1. Intégration, jusqu'au théorème de Lebesgue

1.1. Intégration positive

Fonctions et ensembles

Quelques notations : on note A^c le complémentaire dans un ensemble X d'un sous-ensemble $\mathrm{A} \subset \mathrm{X}$; si f est une fonction réelle sur X et $t \in \mathbb{R}$, on note $\{f > t\}$ le sous-ensemble de X égal à $\{x \in \mathrm{X} : f(x) > t\}$ (ou bien $\{f \le t\}$, etc...) ; plus généralement si U est un sous-ensemble de $\mathbb{R}$, on note similairement $\{f \in \mathrm{U}\}$ pour $f^{-1}(\mathrm{U})$. On note $\mathbf{1}_\mathrm{A}$ la fonction indicatrice d'un sous-ensemble $\mathrm{A} \subset \mathrm{X}$, fonction égale à 1 sur A et à 0 en dehors de A.

Arithmétique de $[0, +\infty]$

La topologie de $[0, +\infty]$ peut être définie ainsi : un sous-ensemble V est ouvert si et seulement s'il est réunion d'ensembles de l'une des formes suivantes : intervalles $[0, a[$, $]a, b[$ ou bien $]b, +\infty]$. On peut aussi définir cette topologie à partir d'une distance, par exemple en posant

$$d(x, y) = |\,\mathrm{e}^{-x} - \mathrm{e}^{-y}\,|,$$

où on convient que $\mathrm{e}^{-\infty} = 0$. Toute suite croissante d'éléments de $[0, +\infty]$ converge dans $[0, +\infty]$ pour cette topologie.

On définit les opérations d'addition et multiplication de la façon suivante : les résultats ont les valeurs habituelles quand les deux nombres sont finis ; on pose en outre $a + (+\infty) = +\infty$ pour tout $a \ge 0$ (ce qui va de soi), $a \times (+\infty) = +\infty$ si $a > 0$, et enfin $0 \times (+\infty) = 0$. Pour comprendre cette dernière convention il faut voir qu'on fait le choix qui rend les opérations continues pour les limites de suites **croissantes** ; ainsi $0 = 0 \times n$ tend vers $0 \times (+\infty) = 0$ quand n croît vers $+\infty$.

Tout sous-ensemble de $[0, +\infty]$ admet une borne supérieure dans $[0, +\infty]$; par exemple, la borne supérieure de $\emptyset$ est 0, le plus petit élément de $[0, +\infty]$. On a dit que toute suite croissante d'éléments de $[0, +\infty]$ admet une limite dans $[0, +\infty]$: la limite est égale à la borne supérieure de l'ensemble des termes de la suite ; on peut donc définir sans problème la somme de n'importe quelle série à termes dans $[0, +\infty]$,

$$\sum_{k=0}^{+\infty} u_k = \lim_n \,(u_0 + u_1 + \cdots + u_n),$$

car $s_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$ définit une suite croissante dans $[0, +\infty]$, dont on peut trouver la limite.

Plus généralement si $(u_i)_{i \in \mathrm{I}}$ est une famille d'éléments de $[0, +\infty]$, on posera

$$\sum_{i \in \mathrm{I}} u_i = \sup\Bigl\{\sum_{j \in \mathrm{J}} u_j : \mathrm{J} \text{ fini } \subset \mathrm{I}\Bigr\}.$$

On doit convenir que $\sum_{i \in \mathrm{I}} u_i = 0$ lorsque I est vide.

Algèbres, σ-algèbres (ou tribus)

Définition. Une *algèbre* $\mathcal{A}$ de parties d'un ensemble X est un sous-ensemble $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\mathrm{X})$, qui contient $\emptyset$ et est stable par réunion finie et par passage au complémentaire :

(i) $\emptyset \in \mathrm{A}$;
(ii) $(\mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathcal{A}) \Rightarrow (\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) \in \mathcal{A}$;
(iii) $\mathrm{A} \in \mathcal{A} \Rightarrow \mathrm{A}^c \in \mathcal{A}$.

Il en résulte la stabilité par intersection finie. On peut définir la notion d'algèbre, si on préfère, avec la stabilité par intersection finie et par passage au complémentaire.

Définition. Une *tribu* ou *σ-algèbre* de parties de X est une classe $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\mathrm{X})$ qui contient la partie vide $\emptyset$, et qui est stable par complémentaire et par *union dénombrable*.

Autrement dit, il suffit de remplacer dans la définition d'une algèbre l'axiome (ii) par

$(ii)_\sigma$ pour toute suite (A_n) d'éléments de $\mathcal{A}$, on a $\bigcup_n \mathrm{A}_n \in \mathcal{A}$.

La tribu est le cadre naturel où toutes les opérations dénombrables sont permises. Pour qu'une algèbre soit en fait une tribu, il suffit d'ajouter la stabilité par réunion des suites croissantes (parce que $\bigcup_n \mathrm{A}_n$ est aussi égal à la réunion de la suite croissante $\mathrm{B}_n = \mathrm{A}_0 \cup \ldots \cup \mathrm{A}_n$), ou bien la stabilité par intersection des suites décroissantes.

Pour tout ensemble X, l'ensemble $\mathcal{P}(\mathrm{X})$ est évidemment une tribu de parties de X, de même que $\{\emptyset, \mathrm{X}\}$. Sur $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ ou $\mathbb{R}^d$, la tribu naturelle à considérer est la tribu engendrée par les ouverts ; on l'appelle la *tribu borélienne*.

Mesures positives sur une tribu

Un *espace mesurable* $(\Omega, \mathcal{A})$ est simplement le couple d'un ensemble Ω et d'une tribu $\mathcal{A}$ de parties de Ω.

Définition. Une *mesure positive* μ sur un espace mesurable $(\Omega, \mathcal{A})$ est une application $\mu : \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ telle que :

$\mu(\emptyset) = 0$ et pour toute suite (A_n) d'éléments deux à deux disjoints de $\mathcal{A}$, on a $\mu(\bigcup_{n=0}^{+\infty} \mathrm{A}_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mu(\mathrm{A}_n)$ (tous les calculs sont faits avec la valeur $+\infty$ admise).

En prenant $\mathrm{A}_0 = \mathrm{A}$, $\mathrm{A}_1 = \mathrm{B}$ et $\mathrm{A}_n = \emptyset$ pour $n \geq 2$ on retrouve l'additivité finie. Si la mesure prend au moins une valeur finie, l'égalité $\mu(\emptyset) = 0$ résulte de l'additivité. Dans le cas le plus général, on a la mesure pathologique qui vaut $+\infty$ pour tout $\mathrm{A} \neq \emptyset$, qui nous oblige à inclure $\mu(\emptyset) = 0$ dans la définition.

Si on a déjà l'additivité, la σ-additivité s'obtient par la régularité de la mesure pour les limites croissantes : pour toute suite (B_n) croissante d'éléments de $\mathcal{A}$, on a

$$\mu\Big(\bigcup_n \mathrm{B}_n\Big) = \lim_n \mu(\mathrm{B}_n).$$

Pour une mesure finie, on peut aussi passer à la limite pour les suites décroissantes, mais la régularité décroissante n'est pas vraie pour les mesures infinies.

Exemples.

La mesure sur un ensemble Ω qui est infinie pour tout sous-ensemble sauf pour $\emptyset$ n'a pas beaucoup d'intérêt, mais c'est une mesure, qui permet de voir que certains énoncés trop généraux sont faux.

La mesure de comptage μ sur un ensemble I est définie sur la tribu $\mathcal{P}(\mathrm{I})$; pour cette mesure, $\mu(\mathrm{A})$ est le nombre des éléments de A, c'est-à-dire aussi

$$\mu(\mathrm{A}) = \sum_{i \in \mathrm{I}} \mathbf{1}_{\mathrm{A}}(i)\,;$$

le résultat est infini pour tout sous-ensemble $\mathrm{A} \subset \mathrm{I}$ infini.

La mesure de Lebesgue sur $[0,1]$, $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}^n$ est un exemple autrement important, mais son existence sur la tribu borélienne est loin d'être évidente.

Exercice. Montrer que pour toute suite croissante de mesures positives (μ_n) sur un espace mesurable $(\Omega, \mathcal{A})$, la limite $\mathrm{A} \in \mathcal{A} \to \mu(\mathrm{A}) = \lim_n \mu_n(\mathrm{A})$ est une mesure positive sur $(\Omega, \mathcal{A})$; pour toute suite $(\nu_k)_{k \ge 0}$ de mesures positives, $\sum_{k=0}^{+\infty} \nu_k$ est une mesure.

Pour les applications en Analyse classique, il est important de ne pas se limiter au cas des mesures finies ; cependant, les mesures infinies conduisent à des difficultés ; par exemple, il n'y a pas de bonne théorie du produit de deux mesures positives quelconques. On va souvent admettre la restriction raisonnable qui suit.

Définition. On dit qu'une mesure μ positive sur $(\Omega, \mathcal{A})$ est *σ-finie* s'il existe une suite (A_n) d'éléments de $\mathcal{A}$ telle que $\Omega = \bigcup_{n=0}^{+\infty} \mathrm{A}_n$ et $\mu(\mathrm{A}_n) < +\infty$ pour tout $n \ge 0$.

La mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$, la mesure de comptage sur $\mathbb{N}$ sont des exemples de mesures σ-finies.

Intégrale des fonctions étagées positives

Le point de vue le plus agréable pour ce paragraphe (et le suivant) est de travailler avec l'ensemble $[0, +\infty]$, muni de l'arithmétique étendue introduite précédemment.

On considère un espace mesuré $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ et on intègre d'abord les fonctions $\mathcal{A}$-étagées à valeurs dans $[0, +\infty]$. Nous appelons fonction $\mathcal{A}$-étagée une fonction f sur Ω qui ne prend qu'un nombre fini de valeurs, disons $v_1, \ldots, v_n \in [0, +\infty]$, de façon que $\{f = v_j\}$ soit un ensemble de $\mathcal{A}$ pour tout $j = 1, \ldots, n$.

Si f est une telle fonction étagée, on peut l'exprimer sous la forme $f = \sum_{i=1}^m a_i \, \mathbf{1}_{\mathrm{A}_i}$, où $\mathrm{A}_1, \ldots, \mathrm{A}_m$ est une partition de Ω en ensembles $\mathrm{A}_i \in \mathcal{A}$, et où $a_i \ge 0$ est la valeur constante de f sur A_i (si A_i n'est pas vide ; si A_i est vide, a_i est n'importe quel nombre ≥ 0). Une façon d'obtenir une telle expression pour f est de considérer l'ensemble fini $v_1, \ldots, v_n$ des valeurs de f, de poser $\mathrm{V}_i = \{f = v_i\}$ pour tout i et de voir qu'on a $f = \sum_{i=1}^n v_i \, \mathbf{1}_{\mathrm{V}_i}$; cependant il est essentiel de permettre un peu plus de souplesse dans la représentation de f, en n'exigeant pas que A_i soit précisément de la forme $\{f = v\}$ pour un certain v.

La quantité $\sum_{i=1}^m a_i \, \mu(\mathrm{A}_i)$ peut être $+\infty$ mais on va vérifier qu'elle ne dépend que de la fonction étagée f, et pas de la représentation de f du type précédent. On posera alors

$$\int f \, d\mu = \sum_{i=1}^m a_i \, \mu(\mathrm{A}_i)$$

(élément de $[0, +\infty]$) et on dira que $\int f\,d\mu$ est *l'intégrale* (par rapport à μ) de la fonction étagée $f \ge 0$.

