4. Fourier

4.1. Séries de Fourier

Dans cette section on s'intéresse à la représentation de phénomènes 2π-périodiques au moyen de séries de Fourier. Suivant le cas, on considérera une fonction $\mathrm{F}(z)$ définie sur le cercle unité du plan complexe, ou bien une fonction 2π-périodique $f(\theta)$ sur $\mathbb{R}$ (ou une fonction f définie sur une période $[a, a+2\pi[$, qu'on prolonge ensuite à $\mathbb{R}$ par périodicité) ; le passage d'un point de vue à l'autre se fait en posant $z = \mathrm{e}^{i\theta}$ et $f(\theta) = \mathrm{F}(\mathrm{e}^{i\theta})$. On va travailler avec des séries de Fourier complexes sur un intervalle de longueur 2π, en général $[0, 2\pi]$ ou $[-\pi, \pi]$, muni de la mesure normalisée $dx/(2\pi)$.

Pour chaque entier relatif $n \in \mathbb{Z}$ on note e_n la fonction 2π-périodique définie sur $\mathbb{R}$ par $e_n(t) = \mathrm{e}^{int}$; un *polynôme trigonométrique* est une combinaison linéaire $\sum c_n e_n$. On a vu qu'il existe une approximation de l'unité (pour la convolution périodique) formée de polynômes trigonométriques. Pour toute fonction $f \in \mathrm{L}_1$, on pose

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad c_n(f) = \int_0^{2\pi} f(x)\,\mathrm{e}^{-inx}\,\frac{dx}{2\pi}.$$

Il est clair que $|c_n(f)| \le \|f\|_1$ pour tout n. On a vu que la convolution (périodique) d'une fonction L_1 avec un polynôme trigonométrique donne un polynôme trigonométrique : on a

$$(f * e_n)(x) = \int_0^{2\pi} f(t)\,\mathrm{e}^{in(x-t)}\,\frac{dt}{2\pi} = c_n(f)\,e_n(x)$$

pour tout $n \in \mathbb{Z}$, c'est-à-dire $f * e_n = c_n(f)\,e_n$; ceci entraîne que pour tout polynôme trigonométrique $\mathrm{K} = \sum_{k=\mathrm{M}}^{\mathrm{N}} a_k e_k$ (avec $\mathrm{M} \le \mathrm{N}$ et $\mathrm{M}, \mathrm{N} \in \mathbb{Z}$), on a

$$\mathrm{K} * f = \sum_{k=\mathrm{M}}^{\mathrm{N}} a_k c_k(f) e_k.$$

Dans le cas de fonctions de L_2, on dispose du produit scalaire

$$\langle f, g\rangle = \int_0^{2\pi} f(t)\overline{g(t)}\,\frac{dt}{2\pi},$$

et les coefficients de Fourier sont obtenus par produit scalaire, $c_n(f) = \langle f, e_n\rangle$; on voit immédiatement que les fonctions $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ forment un système orthonormé : les fonctions e_n, $n \in \mathbb{Z}$, sont deux à deux orthogonales et de norme 1.

Quand on travaille avec des fonctions réelles, on préfère parfois écrire le développement en utilisant les fonctions réelles $t \to \cos(nt)$, pour $n = 0, 1, \ldots$ et $t \to \sin(nt)$, pour $n = 1, 2, \ldots$ (pour $n = 0$, le cosinus donne la fonction constante 1). On définit classiquement les coefficients de Fourier réels de la façon suivante :

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos(nt)\,dt\,; \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\sin(nt)\,dt,$$

où les (a_n) sont définis pour $n \geq 0$ et les (b_n) pour $n \geq 1$; ces coefficients sont réels quand la fonction f est réelle, mais on peut aussi les utiliser pour une fonction complexe, et bien sûr a_n et b_n redeviennent alors complexes. La série de Fourier de f prend la forme

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} \bigl(a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)\bigr).$$

La bizarrerie du traitement de $a_0 = 2\, c_0(f)$ vient du fait que la fonction constante 1 n'a pas la même norme dans L_2 que les fonctions $t \to \cos(nt)$ pour $n \geq 1$. On note que pour $n > 0$,

$$a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cos(nx - nt)\, dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \bigl(\mathrm{e}^{i(nx-nt)} + \mathrm{e}^{-i(nx-nt)}\bigr)\, dt = c_n(f)\, \mathrm{e}^{inx} + c_{-n}(f)\, \mathrm{e}^{-inx} .$$

Classiquement, on désigne par $\mathrm{S}_n f$ la n-ième somme de Fourier d'une fonction f, égale à

$$(\mathrm{S}_n f)(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k(f)\ \mathrm{e}^{ikx} = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \bigl(a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)\bigr).$$

Le problème général est de voir dans quelle mesure ces sommes partielles approchent la fonction f donnée.

