Prépa. Agrég écrit d'Analyse, avril 2004.

Fonctions de Bessel

Les fonctions de Bessel peuvent servir à illustrer un grand nombre des thèmes qui sont classiques à l'oral de l'agrégation : fonctions définies par une intégrale dépendant d'un paramètre, séries entières, fonctions holomorphes, séries de Laurent, séries de Fourier, interversions de limites, équations différentielles, développements asymptotiques, méthodes hilbertiennes, problème de Dirichlet...

1. La fonction de Bessel J_0

La méthode choisie dans ce paragraphe pour introduire J_0 essaie de montrer pourquoi les fonctions de Bessel apparaissent *naturellement* quand on étudie le problème de Dirichlet dans $\mathbb{R}^2$. Considérons pour commencer la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x,y) = \mathrm{e}^{iy}\,.$$

Un calcul immédiat nous montre que $\Delta f = -f$. Introduisons un paramètre $\alpha \in [0, 2\pi]$ et faisons subir à la fonction f une rotation (d'angle $-\alpha$) pour obtenir la fonction f_α définie par

$$\forall \mathrm{M} \in \mathbb{R}^2, \quad f_\alpha(\mathrm{M}) = f(\mathrm{R}_\alpha \mathrm{M})$$

où R_α désigne la rotation d'angle α dans $\mathbb{R}^2$, ce qui donne en coordonnées

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f_\alpha(x,y) = \mathrm{e}^{i(x \sin\alpha + y\cos\alpha)}\,.$$

Il est évident, soit par le calcul, soit en vertu de grands principes, qu'on a encore l'équation $\Delta f_\alpha = -f_\alpha$. On introduit maintenant la fonction F qui est la moyenne des f_α quand α décrit l'ensemble $[0, 2\pi]$ des paramètres,

$$\mathrm{F} = \int_0^{2\pi} f_\alpha \,\frac{d\alpha}{2\pi},$$

c'est-à-dire

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad \mathrm{F}(x,y) = \int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{i(x\sin\alpha + y\cos\alpha)} \,\frac{d\alpha}{2\pi}.$$

Il est facile de vérifier par dérivation sous le signe somme qu'on a encore $\Delta\mathrm{F} = -\mathrm{F}$. Il est intuitivement clair que F est une fonction radiale (une fonction qui ne dépend que de $r = \sqrt{x^2+y^2}$), mais on va quand même le vérifier précisément : si on pose $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, on a

$$\begin{aligned}\mathrm{F}(x,y) &= \int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{ir(\cos\theta\sin\alpha + \sin\theta\cos\alpha)} \,\frac{d\alpha}{2\pi} = \int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{ir\sin(\theta+\alpha)} \,\frac{d\alpha}{2\pi}\\ &= \int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{ir\sin(\beta)} \,\frac{d\beta}{2\pi} = \mathrm{J}_0(r),\end{aligned}$$

si on a posé

$$\mathrm{J}_0(r) = \int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{ir\sin u} \,\frac{du}{2\pi}.$$

Le calcul du laplacien de F en coordonnées polaires permet de traduire l'égalité $\Delta\mathrm{F} = -\mathrm{F}$ en l'équation

$$\forall r > 0, \quad \mathrm{J}_0''(r) + \frac{1}{r}\,\mathrm{J}_0'(r) = -\mathrm{J}_0(r).$$

Changeons très légèrement de point de vue, et considérons J_0 comme une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{J}_0(t) = \int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{it\sin\theta}\,\frac{d\theta}{2\pi}.$$

Nous venons d'expliquer que J_0 est une solution y de l'équation différentielle de Bessel de paramètre 0,

$$(\mathrm{B}_0) \qquad \forall t \in \mathbb{R}, \quad t^2 y''(t) + t y'(t) + t^2 y(t) = 0.$$

On se doute que cette équation admet des solutions séries entières, et effectivement J_0 est une fonction entière. Pour le voir on va écrire, en introduisant le réel $s = t/2$ pour aérer les formules,

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{it\sin\theta} &= \exp\bigl((t/2)(\mathrm{e}^{i\theta} - \mathrm{e}^{-i\theta})\bigr) = \exp\bigl(s\ \mathrm{e}^{i\theta}\bigr)\exp\bigl(\overline{-s\ \mathrm{e}^{i\theta}}\bigr) \\ &= \exp\bigl(s\ \mathrm{e}^{i\theta}\bigr)\,\overline{\exp\bigl(-s\ \mathrm{e}^{i\theta}\bigr)}, \end{aligned}$$

de sorte que $\mathrm{J}_0(t)$ apparaît comme le produit scalaire dans $\mathrm{L}_2(0, 2\pi)$ des deux fonctions $\theta \to \exp(s\,\mathrm{e}^{i\theta})$ et $\theta \to \exp(-s\,\mathrm{e}^{i\theta})$,

$$\mathrm{J}_0(t) = \int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{it\sin\theta}\,\frac{d\theta}{2\pi} = \langle \exp\bigl(s\ \mathrm{e}^{i\theta}\bigr), \exp\bigl(-s\ \mathrm{e}^{i\theta}\bigr)\rangle =$$

$$\Bigl\langle \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{s^k}{k!}\ \mathrm{e}^{ik\theta}, \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-s)^k}{k!}\ \mathrm{e}^{ik\theta} \Bigr\rangle = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(t/2)^k}{k!}\,\frac{(-t/2)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k\,\frac{t^{2k}}{4^k (k!)^2}.$$

Ce développement est valable pour tout t réel, ce qui montre que la série entière est de rayon de convergence infini (on pourrait facilement calculer ce rayon avec les critères usuels), et définit donc une *fonction entière*, c'est-à-dire une fonction holomorphe définie sur le plan complexe $\mathbb{C}$ tout entier.

Vibrations d'un tambour

Pour résoudre l'équation des ondes pour un tambour circulaire, qui sera assimilé au disque unité D de $\mathbb{R}^2$, il est utile de disposer de fonctions $g(x, y)$ continues sur $\overline{\mathrm{D}}$, nulles au bord (ce qui correspond au fait que la peau du tambour est fixée au bord), vérifiant $\Delta g = -\mu^2 g$ dans D pour un certain réel μ. On obtient alors une solution u de l'équation des ondes sous la forme

$$\forall (x, y) \in \mathrm{D},\ \forall t \ge 0, \quad u(x, y, t) = g(x, y)\ \cos(\mu t).$$

La valeur $u(x, y, t)$ représente l'altitude de la peau du tambour au dessus du point $(x, y, 0)$ et à l'instant $t \ge 0$ (en considérant que la peau du tambour reste située dans le plan $z = 0$ de $\mathbb{R}^3$ en l'absence de vibration). On vérifie facilement qu'une telle fonction u vérifie l'équation des ondes,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \Delta u,$$

où le laplacien est pris dans les variables d'espace (x, y). On verra plus loin que la fonction J_0 (qui est paire) a une infinité de zéros sur $(0, +\infty)$; considérons l'un de ces zéros $\mu > 0$ et introduisons une fonction g sur $\mathbb{R}^2$ en posant

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad g(x, y) = \mathrm{F}(\mu x, \mu y) = \mathrm{J}_0(\mu r).$$

Cette fonction g est nulle pour $r = 1$; il est clair sur l'équation cartésienne de g que

$$(\Delta g)(x, y) = \mu^2 (\Delta \mathrm{F})(\mu x, \mu y) = -\mu^2 g(x, y),$$

ce qui montre que $\Delta g = -\mu^2 g$. On trouve un « mode propre » de vibration pour chaque zéro $\mu_{0,k} > 0$ de la fonction J_0, les solutions de l'équation des ondes correspondantes sont de la forme

$$u_k(x, y, t) = \mathrm{J}_0(\mu_{0,k}\, r)\, \cos(\mu_{0,k} t), \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Quand $\mu = \mu_{0,0}$ est le premier zéro > 0 de J_0, on obtient la *vibration fondamentale* du tambour, qui est l'analogue du cas où une corde de guitare ou de violon vibre en un seul fuseau. En effet, J_0 est > 0 sur $[0, \mu_{0,0}[$; la solution u_0 ci-dessus est donc > 0 à l'instant $t = 0$ en tout point de l'intérieur du tambour.

