y)\Big)^{p/r} d\mu(x)\Big)^{1/p} \leq \Big(\int_{\mathrm{Y}} \Big(\int_{\mathrm{X}} |f(x, y)|^p\, d\mu(x)\Big)^{r/p} d\nu(y)\Big)^{1/r}.$$

Exercice 3.3.

a. On suppose que $\alpha, \beta, \gamma > 0$ vérifient $\alpha + \beta + \gamma = 1$. Montrer que pour toutes fonctions positives intégrables u, v, w sur un espace mesuré $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ on a

$$\int u^\alpha v^\beta w^\gamma\, d\mu \leq \Big(\int u\, d\mu\Big)^\alpha \Big(\int v\, d\mu\Big)^\beta \Big(\int w\, d\mu\Big)^\gamma.$$

b. On suppose que $\alpha, \beta, \gamma > 0$ vérifient $\alpha + \beta + \gamma = 2$. Montrer que pour toutes fonctions positives intégrables $\mathrm{U}, \mathrm{V}, \mathrm{W}$ sur $\mathbb{R}^d$ on a

$$\int \mathrm{U}(x-y)^\alpha \mathrm{V}(y)^\beta \mathrm{W}(x)^\gamma\, dx\, dy \leq \Big(\int \mathrm{U}(x)\, dx\Big)^\alpha \Big(\int \mathrm{V}(x)\, dx\Big)^\beta \Big(\int \mathrm{W}(x)\, dx\Big)^\gamma.$$

En déduire que si $p, q, r \geq 1$ et $1/p + 1/q = 1 + 1/r$, on a $\mathrm{L}_p * \mathrm{L}_q \subset \mathrm{L}_r$, et plus précisément $\|f * g\|_r \leq \|f\|_p\, \|g\|_q$.

Indication pour un cas particulier, $\alpha = \beta = \gamma = 2/3$. On écrit le produit

$$\mathrm{U}(x-y)^{2/3} \mathrm{V}(y)^{2/3} \mathrm{W}(x)^{2/3}$$

comme produit des trois termes $(\mathrm{U}(x-y)\mathrm{V}(y))^{1/3}$, $(\mathrm{V}(y)\mathrm{W}(x))^{1/3}$ et $(\mathrm{U}(x-y)\mathrm{W}(x))^{1/3}$. On pose ensuite $u(x, y) = \mathrm{V}(y)\mathrm{W}(x)$, $v(x, y) = \mathrm{U}(x-y)\mathrm{W}(x)$ et pour finir $w(x, y) = \mathrm{U}(x-y)\mathrm{V}(y)$; on applique l'inégalité de Hölder pour trois fonctions à u, v, w avec les exposants $1/3, 1/3, 1/3$ de somme 1, sur l'espace mesuré $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ muni de la mesure produit $dx\, dy$.

Exercice 3.4. Soit A un borélien de mesure > 0 dans $\mathbb{R}^d$; montrer que l'ensemble $\mathrm{A}-\mathrm{A} = \{a-b : a, b \in \mathrm{A}\}$ est un voisinage de 0 dans $\mathbb{R}^d$.

Exercices additionnels

Exercice 3.a.1. Pour tout p tel que $1 \le p < +\infty$ et toute fonction $f \in \mathrm{L}_p(\mathbb{R})$ on peut définir le L_p-module de continuité de f par la formule

$$\forall t > 0, \quad \omega_p(f, t) = \sup\{\|\tau_s f - f\|_p : 0 \le s \le t\}.$$

On sait que $\omega_p(f,t)$ tend vers 0 quand t tend vers 0. On peut définir des espaces de fonctions qui dépendent de la vitesse de convergence de ce module : ce sont les espaces de Besov (voir plus loin).