Une fonction périodique f est représentée par une série de cosinus si et seulement si elle est paire, $f(x) = f(-x)$ pour tout x. L'unité approchée $\mathrm{R}_n(t) = r_n(1+\cos(t))^n$ (que nous appelons “de Rudin”) étant formée de fonctions paires (des polynômes en cosinus), on voit facilement que si f est paire (réelle ou complexe), les $\mathrm{R}_n * f$ sont des polynômes de cosinus (à coefficients réels quand f est réelle).

Les propriétés des approximations de l'unité donnent le résultat qui suit.

Proposition. *Les polynômes trigonométriques sont denses dans* $\mathrm{C}(\mathbb{T})$ *(fonctions continues 2π-périodiques) ; pour tout p tel que $1 \leq p < +\infty$, les polynômes trigonométriques sont denses dans* $\mathrm{L}_p(0, 2\pi)$.

Le lemme de Riemann-Lebesgue

Proposition. *Pour toute fonction $f \in \mathrm{L}_1(\mathbb{R})$ la transformée de Fourier $\widehat{f}$, définie par*

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \widehat{f}(t) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\, \mathrm{e}^{-ixt}\ dx$$

tend vers 0 *quand $|t|$ tend vers l'infini. On a aussi*

$$\lim_{|t| \to +\infty} \int_{\mathbb{R}} f(x) \sin(xt)\, dx = 0,$$

et la même chose en remplaçant sinus par cosinus. On a aussi convergence vers 0 *de $\widehat{f}$ à l'infini dans le cas de* $\mathrm{L}_1(\mathbb{R}^d)$.

Preuve. On a vu que les fonctions de classe C^1 à support compact sont denses dans $L_1(\mathbb{R})$. On a quand g est C^1, à support compact contenu dans $[a,b]$,

$$\int_{\mathbb{R}} g'(x)\,dx = \int_a^b g'(x)\,dx = g(b) - g(a) = 0.$$

Si f est C^1 à support compact, il en est de même pour $g(x) = f(x)\,\mathrm{e}^{-ixt}$, pour chaque t fixé, donc

$$0 = \int_{\mathbb{R}} g' = \int_{\mathbb{R}} f'(x)\,\mathrm{e}^{-ixt}\ dx - it\int_{\mathbb{R}} f(x)\,\mathrm{e}^{-ixt}\ dx$$

c'est-à-dire que

$$\widehat{f'}(t) = it\widehat{f}(t)$$

pour tout t. De plus, $|\widehat{f'}|$ est une fonction bornée sur $\mathbb{R}$ (bornée par $\|f'\|_1$) ; ceci montre que la transformée de Fourier de f est $O(|t|^{-1})$ à l'infini dans le cas où f est C^1_{comp}, donc $\widehat{f}$ tend vers 0 à l'infini.

La famille $f \to \widehat{f}(t)$, $t \in \mathbb{R}$, est une famille équicontinue de formes linéaires sur $L_1(\mathbb{R})$, qui tend vers 0 quand $|t| \to +\infty$ sur le sous-espace dense C^1_{comp}. Il y a donc convergence vers 0 pour toute fonction $f \in L_1$.

Si f est réelle, les affirmations sur les sinus et cosinus sont obtenues en prenant les parties réelle et imaginaire de $\widehat{f}$; si f est complexe, on applique la phrase précédente à ses parties réelle et imaginaire.