2. Les autres fonctions de Bessel

Au lieu de faire simplement la moyenne des fonctions f_α comme on a fait au début du paragraphe précédent, considérons un entier $n \neq 0$ et la moyenne pondérée

$$\mathrm{F}_n = \int_0^{2\pi} f_\alpha\, \mathrm{e}^{-in\alpha}\, \frac{d\alpha}{2\pi},$$

c'est-à-dire

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \mathrm{F}_n(x, y) = \int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{i(x \sin\alpha + y\cos\alpha) - in\alpha}\, \frac{d\alpha}{2\pi}.$$

On voit comme avant par dérivation sous le signe somme qu'on a $\Delta \mathrm{F}_n = -\mathrm{F}_n$. La fonction F_n n'est plus une fonction radiale : si on pose $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, on a

$$\begin{aligned} \mathrm{F}_n(x, y) &= \int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{ir(\cos\theta\sin\alpha + \sin\theta\cos\alpha) - in\alpha}\, \frac{d\alpha}{2\pi} = \int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{ir\sin(\theta+\alpha) - in\alpha}\, \frac{d\alpha}{2\pi} \\ &= \int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{ir\sin(\beta) - in(\beta-\theta)}\, \frac{d\beta}{2\pi} = \mathrm{e}^{in\theta}\, \mathrm{J}_n(r), \end{aligned}$$

si on a posé

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{J}_n(t) = \int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{it\sin u}\, \mathrm{e}^{-inu}\, \frac{du}{2\pi}.$$

Le calcul du laplacien en coordonnées polaires par la formule

$$\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r}\,\frac{d}{dr} + \frac{1}{r^2}\,\frac{d^2}{d\theta^2}$$

permet de traduire l'égalité $\Delta \mathrm{F}_n = -\mathrm{F}_n$ en l'équation

$$\mathrm{J}_n''(r) + \frac{1}{r}\,\mathrm{J}_n'(r) - \frac{n^2}{r^2}\,\mathrm{J}_n(r) = -\mathrm{J}_n(r).$$

Nous trouvons ainsi que J_n est une solution y de l'équation différentielle de Bessel de paramètre n,

$$(\mathrm{B}_n) \qquad \forall t \in \mathbb{R}, \quad t^2 y''(t) + t y'(t) + (t^2 - n^2)\, y(t) = 0.$$

On obtient le développement en série entière de J_n, $n > 0$, en procédant d'une manière analogue à ce qu'on a fait pour J_0 : il suffit d'y translater de n pas vers la droite le développement contenant les $(-t/2)$, ce qui donne

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{J}_n(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \, \frac{(t/2)^{2k+n}}{k!\,(k+n)!}.$$

On voit à nouveau que le rayon de convergence est infini. On note que $\mathrm{J}_n(0) = 0$ pour tout $n > 0$ (alors que $\mathrm{J}_0(0) = 1$). On peut aussi définir des J_ν pour tout ν réel non entier en généralisant l'expression de J_n obtenue en exprimant $(k+n)!$ comme $\Gamma(k+n+1)$,

$$\forall t > 0, \quad \mathrm{J}_\nu(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \, \frac{(t/2)^{2k+\nu}}{k!\,\Gamma(k+\nu+1)}.$$

Il est facile de vérifier, en utilisant seulement la relation $\Gamma(s+1) = s\,\Gamma(s)$, que cette fonction J_ν est solution de $t^2 y'' + t y' + (t^2 - \nu^2) y = 0$ sur $(0, +\infty)$. Ainsi, J_ν et $\mathrm{J}_{-\nu}$ sont deux solutions sur $(0, +\infty)$ de l'équation de Bessel de paramètre ν, et elles sont indépendantes lorsque ν est non entier (observer leurs deux comportements à l'origine) ; pour n entier < 0 on a $\mathrm{J}_n = (-1)^n \mathrm{J}_{-n}$; les fonctions J_ν permettent aussi de trouver une deuxième solution dans le cas entier (fonction de Bessel de deuxième espèce, en général notée Y_n). Par exemple, dans le cas $n = 0$, on prendra

$$\mathrm{Y}_0 = \lim_{\nu \to 0} \frac{\mathrm{J}_\nu - \mathrm{J}_0}{\nu}$$

comme deuxième solution de l'équation (B_0), ce qui revient à dériver par rapport au paramètre ν la série entière de J_ν terme à terme, et à faire ensuite $\nu = 0$; attention : la série ainsi obtenue n'est plus une série entière, il y apparaît un $\ln t$. Pour donner un embryon de justification, désignons par D l'opérateur de dérivation et par B « l'opérateur de Bessel » $\mathrm{B} = t^2 \mathrm{D}^2 + t\mathrm{D} + t^2 \mathrm{I}$; on a $\mathrm{B}(\mathrm{J}_\nu - \mathrm{J}_0) = \nu^2 \mathrm{J}_\nu$, ce qui laisse espérer que $\mathrm{B}\mathrm{Y}_0 = \lim_{\nu \to 0} \nu \mathrm{J}_\nu = 0$. Une fois qu'on a deviné la forme de la solution par cet argument heuristique, le plus simple est de montrer directement que la série de fonctions obtenue en dérivant par rapport à ν définit une fonction C^2 sur $(0, +\infty)$, qui vérifie (B_0) sur cet intervalle.

Exercice. Désignons par a le premier zéro > 0 de la fonction J_0. Montrer qu'on peut trouver une deuxième solution sur $]0, a[$ pour l'équation de Bessel (B_0), sous la forme $y(t) = \varphi(t) \mathrm{J}_0(t)$; montrer que φ vérifie l'équation

$$\bigl(t \mathrm{J}_0(t)^2 \varphi'(t)\bigr)' = 0.$$

En déduire que les solutions de (B_0) qui restent bornées au voisinage de 0 sont les multiples de J_0.

Exercice. Soit $f(x, y)$ une fonction radiale, $f(x, y) = g(r)$; exprimer la transformée de Fourier de f par une intégrale contenant g et J_0.

Exercice. On considère la mesure $d\mu(t) = t\,dt$ sur l'intervalle $[0, 1]$, et l'opérateur T sur $\mathrm{L}_2([0, 1], \mu)$ défini par

$$\forall x \in (0, 1], \quad (\mathrm{T}f)(x) = \ln(x) \int_0^x f(t)\,t\,dt + \int_x^1 \ln(t) f(t)\,t\,dt.$$

Montrer que T est hermitien, Hilbert-Schmidt, à image dense donc injectif ; montrer que les fonctions propres vérifient une équation différentielle qui se ramène à l'équation (B_0). Si $(\mu_k)_{k \ge 0}$ désigne la suite des zéros > 0 de J_0, montrer que les fonctions $t \to \mathrm{J}_0(\mu_k t)$ forment, après normalisation, une base hilbertienne de $\mathrm{L}_2([0, 1], \mu)$.