Détaillons (à l'extrême) la preuve de l'indépendance par rapport à la représentation. Elle est fondée sur un principe que les intégristes tiennent à démontrer par récurrence : si $c_{i,j}$ est une famille de nombres, indexés par $i = 1, \ldots, m$ et $j = 1, \ldots, n$, on a

$$\sum_{i=1}^m \Bigl(\sum_{j=1}^n c_{i,j} \Bigr) = \sum_{j=1}^n \Bigl(\sum_{i=1}^m c_{i,j} \Bigr).$$

Supposons que $f = \sum_{j=1}^n b_j\, \mathbf{1}_{\mathrm{B}_j}$ soit une autre représentation de la même fonction f, avec toujours $b_j \ge 0$ et $\mathrm{B}_j \in \mathcal{A}$ pour tout $j = 1, \ldots, n$, qui réalisent une deuxième partition de Ω. Les ensembles $\mathrm{C}_{i,j} = \mathrm{A}_i \cap \mathrm{B}_j$ forment une partition de Ω ; lorsque $\mathrm{C}_{i,j}$ est non vide, $a_i = b_j$ est la valeur de f sur $\mathrm{C}_{i,j}$, qu'on appellera $c_{i,j} = a_i = b_j$; si $\mathrm{C}_{i,j} = \emptyset$, alors $\mu(\mathrm{C}_{i,j}) = 0$, et $c_{i,j}\, \mu(\mathrm{C}_{i,j}) = 0 = a_i\, \mu(\mathrm{C}_{i,j}) = b_j\, \mu(\mathrm{C}_{i,j})$ dans ce cas, pour n'importe quel nombre $c_{i,j} \ge 0$; on aura donc dans tous les cas

$$c_{i,j}\, \mu(\mathrm{C}_{i,j}) = a_i\, \mu(\mathrm{C}_{i,j}) = b_j\, \mu(\mathrm{C}_{i,j})$$

pour tous i, j. On obtient ainsi

$$\sum_{i,j} c_{i,j}\, \mu(\mathrm{C}_{i,j}) = \sum_{i=1}^m \Bigl(\sum_{j=1}^n a_i\, \mu(\mathrm{C}_{i,j}) \Bigr) = \sum_{i=1}^m a_i \Bigl(\sum_{j=1}^n \mu(\mathrm{A}_i \cap \mathrm{B}_j) \Bigr) = \sum_{i=1}^m a_i\, \mu(\mathrm{A}_i)$$

(on note que $\mathrm{A}_i = \bigcup_{j=1}^n \mathrm{A}_i \cap \mathrm{B}_j$) et de même dans l'autre sens,

$$\sum_{i,j} c_{i,j}\, \mu(\mathrm{C}_{i,j}) = \sum_{j=1}^n \Bigl(\sum_{i=1}^m b_j\, \mu(\mathrm{C}_{i,j}) \Bigr) = \sum_{j=1}^n b_j \Bigl(\sum_{i=1}^m \mu(\mathrm{A}_i \cap \mathrm{B}_j) \Bigr) = \sum_{j=1}^n b_j\, \mu(\mathrm{B}_j).$$

On démontre ensuite que $(f \le g) \Rightarrow (\int f\,d\mu \le \int g\,d\mu)$ et l'additivité dans le cas ≥ 0 (ainsi que la propriété triviale $\int (\lambda f)\,d\mu = \lambda \int f\,d\mu$, quand $\lambda \ge 0$) : il suffit de remarquer qu'étant données deux fonctions étagées, on peut raffiner les partitions de façon que les deux fonctions soient constantes sur les atomes $\mathrm{C}_{i,j}$ de la partition raffinée, comme on l'a fait ci-dessus. Si $f = \sum_i a_i \mathbf{1}_{\mathrm{A}_i} \le \sum_j b_j \mathbf{1}_{\mathrm{B}_j} = g$, on aura $a_i\, \mu(\mathrm{C}_{i,j}) \le b_j\, \mu(\mathrm{C}_{i,j})$ pour tous i, j et on raisonne comme ci-dessus ; idem pour l'additivité.

Intégrale des fonctions mesurables positives

Dans ce paragraphe, fonction mesurable ≥ 0 signifie fonction mesurable à valeurs dans $[0, +\infty]$. On dit que la fonction $f \ge 0$ sur $(\Omega, \mathcal{A})$ est $\mathcal{A}$-mesurable si l'ensemble $\{f > c\}$ est dans $\mathcal{A}$ pour tout c réel.

Il en résulte que $\{f \ge c\}$ est aussi dans $\mathcal{A}$, car

$$\{f \ge c\} = \bigcap_n \{f > c_n\} \in \mathcal{A}$$

si c_n est une suite strictement croissante vers c ; on a donc aussi $\{f < c\}$, $\{a < f < b\}$, etc… dans $\mathcal{A}$. Inversement, si on avait supposé $\{f < c\}$ mesurable pour tout c, on aurait retrouvé $\{f > c\}$ par les manipulations précédentes ; on peut donc définir la mesurabilité en demandant que $\{f < c\}$ soit dans la tribu $\mathcal{A}$ pour tout réel c.

Remarque. Si $(f_i)_{i\in \mathrm{I}}$ est une famille dénombrable de fonctions mesurables positives, les fonctions $\sup_{i\in \mathrm{I}} f_i$ et $\inf_{i\in \mathrm{I}} f_i$ sont mesurables. Si (f_n) est une suite monotone de fonctions mesurables positives, $\lim_n f_n$ est mesurable.

Preuve. Pour le sup, on note que pour tout réel c,

$$\{\sup_{i\in \mathrm{I}} f_i > c\} = \bigcup_{i\in \mathrm{I}} \{f_i > c\} \in \mathcal{A},$$

car I est dénombrable ; pour l'inf,

$$\{\inf_{i\in \mathrm{I}} f_i < c\} = \bigcup_{i\in \mathrm{I}} \{f_i < c\} \in \mathcal{A}.$$

Si la suite (f_n) est croissante, sa limite est égale à $\sup_n f_n$, donc elle est mesurable ; si la suite (f_n) est décroissante, sa limite est égale à $\inf_n f_n$.

Proposition. *Toute fonction mesurable positive est limite d'une suite croissante de fonctions étagées.*

Démonstration. Si on définit f_n qui prend les valeurs $i/2^n$ pour $i = 0, \ldots, 4^n$, avec $\{f_n = i/2^n\} = \{i/2^n \le f < (i+1)/2^n\}$ quand $0 \le i < 4^n$ et $\{f_n = 2^n\} = \{f \ge 2^n\}$, on voit qu'on définit ainsi une fonction f_n qui est $\mathcal{A}$-étagée, et que la suite (f_n) tend simplement vers f, en croissant. On peut aussi définir cette même fonction f_n par la formule

$$\forall \omega \in \Omega, \quad f_n(\omega) = \min\bigl\{2^n,\, 2^{-n}\,\bigl[2^n f(\omega)\bigr]\bigr\}$$

où $[x]$ désigne la partie entière d'un réel x.

Remarque. La somme de deux fonctions mesurables ≥ 0 est mesurable. Si f est mesurable positive et $a \ge 0$, la fonction af est mesurable.

Il suffit d'utiliser les deux résultats qui précèdent : si f, g sont mesurables, alors $f = \lim_n f_n$, $g = \lim_n g_n$, avec (f_n), (g_n) suites croissantes de fonctions étagées, donc $f + g = \lim_n \nearrow (f_n + g_n)$ est mesurable. L'affirmation sur af est évidente.

Définition. L'intégrale d'une fonction mesurable $f \ge 0$ est le sup des intégrales des fonctions étagées $g \le f$.

Avec cette définition, il est évident que $0 \le f_1 \le f_2$ implique $\int f_1\, d\mu \le \int f_2\, d\mu$; il est clair aussi que $\int (af)\, d\mu = a \int f\, d\mu$ pour tout $a \ge 0$, et que $\int (f_1 + f_2)\, d\mu \ge \int f_1\, d\mu + \int f_2\, d\mu$. De plus on voit facilement que

$$\int f\, d\mu = \sum_{i=1}^{m} \int \mathbf{1}_{\mathrm{A}_i} f\, d\mu$$

si $\mathrm{A}_1, \ldots, \mathrm{A}_m$ est une partition de Ω en ensembles de la tribu $\mathcal{A}$: en effet dans ce cas toute fonction étagée $g \le f$ s'écrit comme la somme $\sum_i \mathbf{1}_{\mathrm{A}_i} g$ de fonctions étagées plus petites que chaque $\mathbf{1}_{\mathrm{A}_i} f$.

Exemples.

1. On a défini $\sum_{i\in \mathrm{I}} u_i$ pour toute famille $(u_i)_{i\in \mathrm{I}}$ de réels ≥ 0. La quantité $\sum_{i\in \mathrm{I}} u_i$ est l'intégrale pour la mesure de comptage de la fonction positive $u : i \to u_i$ définie sur l'ensemble I.

2. *Intégrale de Riemann.* Si f est une fonction sur $[a,b]$, mesurable positive et intégrable au sens de Riemann, l'intégrale définie ici coïncide avec l'intégrale au sens de Riemann.

Désignons par λ la mesure de Lebesgue sur un intervalle fermé borné $[a,b]$. Si une fonction mesurable positive f sur $[a,b]$ est intégrable au sens de Riemann, on voit que

$$\int f\,d\lambda = \int_a^b f(t)\,dt,$$

où la deuxième expression désigne l'intégrale au sens de Riemann. En effet, si φ est une *fonction en escalier*, c'est un cas particulier de fonction étagée, et on vérifie facilement que

$$\int \varphi\,d\lambda = \int_a^b \varphi(t)\,dt\,;$$

pour tout $\varepsilon > 0$, on peut trouver deux fonctions en escalier φ_1, φ_2 telles que $0 \le \varphi_1 \le f \le \varphi_2$ et $\int_a^b \bigl(\varphi_2(t) - \varphi_1(t)\bigr)\,dt < \varepsilon$. On aura

$$\int_a^b \varphi_1(t)\,dt = \int \varphi_1\,d\lambda \le \int f\,d\lambda \le \int \varphi_2\,d\lambda = \int_a^b \varphi_2(t)\,dt$$

ce qui montre que $\int f\,d\lambda$ et $\int_a^b f(t)\,dt$ diffèrent de moins de ε, pour tout $\varepsilon > 0$, donc les deux intégrales sont égales.

Lemme. *Soient* $\mathrm{A} \in \mathcal{A}$ *et* $a \ge 0$ *; si une suite croissante* (f_n) *de fonctions mesurables positives vérifie* $a\mathbf{1}_\mathrm{A} \le \lim_n f_n$, *alors*

$$a\,\mu(\mathrm{A}) \le \lim_n \int f_n\,d\mu.$$

Démonstration. Si $a = 0$, alors $a\,\mu(\mathrm{A}) = 0$ et l'inégalité est évidente. Supposons donc $a > 0$ et soit $0 < b < a$; l'ensemble $\mathrm{B}_n = \{f_n > b\}$ est croissant avec n, de limite $\mathrm{B} = \{\lim_n f_n > b\}$; l'hypothèse implique que $\mathrm{B} \supset \mathrm{A}$, et on a $b\,\mathbf{1}_{\mathrm{B}_n} \le f_n$ donc

$$b\,\mu(\mathrm{A}) \le b\,\mu(\mathrm{B}) = \lim_n b\,\mu(\mathrm{B}_n) = \lim_n \int (b\mathbf{1}_{\mathrm{B}_n})\,d\mu \le \lim_n \int f_n\,d\mu.$$

Il ne reste plus qu'à faire croître b vers a.

Proposition. Lemme des suites croissantes, ou de convergence monotone. *Si une suite* (f_n) *de fonctions mesurables* ≥ 0 *tend en croissant vers* f, *on a*

$$\int f\,d\mu = \lim_n \int f_n\,d\mu.$$

Démonstration. On sait que la limite f est mesurable. Soit $g = \sum_{j=1}^m a_j \mathbf{1}_{\mathrm{A}_j}$ une fonction étagée positive $\le f$, avec des A_j non vides qui réalisent une partition de Ω, et $a_j \ge 0$ pour $j = 1, \ldots, m$; pour chaque indice j, la suite $\mathbf{1}_{\mathrm{A}_j} f_n$ est croissante et tend vers $\mathbf{1}_{\mathrm{A}_j} f \ge \mathbf{1}_{\mathrm{A}_j} g = a_j \mathbf{1}_{\mathrm{A}_j}$, donc

$$a_j\,\mu(\mathrm{A}_j) \le \lim_n \int \mathbf{1}_{\mathrm{A}_j} f_n\,d\mu$$

d'après le lemme précédent. Il n'y a plus qu'à additionner en j pour obtenir

$$\int g\,d\mu \le \sum_{j=1}^{m} \Bigl(\lim_n \int \mathbf{1}_{\mathrm{A}_j} f_n\,d\mu\Bigr) = \lim_n \sum_{j=1}^{m} \int 1_{\mathrm{A}_j} f_n\,d\mu = \lim_n \int f_n\,d\mu,$$

et ceci pour toute fonction étagée $g \le f$. Il en résulte que $\int f\,d\mu \le \lim_n \int f_n\,d\mu$. L'autre inégalité est triviale.