a. On fixe une fonction $\varphi \ge 0$ de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, d'intégrale 1 et dont le support est contenu dans l'intervalle $[-1, 1]$. On pose ensuite $\varphi_n(x) = 2^n\,\varphi(2^n x)$ pour tout $n \ge 0$. On considère une fonction χ continue, d'intégrale nulle et de support contenu dans un intervalle $[-a, a]$. Montrer que si $f \in \mathrm{L}_p(\mathbb{R})$, on a pour tout n et tout $x \in \mathbb{R}$

$$(f * \varphi_n * \chi)(x) = \int \big(f(x-t-s) - f(x-s)\big)\varphi_n(s)\chi(t)\,ds\,dt\,;$$

en déduire que

$$|(f * \varphi_n * \chi)(x)| \le 2^{n/p}\,\|\varphi\|_{p'}\,\|\chi\|_1\,\omega_p(f, a) \tag{1}$$

où p' désigne l'exposant conjugué de p.

b. Pour $0 < s < 1$ et $1 \le p, q < +\infty$ on désigne par $\mathrm{B}_p^{s,q}(\mathbb{R})$ (espace de Besov) l'espace vectoriel formé des fonctions $f \in \mathrm{L}_p(\mathbb{R})$ telles que

$$\int_0^{+\infty} \Big(\frac{\omega_p(f,h)}{h^s}\Big)^q\,\frac{dh}{h} < +\infty.$$

On va s'intéresser particulièrement à l'espace $\mathrm{B}_p^{s,1}(\mathbb{R})$. Montrer que $f \in \mathrm{B}_p^{s,1}(\mathbb{R})$ si et seulement si $\sum_{n\in\mathbb{Z}} 2^{ns}\,\omega_p(f, 2^{-n}) < +\infty$.

c. Soit $f \in \mathrm{B}_p^{s,1}(\mathbb{R})$; montrer que la suite $(f_n) = (f * \varphi_n * \varphi_n)$ tend vers f dans $\mathrm{L}_p(\mathbb{R})$ quand $n \to +\infty$, et qu'il existe une constante M telle que

$$\forall n \ge 0, \quad \|f_{n+1} - f_n\|_\infty \le \mathrm{M}\,2^{n/p}\,\omega_p(f, 2^{-n})$$

(on pourra appliquer (1) avec $\chi = \varphi_n - \varphi_{n+1}$ et $\chi = \varphi_n - \varphi_{n-1}$). En déduire que lorsque $1/p \le s < 1$, l'espace $\mathrm{B}_p^{s,1}(\mathbb{R})$ est formé de fonctions continues bornées.

4. Fourier

Exercices basiques

Exercice 4.1. Si $f \in \mathrm{L}_1(\mathbb{R}^d)$ et $g \in \mathrm{L}_2(\mathbb{R}^d)$, montrer que la transformée de Fourier de $f * g$ est le produit des transformées de Fourier de f et de g.

Exercice 4.2. Pour tout entier $n \geq 1$ on considère la fonction g_n définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g_n(x) = \mathbf{1}_{\{n^{-1}<|x|<n\}} \, \frac{1}{x}.$$

On rappelle que l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} \, dx$$

est convergente et vaut $\pi/2$.

Montrer que les transformées de Fourier $\widehat{g}_n$ sont uniformément bornées sur $\mathbb{R}$ et convergent presque partout vers une limite qu'on explicitera. Montrer que pour toute fonction $f \in \mathrm{L}_2(\mathbb{R})$, la suite $f * g_n$ converge dans $\mathrm{L}_2(\mathbb{R})$ vers une limite qu'on notera $\mathrm{H}(f)$. Déterminer la transformée de Fourier de la fonction $\mathrm{H}(f)$. Comparer les normes de f et $\mathrm{H}(f)$ dans $\mathrm{L}_2(\mathbb{R})$.