Problème de Dirichlet, suite

Si μ est un zéro > 0 de J_n, on obtient comme avant que

$$g(x, y) = \mathrm{F}_n(\mu x, \mu y) = \mathrm{J}_n(\mu r)\,\mathrm{e}^{in\theta}$$

est nulle sur le cercle unité et vérifie $\Delta g = -\mu^2 g$. On obtient donc une double infinité de fonctions propres pour le problème de Dirichlet dans $\mathrm{H}_0^1(\mathrm{D})$, indexée d'une part par $n \in \mathbb{N}$ et d'autre part par un second indice $k \in \mathbb{N}$ qui décrit la suite infinie $(\mu_{n,k})$ des zéros > 0 de la fonction J_n. Si on passe en réel, on écrira ces fonctions sous la forme

$$\mathrm{J}_n(\mu_{n,k}\, r) \cos(n\theta), \quad \mathrm{J}_n(\mu_{n,k}\, r) \sin(n\theta).$$

On remarque que $\mathrm{J}_n(t) = t^n j_n(t^2)$, où j_n est la fonction entière donnée par

$$j_n(s) = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \frac{s^k}{2^{2k+n} k!(k+n)!},$$

donc

$$\mathrm{F}_n(x, y) = j_n(x^2 + y^2) r^n\, \mathrm{e}^{in\theta} = j_n(x^2 + y^2)(x + iy)^n$$

s'exprime par une belle série de monômes $a_{k,\ell}\, x^k y^\ell$: c'est une fonction analytique de deux variables réelles x, y.

Il se produit un phénomène intéressant qui n'est pas facile à établir : si m et n sont deux entiers tels que $0 \le m < n$, les fonctions de Bessel J_m et J_n n'ont pas de zéro commun, à part peut-être 0. Ce résultat est conséquence indirecte d'un théorème montré par Siegel en 1929 : les zéros > 0 des fonctions de Bessel d'indice entier sont des nombres transcendants. Il en résulte que les sous-espaces propres pour le problème de Dirichlet du disque unité sont de dimension 1 (lorsque $n = 0$) ou bien 2 (lorsque $n > 0$).

Fonction génératrice

Pour t fixé, on a vu apparaître les valeurs $\mathrm{J}_n(t)$ comme coefficients de Fourier de la fonction périodique $\theta \to \mathrm{e}^{it\sin(\theta)}$. Comme cette fonction est C^∞, on sait d'avance que

$$\forall \theta, \quad \mathrm{e}^{it\sin(\theta)} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \mathrm{J}_n(t)\,\mathrm{e}^{in\theta}\,.$$

Considérons

$$\mathrm{G}(u,t) = \exp\Bigl(\frac{t}{2}\Bigl(u - \frac{1}{u}\Bigr)\Bigr)$$

où u est complexe non nul et t réel. Pour chaque t fixé, on a une fonction holomorphe de u, définie sur $\mathbb{C}^*$, qui admet donc un développement de Laurent

$$\mathrm{G}(u,t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n(t)\,u^n$$

convergent pour tout $u \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$. Pour u de module 1, on écrit $u = \mathrm{e}^{i\theta}$ et on déduit en comparant au développement de Fourier que $a_n(t) = \mathrm{J}_n(t)$, par conséquent

$$\forall u \in \mathbb{C}\setminus\{0\},\ \forall t\in\mathbb{R}, \quad \exp\Bigl(\frac{t}{2}\Bigl(u-\frac{1}{u}\Bigr)\Bigr) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \mathrm{J}_n(t)\,u^n.$$

D'après la théorie du développement de Laurent, on sait que pour tout $n\in\mathbb{Z}$

$$\mathrm{J}_n(t) = \frac{1}{2\mathrm{i}\pi}\int_{\gamma(\rho)} \frac{\mathrm{G}(u,t)}{u^n}\,\frac{du}{u}$$

pour tout cercle $\gamma(\rho)$ de rayon $\rho > 0$ centré en 0 ; il est facile de voir que la fonction de t donnée par l'intégrale est définie pour tout $t\in\mathbb{C}$, holomorphe, et puisqu'elle coïncide avec la fonction entière J_n sur l'axe réel, on a égalité pour tout $t\in\mathbb{C}$. On déduit de la relation intégrale les majorations de Cauchy, pour tout $n\in\mathbb{Z}$ et $t\in\mathbb{C}$

$$\rho^n|\mathrm{J}_n(t)| \le \max\{|\mathrm{G}(u,t)| : |u| = \rho\}.$$

Dans cette majoration il est intéressant de prendre $\rho > 1$ quand $n > 0$ et $\rho < 1$ si $n < 0$, par exemple $\rho = \mathrm{R} > 1$ dans un cas et $\rho = 1/\mathrm{R}$ dans l'autre. On déduit que pour tout $t\in\mathbb{C}$, tout $n\in\mathbb{Z}$,

$$\mathrm{R}^{|n|}|\mathrm{J}_n(t)| \le \max\{|\mathrm{G}(u,t)| : 1/\mathrm{R} \le |u| \le \mathrm{R}\}.$$

Quand u est dans cette couronne, le module de $\frac{1}{2}(u - 1/u)$ est majoré par R, donc $|\mathrm{G}(u,t)| \le \mathrm{e}^{\mathrm{R}|t|}$; on obtient pour tous $t\in\mathbb{C}$, $n\in\mathbb{Z}$ et $\mathrm{R} > 1$

$$|\mathrm{J}_n(t)| \le \mathrm{R}^{-|n|}\,\mathrm{e}^{\mathrm{R}|t|}\,.$$

Si t reste dans un disque de rayon T, la majoration précédente montre que la série $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \mathrm{J}_n(t)u^n$ de fonctions de t converge uniformément dans ce disque, pour tout u de la couronne, et y définit donc une fonction holomorphe en $t\in\mathbb{C}$. On a donc en fait

$$\forall u \in \mathbb{C}\setminus\{0\},\ \forall t\in\mathbb{C}, \quad \exp\Bigl(\frac{t}{2}\Bigl(u-\frac{1}{u}\Bigr)\Bigr) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \mathrm{J}_n(t)\,u^n.$$

Si on dérive la fonction $\mathrm{G}(u,t)$ par rapport à t, on obtient

$$g(u,t) = \frac{1}{2}\Big(u - \frac{1}{u}\Big) \exp\Big(\frac{t}{2}\Big(u - \frac{1}{u}\Big)\Big)$$

et cette fonction se développe elle aussi en série de Laurent $\sum b_n(t) u^n$; les arguments de majoration qui précèdent montrent maintenant que

$$|b_n(t)| \le \mathrm{R}^{-|n|}\, \mathrm{R}\, \mathrm{e}^{\mathrm{R}|t|}$$

ce qui permet d'intégrer cette série en t terme à terme pour constater que $b_n(t) = \mathrm{J}'_n(t)$, c'est-à-dire que la série de Laurent en u de $\mathrm{G}(u,t)$ peut être dérivée terme à terme en t. Ces lignes justifient beaucoup des calculs «formels» qu'on peut faire sur la fonction génératrice pour obtenir des relations vérifiées par les fonctions de Bessel.

Exercice (facile). Montrer que $2\mathrm{J}'_n = \mathrm{J}_{n-1} - \mathrm{J}_{n+1}$.

Exercice. Montrer que la fonction $t \to \mathrm{J}_0(it)$ vérifie un certain nombre des propriétés de la fonction $\mathrm{ch}(t)$: elle est paire, croissante sur $[0, +\infty[$, tend vers l'infini plus vite que tout polynôme. Trouver l'équation (B_0) modifiée que vérifie cette fonction.

Exercice. Montrer que pour tout entier $n \ge 0$, on a

$$t\, \mathrm{J}_{n+1}(t) = n\mathrm{J}_n(t) - t\, \mathrm{J}'_n(t).$$

Montrer par récurrence sur $k \ge 1$ qu'il existe deux polynômes $\mathrm{A} = \mathrm{A}_{n,k}$ et $\mathrm{B} = \mathrm{B}_{n,k}$ à *coefficients entiers* tels que

$$t^k \mathrm{J}_{n+k}(t) = \mathrm{A}(t)\mathrm{J}_n(t) + t\,\mathrm{B}(t)\mathrm{J}'_n(t).$$

En admettant que les zéros > 0 de J_n sont transcendants (Siegel), déduire que J_n et J_{n+k} n'ont pas de zéro > 0 commun.