On peut aussi démontrer le lemme en utilisant la densité dans L_1 des fonctions en escalier. La démonstration dans le cas multi-dimensionnel est essentiellement identique. Donnons-la en dimension $d = 2$; puisque les combinaisons linéaires d'indicatrices de rectangles sont denses dans $L_1(\mathbb{R}^2)$, il suffit de traiter le cas $f = \mathbf{1}_{[a,b]\times[c,d]}$. On a si $t = (t_1, t_2) \in \mathbb{R}^2$, avec $t_1, t_2 \neq 0$

$$\widehat{f}(t) = \int_{\mathbb{R}^2} f(x_1, x_2)\,\mathrm{e}^{-it_1x_1 - it_2x_2}\ dx_1\,dx_2 =$$

$$\Bigl(\int_a^b \mathrm{e}^{-it_1x_1}\ dx_1\Bigr)\Bigl(\int_c^d \mathrm{e}^{-it_2x_2}\ dx_2\Bigr) = \Bigl(\frac{\mathrm{e}^{-it_1a} - \mathrm{e}^{-it_1b}}{it_1}\Bigr)\Bigl(\frac{\mathrm{e}^{-it_2c} - \mathrm{e}^{-it_2d}}{it_2}\Bigr)$$

(si $t_1 = 0$, il faut remplacer la première parenthèse par $(b-a)$ et si $t_2 = 0$, il faut remplacer la seconde par $(d-c)$). On vérifie facilement que cette expression tend vers 0 lorsque $|t| \to +\infty$.

Corollaire. *Pour toute fonction $f \in L_1(0, 2\pi)$, la suite $(c_n(f))_{n\in\mathbb{Z}}$ tend vers 0 quand $|n| \to +\infty$. On a aussi*

$$\lim_{|t|\to+\infty} \int_0^{2\pi} f(x)\sin(xt)\,dx = 0.$$

Preuve. On considère la fonction g sur $\mathbb{R}$ définie par $g(x) = f(x)$ si $x \in [0, 2\pi]$ et $g(x) = 0$ sinon. On voit que

$$2\pi\,c_n(f) = \int_0^{2\pi} f(x)\,\mathrm{e}^{-inx}\ dx = \int_{\mathbb{R}} g(x)\,\mathrm{e}^{-inx}\ dx = \widehat{g}(n),$$

et

$$\int_0^{2\pi} f(x)\sin(xt)\,dx = \int_{\mathbb{R}} g(x)\sin(xt)\,dx.$$

Le résultat découle donc immédiatement de la proposition précédente.

Dans une certaine mesure, on peut reconnaître le caractère C^k d'une fonction f 2π-périodique à la décroissance de ses coefficients de Fourier. En effet, si on sait que $c_n(f) = O(|n|^{-k-2})$, on pourra dériver k fois la série de Fourier de f, et toutes ces séries dérivées seront normalement convergentes (la k-ième dérivée fait encore intervenir des coefficients en $|n|^{-2}$ qui donnent une série numérique majorante absolument convergente). Inversement, si f est de classe C^k, l'argument d'intégration par parties utilisé dans la preuve de la proposition montre que $c_n(f) = O(|n|^{-k})$; il y a bien sûr une différence importante entre les deux conditions, mais qui disparaît pour les fonctions f périodiques de classe C^∞ : elles sont caractérisées par le fait que pour tout entier $k \ge 0$, les coefficients de Fourier de f sont $O(|n|^{-k})$ quand $|n| \to +\infty$.

4.1.1. Un résultat de convergence ponctuelle des séries de Fourier

Exprimons la somme de Fourier d'ordre $N \ge 0$ d'une fonction f ; on a

$$(S_N f)(x) = \sum_{n=-N}^{N} c_n(f)\, e^{inx} = \int_0^{2\pi} \sum_{n=-N}^{N} e^{in(x-s)}\, f(s)\, \frac{ds}{2\pi} =$$

$$\int_0^{2\pi} \Bigl(\sum_{n=-N}^{N} e^{int} \Bigr) f(x-t)\, \frac{dt}{2\pi} = \int_0^{2\pi} D_N(t) f(x-t)\, \frac{dt}{2\pi},$$

où on a posé

$$D_N(t) = \sum_{n=-N}^{N} e^{int} = e^{-iNt}\bigl(1 + e^{it} + \cdots + e^{i2Nt}\bigr) =$$

$$= e^{-iNt}\ \frac{1 - e^{i(2N+1)t}}{1 - e^{it}} = \frac{e^{-iNt} - e^{i(N+1)t}}{1 - e^{it}} = \frac{\sin\bigl((N+1/2)t\bigr)}{\sin(t/2)}.$$