Exercice 4.3. On pose pour tout entier $n \geq 0$ et tout $x \in \mathbb{R}$

$$\mathrm{P}_n(x) = \mathrm{e}^{x^2/2} \, \frac{d^n}{dx^n} \, \mathrm{e}^{-x^2/2} .$$

Montrer que P_n est un polynôme de degré n, et que $x \to \mathrm{P}_n(x) \, \mathrm{e}^{-x^2/2}$ est un vecteur propre de la transformée de Fourier. Quelles sont les valeurs propres possibles pour $\mathcal{F}$?

Exercice 4.4. On suppose que f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et que f, f', f'' sont intégrables. Montrer que $\widehat{f}(t)$ est $\mathrm{O}(|t|^{-2})$ lorsque $|t| \to +\infty$.

Exercice 4.5. Soit f une fonction continue 2π-périodique ; on suppose que

$$(\mathrm{S}) \qquad \sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n(f)| < +\infty$$

où $c_n(f) = \int_0^{2\pi} f(t) \, \mathrm{e}^{-int} \, dt/(2\pi)$, pour tout $n \in \mathbb{Z}$. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a

$$f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(f) \, \mathrm{e}^{inx} .$$

Adapter l'exercice dans le cas où on a encore (S), mais où on suppose seulement au départ que : 1. $f \in \mathrm{L}_2(0, 2\pi)$; 2. $f \in \mathrm{L}_1(0, 2\pi)$.

Exercice 4.6. Formule de Poisson.

a. Soient F une fonction continue sur $\mathbb{R}$, telle que $|\mathrm{F}(x)| \leq \mathrm{C} \, (1 + |x|)^{-a}$ pour un $a > 1$ et tout $x \in \mathbb{R}$, et $\widehat{\mathrm{F}}$ sa transformée de Fourier, définie par

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \widehat{\mathrm{F}}(t) = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{F}(x) \, \mathrm{e}^{-ixt} \, dx.$$

Montrer que la fonction $f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \mathrm{F}(x + 2\pi n)$ est définie, continue et 2π-périodique. Trouver une relation entre les valeurs $\widehat{\mathrm{F}}(n)$, $n \in \mathbb{Z}$ et les coefficients de Fourier de f.

b. On suppose de plus que $\sum |\widehat{\mathrm{F}}(n)| < +\infty$. Démontrer la *formule de Poisson*,

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \mathrm{F}(2\pi n) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \widehat{\mathrm{F}}(n).$$

Appliquer avec $\mathrm{F}(x) = \mathrm{e}^{-a|x|}$, $a > 0$.

Exercice 4.7. Utiliser la théorie des séries de Fourier pour retrouver, d'une façon ou d'une autre, la relation plus que classique

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

On pourra en particulier utiliser Parseval, qui donne pour toute fonction $f \in \mathrm{L}_2(0, 2\pi)$ l'égalité

$$\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 \, \frac{dt}{2\pi} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n(f)|^2.$$

Exercice 4.8. On considère une fonction $g \in \mathrm{L}_1(0, 2\pi)$, et l'opérateur linéaire borné T_g de $\mathrm{L}_1(0, 2\pi)$ dans lui-même donné par

$$\forall f \in \mathrm{L}_1(0, 2\pi), \quad \mathrm{T}_g(f) = f * g.$$

Montrer que $\|\mathrm{T}_g\|_{\mathcal{L}(\mathrm{L}_1)} = \|g\|_1$. Montrer la même égalité pour l'opérateur T_g, agissant cette fois de $\mathrm{C}_{\mathrm{per}}([0, 2\pi])$ dans lui-même.

Déduire du théorème de Banach-Steinhaus qu'il existe des fonctions continues et 2π-périodiques dont la série de Fourier ne converge pas uniformément, et des fonctions de $\mathrm{L}_1(0, 2\pi)$ dont la série de Fourier ne converge pas en norme L_1.