3. Comportement à l'infini des fonctions de Bessel

3.1. *Étude au moyen de l'équation différentielle*

Voir Chatterji volume 3, sections 2.6 et 2.7.

On suppose que n est un entier ≥ 0 et que y est solution sur l'intervalle ouvert $(0, +\infty)$ de l'équation de Bessel de paramètre n,

$$(\mathrm{B}_n) \qquad \forall t > 0, \quad t^2\, y''(t) + t\, y'(t) + (t^2 - n^2)\, y(t) = 0.$$

Si on pose $z(t) = \sqrt{t}\, y(t)$, on trouve facilement pour la fonction z la nouvelle équation différentielle

$$(1) \qquad z''(t) + \Big(1 - \frac{n^2 - 1/4}{t^2}\Big)\, z(t) = 0.$$

Dans cette équation différentielle de la forme $z''(t) + q(t)\, z(t) = 0$, le terme

$$q(t) = 1 - \frac{n^2 - 1/4}{t^2}$$

tend assez vite vers 1 à l'infini, ce qui fait espérer que les solutions de cette équation «perturbée» seront proches à l'infini des solutions bien connues de l'équation $z'' + z = 0$, équation qui correspond au cas $q = 1$. C'est ce que nous allons étudier dans cette première section.

Les résultats des propositions qui suivent sont valables pour toute solution y de l'équation de Bessel de paramètre n (où n est un entier ≥ 0), mais on va s'intéresser surtout à la solution particulière donnée par la fonction de Bessel J_n, qui est –à un multiple près– «la» solution de l'équation de Bessel de paramètre n qui reste bornée quand $t \to 0$.

On va commencer par des résultats sur la localisation des zéros successifs des fonctions de Bessel. Commençons par des remarques simples. Si q est une fonction réelle continue sur un intervalle ouvert $\mathrm{I} \subset \mathbb{R}$, si $x''(t)+q(t)x(t) = 0$ pour tout $t \in \mathrm{I}$, et si la fonction x n'est pas identiquement nulle sur I, on voit que le vecteur $\mathrm{X}(t) = (x'(t), x(t)) \in \mathbb{R}^2$ n'est jamais nul. En effet, l'ensemble

$$\mathrm{A} = \{t \in \mathrm{I} : x(t) = x'(t) = 0\}$$

est évidemment fermé (continuité des fonctions), mais aussi ouvert d'après Cauchy-Lipschitz, donc A est vide ou bien égal à I.

Proposition 1. *On considère un intervalle ouvert* $\mathrm{I} \subset \mathbb{R}$, *deux fonctions réelles continues* q_1 *et* q_2 *sur* I *telles que*

$$q_1 \leq q_2,$$

et deux fonctions réelles x_1, x_2 *sur* I *vérifiant les équations différentielles*

$$\forall t \in \mathrm{I}, \quad x_1''(t) + q_1(t)x_1(t) = 0, \quad x_2''(t) + q_2(t)x_2(t) = 0.$$

Si x_2 *ne s'annule pas sur* I *et si* x_1 *n'est pas identiquement nulle sur* I, *alors* x_1 *possède au plus un zéro sur* I.

Donnons un exemple simple pour illustrer le résultat ; si $\mathrm{I} = \mathbb{R}$, si $q_1(t) = q_2(t) = -1$, la fonction $x_2(t) = \mathrm{e}^t$ est une solution de $x'' - x = 0$ qui ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$; la solution $x_1(t) = \mathrm{sh}(t)$ pour la même équation $x'' - x = 0$ a un seul zéro dans $\mathbb{R}$.

Démonstration. Supposons que x_1 ait deux zéros $a < c$ dans I. On sait que $x_1'(a) \neq 0$, donc $x_1(t)$ n'est pas nul pour $t > a$ voisin de a. Par conséquent

$$b = \inf\{t > a : x_1(t) = 0\}$$

vérifie $a < b \leq c$; on a $x_1(b) = 0$ par continuité, et la fonction x_1 ne s'annule pas sur l'intervalle ouvert (a, b). Elle y a donc un signe constant, par exemple $x_1 > 0$ sur (a, b). Il en résulte alors que

$$x_1'(a) = \lim_{h \to 0,\, h>0} h^{-1}\big(x_1(a+h) - x_1(a)\big) = \lim_{h \to 0,\, h>0} h^{-1} x_1(a+h) \geq 0,$$

par conséquent $x_1'(a) > 0$, et de même $x_1'(b) < 0$. D'après l'hypothèse, la fonction x_2 garde un signe constant sur $(a, b) \subset \mathrm{I}$, par exemple $x_2 > 0$. L'outil de la preuve est le *wronskien*

$$\mathrm{W}(t) = x_1'(t)\, x_2(t) - x_1(t)\, x_2'(t),$$

qui représente la surface orientée du parallélogramme construit sur les deux vecteurs $\mathrm{X}_1(t) = (x_1'(t), x_1(t))$ et $\mathrm{X}_2(t) = (x_2'(t), x_2(t))$; en tout point t_0 où $x_1(t_0) = 0$, on a $\mathrm{W}(t_0) = x_1'(t_0)\, x_2(t_0)$. Ainsi

$$\mathrm{W}(a) = x_1'(a)\, x_2(a) > 0, \quad \mathrm{W}(b) = x_1'(b)\, x_2(b) < 0.$$

Mais par ailleurs on voit que

$$\forall t \in (a,b), \quad \mathrm{W}'(t) = x_1''(t)\,x_2(t) - x_1(t)\,x_2''(t) = (q_2(t) - q_1(t))\,x_1(t)\,x_2(t) \geq 0,$$

ce qui contredit le fait que $\mathrm{W}(b) < \mathrm{W}(a)$. Il est donc impossible que la fonction x_1 ait plus d'un zéro dans I.

Corollaire. *Soit $(a_k^{(n)})_{k\geq 0}$ la liste des zéros successifs de la fonction de Bessel J_n, avec $0 < a_k^{(n)} < a_{k+1}^{(n)}$ et n entier ≥ 0 ; si $n = 0$, on a $a_{k+1}^{(n)} - a_k^{(n)} < \pi$ pour tout k et si $n > 0$, on a $a_{k+1}^{(n)} - a_k^{(n)} > \pi$. On a de plus pour tout $n \geq 0$,*

$$\lim_{k\to+\infty} \big(a_{k+1}^{(n)} - a_k^{(n)}\big) = \pi.$$

Démonstration. Traitons d'abord le cas de J_0, et posons $a_k = a_k^{(0)}$ pour simplifier ; si $z(t) = \sqrt{t}\,\mathrm{J}_0(t)$, on a

$$z''(t) + \Big(1 + \frac{1}{4t^2}\Big) z(t) = 0.$$

Choisissons b tel que $a_k < b < a_{k+1}$ (on fera tendre b vers a_k) ; sur l'intervalle ouvert $\mathrm{I} = (a_k, a_{k+1})$ la fonction $x_1(t) = \sin(t-b)$ vérifie $x_1''(t) + q_1(t)x_1(t) = 0$ avec

$$q_1(t) = 1 \leq q_2(t) = 1 + \frac{1}{4t^2},$$

et $x_2(t) = z(t)$ est solution de $x_2'' + q_2 x_2 = 0$, ne s'annule pas sur I. Puisque x_1 s'annule en b, elle ne peut pas avoir d'autre zéro dans I par la proposition 1 ; comme $x_1(b+\pi) = 0$, on a nécessairement $b + \pi \geq a_{k+1}$. Ceci implique $a_{k+1} - a_k \leq \pi$, en faisant tendre b vers a_k. On aurait pu jouer plus serré, en introduisant un nombre $c > 1$ tel que la fonction constante $\mathrm{Q}_1(t) = c^2$ vérifie $\mathrm{Q}_1 \leq q_2$ sur I, et en considérant $x_1(t) = \sin(ct - cb)$. On trouve alors par le même raisonnement que $a_{k+1} - a_k \leq c^{-1}\pi < \pi$. Tous les autres résultats sont obtenus en adaptant le même principe, en échangeant au besoin les rôles des deux fonctions.