La fonction D_N s'appelle le *noyau de Dirichlet* d'indice N. Il est clair sur la première expression de D_N que son intégrale est égale à 1 (l'intégrale de la fonction e_0 : toutes les autres fonctions e_j sont d'intégrale nulle). De plus D_N est une fonction paire, donc son intégrale sur $[0, \pi]$ est la moitié de l'intégrale totale,

$$\int_{-\pi}^{\pi} D_N(t)\, \frac{dt}{2\pi} = 1, \quad \int_0^{\pi} D_N(t)\, \frac{dt}{2\pi} = 1/2.$$

Critère de Dirichlet-Dini

On considère une fonction 2π-périodique intégrable f et un point x fixé ; on suppose qu'il existe deux valeurs a_+ et a_- qui donnent une approximation raisonnable de f à droite et à gauche du point x, au sens que

$$(\mathrm{DD}_x) \qquad \int_0^{\pi} \frac{|f(x+t) - a_+|}{t}\, dt < +\infty \quad \textbf{et} \quad \int_0^{\pi} \frac{|f(x-t) - a_-|}{t}\, dt < +\infty.$$

Théorème. *Sous l'hypothèse* (DD_x)*, les sommes de Fourier* $(S_n f)(x)$ *au point fixé* x *tendent vers* $(a_+ + a_-)/2$*,*

$$c_0(f) + \sum_{n=1}^{+\infty} \bigl(c_n(f)\, e^{inx} + c_{-n}(f)\, e^{-inx} \bigr) = \frac{a_+ + a_-}{2}.$$

Démonstration. Considérons la fonction 2π-périodique a égale à a_+ sur $(x, x+\pi)$ et à a_- sur $(x-\pi, x)$; l'hypothèse (DD_x) dit exactement que l'intégrale

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{|f(x+t)-a(x+t)|}{|t|}\, dt$$

est finie. On a vu que

$$(\mathrm{S_N} f)(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)\mathrm{D_N}(t)\, \frac{dt}{2\pi},$$

et de même

$$(\mathrm{S_N}\, a)(x) = \int_{-\pi}^{\pi} a(x-t)\mathrm{D_N}(t)\, \frac{dt}{2\pi} = a_- \int_0^{\pi} \mathrm{D_N}(t)\, \frac{dt}{2\pi} + a_+ \int_{-\pi}^{0} \mathrm{D_N}(t)\, \frac{dt}{2\pi} =$$

$$= \frac{a_+ + a_-}{2}. \tag{$*$}$$

On note que $(\mathrm{S_N}\, a)(x)$ ne dépend pas de N, et se calcule facilement. On écrit ensuite

$$(\mathrm{S_N} f)(x) - (\mathrm{S_N}\, a)(x) = \int_{-\pi}^{\pi} (f(x-t) - a(x-t))\mathrm{D_N}(t)\, \frac{dt}{2\pi} =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(x-t)-a(x-t)}{\sin(t/2)} \sin\big((\mathrm{N}+1/2)t\big)\, \frac{dt}{2\pi} = \int_{-\pi}^{\pi} g_x(t) \sin\big((\mathrm{N}+1/2)t\big)\, \frac{dt}{2\pi},$$

où on a posé

$$g_x(t) = \frac{f(x-t)-a(x-t)}{\sin(t/2)}.$$

Mais cette fonction g_x est intégrable sur $[0, 2\pi]$ d'après l'hypothèse (DD_x), donc

$$\int_{-\pi}^{\pi} g_x(t) \sin\big((\mathrm{N}+1/2)t\big)\, \frac{dt}{2\pi} \to 0$$

quand $\mathrm{N} \to +\infty$ par Riemann-Lebesgue, et $(\mathrm{S_N} f)(x) - (\mathrm{S_N}\, a)(x)$ tend vers 0, d'où le résultat compte-tenu de la relation $(*)$. On a utilisé le fait que

$$\big(0 < t \le \pi\big) \Rightarrow \frac{2}{\pi} \le \frac{\sin(t/2)}{t/2} \le 1$$

pour transformer la condition (DD_x) en l'intégrabilité de g_x. La majoration est bien connue ; la minoration vient de la concavité du sinus sur l'intervalle $[0, \pi/2]$.