Conséquence : additivité de l'intégrale. Si f et g sont deux fonctions mesurables ≥ 0, on peut trouver deux suites croissantes (f_n) et (g_n) de fonctions étagées qui tendent vers f et g respectivement ; on passe à la limite croissante dans l'additivité pour les fonctions étagées, et on obtient pour tous $a, b \ge 0$

$$\int (af + bg)\,d\mu = a\int f\,d\mu + b\int g\,d\mu.$$

Proposition. *Si (u_k) est une suite de fonctions mesurables ≥ 0, on a*

$$\int_\Omega \Bigl(\sum_{k=0}^{+\infty} u_k(\omega)\Bigr)\,d\mu(\omega) = \sum_{k=0}^{+\infty} \int_\Omega u_k(\omega)\,d\mu(\omega)$$

avec les conventions d'usage sur la valeur $+\infty$.

Démonstration. La suite $f_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$ est croissante, de limite $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k$; par convergence monotone et additivité de l'intégrale on obtient

$$\int_\Omega \Bigl(\sum_{k=0}^{+\infty} u_k\Bigr)\,d\mu = \lim_n \int_\Omega f_n\,d\mu = \lim_n \sum_{k=0}^{n} \int_\Omega u_k\,d\mu = \sum_{k=0}^{+\infty} \int_\Omega u_k\,d\mu.$$

Mesures à densité

Si f est une fonction mesurable ≥ 0, on peut définir une nouvelle mesure $\nu = f\mu$ (on dit aussi $d\nu(\omega) = f(\omega)d\mu(\omega)$, ou $d\nu = f\,d\mu$) en posant pour tout $\mathrm{A} \in \mathcal{A}$

$$\nu(\mathrm{A}) = \int_\Omega \mathbf{1}_\mathrm{A} f\,d\mu = \int_\mathrm{A} f\,d\mu.$$

La proposition précédente montre que ν est une mesure ; en effet, si les (A_k) sont deux à deux disjoints de réunion A, on a $\mathbf{1}_\mathrm{A} = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbf{1}_{\mathrm{A}_k}$ donc

$$\nu(\mathrm{A}) = \int \Bigl(\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbf{1}_{\mathrm{A}_k} f\Bigr)\,d\mu = \sum_{k=0}^{+\infty} \int \mathbf{1}_{\mathrm{A}_k} f\,d\mu = \sum_{k=0}^{+\infty} \nu(\mathrm{A}_k).$$

De plus, pour toute fonction mesurable positive g on a

$$\int g\,d\nu = \int gf\,d\mu.$$

La relation est vraie pour les fonctions étagées par définition et linéarité, et passe aux fonctions g mesurables par le lemme de convergence monotone appliqué à μ et à ν.

Proposition : lemme de Fatou. *Si* (f_n) *est une suite de fonctions mesurables* ≥ 0*,*

$$\int \liminf_n f_n\, d\mu \leq \liminf_n \int f_n\, d\mu.$$

Démonstration. Posons $g_n = \inf_{m \geq n} f_m \geq 0$. On sait que g_n est mesurable. Pour chaque entier $m \geq n$ on a évidemment $g_n \leq f_m$, donc $\int g_n \leq \int f_m$ et par conséquent $\int g_n \leq \inf_{m \geq n} \int f_m$. D'après le lemme des suites croissantes le premier terme de l'inégalité croît vers $\int \liminf_n f_n$ (parce que (g_n) tend en croissant vers $\liminf_n f_n$) alors que le deuxième croît vers $\liminf_n \int f_n$.

Exercice corrigé.

a. Si f est mesurable ≥ 0, montrer que $\int f\, d\mu = 0$ si et seulement si $\mu(\{f > 0\}) = 0$.
Supposons que $\{f > 0\}$ soit μ-négligeable. Par définition, $\int f\, d\mu$ est le sup des $\int g\, d\mu$ pour les g étagées telles que $0 \leq g \leq f$. Si on écrit $g = \sum_{i=1}^n a_i \mathbf{1}_{\mathrm{A}_i}$, avec (A_i) partition de Ω en ensembles de $\mathcal{A}$, on aura que $\mathrm{A}_i \subset \{f > 0\}$ si $a_i > 0$, donc $\mu(\mathrm{A}_i) = 0$ et $a_i\, \mu(\mathrm{A}_i) = 0$ dans ce cas ; si $a_i = 0$ on a aussi $a_i\, \mu(\mathrm{A}_i) = 0$, donc $a_i\, \mu(\mathrm{A}_i) = 0$ pour tout i, donc $\int g\, d\mu = \sum_{i=1}^n a_i\, \mu(\mathrm{A}_i) = 0$.

Inversement si $\int f\, d\mu = 0$, on pose $\mathrm{B}_n = \{f \geq 2^{-n}\}$ pour tout entier $n \geq 0$ et on constate que $0 \leq 2^{-n} \mathbf{1}_{\mathrm{B}_n} \leq f$ donc $0 \leq 2^{-n} \mu(\mathrm{B}_n) \leq \int f\, d\mu = 0$, donc $\mu(\mathrm{B}_n) = 0$; ceci étant vrai pour tout n, on aura $\mu(\bigcup_n \mathrm{B}_n) = 0$, et $\bigcup_n \mathrm{B}_n = \{f > 0\}$.

b. Montrer que si $\int f\, d\mu < \infty$, alors $\mu(\{f = +\infty\}) = 0$.
Pour tout entier n on a $2^n \mathbf{1}_{\{f = +\infty\}} \leq f$ donc $2^n \mu(\{f = +\infty\}) \leq \int f\, d\mu$ ce qui donne $\mu(\{f = +\infty\}) \leq 2^{-n} \int f\, d\mu$ pour tout n et $\mu(\{f = +\infty\}) = 0$ à la limite.

1.2. Jeux de tribus

Toute intersection de tribus de parties de X est une tribu de parties de X. Il en résulte que pour toute classe $\mathcal{C}$ de parties de X, il existe une plus petite tribu contenant $\mathcal{C}$. On l'appelle la *tribu engendrée* par la classe $\mathcal{C}$, et on la note $\sigma(\mathcal{C})$.

Évidemment, si $\mathcal{C}$ est déjà une tribu, alors $\sigma(\mathcal{C}) = \mathcal{C}$.

Principe trivial et répété sans cesse :

si $\mathcal{C} \subset \mathcal{A}$*, avec* $\mathcal{A}$ *une tribu, alors* $\sigma(\mathcal{C}) \subset \mathcal{A}$*.*

Mettons ce petit principe en application. La tribu borélienne de $\mathbb{R}$ est la tribu $\mathcal{B}_\mathbb{R}$ qui est engendrée par les ouverts de $\mathbb{R}$.

Proposition. *La tribu borélienne de* $\mathbb{R}$ *est engendrée par la classe* $\mathcal{C}$ *formée des intervalles* $]c, +\infty[$*, où* c *varie dans* $\mathbb{R}$*.*

Démonstration. Posons $\mathcal{A} = \sigma(\mathcal{C})$, et montrons que $\mathcal{A} = \mathcal{B}_\mathbb{R}$. Évidemment $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}_\mathbb{R}$ puisque $\mathcal{B}_\mathbb{R}$ contient tous les générateurs de $\mathcal{A}$, qui sont des intervalles *ouverts*. Pour tout c, l'intervalle fermé $[c, +\infty[$ est l'intersection de la suite des $]c - 2^{-n}, +\infty[$, donc $[c, +\infty[\in \mathcal{A}$ pour tout c réel ; en passant au complémentaire on voit que $]-\infty, b[$ est dans $\mathcal{A}$, et par intersection avec $]a, +\infty[$ on déduit que tout intervalle $]a, b[$ est dans $\mathcal{A}$. Comme tout ouvert de $\mathbb{R}$ est réunion dénombrable d'intervalles ouverts, on voit que les générateurs de $\mathcal{B}_\mathbb{R}$ sont dans $\mathcal{A}$, donc $\mathcal{B}_\mathbb{R} \subset \mathcal{A}$, d'où l'égalité des deux tribus.

On montre de la même façon que la tribu borélienne de $\overline{\mathbb{R}}$ est engendrée par les intervalles $]c, +\infty]$. Rappelons pourquoi tout ouvert de $\mathbb{R}$ est réunion dénombrable d'intervalles ouverts : la famille $\mathcal{F}$ des intervalles de la forme $]q, r[$ avec q, r rationnels, $q < r$, est dénombrable puisqu'elle est indexée par un sous-ensemble de l'ensemble dénombrable $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$; si V est un ouvert de $\mathbb{R}$, désignons par $\mathcal{F}_{\mathrm{V}}$ le sous-ensemble de $\mathcal{F}$ formé des intervalles $]q, r[$ contenus dans V ; c'est encore un ensemble dénombrable d'intervalles. Pour tout point $x \in \mathrm{V}$, on peut trouver $\varepsilon > 0$ tel que $]x - \varepsilon, x + \varepsilon[\subset \mathrm{V}$, puis trouver deux rationnels q, r tels que $x - \varepsilon < q < x < r < x + \varepsilon$. L'intervalle $]q, r[$ est dans la famille $\mathcal{F}_{\mathrm{V}}$, donc

$$x \in \mathrm{U} = \bigcup \{\mathrm{I} : \mathrm{I} \in \mathcal{F}_{\mathrm{V}}\}.$$

On a évidemment $\mathrm{U} \subset \mathrm{V}$, et tout point x de V est dans U, donc $\mathrm{V} = \mathrm{U}$, réunion dénombrable d'intervalles ouverts.

Produit de tribus

On suppose donnés X_1 et X_2 avec chacun une tribu $\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{A}_2$; on définit la *tribu produit* sur l'ensemble produit $\mathrm{X}_1 \times \mathrm{X}_2$, notée $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$: c'est la tribu engendrée par les ensembles de la forme $\mathrm{A}_1 \times \mathrm{A}_2$, avec $\mathrm{A}_j \in \mathcal{A}_j$:

$$\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2 = \sigma\big(\{\mathrm{A}_1 \times \mathrm{A}_2 : \mathrm{A}_1 \in \mathcal{A}_1, \mathrm{A}_2 \in \mathcal{A}_2\}\big).$$

La mesurabilité abstraite

Définition. Étant donnés deux espaces mesurables $(\Omega_1, \mathcal{A}_1)$ et $(\Omega_2, \mathcal{A}_2)$, on dit qu'une application $f : \Omega_1 \to \Omega_2$ est *mesurable* si $f^{-1}(\mathcal{A}_2) \subset \mathcal{A}_1$.

Propriété évidente : la composition d'applications mesurables fournit une application mesurable.

Le critère suffisant en $f^{-1}(\mathcal{C})$: *pour que f soit mesurable de $(\Omega_1, \mathcal{A}_1)$ dans $(\Omega_2, \mathcal{A}_2)$, il suffit que $\{f \in \mathrm{C}\} \in \mathcal{A}_1$ pour tout C d'une classe $\mathcal{C}$ qui engendre $\mathcal{A}_2$.*

En effet, on montre facilement que la classe

$$\mathcal{D} = \{\mathrm{B} \in \mathcal{A}_2 : \{f \in \mathrm{B}\} \in \mathcal{A}_1\}$$

est une tribu, et elle contient $\mathcal{C}$ par hypothèse. Elle contient donc $\sigma(\mathcal{C})$, et est donc égale à $\mathcal{A}_2$.

Par exemple :

pour que f soit mesurable de $(\Omega, \mathcal{A})$ dans $\overline{\mathbb{R}}$ muni de la tribu borélienne, il faut et il suffit que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \{f > t\} \in \mathcal{A}.$$

Si f_1 et f_2 sont deux applications mesurables de $(\Omega, \mathcal{A})$ dans $(\Omega_j, \mathcal{A}_j)$, $j = 1, 2$, l'application couple $f : \omega \to (f_1(\omega), f_2(\omega))$ est mesurable de $(\Omega, \mathcal{A})$ dans $(\Omega_1 \times \Omega_2, \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2)$. En effet, il suffit de tester l'image inverse des générateurs de la forme $\mathrm{A}_1 \times \mathrm{A}_2$, ce qui est facile :

$$f^{-1}(\mathrm{A}_1 \times \mathrm{A}_2) = f_1^{-1}(\mathrm{A}_1) \cap f_2^{-1}(\mathrm{A}_2) \in \mathcal{A}.$$

Topologie et tribus ; tribus boréliennes

Définition. Soit X un espace topologique ; la *tribu borélienne* de X, qu'on notera $\mathcal{B}_{\mathrm{X}}$, est la tribu de parties de X engendrée par la classe $\mathcal{O}_{\mathrm{X}}$ des ouverts de X, c'est-à-dire $\mathcal{B}_{\mathrm{X}} = \sigma(\mathcal{O}_{\mathrm{X}})$.