On peut lire le résultat de la proposition 1 à l'envers : si on sait que la fonction x_1 possède au moins deux zéros sur un intervalle $\mathrm{I} = (a, a')$, $0 < a < a'$, alors x_2 doit s'annuler sur I. Si on prend $x_1(t) = \sin(ct - cb)$, si l'intervalle d'étude I contient les deux points $t = b$ et $t = b + c^{-1}\pi$, la fonction x_1 s'annule au moins deux fois sur l'intervalle I ; si de plus $q_1 = c^2$ minore $q_2(t) = 1 - (n - 1/4)/t^2$ sur I, la fonction $\mathrm{J}_n = x_2$ doit admettre au moins un zéro sur I ; si $n \geq 1$ et $a > \sqrt{n}$, il suffit de définir $c = c_a > 0$ par

$$c_a^2 = 1 - \frac{n - 1/4}{a^2}$$

pour réaliser les hypothèses voulues, sur tout intervalle I de longueur $> c_a^{-1}\pi$ situé au delà de a. Il en résulte que tout intervalle de longueur $> c_a^{-1}\pi$ situé au delà de a contient un zéro de J_n. On en déduit tout de suite que chaque fonction de Bessel possède une infinité de zéros. Comme c_a tend vers 1 quand a tend vers l'infini, on en déduit que l'écartement de deux zéros successifs tend vers π.

On va maintenant obtenir un autre type d'information sur le comportement asymptotique des fonctions de Bessel.

Proposition 2. *Pour tout entier $n \geq 0$, il existe deux constantes λ_n et φ_n telles que*

$$\mathrm{J}_n(t) = \lambda_n \frac{\cos(t - \varphi_n)}{\sqrt{t}} + \mathrm{O}(t^{-3/2})$$

lorsque $t \to +\infty$.

Dans la section 2, on calculera les valeurs de λ_0 et φ_0 par une autre approche.

Par la transformation usuelle qui fait passer d'une équation différentielle du second ordre à un système différentiel du premier ordre, on se ramène à partir de l'équation (1) à un système différentiel du type

$$(*) \qquad \mathrm{Z}'(t) = \big(\mathrm{A} + \mathrm{E}(t)\big)\, \mathrm{Z}(t)$$

où Z est une fonction vectorielle définie sur un intervalle $[t_0, +\infty)$, A une matrice fixée de taille $d \times d$ (on aura $d = 2$ dans le cas particulier qui nous intéresse), et $t \to \mathrm{E}(t)$ une fonction à valeurs matricielles, qui est « petite », au sens que

$$\mathcal{E} = \int_{t_0}^{+\infty} \|\mathrm{E}(t)\|\, dt < +\infty.$$

Dans la suite, la norme d'une matrice sera la norme subordonnée à la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^d$. On suppose de plus que A est réelle antisymétrique, ce qui entraîne que l'exponentielle $\mathrm{e}^{s\mathrm{A}}$ est une matrice orthogonale pour tout s réel ; en effet, la transposée

$${}^t(\mathrm{e}^{s\mathrm{A}}) = \mathrm{e}^{s\,{}^t\mathrm{A}} = \mathrm{e}^{-s\mathrm{A}}$$

est bien l'inverse de la matrice $\mathrm{e}^{s\mathrm{A}}$ (on note ${}^t\mathrm{B}$ la transposée d'une matrice B, carrée ou non). Cherchons une solution du système $(*)$ sous la forme $\mathrm{Z}(t) = \mathrm{e}^{t\mathrm{A}}\, \mathrm{V}(t)$; on doit avoir

$$\mathrm{A}\, \mathrm{e}^{t\mathrm{A}}\, \mathrm{V}(t) + \mathrm{e}^{t\mathrm{A}}\, \mathrm{V}'(t) = \mathrm{Z}'(t) = \mathrm{A}\, \mathrm{Z}(t) + \mathrm{E}(t)\, \mathrm{Z}(t),$$

ce qui se transforme en

$$\mathrm{V}'(t) = \mathrm{e}^{-t\mathrm{A}}\, \mathrm{E}(t)\, \mathrm{e}^{t\mathrm{A}}\, \mathrm{V}(t).$$

Posons $\mathrm{B}(t) = \mathrm{e}^{-t\mathrm{A}}\, \mathrm{E}(t)\, \mathrm{e}^{t\mathrm{A}}$; on a $\|\mathrm{B}(t)\| = \|\mathrm{E}(t)\|$ puisque la matrice $\mathrm{e}^{t\mathrm{A}}$ est orthogonale, c'est-à-dire qu'elle définit une isométrie de $\mathbb{R}^d$ muni la norme euclidienne.

Lemme. *Si $t \to \mathrm{B}(t)$ est continue de $[t_0, +\infty)$ dans $\mathrm{M}_d(\mathbb{R})$ et si*

$$\mathcal{B} = \int_{t_0}^{+\infty} \|\mathrm{B}(t)\| \, dt < +\infty,$$

toute solution V du système différentiel $\mathrm{V}'(t) = \mathrm{B}(t)\mathrm{V}(t)$ sur l'intervalle $[t_0, +\infty)$ tend vers une limite $\mathrm{V}(\infty)$ lorsque $t \to +\infty$, et de plus

$$\forall t \ge t_0, \quad \|\mathrm{V}(t) - \mathrm{V}(\infty)\| \le \mathrm{e}^{\mathcal{B}} \, \|\mathrm{V}(t_0)\| \int_t^{+\infty} \|\mathrm{B}(s)\| \, ds.$$

Preuve. On commence par vérifier que V reste borné, en étudiant $\mathrm{N}(t) = {}^t\mathrm{V}(t)\mathrm{V}(t)$, le carré de la norme du vecteur $\mathrm{V}(t)$. On vérifie que $\mathrm{N}'(t) = 2\,{}^t\mathrm{V}(t)\mathrm{V}'(t)$, ce qui donne

$$\mathrm{N}'(t) = 2\,{}^t\mathrm{V}(t)\mathrm{B}(t)\mathrm{V}(t) \le 2\,\|\mathrm{B}(t)\|\,\|\mathrm{V}(t)\|^2 = 2\,\|\mathrm{B}(t)\|\,\mathrm{N}(t).$$

Il est facile de résoudre cette inéquation différentielle (c'est le lemme de Gronwall si on veut) : si on pose $b(t) = \int_{t_0}^t \|\mathrm{B}(s)\| \, ds$, on voit que la fonction $\varphi(t) = \mathrm{e}^{-2b(t)}\,\mathrm{N}(t)$ est décroissante puisque

$$\varphi'(t) = -2b'(t)\varphi(t) + \mathrm{e}^{-2b(t)}\,\mathrm{N}'(t) \le -2\|\mathrm{B}(t)\|\,\varphi(t) + 2\|\mathrm{B}(t)\|\,\mathrm{e}^{-2b(t)}\,\mathrm{N}(t) = 0.$$

On en déduit que

$$\forall t \ge t_0, \quad \mathrm{N}(t) \le \mathrm{e}^{2b(t)}\,\varphi(t_0) = \mathrm{e}^{2b(t)}\,\mathrm{N}(t_0).$$

D'après l'hypothèse du lemme, la fonction positive b tend en croissant vers $\mathcal{B}$ à l'infini, donc N et $\|\mathrm{V}\|$ restent bornés, avec

$$\forall t \ge t_0, \quad \|\mathrm{V}(t)\| \le \mathrm{e}^{b(t)}\,\|\mathrm{V}(t_0)\| \le \mathrm{e}^{\mathcal{B}}\,\|\mathrm{V}(t_0)\|.$$