Corollaire 1. *Soient f une fonction 2π-périodique, x un point fixé et ℓ un scalaire vérifiant*
$$\int_{-\pi}^{\pi} \Bigl| \frac{f(x+t)-\ell}{t} \Bigr| \, dt < +\infty \, ;$$
on a
$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f) \, \mathrm{e}^{inx} = \ell.$$

Démonstration. C'est le cas $a_+ = a_-$ du théorème précédent, avec un petit détail supplémentaire : ici la série de Fourier converge sur $\mathbb{Z}$, et pas seulement par compensation des termes regroupés n et $-n$. Pour vérifier ce détail, on écrit

$$\sum_{k=0}^{\mathrm{N}} c_k(f) \, \mathrm{e}^{ikx} - \ell = \int_{-\pi}^{\pi} \bigl(f(x-t)-\ell\bigr) \Bigl(\sum_{k=0}^{\mathrm{N}} \mathrm{e}^{ikt} \Bigr) \frac{dt}{2\pi} =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \bigl(f(x-t)-\ell\bigr) \Bigl(\frac{\mathrm{e}^{i(\mathrm{N}+1)t} - 1}{\mathrm{e}^{it} - 1} \Bigr) \frac{dt}{2\pi} = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(x-t)-\ell}{\mathrm{e}^{it} - 1} \, (\mathrm{e}^{i(\mathrm{N}+1)t} - 1) \, \frac{dt}{2\pi}$$
$$= \int_{-\pi}^{\pi} g_x(t) \, (\mathrm{e}^{i(\mathrm{N}+1)t} - 1) \, \frac{dt}{2\pi}$$

qui converge quand $\mathrm{N} \to +\infty$, pour des raisons analogues aux précédentes, vers
$$- \int_{-\pi}^{\pi} g_x(t) \, \frac{dt}{2\pi}.$$

On a posé ici
$$g_x(t) = \frac{f(x-t)-\ell}{\mathrm{e}^{it} - 1}$$
pour $0 < |t| \le \pi$; on note que $|1 - \mathrm{e}^{it}| = 2 \, |\sin(t/2)|$.

Remarque. Convergence bilatérale.

On a vu que dans le résultat de convergence précédent, la série de Fourier de f au point x converge aux deux infinis de l'ensemble d'indices $\mathbb{Z}$. Cette convergence aux deux côtés n'est absolument pas la situation générale. Dans la situation du théorème de Dirichlet, où une fonction de classe C^1 par morceaux admet au point x une limite à droite et une limite à gauche, il **faut** prendre les sommes de Fourier symétriques pour obtenir un résultat de convergence.

Exemple. On définit une fonction 2π-périodique f sur $\mathbb{R}$ en posant pour $-\pi \le t < \pi$
$$f(t) = \mathrm{e}^{iat}$$
où a est un nombre réel ou complexe qui n'est pas dans $2\pi\mathbb{Z}$. Expliciter le résultat obtenu en appliquant le théorème de Dirichlet à la fonction f au point π.

Définition. On dit qu'une fonction f vérifie une *condition de Hölder* d'ordre $\alpha > 0$ s'il existe une constante M telle que $|f(t) - f(s)| \le \mathrm{M}\,|t - s|^\alpha$ pour tous $s, t \in \mathbb{R}$. On peut aussi limiter la propriété aux couples s, t tel que $|t - s| \le 1$; pour les fonctions périodiques, qui nous intéressent ici, cela ne fait aucune différence. Une notation assez classique pour cet espace de fonctions est $\mathrm{L}ip_\alpha$.

Seul le cas $\alpha \le 1$ est intéressant : on voit facilement qu'une fonction α-hölderienne pour un $\alpha > 1$ est constante (découper l'intervalle entre x et y en un grand nombre de petits morceaux).

Corollaire 2. *Soit f une fonction 2π-périodique vérifiant une condition de Hölder d'ordre $\alpha > 0$; pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a*

$$f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(f)\, \mathrm{e}^{inx} .$$

Démonstration. Pour chaque x la condition de Hölder entraîne que

$$\int_{-\pi}^{\pi} \Bigl| \frac{f(x+t) - f(x)}{t} \Bigr|\, dt \le 2\mathrm{M} \int_0^\pi \frac{dt}{t^{1-\alpha}} < +\infty.$$

On applique le corollaire précédent avec $\ell = f(x)$.