Exercices additionnels

Exercice 4.a.1. On suppose que les coefficients (a_n) sont réels > 0 et ont la propriété suivante : pour toute fonction $f \in \mathrm{L}_2(-\pi, \pi)$ telle que $|c_m(f)| \le a_{|m|}$ pour tout $m \in \mathbb{Z}$, la fonction f "est" continue, c'est à dire presque partout égale à une fonction continue 2π-périodique. Montrer qu'alors $\sum a_n < +\infty$ (autrement dit : on ne peut pas trouver de condition non triviale sur la taille des coefficients de Fourier qui garantisse la continuité de la fonction).

Indications : *a.* Montrer que si $\sum a_n = +\infty$, il existe des coefficients b_n tels que $0 < b_n \le a_n$, et $\sum b_n^2 < +\infty$, $\sum_n b_n = +\infty$; *b.* Considérer l'application linéaire continue T de $\ell_\infty(\mathbb{Z})$ dans $\mathrm{L}_2(-\pi, \pi)$ définie par $\mathrm{T}(c) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} c_m b_{|m|} e_m$ pour toute suite bornée de scalaires $c = (c_m)_{m \in \mathbb{Z}}$.

Exercice 4.a.2. Si K est un compact de $\mathrm{L}_1(0, 2\pi)$, montrer que le lemme de Riemann-Lebesgue est vrai uniformément sur K.

Soit f une fonction de $\mathrm{L}ip_\alpha$, $0 < \alpha \le 1$, c'est à dire telle qu'il existe M tel que $|f(x) - f(y)| \le \mathrm{M}\,|x - y|^\alpha$ pour tous $x, y \in [0, 2\pi]$. On considérera que f définit une fonction 2π-périodique sur $\mathbb{R}$. Montrer que les fonctions $(g_x)_{x \in [0, 2\pi]}$ définies par

$$g_x(t) = \frac{g(x-t) - g(x)}{t}$$

forment un compact de $\mathrm{L}_1(0, 2\pi)$. En déduire que pour une fonction f de $\mathrm{L}ip_\alpha$, la série de Fourier converge uniformément vers f.

Exercice 4.a.3. Si deux fonctions $f, g \in \mathrm{L}_1(0, 2\pi)$ vérifient $c_n(f) = c_n(g)$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$, montrer que $f = g$.

Exercice 4.a.4. Si deux fonctions $f, g \in \mathrm{L}_1(0, 2\pi)$ sont égales dans un intervalle non vide $]s-\varepsilon, s+\varepsilon[$, montrer que $\lim_n \big(\mathrm{S}_n(f; s) - \mathrm{S}_n(g; s)\big) = 0$ (principe de localisation).

Exercice 4.a.5. Si une fonction f continue et 2π-périodique sur $\mathbb{R}$ vérifie une condition de Hölder d'ordre $\alpha > 1/2$, c'est-à-dire

$$\exists \mathrm{M},\ \forall x, y \in [0, 2\pi], \quad |f(x) - f(y)| \le \mathrm{M}\, |x-y|^\alpha$$

alors ses coefficients de Fourier sont absolument sommables.

Indication : considérer pour t fixé dans $(0, 2\pi)$ la fonction $g_t(x) = (f(x-t) - f(x))/t^\alpha$; lui appliquer Parseval, puis intégrer le résultat obtenu par rapport au paramètre t. En déduire d'abord

$$\sum n^{2\alpha}\, |c_n(f)|^2 < +\infty.$$

Exercice 4.a.6. Si une fonction f intégrable sur $\mathbb{R}$ est telle que $\widehat{f}(t) \ge 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, montrer que $\widehat{f}$ est intégrable, que f est Lebesgue-équivalente à une fonction continue f_0 et que

$$\int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(t)\, dt = 2\pi\, f_0(0).$$

Indication : considérer une fonction g sur $\mathbb{R}$ telle que g et $\widehat{g}$ soient intégrables sur $\mathbb{R}$ (par exemple une fonction gaussienne), puis former $g_n(x) = n g(nx)$ pour tout $n \ge 1$. Calculer l'intégrale de $\widehat{f}\,\widehat{g}_n$ en la comparant à $(f * g_n)(0)$. Appliquer ensuite les arguments limite convenables.