Pour terminer, on a pour $t_0 \le t_1 \le t_2$

$$\|\mathrm{V}(t_2) - \mathrm{V}(t_1)\| = \Bigl\|\int_{t_1}^{t_2} \mathrm{V}'(s)\,ds\Bigr\| \le \Bigl(\sup_{t \ge t_0} \|\mathrm{V}(t)\|\Bigr) \int_{t_1}^{t_2} \|\mathrm{B}(s)\|\,ds,$$

ce qui montre que V vérifie la condition de Cauchy à l'infini, donc converge vers un vecteur limite $\mathrm{V}(\infty)$ (on vient de redémontrer, dans le cas vectoriel, qu'une intégrale généralisée absolument convergente telle que $\int^{\infty} \mathrm{V}'(s)\,ds$ est convergente). En faisant passer à la limite la majoration précédente, on obtient

$$\|\mathrm{V}(\infty) - \mathrm{V}(t_1)\| = \Bigl\|\int_{t_1}^{+\infty} \mathrm{V}'(s)\,ds\Bigr\| \le \mathrm{e}^{\mathcal{B}}\,\|\mathrm{V}(t_0)\| \int_{t_1}^{+\infty} \|\mathrm{B}(s)\|\,ds,$$

ce qui termine la démonstration du lemme.

Une fois le lemme établi, on obtient facilement la proposition qui suit, qui va nous confirmer que les solutions d'un certain système perturbé sont proches à l'infini de solutions du système sans perturbation.

Proposition 3. *On suppose que* $t \to \mathrm{E}(t)$ *est continue de* $[t_0, +\infty)$ *dans* $\mathrm{M}_d(\mathbb{R})$, *que*

$$\mathcal{E} = \int_{t_0}^{+\infty} \|\mathrm{E}(t)\|\, dt < +\infty,$$

et que A *est une matrice réelle antisymétrique ; pour toute solution* Z *du système différentiel* $\mathrm{Z}'(t) = (\mathrm{A} + \mathrm{E}(t))\,\mathrm{Z}(t)$ *sur l'intervalle* $[t_0, +\infty)$, *il existe un vecteur* $v \in \mathbb{R}^d$ *tel que*

$$\forall t \geq t_0, \quad \|\mathrm{Z}(t) - \mathrm{e}^{t\mathrm{A}}\, v\| \leq \mathrm{e}^{\mathcal{E}}\, \|\mathrm{Z}(t_0)\| \int_t^{+\infty} \|\mathrm{E}(s)\|\, ds.$$

Preuve. On a déjà dit que si on pose $\mathrm{Z}(t) = \mathrm{e}^{t\mathrm{A}}\,\mathrm{V}(t)$, alors V vérifie le système différentiel $\mathrm{V}'(t) = \mathrm{B}(t)\mathrm{V}(t)$, avec $\mathrm{B}(t) = \mathrm{e}^{-t\mathrm{A}}\,\mathrm{E}(t)\,\mathrm{e}^{t\mathrm{A}}$, qui a la même norme que $\mathrm{E}(t)$; d'après le lemme, $\mathrm{V}(t)$ tend vers un vecteur $v = \mathrm{V}(\infty)$ quand t tend vers l'infini, et de plus

$$\|\mathrm{V}(t) - v\| \leq \mathrm{e}^{\mathcal{B}}\, \|\mathrm{V}(t_0)\| \int_t^{+\infty} \|\mathrm{B}(s)\|\, ds = \mathrm{e}^{\mathcal{E}}\, \|\mathrm{Z}(t_0)\| \int_t^{+\infty} \|\mathrm{E}(s)\|\, ds.$$

Il ne reste plus qu'à multiplier $\mathrm{V}(t) - v$ par la matrice orthogonale $\mathrm{e}^{t\mathrm{A}}$ pour terminer la preuve de la proposition 3.

On voit ainsi que toute solution du système perturbé par $\mathrm{E}(t)$ est « asymptote » à une solution du système $\mathrm{Z}' = \mathrm{AZ}$. Revenons aux équations (1) qui correspondent au cas des fonctions de Bessel. On pose pour z solution de l'équation (1)

$$\forall t > 0, \quad \mathrm{Z}(t) = \begin{pmatrix} z'(t) \\ z(t) \end{pmatrix} ;$$

l'équation différentielle (1) pour z fournit le système différentiel

$$\mathrm{Z}'(t) = \begin{pmatrix} 0 & -1 + (n^2 - 1/4)\, t^{-2} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \mathrm{Z}(t).$$

On est dans le cas couvert par la proposition 3, avec

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \ ; \quad \mathrm{E}(t) = \begin{pmatrix} 0 & (n^2 - 1/4)\, t^{-2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Prenons $t_0 = 1$. On a bien $\int_1^{+\infty} \|\mathrm{E}(t)\|\, dt < +\infty$, et de plus le majorant de l'erreur

$$\int_t^{+\infty} \|\mathrm{E}(s)\|\, ds = |n^2 - 1/4| \int_t^{+\infty} \frac{ds}{s^2} = \frac{|n^2 - 1/4|}{t}$$

est de l'ordre de t^{-1}. Par ailleurs si $v = (v_1, v_2)$,

$$\mathrm{e}^{t\mathrm{A}} = \begin{pmatrix} \cos(t) & -\sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix} \ ; \quad \mathrm{e}^{t\mathrm{A}}\, v = \begin{pmatrix} v_1 \cos(t) - v_2 \sin(t) \\ v_1 \sin(t) + v_2 \cos(t) \end{pmatrix}.$$

Si z est solution de l'équation (1), le vecteur $\mathrm{Z} = (z', z)$ vérifie la conclusion de la proposition 3, c'est à dire que $\|\mathrm{Z}(t) - \mathrm{e}^{t\mathrm{A}}\, v\| = \mathrm{O}(1/t)$ pour un certain $v \in \mathbb{R}^2$. En particulier, la deuxième coordonnée $z(t)$ de $\mathrm{Z}(t)$ est proche de la deuxième coordonnée de $\mathrm{e}^{t\mathrm{A}}\, v$, donnée par

$$v_1 \sin(t) + v_2 \cos(t) = \lambda \cos(t - \varphi),$$

pour certains λ, φ calculables à partir de v_1, v_2. Si on applique à la fonction de Bessel J_n les résultats obtenus, on obtient l'énoncé suivant :

pour tout entier $n \ge 0$, il existe deux constantes λ_n et φ_n telles que

$$\sqrt{t}\, \mathrm{J}_n(t) = \lambda_n \cos(t - \varphi_n) + \mathrm{O}(1/t),$$

lorsque $t \to +\infty$. On obtiendra les valeurs exactes de ces constantes, pour $n = 0$, par une méthode différente dans la section qui suit.

3.2. *Étude au moyen de la définition intégrale*

On va utiliser un cas particulier de la méthode de la phase stationnaire. Pour un traitement plus général de cette méthode, voir Zuily–Queffélec, Chapitre IX, section VI.2.