Exercice. Si K est un compact de $\mathrm{L}_1(0, 2\pi)$, montrer que le lemme de Riemann-Lebesgue est vrai uniformément sur K. Montrer que les $(g_x)_{x \in [0,2\pi]}$ de la démonstration du corollaire 1 forment un compact de $\mathrm{L}_1(0, 2\pi)$. En déduire que pour une fonction f de $\mathrm{L}ip_\alpha$, la série de Fourier converge uniformément vers f.

Le résultat de l'exercice précédent redémontre que la suite $(e_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est totale dans L_2. En effet, le résultat s'applique à toute fonction continue f périodique linéaire par morceaux : les sommes de Fourier $\mathrm{S_N}(f)$ tendent uniformément vers la fonction f, donc aussi en norme L_2. Ces sommes appartiennent au sous-espace vectoriel L engendré par les fonctions $(e_n)_{n \in \mathbb{Z}}$; ceci montre que l'adhérence de L dans L_2 contient toutes les fonctions linéaires par morceaux, qui sont denses dans $\mathrm{C}(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$, donc aussi denses dans L_2. Finalement L est dense dans L_2 et on a montré la totalité de la suite $(e_n)_{n \in \mathbb{Z}}$.

Un exemple détaillé.

Considérons $f_0(x) = \mathrm{sign}(\sin(x))$, fonction 2π-périodique sur $\mathbb{R}$, égale à 1 sur $]0, \pi[$ et à -1 sur $]-\pi, 0[$; on voit que $c_{2k}(f_0) = 0$ pour tout entier k : en effet il est clair que $c_0(f_0) = 0$ par imparité, et pour $k \ne 0$ on a

$$\int_0^\pi \mathrm{e}^{-2kix}\, dx = -\frac{1}{2ki} \Bigl[\mathrm{e}^{-2kix} \Bigr]_0^\pi = -\frac{1}{2ki} \bigl(1 - 1 \bigr) = 0,$$

et de même

$$-\int_{-\pi}^0 \mathrm{e}^{-2kix}\, dx = 0$$

donc $c_{2k}(f_0) = 0$. Si $n = 2k+1$, on a

$$2\pi\, c_{2k+1}(f_0) = \int_0^\pi \mathrm{e}^{-(2k+1)ix}\, dx - \int_{-\pi}^0 \mathrm{e}^{-(2k+1)ix}\, dx =$$

$$= -\frac{1}{(2k+1)i} \Big[\mathrm{e}^{-(2k+1)ix} \Big]_0^\pi + \frac{1}{(2k+1)i} \Big[\mathrm{e}^{-(2k+1)ix} \Big]_{-\pi}^0 = \frac{4}{(2k+1)i},$$

ce qui montre que $c_n(f_0) = c_{2k+1}(f_0) = 2\,(\pi in)^{-1}$; on voit à l'évidence que la "partie positive" $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n(f_0)\,\mathrm{e}^{inx}$ de la série de Fourier complexe de f_0 ne peut pas converger au point $x = 0$, alors que le théorème de Dirichlet s'applique en ce point. On obtient ainsi, en regroupant les indices k et $-k$ du développement complexe

$$(\mathrm{S}_n f_0)(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{0 \le k \le (n-1)/2} \frac{\sin(2k+1)x}{2k+1}.$$

On a raté une belle occasion de se servir des coefficients de Fourier réels (a_n) et (b_n) : il est clair que $a_n = 0$ pour tout $n \ge 0$ à cause de l'imparité de la fonction f_0, et

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f_0(t) \sin(nt)\,dt = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \sin(nt)\,dt = \frac{2}{\pi n} \big(1 - \cos(n\pi)\big),$$

ce qui conduit heureusement au même résultat. On constate bien qu'au point $x = 0$, la série converge (trivialement, en stationnant) vers la valeur 0, qui est la demi-somme des limites à droite et à gauche de f_0 au point 0. Par ailleurs, d'après le corollaire 1 appliqué en un point x tel que $0 < x < \pi$, on a

$$1 = f_0(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\sin(2k+1)x}{2k+1}$$

alors que pour $-\pi < x < 0$ on a par imparité

$$-1 = f_0(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\sin(2k+1)x}{2k+1}.$$