5. Holomorphie

Exercice 5.1. On suppose que $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, z^n$ existe pour tout $z \in \mathbb{C}$. On suppose de plus que la partie réelle $g(z) = \operatorname{Re} f(z)$ vérifie une majoration de la forme

$$\exists \mathrm{M},\ \forall z \in \mathbb{C}, \quad |g(z)| \le \mathrm{M}\, (1 + |z|^{\mathrm{N}}).$$

En déduire que f est un polynôme de degré $\le \mathrm{N}$.

Indication : pour r tendant vers l'infini, étudier la série de Fourier de la fonction définie par $\theta \in [0, 2\pi] \to g(r\, \mathrm{e}^{i\theta})$.

Exercice 5.2. Soit φ une fonction de $\mathrm{L}_2(0, 2\pi)$, admettant une série de Fourier de la forme $\sum_{n \ge 0} c_n\, \mathrm{e}^{in\theta}$ (autrement dit, tous ses coefficients de Fourier négatifs sont nuls) ; montrer qu'il existe une unique fonction holomorphe f dans le disque unité U du plan complexe telle que les fonctions φ_r, définies pour $r < 1$ par la formule

$$\forall \theta \in [0, 2\pi], \quad \varphi_r(\theta) = f(r\, \mathrm{e}^{i\theta})$$

convergent vers φ dans $\mathrm{L}_2(0, 2\pi)$, lorsque $r \to 1$.

Montrer que pour chaque fonction *réelle* $\psi \in \mathrm{L}_2(0, 2\pi)$ il existe une unique fonction réelle $\mathrm{H}(\psi) \in \mathrm{L}_2(0, 2\pi)$ d'intégrale nulle telle que la fonction $\varphi = \psi + i\mathrm{H}(\psi)$ vérifie les conditions du paragraphe précédent. Montrer que H définit un opérateur linéaire borné sur $\mathrm{L}_2^{\mathbb{R}}(0, 2\pi)$ et calculer sa norme.

Exercice 5.3. On considère une fonction $z \to \mathrm{A}(z)$, définie sur un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}$, et à valeurs dans $\mathrm{M}_d(\mathbb{C})$ (les matrices de taille $d \times d$ à coefficients complexes) ; autrement dit, la donnée de $z \to \mathrm{A}(z) = (a_{i,j}(z))$ correspond à la donnée de d^2 fonctions scalaires. On dira que A est holomorphe sur Ω si toutes les fonctions coordonnées $(a_{i,j})$ sont holomorphes sur Ω.

On désigne par B une matrice fixée, de taille $d \times d$, et par K son spectre, c'est à dire l'ensemble de ses valeurs propres. On considère un chemin fermé γ dans $\mathbb{C}$ qui ne rencontre pas K. Montrer que la matrice

$$\mathrm{P} = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma (z\mathrm{I}_d - \mathrm{B})^{-1}\, dz$$

est un multiple entier d'un projecteur, et que c'est un projecteur si γ parcourt (une fois) un cercle dans le sens direct. Montrer que pour r assez grand et $\gamma = \gamma_r$ (le parcours habituel du cercle de rayon r), la matrice P est égale à la matrice unité I_d.

Dans le cas où γ décrit un cercle contenant exactement une valeur propre λ de B, montrer que la matrice P projette sur le sous-espace caractéristique de B associé à la valeur propre λ.

Exercice 5.4. Soit

$$\mathrm{P}_t = a_0(t) + a_1(t)\,\mathrm{X} + \cdots + a_n(t)\,\mathrm{X}^n \in \mathbb{C}[\mathrm{X}]$$

un polynôme dont les coefficients sont des fonctions continues du paramètre t. On suppose que P_0 n'a pas de racine sur le cercle unité et qu'il a exactement k racines dans le disque unité ouvert (comptées avec leur multiplicité). Montrer que pour t suffisamment proche de 0, le polynôme P_t n'a pas de racine sur le cercle unité et a exactement k racines dans le disque unité ouvert (comptées avec leur multiplicité).