Soit z un nombre réel positif fixé ; on sait que la fonction $x \in \mathbb{R} \to \mathrm{e}^{-z^2x^2/2}$ est la transformée de Fourier de la densité gaussienne g_z définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g_z(x) = \frac{1}{z\sqrt{2\pi}}\, \mathrm{e}^{-x^2/(2z^2)}\,.$$

Soit d'autre part a une fonction réelle sur $\mathbb{R}$, Lebesgue-intégrable ainsi que sa transformée de Fourier $\widehat{a}$; on sait que a est en fait continue sur $\mathbb{R}$ et que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad a(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{ixy}\, \widehat{a}(y)\, dy.$$

La formule d'échange $\int a\,\widehat{b} = \int \widehat{a}\, b$ (qui est une conséquence immédiate de Fubini), appliquée avec $b = g_z$, donne

$$\forall z > 0, \quad \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-z^2x^2/2}\, a(x)\, dx = \frac{1}{z\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-x^2/(2z^2)}\, \widehat{a}(x)\, dx. \tag{2}$$

On considère maintenant dans $\mathbb{C}$ le quart de plan ouvert

$$\Omega = \{z \in \mathbb{C} : z = a + ib,\ a, b \in \mathbb{R},\ |b| < a\}.$$

On vérifie facilement que l'ensemble Ω est invariant par la transformation $z \to 1/z$, et que $\operatorname{Re} z^2 = a^2 - b^2 > 0$ pour tout $z \in \Omega$; on a encore $\operatorname{Re} z^2 \ge 0$ quand z est dans l'adhérence $\overline{\Omega}$, ce qui permet de voir que

$$\left|\mathrm{e}^{-z^2x^2/2}\right| = \mathrm{e}^{-(\operatorname{Re} z^2)x^2/2} \le 1$$

pour tout x réel et $z \in \overline{\Omega}$; puisqu'on a supposé a intégrable sur $\mathbb{R}$, on peut poser pour tout $z \in \overline{\Omega}$

$$f(z) = z \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-z^2x^2/2}\, a(x)\, dx\,;$$

pour les mêmes raisons, puisque $\widehat{a}$ est intégrable, on peut poser pour tout $z \in \overline{\Omega} \setminus \{0\}$

$$g(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-x^2/(2z^2)} \, \widehat{a}(x) \, dx \,;$$

(il y a maintenant un problème pour $z = 0$, qui n'existait pas pour la fonction f). On voit (avec le théorème de Lebesgue) que ces définitions donnent deux fonctions f et g continues sur $\overline{\Omega} \setminus \{0\}$.

Il est facile de voir que ces deux fonctions f et g sont holomorphes dans l'ouvert Ω, en utilisant le théorème usuel d'holomorphie sous l'intégrale ; elles sont donc égales dans Ω puisqu'elles coïncident pour tout z réel > 0 d'après (2). On a aussi en prolongeant par continuité à l'adhérence de Ω

$$\forall z \in \overline{\Omega} \setminus \{0\}, \quad z \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-z^2x^2/2} \, a(x) \, dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-x^2/(2z^2)} \, \widehat{a}(x) \, dx.$$

Lorsque $|z| \to +\infty$ avec $z \in \overline{\Omega}$, on voit que $\mathrm{e}^{-x^2/(2z^2)}$ tend vers 1 en restant dominé en module par 1 ; l'intégrabilité de $\widehat{a}$ et le théorème de Lebesgue donnent alors

$$(3) \qquad \lim_{|z| \to \infty, z \in \overline{\Omega}} z \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-z^2x^2/2} \, a(x) \, dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \widehat{a}(x) \, dx = \sqrt{2\pi} \, a(0).$$

Introduisons $\xi = \mathrm{e}^{i\pi/4} = (1+i)/\sqrt{2}$, qui est dans $\overline{\Omega}$ et vérifie $\xi^2 = i$. Pour tout $t > 0$, le point $z = \xi\sqrt{t}$ est dans $\overline{\Omega}$ et on obtient comme cas particulier de ce qui précède

$$(4) \qquad \lim_{t \to +\infty} \xi\sqrt{t} \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-itx^2/2} \, a(x) \, dx = \sqrt{2\pi} \, a(0),$$

ce qui s'écrit aussi

$$\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-itx^2/2} \, a(x) \, dx \sim \overline{\xi} \, a(0) \sqrt{\frac{2\pi}{t}} = \mathrm{e}^{-i\pi/4} \, a(0) \sqrt{\frac{2\pi}{t}}$$

lorsque $t \to +\infty$. En utilisant la demi-droite conjuguée on aura de même

$$\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{itx^2/2} \, a(x) \, dx \sim \xi \, a(0) \sqrt{\frac{2\pi}{t}} = \mathrm{e}^{i\pi/4} \, a(0) \sqrt{\frac{2\pi}{t}}$$

lorsque $t \to +\infty$.

Comportement à l'infini de la fonction de Bessel J_0

On va appliquer ce qui précède à la fonction de Bessel J_0. On écrit

$$\mathrm{J}_0(t) = \int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{it\sin(\theta)} \, \frac{d\theta}{2\pi} = \int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{it\cos(\theta)} \, \frac{d\theta}{2\pi} = \int_{-\pi/2}^{3\pi/2} \mathrm{e}^{it\cos(\theta)} \, \frac{d\theta}{2\pi}.$$

On commencera avec l'étude de

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \mathrm{e}^{it\cos(\theta)} \, d\theta \,;$$

sur cet intervalle la dérivée $-\sin(\theta)$ de la fonction « phase » $\theta \to \cos(\theta)$ possède un seul zéro, à savoir $\theta = 0$ (au point 0 la « phase est stationnaire », c'est un *point critique* de la phase). On considérera ensuite l'intervalle $[\pi/2, 3\pi/2]$ sur lequel on aura à nouveau un unique point critique pour la phase, le point $\theta = \pi$. Chacun de ces deux points critiques fera, après un petit changement de variable, apparaître le phénomène étudié dans le paragraphe précédent, mais avec des paramètres différents. Il est donc naturel de découper le problème en deux morceaux présentant chacun une singularité unique.

En fait il est techniquement plus rusé de procéder à un découpage plus doux, du type partition de l'unité. On considère donc une fonction φ_1 de classe C^∞ et 2π-périodique sur $\mathbb{R}$, telle que $\varphi_1(\theta) = 1$ au voisinage de $\theta = 0$ et $\varphi_1(\theta) = 0$ au voisinage de $\theta = \pi$; on définit ensuite φ_2 par l'égalité $\varphi_1(\theta) + \varphi_2(\theta) = 1$ pour tout θ. Alors

$$\mathrm{J}_0(t) = \int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{it\cos(\theta)} \, \big(\varphi_1(\theta) + \varphi_2(\theta)\big) \, \frac{d\theta}{2\pi}.$$

Posons

$$\begin{aligned} \mathrm{I}_1(t) &= \int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{it\cos(\theta)} \; \varphi_1(\theta)\, d\theta \\ &= \mathrm{e}^{it} \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{e}^{it(\cos(\theta)-1)} \, \varphi_1(\theta)\, d\theta = \mathrm{e}^{it} \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{e}^{-2it\sin^2(\theta/2)} \, \varphi_1(\theta)\, d\theta. \end{aligned} \tag{5}$$

On pose $x = 2\sin(\theta/2)$, qui donne bien un changement de variable monotone sur l'intervalle $(-\pi, \pi)$ étudié ; la bijection réciproque, qui est définie sur l'intervalle image $\mathrm{I} = (-2, 2)$, est donnée par la relation $\theta = f(x) = 2 * \mathrm{Arcsin}(x/2)$; la fonction f est de classe C^∞ sur l'intervalle I (elle est en fait développable en série entière sur cet intervalle). L'expression de $\mathrm{I}_1(t)$ devient

$$\mathrm{I}_1(t) = \mathrm{e}^{it} \int_{-2}^{2} \mathrm{e}^{-itx^2/2} \, \frac{\varphi_1(f(x))}{\sqrt{1 - x^2/4}} \, dx.$$