Si $\mathcal{C}$ est une classe d'ouverts telle que tout ouvert de X soit réunion dénombrable d'éléments de $\mathcal{C}$, on aura $\mathcal{B}_{\mathrm{X}} = \sigma(\mathcal{C})$.

Théorème. *La tribu borélienne de* $\mathbb{R}^2$ *est égale à la tribu produit tensoriel* $\mathcal{B}_{\mathbb{R}} \otimes \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$*. Plus généralement,*

$$\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n} = \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \otimes \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \otimes \cdots \otimes \mathcal{B}_{\mathbb{R}},$$

où le produit tensoriel contient n *facteurs, tribu de parties de* $\mathbb{R}^n$ *engendrée par les pavés mesurables* $\mathrm{A}_1 \times \cdots \times \mathrm{A}_n$*, avec* $\mathrm{A}_j \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$*,* $j = 1, \ldots, n$*.*

Démonstration. On se limitera au cas de deux facteurs. Montrons d'abord que $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^2} \subset \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \otimes \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$. Pour cela il suffit de montrer que tout ouvert V du produit $\mathbb{R}^2$ appartient à $\mathcal{B}_{\mathbb{R}} \otimes \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$. Comme on l'a fait en dimension 1, on voit que tout ouvert V de $\mathbb{R}^2$ est réunion dénombrable de pavés $]q_1, r_1[\times]q_2, r_2[$, avec q_1, q_2, r_1, r_2 rationnels. Tous ces pavés sont dans $\mathcal{B}_{\mathbb{R}} \otimes \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$, donc tout ouvert V est dans $\mathcal{B}_{\mathbb{R}} \otimes \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$, d'où $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^2} \subset \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \otimes \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$.

L'inclusion inverse $\mathcal{B}_{\mathbb{R}} \otimes \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \subset \mathcal{B}_{\mathbb{R}^2}$ est vraie pour tout espace topologique produit $\mathrm{X} \times \mathrm{Y}$; il faut maintenant montrer que pour tous boréliens A_1 et A_2 de $\mathbb{R}$, le produit $\mathrm{A}_1 \times \mathrm{A}_2$ est un borélien de $\mathbb{R}^2$. On introduit d'abord, lorsque V_2 est un ouvert fixé de $\mathbb{R}$, la classe

$$\mathcal{C}_1 = \{\mathrm{A}_1 \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}} : \mathrm{A}_1 \times \mathrm{V}_2 \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^2}\}\,;$$

on vérifie que $\mathcal{C}_1$ est une tribu, et $\mathcal{C}_1$ contient les ouverts de $\mathbb{R}$, donc $\mathcal{C}_1 = \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ pour tout V_2, ce qui veut dire que $\mathrm{A}_1 \times \mathrm{V}_2 \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^2}$ pour tous $\mathrm{A}_1 \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ et V_2 ouvert de $\mathbb{R}$. Dans un deuxième temps on considère pour A_1 fixé

$$\mathcal{C}_2 = \{\mathrm{A}_2 \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}} : \mathrm{A}_1 \times \mathrm{A}_2 \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^2}\}\,;$$

de même, $\mathcal{C}_2$ est une tribu, qui contient les ouverts V_2 d'après le premier pas, donc $\mathcal{C}_2 = \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$, ce qui donne ce que nous voulons.

Définition. On dit qu'une application f entre deux espaces topologiques X et Y est *borélienne* si elle est mesurable de $(\mathrm{X}, \mathcal{B}_{\mathrm{X}})$ dans $(\mathrm{Y}, \mathcal{B}_{\mathrm{Y}})$. En particulier, toute application continue est borélienne.

Proposition. *Soient* φ *une fonction borélienne de* $\mathbb{R}^n$ *dans* $\mathbb{R}$ *et* $f_1, f_2, \ldots, f_n$ *des fonctions mesurables de* $(\Omega, \mathcal{A})$ *dans* $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$*. L'application* $\omega \to \varphi(f_1(\omega), \ldots, f_n(\omega))$ *est mesurable de* $(\Omega, \mathcal{A})$ *dans* $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$*.*

Démonstration. Faisons la pour $n = 2$. L'application couple $(\omega \to (f_1(\omega), f_2(\omega))$ est mesurable de $(\Omega, \mathcal{A})$ dans $(\mathbb{R}^2, \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \otimes \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$, et φ est par définition mesurable de $(\mathbb{R}^2, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^2})$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$. Puisque $\mathcal{B}_{\mathbb{R}} \otimes \mathcal{B}_{\mathbb{R}} = \mathcal{B}_{\mathbb{R}^2}$, tout roule.

Proposition. *Si une application* f *de* Ω *dans un espace* X *métrisable est limite simple d'une suite d'applications mesurables de* $(\Omega, \mathcal{A})$ *dans* $(\mathrm{X}, \mathcal{B}_{\mathrm{X}})$*, elle est mesurable.*

Si une application à valeurs dans un X *métrisable séparable est mesurable de* $(\Omega, \mathcal{A})$ *dans* $(\mathrm{X}, \mathcal{B}_{\mathrm{X}})$*, elle est limite simple d'une suite d'applications* $\mathcal{A}$*-étagées.*

Démonstration. Supposons que f soit limite simple d'une suite (f_n) d'applications mesurables de $(\Omega, \mathcal{A})$ dans $(\mathrm{X}, \mathcal{B})$. Pour montrer que l'application f est mesurable, il suffit de montrer que $\{f \in \mathrm{U}\} = f^{-1}(\mathrm{U}) \in \mathcal{A}$ pour tout U ouvert de X.

Soit d une distance sur X qui définit la topologie de X ; si $\mathrm{A} \subset \mathrm{X}$ et $x \in \mathrm{X}$, posons $\mathrm{dist}(x, \mathrm{A}) = \inf\{d(x, a) : a \in \mathrm{A}\}$. Considérons pour tout entier $k \geq 0$ l'ensemble ouvert

$$\mathrm{U}_k = \{x \in \mathrm{U} : \mathrm{dist}(x, \mathrm{U}^c) > 2^{-k}\}\,;$$

on obtient une suite croissante dont la réunion est U. Si $f(\omega) \in \mathrm{U}$, il existe un entier k tel que $\mathrm{dist}(f(\omega), \mathrm{U}^c) > 2^{-k}$, donc par la continuité de la distance on a pour n assez grand, disons pour n plus grand qu'un certain m, l'inégalité $\mathrm{dist}(f_n(\omega), \mathrm{U}^c) > 2^{-k}$ c'est-à-dire que $\omega \in \bigcap_{n\ge m}\{f_n \in \mathrm{U}_k\}$. On a donc

$$\{f \in \mathrm{U}\} \subset \mathrm{B} = \bigcup_k \bigcup_m \bigcap_{n\ge m} \{f_n \in \mathrm{U}_k\}.$$

Inversement si $\omega \in \mathrm{B}$, il existe k et m tels que $\mathrm{dist}(f_n(\omega), \mathrm{U}^c) > 2^{-k}$ pour tout $n \ge m$, ce qui implique que $\mathrm{dist}(f(\omega), \mathrm{U}^c) \ge 2^{-k} > 0$ à la limite, donc $\omega \in \{f \in \mathrm{U}\}$. On a donc bien égalité des deux ensembles $\{f \in \mathrm{U}\}$ et B, et $\mathrm{B} \in \mathcal{A}$ puisqu'il se déduit par des opérations dénombrables des $\{f_n \in \mathrm{U}_k\}$, eux-mêmes dans $\mathcal{A}$ puisque chaque f_n est mesurable et U_k ouvert.

Montrons la partie inverse. Soient $(x_k)_{k\ge0}$ une suite dense dans X et d une distance sur X qui définisse la topologie de X ; pour tout entier $k \ge 0$ posons $\delta_k(\omega) = \min\{d(f(\omega), x_j) : 0 \le j \le k\}$. D'après la densité de la suite, on a $\delta_k(\omega) \to 0$; posons aussi $j_k(\omega) = \min\{j \le k : d(f(\omega), x_j) = \delta_k(\omega)\}$, et enfin $f_k(\omega) = x_{j_k(\omega)}$. On a bien $d(f_k(\omega), f(\omega)) \to 0$, et on vérifie que f_k est $\mathcal{A}$-étagée puisque

$$\{f_k = x_j\} = \{\omega : d(f(\omega), x_j) = \delta_k(\omega)\} \ \cap \bigcap_{0\le i<j} \{\omega : d(f(\omega), x_i) > \delta_k(\omega)\} \in \mathcal{A}$$

pour tout $j = 0, \ldots, k$.

1.3. Intégrale des fonctions réelles ou complexes

Contrairement aux paragraphes précédents, on considère maintenant des fonctions mesurables à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Si f est mesurable réelle, on peut écrire $f = f^+ - f^-$, où $f^+ = \max(f, 0)$ et $f^- = \max(-f, 0)$. Ces deux fonctions f^+ et f^- sont mesurables ≥ 0 (par composition de f avec des fonctions continues), et $f^+, f^- \le f^+ + f^- = |f|$. Si f est mesurable à valeurs dans $\mathbb{C}$, les fonctions $\mathrm{Re}\, f$ et $\mathrm{Im}\, f$ sont mesurables réelles (toujours par composition avec des fonctions continues, de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{R}$).

Remarque. Toute fonction mesurable réelle f est limite simple d'une suite (f_n) de fonctions étagées, qu'on peut choisir telles que $|f_n| \le |f|$. Même résultat dans le cas complexe.

Preuve. Il suffit de trouver deux suites croissantes de fonctions étagées positives (u_n) et (v_n) qui tendent vers f_+ et f_- ; les fonctions $f_n = u_n - v_n$ sont étagées, tendent vers f et $|f_n| \le u_n + v_n \le f_+ + f_- = |f|$. Dans le cas complexe il suffit d'appliquer à $\mathrm{Re}\, f$ et $\mathrm{Im}\, f$ ce qu'on vient de dire.

On désigne par $\mathcal{L}_1(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ l'espace vectoriel des fonctions mesurables f à valeurs dans $\mathbb{R}$ telles que $\int |f|\, d\mu < +\infty$. Si $f \in \mathcal{L}_1$, on peut écrire $f = f^+ - f^-$, et $f^+, f^- \le f^+ + f^- = |f|$, donc $\int f^+\, d\mu$ et $\int f^-\, d\mu$ sont finies.

Si $f \in \mathcal{L}_1$, il y a donc au moins une façon d'écrire $f = f_1 - f_2$ avec $f_1, f_2 \ge 0$ d'intégrale finie. Si on a une autre décomposition $f = g_1 - g_2$ avec $g_1, g_2 \ge 0$ d'intégrale finie, on remarque que $f_1 + g_2 = f_2 + g_1$ et on utilise l'additivité de l'intégrale dans le cas positif pour vérifier que $\int f_1 - \int f_2 = \int g_1 - \int g_2$. On peut donc poser

$$\int f\, d\mu = \int f_1\, d\mu - \int f_2\, d\mu.$$

En particulier on a la cohérence avec la définition antérieure du cas positif. Il est facile de vérifier la linéarité de l'intégrale. Notons aussi que

$$\Big|\int f\,d\mu\Big| = \Big|\int f^+\,d\mu - \int f^-\,d\mu\Big| \le \int f^+\,d\mu + \int f^-\,d\mu = \int |f|\,d\mu.$$

Si f est à valeurs complexes, on la décomposera en partie réelle et partie imaginaire, et on posera la définition qui va de soi,

$$\int f\,d\mu = \int (\mathrm{Re}\,f)\,d\mu + i\int (\mathrm{Im}\,f)\,d\mu.$$

On vérifie que l'intégrale est linéaire,

$$\int (af+bg)\,d\mu = a\int f\,d\mu + b\int g\,d\mu,$$

et on a la majoration du module

$$\Big|\int f\,d\mu\Big| \le \int |f|\,d\mu.$$

Pour établir cette majoration, on écrit $\int f\,d\mu = r\,\mathrm{e}^{i\theta}$, avec $r \ge 0$ et θ réel. On a

$$r = \int \big(\mathrm{e}^{-i\theta}\,f\big)\,d\mu = \int \mathrm{Re}(\mathrm{e}^{-i\theta}\,f\big)\,d\mu \le \int |\,\mathrm{Re}(\mathrm{e}^{-i\theta}\,f\big)|\,d\mu \le$$
$$\le \int |\,\mathrm{e}^{-i\theta}\,f|\,d\mu = \int |f|\,d\mu.$$

Remarque. Si f est mesurable de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$ et si f est intégrable-Riemann sur $[a,b]$, alors f est Lebesgue-intégrable, et les intégrales sont égales.