Exercices additionnels

Exercice 5.a.1. Injectivité de la transformation de Laplace. Soit f une fonction sur $\mathbb{R}$, nulle en dehors d'un intervalle de la forme $[a, +\infty[$ et telle que $x \to f(x)\,\mathrm{e}^{-s_0 x}$ soit intégrable pour un $s_0 \in \mathbb{R}$. On définit la *transformée de Laplace* de la fonction f sur l'ouvert $\mathrm{U} = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\, z > s_0\}$ du plan complexe par

$$\forall z \in \mathrm{U}, \quad (\mathcal{L}f)(z) = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-zx}\, f(x)\, dx.$$

Montrer que $\mathcal{L}f$ est holomorphe dans U. Montrer que si $\mathcal{L}f$ est nulle sur un intervalle non vide de $]s_0, +\infty[$, alors f est nulle presque partout sur $\mathbb{R}$.

Exercice 5.a.2. On se propose de démontrer la *formule d'inversion de Lagrange* : on suppose que f est holomorphe dans un voisinage de 0 dans $\mathbb{C}$, que $f(0) = 0$ et $f'(0) \neq 0$. On sait que f admet une fonction réciproque holomorphe g dans un voisinage de 0,

$$g(w) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n w^n$$

qui vérifie donc $g(0) = 0$ et $g(f(z)) = z$ pour z voisin de 0. Si on pose $f(z) = z/p(z)$ avec p holomorphe non nulle au voisinage de 0, la formule de Lagrange dit que pour tout $n \geq 1$,

$$n!\, b_n = \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} (p(z))^n \Big|_{z=0}$$

On démontrera ce résultat à partir de la formule de Cauchy : soit γ_0 le parcours d'un petit cercle centré en 0, et soit $\gamma_1 = f \circ \gamma_0$; partir de la formule

$$b_n = \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma_1} \frac{g(w)}{w^{n+1}}\, dw$$

que l'on transformera par le changement de variable $w = f(z)$ en une intégrale sur γ_0. On aura besoin de noter en route que

$$\Bigl(\frac{z}{f(z)^n}\Bigr)' = \frac{1}{f(z)^n} - n\frac{zf'(z)}{f(z)^{n+1}}$$

a une intégrale nulle sur γ_0.

Appliquer au cas $f(z) = z\,\mathrm{e}^z$ (calculer les coefficients de g, et le rayon de convergence de la série obtenue).

6. Compacité

Exercices basiques

Exercice 6.1. Soit K un espace topologique compact (qui n'est donc pas supposé métrisable) ; montrer que pour tout $x \in \mathrm{K}$ et tout fermé F de K tel que $x \notin \mathrm{F}$, on peut trouver des ouverts V et W tels que

$$x \in \mathrm{V}, \quad \mathrm{F} \subset \mathrm{W}, \quad \mathrm{V} \cap \mathrm{W} = \emptyset.$$

Montrer que pour tout voisinage U du point x dans K, il existe un ouvert V de K tel que $x \in \mathrm{V} \subset \overline{\mathrm{V}} \subset \mathrm{U}$.

Si F_0 et F_1 sont deux fermés disjoints dans K, montrer qu'on peut trouver deux ouverts V_0 et V_1 tels que $\mathrm{F}_0 \subset \mathrm{V}_0$, $\mathrm{F}_1 \subset \mathrm{V}_1$ et $\mathrm{V}_0 \cap \mathrm{V}_1 = \emptyset$.

Exercice 6.2. Soit (K, d) un espace métrique compact ; montrer que l'équicontinuité d'un ensemble de fonctions $\mathrm{A} \subset \mathrm{C}(\mathrm{K})$ implique l'équicontinuité uniforme de A (comme on montre qu'une fonction continue sur le compact K est uniformément continue).