On remarque que $\varphi_1(f(x))$ s'annule au voisinage de $x = -2$ et de $x = 2$, parce que φ_1 est nulle au voisinage de $\pm\pi$: si φ_1 est nulle sur $[\pi - \varepsilon, \pi + \varepsilon]$, où $0 < \varepsilon < \pi$, alors $\eta = 2\sin(\varepsilon/2)$ vérifie $0 < \eta < 2$, et $\varphi_1(f(x))$ est nulle sur les deux intervalles ouverts $(-2, -\eta)$ et $(\eta, 2)$; ceci permet de définir une fonction a de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, à support compact, telle que

$$a(x) = \frac{\varphi_1(f(x))}{\sqrt{1 - x^2/4}} \tag{6}$$

pour $x \in (-2, 2)$ et $a(x) = 0$ lorsque $|x| \ge 2$. Alors

$$\mathrm{I}_1(t) = \mathrm{e}^{it} \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-itx^2/2} \; a(x)\, dx,$$

et d'après le paragraphe précédent, puisque $a(0) = 1$, on a pour $t \to +\infty$

$$\mathrm{I}_1(t) \sim \mathrm{e}^{it}\, \overline{\xi} \sqrt{\frac{2\pi}{t}} = \mathrm{e}^{i(t - \pi/4)} \sqrt{\frac{2\pi}{t}}.$$

Pour le résultat final il faudra ajouter $\mathrm{I}_1(t)$ et $\mathrm{I}_2(t)$, et les équivalents sont mal adaptés à l'addition. Mais en fait on avait obtenu à l'équation (4) un résultat un peu plus précis,

$$\lim_{t\to+\infty} \sqrt{t} \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-itx^2/2}\ a(x)\,dx = \mathrm{e}^{-i\pi/4}\sqrt{2\pi},$$

qui donne par multiplication avec la fonction bornée $t \to \mathrm{e}^{it}$

$$\lim_{t\to+\infty} \Big(\sqrt{t}\,\mathrm{I}_1(t) - \mathrm{e}^{i(t-\pi/4)}\sqrt{2\pi}\Big) = 0.$$

En procédant de façon analogue avec

$$\mathrm{I}_2(t) = \int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{it\cos(\theta)}\ \varphi_2(\theta)\,d\theta$$

on obtient

$$\lim_{t\to+\infty} \Big(\sqrt{t}\,\mathrm{I}_2(t) - \mathrm{e}^{-i(t-\pi/4)}\sqrt{2\pi}\Big) = 0.$$

Finalement on obtient pour $\mathrm{J}_0(t) = (\mathrm{I}_1(t) + \mathrm{I}_2(t))/(2\pi)$ que

$$\sqrt{t}\,\mathrm{J}_0(t) - \sqrt{\frac{2}{\pi}}\ \cos(t-\pi/4)$$

tend vers 0 lorsque $t \to +\infty$. On a donc identifié les constantes λ_0 et φ_0 introduites dans le paragraphe 1. En rapprochant les deux résultats, on trouve finalement que

$$\mathrm{J}_0(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi t}}\ \cos(t-\pi/4) + \mathrm{O}(t^{-3/2})$$

lorsque $t \to +\infty$.

Remarque 1. On aurait pu obtenir le terme complémentaire en $\mathrm{O}(t^{-3/2})$ en précisant l'erreur dans l'équation (3). En exploitant le fait que $|1 - \mathrm{e}^{-\zeta}| \le |\zeta|$ lorsque $\mathrm{Re}\,\zeta \ge 0$, on obtient pour $z \in \overline{\Omega} \setminus \{0\}$ la majoration

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \big|1 - \mathrm{e}^{-x^2/(2z^2)}\big| \le \frac{x^2}{2|z|^2}$$

qui permet d'étudier l'erreur, sous l'hypothèse supplémentaire que $\int_{\mathbb{R}} x^2\,|\widehat{a}(x)|\,dx < +\infty$; cette hypothèse supplémentaire sera en particulier satisfaite quand a est C^∞ à support compact. On aura par convergence dominée

$$\lim_{|z|\to\infty, z\in\overline{\Omega}} \quad z^2\Big(\sqrt{2\pi}\,a(0) - z\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-z^2x^2/2}\,a(x)\,dx\Big) =$$

$$\lim_{|z|\to\infty, z\in\overline{\Omega}} \frac{z^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \big(1 - \mathrm{e}^{-x^2/(2z^2)}\big)\widehat{a}(x)\,dx = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} x^2\,\widehat{a}(x)\,dx = -\sqrt{\frac{\pi}{2}}\ a''(0).$$

Remarque 2. Il est très facile de faire le même travail pour toutes les fonctions J_n, pour n entier ≥ 0. On a en effet avec le changement de variable $\alpha = \pi/2 - \theta$

$$\mathrm{J}_n(t) = \int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{it\sin(\alpha) - in\alpha} \, \frac{d\alpha}{2\pi} = \mathrm{e}^{-in\pi/2} \int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{it\cos(\theta) + in\theta} \, \frac{d\theta}{2\pi}.$$

Dans l'intégrale, le facteur nouveau $\mathrm{e}^{in\theta}$ ne contribuera qu'à changer la fonction a définie à l'équation (6) ; la valeur de a ne sera pas changée au point critique $\theta = 0$, mais elle sera multipliée par $(-1)^n$ au point critique $\theta = \pi$. Il faut de plus tenir compte du multiple $\mathrm{e}^{-in\pi/2}$ situé devant l'intégrale ; les calculs sont laissés au lecteur. On remarquera seulement que pour $n = 4k$ multiple de 4, le premier terme du développement asymptotique de J_{4k} est identique à celui de J_0,

$$\mathrm{J}_{4k}(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi t}} \cos(t - \pi/4) + \mathrm{O}(t^{-3/2})$$

lorsque $t \to +\infty$. On pourra vérifier que

$$\mathrm{J}_{4k+1}(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi t}} \sin(t - \pi/4) + \mathrm{O}(t^{-3/2})$$

et que

$$\mathrm{J}_{4k+2}(t) = -\mathrm{J}_{4k}(t) + \mathrm{O}(t^{-3/2}), \quad \mathrm{J}_{4k+3}(t) = -\mathrm{J}_{4k+1}(t) + \mathrm{O}(t^{-3/2})$$

lorsque $t \to +\infty$.

Remarque 3. Si on tend vers l'infini par valeurs réelles dans la formule (3), et si on adapte l'étude précédente à celle de l'intégrale

$$\mathrm{J}_0(it) = \int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{t\cos(\theta)} \, \frac{d\theta}{2\pi}, \tag{7}$$

on passe de la méthode de la phase stationnaire à la *méthode de Laplace*. Une différence est à noter : dans ce nouveau cas, c'est le seul point critique $\theta = 0$ qui sera important pour l'étude de l'intégrale (7) lorsque $t \to +\infty$, parce que $\mathrm{e}^{t\cos(0)} = \mathrm{e}^t$ est bien plus grand que $\mathrm{e}^{t\cos(\pi)} = \mathrm{e}^{-t}$ lorsque $t \to +\infty$. La situation sera inversée quand $t \to -\infty$; cette étude en $-\infty$ est inutile ici à cause de la parité de J_0.

Exercice. Montrer, en appliquant la formule (3) en y faisant tendre z vers l'infini par valeurs réelles, que

$$\mathrm{J}_0(it) \sim \frac{\mathrm{e}^t}{\sqrt{2\pi t}}$$

lorsque $t \to +\infty$.

Retrouver ce résultat plus simplement, en travaillant directement sur l'expression

$$\mathrm{J}_0(it) = \mathrm{e}^t \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{e}^{t(\cos(\theta) - 1)} \, \frac{d\theta}{2\pi}$$

qui correspond à l'expression médiane des équations (5) : on y utilisera un petit changement de variable et une minoration de la forme $1 - \cos\theta \geq c\,\theta^2$ pour $\theta \in [-\pi, \pi]$, pour pouvoir finir avec le théorème de convergence dominée.

Pour une étude très détaillée de la méthode de Laplace, voir Dieudonné, Calcul infinitésimal. Comme dans la deuxième partie de l'exercice précédent, on n'y utilise ni Fourier ni la variable complexe, mais des techniques de calcul différentiel et intégral réel.