Par définition les fonctions Riemann-intégrable sont bornées ; si $|f| \le \mathrm{M}$, la fonction $f+\mathrm{M}$ est mesurable positive, intégrable Riemann ; on a vu que dans ce cas les intégrales coïncident. On en déduit le résultat annoncé pour $f = (f+\mathrm{M}) - \mathrm{M}$.

Remarque. Si f est mesurable ≥ 0 et si $d\nu = f\,d\mu$, une fonction g mesurable réelle ou complexe est ν-intégrable si et seulement si gf est μ-intégrable, et

$$\int g\,d\nu = \int gf\,d\mu.$$

En effet, on sait d'après le cas positif que

$$\int |g|\,d\nu = \int |g|f\,d\mu,\quad \int g_+\,d\nu = \int g_+f\,d\mu,\quad \int g_-\,d\nu = \int g_-f\,d\mu.$$

Théorème : théorème de convergence dominée de Lebesgue. *Si f_n tend simplement vers f et $|f_n| \le g$ pour tout n, avec $\int g < +\infty$, alors $\int f = \lim_n \int f_n$.*

Démonstration à partir du lemme de Fatou. On va montrer un résultat apparemment plus fort, $\int |f-f_n|\,d\mu \to 0$. On a $|f_n - f| \le 2g$ avec g intégrable. On considère $g_n = 2g - |f-f_n| \ge 0$, qui tend simplement vers $2g$. D'après Fatou

$$\int 2g\,d\mu = \int \liminf\big(2g - |f-f_n|\big)\,d\mu \le \liminf \int \big(2g - |f-f_n|\big)\,d\mu$$

c'est-à-dire

$$\int 2g\,d\mu \le \int 2g\,d\mu - \limsup_n \int |f-f_n|\,d\mu$$

donc, puisque $\int 2g\,d\mu$ est un nombre fini, on obtient $\limsup_n \int |f-f_n|\,d\mu \le 0$.

Exercice. Si f est intégrable sur $\mathbb{R}$, on pose

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \widehat{f}(t) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\,\mathrm{e}^{-ixt}\,dx.$$

a. Montrer que $\widehat{f}$ est bornée, continue, et tend vers 0 à l'infini.

b. Montrer que si $\int_{\mathbb{R}} |x|^k |f(x)|\,dx < +\infty$, alors $\widehat{f}$ est de classe C^k sur $\mathbb{R}$ (k est un entier ≥ 1).

c. Si μ est une mesure ≥ 0 finie et symétrique sur $\mathbb{R}$, montrer que $\widehat{\mu}$ est de classe C^2 si et seulement si $\int_{\mathbb{R}} x^2\,d\mu(x) < +\infty$.

Espaces L_p

Lemme. *Soient* X *un espace vectoriel sur* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$ *et* q *une fonction réelle* **à valeurs** ≥ 0 *définie sur* X *; pour que* q *soit une semi-norme sur* X*, (il faut et) il suffit que :*

pour tous $x \in \mathrm{X}$ *et* $\lambda \in \mathbb{K}$ *on a* $q(\lambda x) = |\lambda|\,q(x)$*, et l'ensemble* $\{x \in \mathrm{X} : q(x) \leq 1\}$ *est convexe.*

Démonstration. Si q est une semi-norme, il est clair que $\mathrm{C}_q = \{x \in \mathrm{X} : q(x) \leq 1\}$ est convexe. Inversement, supposons que q soit positivement homogène et que C_q soit convexe, et déduisons la sous-additivité de q ; soient x et y deux vecteurs de X, et choisissons $a > q(x) \geq 0$ et $b > q(y) \geq 0$; considérons les deux vecteurs de C_q définis par $x_1 = a^{-1}x$ et $y_1 = b^{-1}y$, puis formons la combinaison convexe

$$z = \frac{a}{a+b}\,x_1 + \frac{b}{a+b}\,y_1 = \frac{1}{a+b}\,(x+y),$$

qui est dans C_q d'après l'hypothèse de convexité, c'est-à-dire que $q(z) \leq 1$. L'homogénéité de q transforme l'inégalité $q(z) \leq 1$ en $q(x+y) \leq a+b$. En faisant tendre a vers $q(x)$ et b vers $q(y)$ on obtient l'inégalité triangulaire $q(x+y) \leq q(x) + q(y)$.

Pour $1 \leq p < +\infty$, soit $\mathcal{L}_p = \mathcal{L}_p(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ l'espace vectoriel des fonctions f complexes $\mathcal{A}$-mesurables telles que $\int_\Omega |f(s)|^p\,d\mu(s) < +\infty$; la quantité

$$q(f) = \Bigl(\int_\Omega |f(s)|^p\,d\mu(s)\Bigr)^{1/p}$$

est une semi-norme sur $\mathcal{L}_p$.

Pour le vérifier, on voit d'abord que $q(\lambda f) = |\lambda|\,q(f)$ (facile), puis on montre que l'ensemble $\{f \in \mathcal{L}_p : q(f) \leq 1\}$ est convexe. Cela provient de la convexité sur $[0, +\infty[$ de la fonction $u \to u^p$; on a alors si f, g sont deux éléments de $\mathcal{L}_p$ tels que $q(f) \leq 1$, $q(g) \leq 1$ et si $0 \leq t \leq 1$,

$$|(1-t)f(s) + tg(s)|^p \leq \bigl((1-t)|f(s)| + t|g(s)|\bigr)^p \leq (1-t)|f(s)|^p + t|g(s)|^p$$

pour tout $s \in \Omega$, donc

$$\int_\Omega \bigl|(1-t)f(s)+tg(s)\bigr|^p\,d\mu(s) \leq (1-t)\int_\Omega |f(s)|^p\,d\mu(s) + t\int_\Omega |g(s)|^p\,d\mu(s) \leq (1-t)+t = 1.$$

Désignons par $\mathcal{N}$ l'ensemble des fonctions $\mathcal{A}$-mesurables scalaires f telles que $f = 0$ μ-presque partout. On voit facilement que $\mathcal{N}$ est un espace vectoriel, contenu dans $\mathcal{L}_p$ pour tout p, ce qui permet de considérer le quotient $\mathrm{L}_p(\Omega, \mathcal{A}, \mu) = \mathcal{L}_p(\Omega, \mathcal{A}, \mu)/\mathcal{N}$. On vérifie sans peine que la fonction q "passe au quotient", parce que sa valeur est constante sur les classes d'équivalence. Quand on passe aux classes, on obtient une norme sur l'espace $\mathrm{L}_p(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, notée $\|f\|_p$,

$$\forall f \in \mathrm{L}_p(\Omega, \mathcal{A}, \mu), \quad \|f\|_p = \Bigl(\int_\Omega |f(s)|^p \, d\mu(s)\Bigr)^{1/p}.$$

Exercice.

Si $\int |g_k| \, d\mu \le 2^{-k}$ pour tout entier $k \ge 0$, montrer que la suite numérique $(g_k(\omega))$ tend vers 0 pour μ-presque tout $\omega \in \Omega$.

Si $(f_n) \subset \mathrm{L}_p(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ tend vers f en norme L_p, trouver une sous-suite (f_{n_j}) qui tend vers f μ-presque partout.

Théorème de Fisher-Riesz

Exercice. Pour qu'un espace vectoriel X normé soit complet, il (faut et il) suffit que : pour toute famille (u_k) de vecteurs de X, la condition $\sum \|u_k\| < +\infty$ implique que la série de vecteurs $\sum u_k$ converge dans X.

Théorème. *Pour tout $p \in [1 + \infty]$ l'espace $\mathrm{L}_p(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ est un espace de Banach.*

Démonstration. Soit $\sum u_k$ une série de vecteurs de l'espace $\mathrm{L}_p(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, qui soit telle que $\mathrm{M} = \sum_{k=0}^{+\infty} \|u_k\|_p < +\infty$; nous devons montrer que la série $\sum u_k$ converge dans L_p. Posons $v_k = |u_k|$, $g_n = \bigl(\sum_{k=0}^n v_k\bigr)^p$, remarquons que $\|v_k\|_p = \|u_k\|_p$ pour obtenir

$$\int g_n(s) \, d\mu(s) = \Bigl\|\sum_{k=0}^n v_k\Bigr\|_p^p \le \bigl(\sum_{k=0}^n \|v_k\|_p\bigr)^p \le \mathrm{M}^p.$$

La suite (g_n) est une suite croissante de fonctions mesurables ≥ 0, elle converge vers une fonction mesurable g dont la valeur en chaque point est égale à $g(s) = \bigl(\sum_{k=0}^{+\infty} |u_k(s)|\bigr)^p$ (valeur $+\infty$ admise) ; on sait que $\int g(s) \, d\mu(s) = \lim_n \int g_n(s) \, d\mu(s) \le \mathrm{M}^p$. La fonction g est donc finie presque partout. Posons

$$\mathrm{B} = \{g < +\infty\} \in \mathcal{A} ;$$

on a $\mu(\mathrm{B}^c) = 0$, et la série $\sum u_k(s)$ converge absolument pour tout $s \in \mathrm{B}$; posons

$$\mathrm{U}_n(s) = \sum_{k=0}^n \mathbf{1}_\mathrm{B}(s) u_k(s), \quad \mathrm{U}(s) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbf{1}_\mathrm{B}(s) u_k(s) ;$$

la fonction U_n est presque-partout égale à $\sum_{k=0}^n u_k$; on remarque que $|\mathrm{U}(s) - \mathrm{U}_n(s)|^p \le g(s)$ pour tout s, et que $|\mathrm{U}(s) - \mathrm{U}_n(s)|^p$ tend vers 0 lorsque $n \to +\infty$ pour tout s. Comme la fonction g est intégrable, le théorème de convergence dominée de Lebesgue permet de conclure que

$$\Bigl\|\mathrm{U} - \sum_{k=0}^n u_k\Bigr\|_p^p = \|\mathrm{U} - \mathrm{U}_n\|_p^p = \int |\mathrm{U} - \mathrm{U}_n|^p \, d\mu \to 0.$$

On a montré que la série converge dans L_p, et sa somme est égale à U.

L'espace $\mathrm{L}_\infty(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ est l'espace des μ-classes bornées, c'est-à-dire les classes f contenant une fonction bornée. Si f_1 est un représentant de f tel que $|f_1| \le \mathrm{M}$ partout, on aura alors $\mu(\{\,|f_2| > \mathrm{M}\}) = 0$ pour tout autre représentant f_2 de f. On peut définir la norme L_∞ de f comme étant la plus petite constante M avec cette propriété,

$$\|f\|_\infty = \min\bigl\{\mathrm{M} : \mu(\{|f| > \mathrm{M}\}) = 0\bigr\}.$$

L'espace L_∞ est complet pour cette norme.

Tribu complétée

Dans certains cas une fonction réelle f définie sur $\mathbb{R}$ n'est pas borélienne, mais est tout de même Lebesgue-presque partout égale à une fonction borélienne intégrable g ; on a alors envie de dire que f est Lebesgue-intégrable, et de poser

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}} g(x)\,dx.$$

On peut faire entrer ce cas dans le cadre général de la mesurabilité abstraite, en agrandissant la tribu : désignons par $\widehat{\mathcal{B}}_\lambda$ la classe des ensembles de la forme $\mathrm{A} \cup \mathrm{N}$, où A est borélien et N Lebesgue-négligeable, c'est-à-dire qu'il existe un borélien B tel que $\mathrm{N} \subset \mathrm{B}$ et $\lambda(\mathrm{B}) = 0$. On vérifie facilement que cette classe est une tribu, et on peut définir l'extension de la mesure de Lebesgue à cette tribu en posant

$$\lambda(\mathrm{A} \cup \mathrm{N}) = \lambda(\mathrm{A}).$$

Si f est Lebesgue-presque partout égale à une fonction borélienne g, on voit que $\{f > c\}$ diffère de $\{g > c\}$ par un ensemble négligeable, et il en résulte que $\{f > c\} \in \widehat{\mathcal{B}}_\lambda$. Autrement dit, f est mesurable à valeurs dans $\mathbb{R}$ muni de la *tribu complétée* $\widehat{\mathcal{B}}_\lambda$. On dit dans ce cas que f est Lebesgue-mesurable.