Indication. Pour tout $x \in \mathrm{K}$ l'équicontinuité de A donne un ouvert U_x de K, contenant x et tel que $|f(y) - f(x)| < \varepsilon$ pour toute $f \in \mathrm{A}$ et tout $y \in \mathrm{U}_x$; les $(\mathrm{U}_x)_{x \in \mathrm{K}}$ forment un recouvrement ouvert du compact K ; on extrait un sous-recouvrement fini et on travaille...

Exercice 6.3. On suppose que K est une fonction réelle ou complexe, continue sur le triangle fermé $\{(x, t) : 0 \le t \le x \le 1\}$. On considère p tel que $1 < p \le +\infty$ et on définit un opérateur linéaire continu T de $\mathrm{L}_p([0,1])$ dans $\mathrm{C}([0,1])$ en posant pour toute $f \in \mathrm{L}_p([0,1])$

$$\forall x \in [0,1], \quad (\mathrm{T}f)(x) = \int_0^x \mathrm{K}(x,t) f(t)\, dt.$$

Montrer que T est compact de $\mathrm{L}_p([0,1])$ dans $\mathrm{C}([0,1])$.

On considère maintenant $\mathrm{K} = 1$ et $p = 1$, c'est à dire l'opérateur P de "primitive nulle en 0" qui associe à chaque $f \in \mathrm{L}_1([0,1])$ la fonction $\mathrm{P}f$ définie par

$$\forall x \in [0,1], \quad (\mathrm{P}f)(x) = \int_0^x f(t)\, dt.$$

Montrer que P n'est pas compact de $\mathrm{L}_1([0,1])$ dans $\mathrm{C}([0,1])$.

Exercice 6.4. On considère l'espace de Hilbert réel $\mathrm{H} = \ell_2(\mathbb{N})$. On se donne une suite de nombres $c_n > 0$ telle que $\sum c_n^2 < +\infty$, et on considère

$$\mathrm{C} = \{x = (x_n)_{n \geq 0} \in \mathrm{H} : \forall n \geq 0,\ |x_n| \leq c_n\}.$$

Montrer que C est compact. Montrer que l'application φ de $\mathrm{K} = [-1, 1]^{\mathbb{N}}$ (muni de la topologie produit) dans H, définie par

$$\forall y = (y_n) \in \mathrm{K}, \quad \varphi(y) = \sum_{n=0}^{\infty} y_n c_n \mathbf{e}_n$$

est un homéomorphisme de K sur C (on a noté $(\mathbf{e}_n)$ la base hilbertienne canonique de l'espace H).

On appelle souvent cet ensemble, sous une forme ou l'autre, le *cube de Hilbert*.

Exercices additionnels

Exercice 6.a.1. Packing et recouvrement ; on considère un espace métrique (X, d) et une partie $\mathrm{K} \subset \mathrm{X}$ compacte. Pour tout $\varepsilon > 0$ désignons par $\mathrm{N_P}(\mathrm{K}, \varepsilon)$ le max du nombre N de points $x_1, \ldots, x_\mathrm{N}$ de K qui sont à distances $\geq \varepsilon$, c'est à dire $d(x_i, x_j) \geq \varepsilon$ pour tous $i \neq j$. Notons $\mathrm{N_R}(\mathrm{K}, \varepsilon)$ le min du nombre M tel que K puisse être recouvert par M boules ouvertes $\mathrm{B}(y_i, \varepsilon)$, $i = 1, \ldots, \mathrm{M}$. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$

$$\mathrm{N_R}(\mathrm{K}, \varepsilon) \leq \mathrm{N_P}(\mathrm{K}, \varepsilon) \leq \mathrm{N_R}(\mathrm{K}, \varepsilon/2).$$

Indication. Dans un sens : si $\mathrm{N} = \mathrm{N_P}(\mathrm{K}, \varepsilon)$ et si les points $x_1, \ldots, x_\mathrm{N}$ de K vérifient $d(x_i, x_j) \geq \varepsilon$ pour $i \neq j$, il est impossible d'ajouter un point supplémentaire vérifiant la propriété d'écartement, par la définition de N qui est maximal ; exploiter cette information. Pour l'autre inégalité, si on pouvait recouvrir K par M boules ouvertes de rayon $\varepsilon/2$ avec $\mathrm{M} < \mathrm{N}$, l'une de ces boules devrait contenir deux points x_i et x_j.