C'est par exemple le cas si f est une fonction intégrable-Riemann sur un intervalle borné $[a, b]$; une telle fonction n'est pas nécessairement borélienne ; cependant, il existe une suite croissante (φ_n) et une suite décroissante (ψ_n) de fonctions en escalier telles que $\varphi_n \le f \le \psi_n$ pour tout n et $\int_a^b (\psi_n - \varphi_n)(t)\,dt \to 0$. Dans ce cas les fonctions boréliennes $\varphi = \sup_n \varphi_n$ et $\psi = \inf_n \psi_n$ vérifient $\varphi \le f \le \psi$ et $\int(\psi - \varphi) = 0$, donc $\varphi = f = \psi$ Lebesgue-presque partout. Toute fonction Riemann-intégrable est donc Lebesgue-mesurable, et les deux notions d'intégrale coïncident,

$$\int_{[a,b]} f\,d\lambda = \int_a^b f(t)\,dt.$$

En effet, $\int_{[a,b]} f\,d\lambda = \int_a^b \varphi(t)\,dt$, la fonction φ est à la fois borélienne et intégrable-Riemann, et on a vérifié l'égalité dans ce cas.

2. Théorème de Fubini

2.1. Questions d'unicité

On a beaucoup vanté dans ce qui précède les mérites de l'intégration des fonctions à valeurs dans $[0,+\infty]$, mais il y a un type de raisonnement qui ne marche pas dans ce cadre : si $\mathrm{A}_1 \subset \mathrm{A}_2$ et si la mesure $\mu(\mathrm{A}_2)$ est finie, on peut calculer la mesure de la différence ensembliste $\mathrm{A}_2 \setminus \mathrm{A}_1$ par

$$\mu(\mathrm{A}_2 \setminus \mathrm{A}_1) = \mu(\mathrm{A}_2) - \mu(\mathrm{A}_1).$$

Pour des démonstrations qui utilisent ce type de ressort, il est préférable de se placer dans un cadre d'espace vectoriel de fonctions.

L'un des objectifs de cette section est d'essayer de montrer que deux mesures μ et ν sont égales à partir d'une information limitée, portant sur l'égalité $\mu(\mathrm{C}) = \nu(\mathrm{C})$ pour tout C d'une classe $\mathcal{C}$. Le mieux qu'on puisse espérer est d'en déduire l'égalité sur la tribu engendrée $\sigma(\mathcal{C})$. C'est le sens des lemmes qui vont suivre.

Un théorème de classe monotone

Par *suite bornée* (f_n) *de fonctions* sur un ensemble Ω on entendra une suite uniformément bornée : il existe un réel M tel que $|f_n(\omega)| \le \mathrm{M}$ pour tout entier n et pour tout $\omega \in \Omega$.

Disons que E, espace vectoriel de fonctions réelles bornées sur Ω, est *stable par convergence simple bornée* (en abrégé : stable par CSB) si pour toute suite bornée (f_n) d'éléments de E telle que f_n converge simplement sur Ω vers une fonction f, on a $f \in \mathrm{E}$.

Il est clair que toute intersection d'espaces de fonctions sur Ω stables par CSB est encore stable par CSB, d'où la possibilité de définir l'espace stable par CSB engendré par une classe quelconque $\mathcal{E}$ de fonctions réelles bornées sur Ω, comme étant l'intersection de tous les espaces stables par CSB qui contiennent $\mathcal{E}$. Cette intersection est évidemment le plus petit espace stable par CSB qui contienne la classe $\mathcal{E}$.

Lemme. *Si* F *est un espace vectoriel de fonctions sur* Ω*, stable par CSB, contenant les fonctions constantes et stable par produit, la classe*

$$\mathcal{F} = \{\mathrm{A} \subset \Omega : \mathbf{1}_\mathrm{A} \in \mathrm{F}\}$$

est une tribu de parties de Ω*.*

Démonstration. On a d'abord $\emptyset \in \mathcal{F}$ puisque $\mathbf{1}_\emptyset = 0 \in \mathrm{F}$; ensuite si $\mathrm{A} \in \mathcal{F}$ on écrit que $\mathbf{1}_{\mathrm{A}^c} = \mathbf{1} - \mathbf{1}_\mathrm{A} \in \mathrm{F}$ puisque F contient la fonction constante $\mathbf{1}$ égale à 1 en tout point de Ω. Si $\mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathcal{F}$, alors $\mathbf{1}_{\mathrm{A}\cap\mathrm{B}} = \mathbf{1}_\mathrm{A}\,\mathbf{1}_\mathrm{B}$ montre que $\mathrm{A} \cap \mathrm{B} \in \mathcal{F}$ puisque F est stable par produit ; enfin, si $(\mathrm{A}_n) \subset \mathcal{F}$ admet A pour réunion croissante, la fonction $\mathbf{1}_\mathrm{A}$ est limite simple bornée de la suite $(\mathbf{1}_{\mathrm{A}_n}) \subset \mathrm{F}$, donc $\mathbf{1}_\mathrm{A} \in \mathrm{F}$ par la propriété d'ESCSB (abrégé pour espace stable par CSB), et il en résulte que $\mathrm{A} \in \mathcal{F}$. On a montré que $\mathcal{F}$ est une tribu.

Remarque. Si F est un ESCSB de fonctions sur Ω, contenant les fonctions constantes et stable par produit, et si $\mathcal{A}$ désigne la tribu $\mathcal{A} = \{\mathrm{A} \subset \Omega : \mathbf{1}_\mathrm{A} \in \mathrm{F}\}$, on voit que $\mathcal{L}_\infty(\Omega, \mathcal{A}) \subset \mathrm{F}$.

Puisque F est un espace vectoriel, il contient toutes les fonctions $\mathcal{A}$-étagées par linéarité ; ensuite, toute fonction $\mathcal{A}$-mesurable bornée g est limite simple d'une suite de fonctions étagées bornées, donc $g \in \mathrm{F}$ à cause de la stabilité par CSB. On voit donc que $\mathcal{L}_\infty(\Omega, \mathcal{A})$ est contenu dans F.

On aura besoin du lemme simple suivant.

Lemme. *Si* F *est un espace vectoriel stable par CSB, si* φ *est une fonction réelle bornée sur* Ω*, l'ensemble*

$$\mathrm{F}_\varphi = \{f \text{ bornée } : \varphi f \in \mathrm{F}\}$$

est un espace vectoriel stable par CSB.

Démonstration. Il est clair que F_φ est un espace vectoriel. Si une suite bornée $(f_n) \subset \mathrm{F}_\varphi$ tend simplement vers une fonction f, la suite (φf_n) est bornée, elle est dans F par définition de F_φ, et elle tend simplement vers φf, donc $\varphi f \in \mathrm{F}$ puisque F est stable par CSB, donc $f \in \mathrm{F}_\varphi$ et on a montré que F_φ est stable par CSB.

Théorème. *Si* E *est un espace vectoriel de fonctions sur* Ω*, stable par CSB, qui contient la fonction* $\mathbf{1}$ *et les fonctions* $\mathbf{1}_\mathrm{C}$ *pour tout* C *d'une classe* $\mathcal{C}$ *de parties de* Ω *stable par intersection finie, alors* E *contient toutes les fonctions* $\mathbf{1}_\mathrm{B}$*, pour* $\mathrm{B} \in \sigma(\mathcal{C})$*.*

Démonstration. Désignons par F le plus petit ESCSB contenant $\mathbf{1}$ et toutes les $\mathbf{1}_\mathrm{C}$, $\mathrm{C} \in \mathcal{C}$; on a évidemment $\mathrm{F} \subset \mathrm{E}$. Si $\mathrm{B}, \mathrm{C} \in \mathcal{C}$, on a d'après l'hypothèse $\mathrm{B} \cap \mathrm{C} \in \mathcal{C}$, donc $\mathbf{1}_\mathrm{B}\mathbf{1}_\mathrm{C} = \mathbf{1}_{\mathrm{B}\cap\mathrm{C}} \in \mathrm{F}$ par définition de F ; en fixant $\mathrm{B} \in \mathcal{C}$ quelconque et en posant $\varphi = \mathbf{1}_\mathrm{B}$ on a donc que $\mathbf{1}_\mathrm{C} \in \mathrm{F}_\varphi$, pour tout $\mathrm{C} \in \mathcal{C}$; comme $\varphi\mathbf{1} = \varphi = \mathbf{1}_\mathrm{B} \in \mathrm{F}$ on a aussi $\mathbf{1} \in \mathrm{F}_\varphi$, donc F_φ est un ESCSB qui contient $\mathbf{1}$ et toutes les fonctions $\mathbf{1}_\mathrm{C}$, $\mathrm{C} \in \mathcal{C}$. Par définition de F on doit avoir $\mathrm{F} \subset \mathrm{F}_\varphi$.

Cette inclusion $\mathrm{F} \subset \mathrm{F}_\varphi$ signifie que $1_\mathrm{B} f \in \mathrm{F}$ pour toute fonction $f \in \mathrm{F}$, et ceci pour tout $\mathrm{B} \in \mathcal{C}$. Recommençons le jeu de F_φ en partant maintenant d'une $\varphi \in \mathrm{F}$ quelconque. D'après ce qui précède, on a $\varphi\mathbf{1}_\mathrm{C} \in \mathrm{F}$ pour tout $\mathrm{C} \in \mathcal{C}$, $\varphi\mathbf{1} = \varphi \in \mathrm{F}$, donc à nouveau F_φ est un ESCSB qui contient $\mathbf{1}$ et toutes les fonctions $\mathbf{1}_\mathrm{C}$, $\mathrm{C} \in \mathcal{C}$; on a donc encore $\mathrm{F} \subset \mathrm{F}_\varphi$, ce qui signifie maintenant que F est stable par produit : si $f_1, f_2 \in \mathrm{F}$, alors $f_1 f_2 \in \mathrm{F}$ (l'espace F est une algèbre de fonctions). Il en résulte que

$$\mathcal{D} = \{\mathrm{B} : \mathbf{1}_\mathrm{B} \in \mathrm{F}\}$$

est une tribu ; elle contient $\mathcal{C}$ par construction de F, donc $\sigma(\mathcal{C}) \subset \mathcal{D}$, c'est-à-dire que F contient toutes les $\mathbf{1}_\mathrm{B}$, $\mathrm{B} \in \sigma(\mathcal{C})$; puisque $\mathrm{F} \subset \mathrm{E}$, la propriété est vraie aussi pour E.

Remarque. Puisque l'espace F ci-dessus est un ESCSB contenant les constantes et stable par produit, on sait qu'il contient l'espace $\mathcal{L}_\infty(\Omega, \mathcal{A})$, où $\mathcal{A} = \sigma(\mathcal{C})$; mais cet espace $\mathcal{L}_\infty(\Omega, \mathcal{A})$ est stable par CSB, il contient 1 et les $\mathbf{1}_\mathrm{C}$, donc $\mathrm{F} = \mathcal{L}_\infty(\Omega, \mathcal{A})$. L'espace E de l'énoncé du théorème précédent contient donc $\mathcal{L}_\infty(\Omega, \sigma(\mathcal{C}))$.

Corollaire 1. *Si deux mesures finies* μ *et* ν *sur* $(\Omega, \mathcal{A})$ *coïncident sur une classe* $\mathcal{C}$ *de parties de* Ω *stable par intersection et engendrant la tribu* $\mathcal{A}$*, et si* $\mu(\Omega) = \nu(\Omega)$*, alors* $\mu = \nu$*.*

Démonstration. Désignons par E l'ensemble des fonctions mesurables bornées f telles que

$$\int f \, d\mu = \int f \, d\nu.$$

Par la linéarité de l'intégrale il est évident que E est un espace vectoriel. Puisque les mesures sont finies, on note que les fonctions constantes sont intégrables ici, et peuvent servir de majorant dans le théorème de convergence dominée. Par une double application du théorème de convergence dominée, si $(f_n) \subset \mathrm{E}$ est une suite bornée qui tend vers f simplement, alors

$$\int f\,d\mu = \lim_n \int f_n\,d\mu = \lim_n \int f_n\,d\nu = \int f\,d\nu,$$

donc $f \in \mathrm{E}$ et on voit que E est un ESCSB. Cet espace contient toutes les $\mathbf{1}_\mathrm{C}$, $\mathrm{C} \in \mathcal{C}$ puisque $\int \mathbf{1}_\mathrm{C}\,d\mu = \mu(\mathrm{C}) = \nu(\mathrm{C}) = \int \mathbf{1}_\mathrm{C}\,d\nu$, et E contient $\mathbf{1}$, puisque $\mu(\Omega) = \nu(\Omega)$. D'après le théorème précédent, E contient toutes les fonctions $\mathbf{1}_\mathrm{B}$ pour $\mathrm{B} \in \mathcal{A} = \sigma(\mathcal{C})$, ce qui signifie que $\mu = \nu$.

Corollaire 2. *Si deux mesures μ et ν sur $(\Omega, \mathcal{A})$ coïncident sur une classe $\mathcal{C}$ de parties de Ω stable par intersection, engendrant la tribu $\mathcal{A}$, et s'il existe une suite croissante $(\mathrm{C}_n) \subset \mathcal{C}$ d'ensembles de mesure* **finie** *dont la réunion est Ω, alors $\mu = \nu$.*

Démonstration. Pour chaque n les formules

$$\forall \mathrm{A} \in \mathcal{A}, \quad \mu_n(\mathrm{A}) = \mu(\mathrm{C}_n \cap \mathrm{A}), \quad \nu_n(\mathrm{A}) = \nu(\mathrm{C}_n \cap \mathrm{A})$$

définissent deux mesures finies $\mu_n = \mathbf{1}_{\mathrm{C}_n}\,\mu$ et $\nu_n = \mathbf{1}_{\mathrm{C}_n}\,\nu$ sur $(\Omega, \mathcal{A})$, qui sont égales sur $\mathcal{C}$ et sur Ω ; il résulte du corollaire précédent que $\mu_n = \nu_n$, et on en déduit pour tout $\mathrm{A} \in \mathcal{A}$

$$\mu(\mathrm{A}) = \lim_n \mu(\mathrm{C}_n \cap \mathrm{A}) = \lim_n \nu(\mathrm{C}_n \cap \mathrm{A}) = \nu(\mathrm{A}).$$

Exemple. La mesure de Lebesgue est invariante par translation et par symétrie.

Plus généralement, deux mesures μ_1 et μ_2 sur la tribu borélienne de $\mathbb{R}^d$ qui donnent la même mesure finie à tous les pavés (par là nous entendons les ensembles compacts de la forme $\prod_{i=1}^d [a_i, b_i]$) sont égales, $\mu_1 = \mu_2$.

C'est une conséquence quasi-immédiate du corollaire précédent : la classe $\mathcal{C}$ des pavés compacts est stable par intersection finie, ses éléments sont de mesure finie par hypothèse, la classe $\mathcal{C}$ engendre la tribu borélienne et de plus la suite croissante des pavés

$$\mathrm{C}_n = [-n, n]^d$$

recouvre $\mathbb{R}^d$.

Si λ désigne la mesure de Lebesgue, si $v = (v_1, \ldots, v_d)$ est un vecteur fixé et si on pose

$$\forall \mathrm{A} \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^d}, \quad \mu(\mathrm{A}) = \lambda(\mathrm{A} + v),$$

alors λ et μ donnent la même mesure finie à tous les pavés compacts, donc $\mu = \lambda$, ce qui signifie que la mesure de Lebesgue est invariante par translation. On règle de même l'image par $x \to -x$, en posant maintenant $\mu(\mathrm{A}) = \lambda(-\mathrm{A})$.

Envisageons l'effet des changements de variables linéaires dans l'intégrale de Lebesgue. Soit T une application de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$ telle que l'image inverse de tout compact soit compacte. On peut définir l'image ν de la mesure de Lebesgue λ par l'application T en posant pour tout borélien A de $\mathbb{R}^n$

$$\nu(\mathrm{A}) = \lambda(\mathrm{T}^{-1}(\mathrm{A})).$$

Il est évident que ν est une mesure au sens général, de plus cette mesure est finie sur les compacts. L'intégrale par rapport à ν est donnée par la formule

$$\int f(y)\,d\nu(y) = \int f(\mathrm{T}(x))\,dx,$$

pour toute fonction borélienne positive f. Cette formule est vraie par définition pour $f = \mathbf{1}_{\mathrm{A}}$, A borélien, donc pour les fonctions étagées par linéarité, puis pour les mesurables positives par convergence monotone.

Si $n = 1$, si $\mathrm{T}x = ax + b$ pour tout x réel, avec $a \neq 0$, on voit que tout intervalle de longueur ℓ est transformé par T en un intervalle de longueur $|a|\,\ell$; les mesures $\nu = \mathrm{T}(\lambda)$ et $|a|^{-1}\,\lambda$ coïncident sur les intervalles, donc elles sont égales, et

$$|a| \int_{\mathbb{R}} f(ax+b)\,dx = \int_{\mathbb{R}} f(y)\,dy$$

pour toute fonction f mesurable positive. Le même exemple en dimension d donne

$$|a|^d \int_{\mathbb{R}^d} f(ax+b)\,dx = \int_{\mathbb{R}^d} f(y)\,dy.$$

Le cas où le scalaire a serait remplacé par une matrice A demande d'avoir le théorème de Fubini pour la justification, et le remplacement de $|a|^d$ par la valeur absolue du déterminant de A.

On va anticiper sur le théorème de Fubini, en montrant l'unicité de la mesure produit tensoriel, sous l'hypothèse que les mesures sont σ-finies.

Proposition. *Si μ_i est σ-finie sur $(\Omega_i, \mathcal{A}_i)$, $i = 1, 2$, il existe au plus une mesure ν sur $(\Omega_1 \times \Omega_2, \mathcal{A}_1 \otimes \mathrm{A}_2)$ telle que*

$$\forall \mathrm{A}_1 \in \mathcal{A}_1,\ \forall \mathrm{A}_2 \in \mathcal{A}_2, \quad \nu(\mathrm{A}_1 \times \mathrm{A}_2) = \mu_1(\mathrm{A}_1)\,\mu_2(\mathrm{A}_2).$$

Démonstration. Considérons la classe $\mathcal{C}$ de tous les ensembles C de la forme $\mathrm{C} = \mathrm{A}_1 \times \mathrm{A}_2$, avec $\mathrm{A}_j \in \mathcal{A}_j$, $j = 1, 2$; on montre facilement qu'elle est stable par intersection finie,

$$(\mathrm{A}_1 \times \mathrm{A}_2) \cap (\mathrm{B}_1 \times \mathrm{B}_2) = (\mathrm{A}_1 \cap \mathrm{B}_1) \times (\mathrm{A}_2 \cap \mathrm{B}_2).$$

De plus la classe $\mathcal{C}$ engendre la tribu $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$. Si μ_1 et μ_2 sont σ-finies, on peut trouver deux suites $(\mathrm{A}_{1,n})$ et $(\mathrm{A}_{2,n})$ croissantes d'ensembles telles que $\mu_i(\mathrm{A}_{i,n}) < +\infty$ et $\Omega_i = \bigcup_n \mathrm{A}_{i,n}$. Posons $\mathrm{C}_n = \mathrm{A}_{1,n} \times \mathrm{A}_{2,n}$; cette suite recouvre le produit $\Omega_1 \times \Omega_2$. Si ν_1 et ν_2 sont deux solutions du problème, elle coïncident sur la classe $\mathcal{C}$, les ensembles C_n sont de mesure finie pour ν_1 et ν_2, donc $\nu_1 = \nu_2$ par le corollaire 2.

2.2. Théorème de Fubini

Sur chacun des deux espaces mesurables $(\Omega_i, \mathcal{A}_i)$, $i = 1, 2$, est donnée une mesure σ-finie μ_i. Si f est une fonction $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$-mesurable positive, on veut pouvoir considérer la quantité

$$\mathrm{I}(f) = \int_{\Omega_2} \Big(\int_{\Omega_1} f(\omega_1, \omega_2)\,d\mu_1(\omega_1) \Big)\,d\mu_2(\omega_2).$$

L'écriture de cette formule demande l'obtention de deux informations préalables :

1– l'application $\omega_1 \in \Omega_1 \to f(\omega_1, \omega_2)$ est $\mathcal{A}_1$-mesurable pour tout $\omega_2 \in \Omega_2$;
2– l'application $\omega_2 \in \Omega_2 \to \int_{\Omega_1} f(\omega_1, \omega_2)\,d\mu_1(\omega_1)$ est $\mathcal{A}_2$-mesurable.

On va donc commencer par établir le lemme suivant.

Lemme. *Si μ_0 est une mesure finie sur $(\Omega_1, \mathcal{A}_1)$, toute fonction f qui est $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$-étagée réelle vérifie*

1– l'application $\omega_1 \in \Omega_1 \to f(\omega_1, \omega_2)$ est $\mathcal{A}_1$-mesurable pour tout $\omega_2 \in \Omega_2$;

2– l'application $\omega_2 \in \Omega_2 \to \int_{\Omega_1} f(\omega_1, \omega_2)\, d\mu_0(\omega_1)$ est $\mathcal{A}_2$-mesurable.

Démonstration. On considère la classe E des fonctions réelles bornées f sur $\Omega_1 \times \Omega_2$ qui vérifient les propriétés 1 et 2 de l'énoncé. Il est clair que E est un espace vectoriel de fonctions (par les propriétés des fonctions mesurables pour le point 1, et la linéarité de l'intégrale pour le point 2). Si une suite bornée $(f_n) \subset \mathrm{E}$ tend simplement vers f sur $\Omega_1 \times \Omega_2$, alors f vérifie la première propriété comme limite de fonctions mesurables, et la deuxième par le théorème de convergence dominée appliqué à μ_0, qui montre que l'application $\omega_2 \in \Omega_2 \to \int_{\Omega_1} f(\omega_1, \omega_2)\, d\mu_0(\omega_1)$ est limite des applications mesurables $\omega_2 \in \Omega_2 \to \int_{\Omega_1} f_n(\omega_1, \omega_2)\, d\mu_0(\omega_1)$. L'espace E est donc un ESCSB. Il est clair que E contient la fonction $\mathbf{1}$.

Désignons par $\mathcal{C}$ la classe des pavés $\mathrm{A}_1 \times \mathrm{A}_2$, $\mathrm{A}_i \in \mathcal{A}_i$. On a vu que $\mathcal{C}$ est stable par intersection finie. On vérifie assez facilement que $\mathbf{1}_\mathrm{C} \in \mathrm{E}$ pour tout $\mathrm{C} \in \mathcal{C}$; en effet, si $f = \mathbf{1}_{\mathrm{A}_1 \times \mathrm{A}_2}$, la fonction $f(., \omega_2)$ est égale à $\mathbf{1}_{\mathrm{A}_2}(\omega_2)\, \mathbf{1}_{\mathrm{A}_1}$, qui est $\mathcal{A}_1$-mesurable pour tout ω_2, et la fonction de la condition 2 est $\mu_0(\mathrm{A}_1)\mathbf{1}_{\mathrm{A}_2}$, qui est $\mathcal{A}_2$-mesurable. Puisque E est un ESCSB qui contient $\mathbf{1}$ et toutes les fonctions $\mathbf{1}_\mathrm{C}$, $\mathrm{C} \in \mathcal{C}$, on sait que E contient toutes les $\mathbf{1}_\mathrm{B}$ pour $\mathrm{B} \in \sigma(\mathcal{C}) = \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$. Par linéarité, E contient les fonctions $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$-étagées.

Construction de la mesure produit tensoriel

Après cet intermède classe monotone, reprenons la construction. Si μ_1 est σ-finie, on peut trouver une suite (B_n) croissante de sous-ensembles de Ω_1 telle que $\mu_1(\mathrm{B}_n) < +\infty$ et $\Omega_1 = \bigcup_n \mathrm{B}_n$. Pour chaque n on a une mesure finie $\mu_{1,n}$ sur $(\Omega_1, \mathcal{A}_1)$ définie par $\mu_{1,n}(\mathrm{A}_1) = \mu_1(\mathrm{A}_1 \cap \mathrm{B}_n)$; si f est une fonction étagée positive finie, l'application $\omega_2 \in \Omega_2 \to \int_{\Omega_1} \mathbf{1}_{\mathrm{A}_{1,n}} f(\omega_1, \omega_2)\, d\mu_1(\omega_1)$ est $\mathcal{A}_2$-mesurable par le lemme précédent. En passant à la limite monotone, on obtient que l'application

$$\omega_2 \in \Omega_2 \to \int_{\Omega_1} f(\omega_1, \omega_2)\, d\mu_1(\omega_1)$$

est $\mathcal{A}_2$-mesurable (à valeurs dans $[0, +\infty]$). Si f est une fonction $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$-mesurable positive, elle est limite croissante d'une suite (f_n) de fonctions étagées positives ; on voit que les propriétés 1 et 2 passent à la limite,

1– l'application $\omega_1 \in \Omega_1 \to f(\omega_1, \omega_2)$ est $\mathcal{A}_1$-mesurable pour tout $\omega_2 \in \Omega_2$;

2– l'application $\omega_2 \in \Omega_2 \to \int_{\Omega_1} f(\omega_1, \omega_2)\, d\mu_1(\omega_1)$ est $\mathcal{A}_2$-mesurable

On peut donc considérer la quantité

$$\mathrm{I}(f) = \int_{\Omega_2} \Bigl(\int_{\Omega_1} f(\omega_1, \omega_2)\, d\mu_1(\omega_1) \Bigr)\, d\mu_2(\omega_2)$$

à valeurs dans $[0, +\infty]$.