On suppose maintenant que $\mathrm{X} = \mathbb{R}^p$ est muni d'une norme, on prend pour d la distance déduite de la norme, et pour K la boule unité B (fermée) de cet espace normé. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\frac{1}{\varepsilon^p} \leq \mathrm{N_R}(\mathrm{B}, \varepsilon)\,; \quad \mathrm{N_P}(\mathrm{B}, 2\varepsilon) \leq \frac{(1+\varepsilon)^p}{\varepsilon^p}\,.$$

Indications : si $\mathrm{M} = \mathrm{N_R}(\mathrm{B}, \varepsilon)$, la boule unité B est couverte par M boules B_i de rayon ε. Utiliser un argument de volumes. Pour l'autre relation, soit N le cardinal d'une famille maximale de points (x_i) de B, dont les distances mutuelles sont $\geq 2\,\varepsilon$; alors les N boules $\mathrm{B}_i = \mathrm{B}(x_i, \varepsilon)$ sont disjointes et contenues dans la boule $\mathrm{B}(0, 1+\varepsilon)$; raisonner à nouveau avec des volumes.

Exercice 6.a.2. Montrer que tout espace métrique complet non vide et sans point isolé contient un sous-ensemble homéomorphe à l'ensemble triadique de Cantor.

Exercice 6.a.3. Régularité des mesures sur la tribu borélienne d'un polonais. Soit μ une probabilité sur la tribu borélienne d'un *espace polonais* X, c'est à dire un espace topologique X séparable dont la topologie provient d'une distance qui rend X complet ; on veut montrer que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un compact $\mathrm{K} \subset \mathrm{X}$ tel que $\mu(\mathrm{K}) > 1 - \varepsilon$.

Soit d une distance qui définit la topologie de X et le rend complet ; montrer d'abord que pour tous $r > 0$ et $\alpha > 0$, il existe un fermé F de X qui est contenu dans une réunion finie de boules de rayon r, et qui est tel que $\mu(\mathrm{F}) > 1 - \alpha$ (utiliser des boules centrées aux points d'une suite dense dans X).

Pour conclure, appliquer ce qui précède avec $r = 2^{-k}$ et $\alpha = \varepsilon/2^{k+1}$, pour tout $k \geq 0$ (on utilisera les rapports entre précompact et compact dans un espace complet).

Exercice 6.a.4. Soit $f \in \mathrm{L}_\infty(\mathbb{R})$; montrer que l'application $t \in \mathbb{R} \to \tau_t f$ est continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathrm{L}_\infty(\mathbb{R})$ si et seulement si la classe f admet un représentant uniformément continu.

Exercice 6.a.5. Contre-exemple à l'extraction de sous-suites convergentes dans un compact général ; désignons par K le disque unité fermé de $\mathbb{C}$; montrer que la suite (f_n) dans le compact $\mathrm{X} = \mathrm{K}^{[0,2\pi]}$ définie par $f_n(t) = \mathrm{e}^{int}$ n'admet aucune sous-suite simplement convergente (l'espace X est muni de la topologie produit, c'est à dire la topologie de la convergence simple sur l'intervalle $[0, 2\pi]$, pour laquelle il est compact par Tykhonov).

Indication. Si une sous-suite (f_{n_k}) convergeait simplement vers une fonction limite f, on pourrait invoquer le théorème de convergence dominée.