Il est clair que $\mathrm{I}(f_1 + f_2) = \mathrm{I}(f_1) + \mathrm{I}(f_2)$, par les propriétés d'additivité des deux intégrales successives. Soit (f_n) une suite croissante de fonctions mesurables positives, et posons $f = \lim_n f_n$; on aura dans un premier temps par les propriétés de l'intégrale par rapport à μ_1

$$\int_{\Omega_1} f(\omega_1, \omega_2)\, d\mu_1(\omega_1, \omega_2) = \lim_n \nearrow \int_{\Omega_1} f_n(\omega_1, \omega_2)\, d\mu_1(\omega_1)$$

puis par une deuxième application de la convergence monotone, avec μ_2 cette fois

$$\int_{\Omega_2} d\mu_2(\omega_2)\Bigl(\int_{\Omega_1} f(\omega_1,\omega_2)\,d\mu_1(\omega_1)\Bigr) = \lim_n \int_{\Omega_2} d\mu_2(\omega_2)\Bigl(\int_{\Omega_1} f_n(\omega_1,\omega_2)\,d\mu_1(\omega_1)\Bigr),$$

c'est-à-dire que

$$\mathrm{I}\Bigl(\lim_n f_n\Bigr) = \lim_n \mathrm{I}(f_n).$$

Soit (u_k) une suite de fonctions mesurables positives, et posons $u = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k$; on aura en utilisant l'additivité de I et la continuité de I pour les suites croissantes

$$\mathrm{I}\Bigl(\sum_{k=0}^{+\infty} u_k\Bigr) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{I}(u_k).$$

Il en résulte immédiatement que la fonction ν sur $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ définie par $\nu(\mathrm{A}) = \mathrm{I}(\mathbf{1}_\mathrm{A})$ pour tout $\mathrm{A} \in \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ est une mesure sur $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$. Supposons en effet que (B_n) soit une suite de parties disjointes appartenant à $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$; alors la fonction indicatrice de $\mathrm{B} = \bigcup_n \mathrm{B}_n$ est égale à $\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{1}_{\mathrm{B}_n}$, donc

$$\nu(\mathrm{B}) = \mathrm{I}(\mathbf{1}_\mathrm{B}) = \mathrm{I}\Bigl(\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{1}_{\mathrm{B}_n}\Bigr) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathrm{I}(\mathbf{1}_{\mathrm{B}_n}) = \sum_{n=0}^{+\infty} \nu(\mathrm{B}_n).$$

Si $\mathrm{B} = \mathrm{A}_1 \times \mathrm{A}_2$, la fonction $f = \mathbf{1}_\mathrm{B}$ est égale à $\mathbf{1}_{\mathrm{A}_1}(\omega_1)\,\mathbf{1}_{\mathrm{A}_2}(\omega_2)$, donc

$$\int_{\Omega_1} f(\omega_1,\omega_2)\,d\mu_1(\omega_1) = \mu_1(\mathrm{A}_1)\,\mathbf{1}_{\mathrm{A}_2}(\omega_2)$$

et ensuite

$$\nu(\mathrm{A}_1 \times \mathrm{A}_2) = \mathrm{I}(f) = \int \bigl(\mu_1(\mathrm{A}_1)\,\mathbf{1}_{\mathrm{A}_2}(\omega_2)\bigr)\,d\mu_2(\omega_2) = \mu_1(\mathrm{A}_1)\,\mu_2(\mathrm{A}_2).$$

Théorème. *Supposons μ_i σ-finie sur $(\Omega_i, \mathcal{A}_i)$, $i = 1, 2$. Il existe une unique mesure $\mu_1 \otimes \mu_2$ sur $(\Omega_1 \times \Omega_2, \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2)$ telle que*

$$(\otimes) \qquad \forall \mathrm{A}_1 \in \mathcal{A}_1,\ \forall \mathrm{A}_2 \in \mathcal{A}_2, \quad (\mu_1 \otimes \mu_2)(\mathrm{A}_1 \times \mathrm{A}_2) = \mu_1(\mathrm{A}_1)\mu_2(\mathrm{A}_2).$$

Démonstration. On a déjà montré l'unicité, et on a construit une mesure ν qui vérifie l'égalité ci-dessus.

Remarque. Si N est μ_1-négligeable, l'ensemble $\mathrm{N} \times \Omega_2$ est $(\mu_1 \otimes \mu_2)$-négligeable.

Par linéarité on obtient pour toute fonction $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$-étagée $f = \sum_{i=1}^n b_i \mathbf{1}_{\mathrm{B}_i}$ (où $\mathrm{B}_i \in \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$, $i = 1, \ldots, n$)

$$\int f\,d\nu = \sum_{i=1}^n b_i\,\nu(\mathrm{B}_i) = \sum_{i=1}^n b_i\,\mathrm{I}(\mathbf{1}_{\mathrm{B}_i}) = \mathrm{I}(f) = \int_{\Omega_2} \Bigl(\int_{\Omega_1} f(\omega_1,\omega_2)\,d\mu_1(\omega_1)\Bigr)\,d\mu_2(\omega_2).$$

Puisque l'intégrale par rapport à ν et la fonctionnelle I sont continues pour les suites croissantes, on en déduit le même résultat pour toute fonction f qui est $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$-mesurable positive (en effet, une telle f est limite croissante d'une suite de fonctions $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$-étagées). La formule de définition de I nous donne donc le théorème de Fubini positif.

Théorème. *Supposons μ_i σ-finie sur $(\Omega_i, \mathcal{A}_i)$, $i = 1, 2$. Pour toute fonction mesurable f de $(\Omega_1 \times \Omega_2, \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2)$ à valeurs dans $[0, +\infty]$,*

$$\begin{aligned}\int_{\Omega_1 \times \Omega_2} f \, d(\mu_1 \otimes \mu_2) &= \int_{\Omega_2} \Big(\int_{\Omega_1} f(\omega_1, \omega_2) \, d\mu_1(\omega_1) \Big) \, d\mu_2(\omega_2) \\ &= \int_{\Omega_1} \Big(\int_{\Omega_2} f(\omega_1, \omega_2) \, d\mu_2(\omega_2) \Big) \, d\mu_1(\omega_1).\end{aligned}$$

Démonstration. On a construit une mesure ν qui vérifie la première égalité ci-dessus ; si on refait le travail en échangeant les rôles des deux espaces dans la construction, on construira une autre mesure avec la propriété $(\otimes)$, et qui vérifiera

$$\int_{\Omega_1 \times \Omega_2} f \, d(\mu_1 \otimes \mu_2) = \int_{\Omega_1} \Big(\int_{\Omega_2} f(\omega_1, \omega_2) \, d\mu_2(\omega_2) \Big) \, d\mu_1(\omega_1) \, ;$$

par l'unicité, ce sera la même, d'où la deuxième égalité ci-dessus.

Remarque. Si f_i est une fonction mesurable positive sur $(\Omega_i, \mathcal{A}_i)$, $i = 1, 2$, on a

$$\int f_1(\omega_1) f_2(\omega_2) \, d(\mu_1 \otimes \mu_2)(\omega_1, \omega_2) = \Big(\int f_1(\omega_1) \, d\mu_1(\omega_1) \Big) \Big(\int f_2(\omega_2) \, d\mu_2(\omega_2) \Big).$$

Exercice. Si f est mesurable ≥ 0 montrer que

$$\int f \, d\mu = \int_0^{+\infty} \mu(\{f > t\} \, dt.$$

Théorème. *Supposons μ_i σ-finie sur $(\Omega_i, \mathcal{A}_i)$, $i = 1, 2$. Pour toute fonction f mesurable réelle ou complexe sur $(\Omega_1 \times \Omega_2, \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2)$, et intégrable par rapport à $\mu_1 \otimes \mu_2$, on peut dire que la fonction $\mathcal{A}_1$-mesurable*

$$\omega_1 \to f(\omega_1, \omega_2)$$

est μ_1-intégrable pour presque tout ω_2 ; la fonction presque-partout définie

$$\omega_2 \to \int_{\Omega_1} f(\omega_1, \omega_2) \, d\mu_1(\omega_1)$$

est μ_2-intégrable et

$$\int_{\Omega_1 \times \Omega_2} f \, d(\mu_1 \otimes \mu_2) = \int_{\Omega_2} \Big(\int_{\Omega_1} f(\omega_1, \omega_2) \, d\mu_1(\omega_1) \Big) \, d\mu_2(\omega_2).$$

Démonstration. On a par hypothèse

$$\mathrm{I} := \int_{\Omega_1 \times \Omega_2} |f(\omega_1, \omega_2)| \, d(\mu_1 \otimes \mu_2)(\omega_1, \omega_2) < +\infty.$$

Par le théorème de Fubini positif,

$$\mathrm{I} = \int_{\Omega_2} \Big(\int_{\Omega_1} |f(\omega_1, \omega_2)| \, d\mu_1(\omega_1) \Big) \, d\mu_2(\omega_2) < +\infty$$

ce qui implique que la parenthèse est finie μ_2-presque partout. Considérons l'ensemble mesurable μ_2-négligeable défini par

$$\mathrm{N} = \{\omega_2 \in \Omega_2 : \int_{\Omega_1} |f(\omega_1, \omega_2)| \, d\mu_1(\omega_1) = +\infty\}.$$

Modifions la fonction f en posant $g(\omega_1, \omega_2) = f(\omega_1, \omega_2)$ si $\omega_2 \notin \mathrm{N}$, et $g(\omega_1, \omega_2) = 0$ si $\omega_2 \in \mathrm{N}$. Pour tout $\omega_2 \notin \mathrm{N}$, on a évidemment

$$\int_{\Omega_1} f(\omega_1, \omega_2) \, d\mu_1(\omega_1) = \int_{\Omega_1} g(\omega_1, \omega_2) \, d\mu_1(\omega_1).$$

De plus f et g sont égales $\mu_1 \otimes \mu_2$-presque partout (car $\Omega_1 \times \mathrm{N}$ est négligeable), donc

$$\int_{\Omega_1 \times \Omega_2} f(\omega_1, \omega_2) \, d(\mu_1 \otimes \mu_2)(\omega_1, \omega_2) = \int_{\Omega_1 \times \Omega_2} g(\omega_1, \omega_2) \, d(\mu_1 \otimes \mu_2)(\omega_1, \omega_2).$$

Posons $g = g_+ - g_-$; on sait que $\mathrm{G}_+(\omega_2) = \int g_+(\omega_1, \omega_2) \, d\mu(\omega_1)$ est μ_2-intégrable, finie partout, ainsi que $\mathrm{G}_-(\omega_2) = \int g_-(\omega_1, \omega_2) \, d\mu(\omega_1)$. La différence $\mathrm{G}_+ - \mathrm{G}_-$ est presque partout égale à la fonction presque partout définie $\mathrm{F}(\omega_2) = \int f(\omega_1, \omega_2) \, d\mu(\omega_1)$, qui est intégrable par différence. Finalement

$$\int f \, d(\mu_1 \otimes \mu_2) = \int g \, d(\mu_1 \otimes \mu_2) = \int g_+ \, d(\mu_1 \otimes \mu_2) - \int g_- \, d(\mu_1 \otimes \mu_2) =$$

$$\int \mathrm{G}_+(\omega_2) \, d\mu(\omega_2) - \int \mathrm{G}_-(\omega_2) \, d\mu(\omega_2)$$

par le théorème de Fubini positif, encore égale à

$$\int \mathrm{F}(\omega_2) \, d\mu(\omega_2).$$