Le théorème de Dirichlet à partir de l'exemple précédent

Si on a seulement montré le corollaire 1 (et pas le théorème à la Dirichlet), on peut déduire le théorème de Dirichlet à partir du corollaire 1 et de l'exemple précédent, où le théorème de Dirichlet a été vérifié "à la main" au point $x = 0$ pour la fonction f_0. Supposons qu'une fonction 2π-périodique localement intégrable f vérifie au point $x = 0$ l'hypothèse de type "théorème de Dirichlet" suivante :

la fonction f admet deux limites (finies) $f(0-)$ et $f(0+)$ à gauche et à droite de 0, et de plus on a $f(t) - f(0+) = \mathrm{O}(t)$ et $f(0-) - f(-t) = \mathrm{O}(t)$ pour $t > 0$ petit.

Les deux propriétés précédentes seront vraies (par la règle de l'Hospital) si on suppose que f est dérivable sur $(-\pi, \pi)$ pour $x \ne 0$, et que la dérivée f' possède une limite (finie) à gauche et à droite de 0. On va montrer que sous ces hypothèses,

les sommes de Fourier $(\mathrm{S_N} f)(0)$ tendent vers $\big(f(0-) + f(0+)\big)/2$.

Posons $d = f(0+) - f(0-)$; alors la fonction f_1 définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_1(x) = f(x) - \frac{d}{2}\, f_0(x)$$

est équivalente à une fonction continue au voisinage de 0, égale à $f(0-)+d/2 = f(0+)-d/2 = \big(f(0-)+f(0+)\big)/2$ pour $x=0$, et f_1 vérifie de plus la condition intégrale du corollaire 1, avec $\ell = \big(f(0-)+f(0+)\big)/2$, parce que les hypothèses impliquent que $f_1(t)-\ell = \mathrm{O}(|t|)$ au voisinage de $t=0$. Comme on a vérifié à la main le théorème de Dirichlet pour la fonction f_0, on en déduit le résultat pour $f = f_1 + \frac{d}{2}\, f_0$ au point 0 : les sommes partielles de la série de Fourier de f au point 0 convergent vers

$$\ell + 0 = \big(f(0-)+f(0+)\big)/2.$$

4.1.2. Les noyaux classiques. Théorèmes de Fejér

On va s'intéresser aux sommes de Cesàro de la suite des sommes de Fourier,

$$\sigma_n f = \frac{1}{n+1}\Big(\mathrm{S}_0 f + \cdots + \mathrm{S}_n f\Big).$$

Ces sommes, appelées *sommes de Fejér*, s'obtiennent évidemment par convolution de f avec le noyau correspondant

$$\mathrm{K}_n = \frac{1}{n+1}\Big(\mathrm{D}_0 + \cdots + \mathrm{D}_n\Big)$$

(tout le monde n'est pas d'accord sur la numérotation : comparer Chatterji et Zuily-Queffélec). Puisque $\mathrm{D}_k = \sum_{j=-k}^{k} e_j$ on obtient facilement (à la Fubini)

(1) $$\mathrm{K}_n = \sum_{k=-n}^{n} \Big(1 - \frac{|k|}{n+1}\Big)\, e_k.$$

Posons pour tout entier $k \ge 0$

$$\mathrm{L}_k(t) = \mathrm{e}^{-ikt/2} + \mathrm{e}^{it-ikt/2} + \mathrm{e}^{2it-ikt/2} + \cdots + \mathrm{e}^{ikt/2}.$$

En faisant apparaître une progression géométrique on voit facilement que

$$\mathrm{L}_k(t) = \mathrm{e}^{-ikt/2}\, \frac{\mathrm{e}^{i(k+1)t} - 1}{\mathrm{e}^{it} - 1} = \frac{\sin\big[(k+1)t/2\big]}{\sin(t/2)}.$$

Par ailleurs

$$\mathrm{L}_n^2(t) = \mathrm{e}^{-int}\big(1+\cdots+\mathrm{e}^{int}\big)^2 = \sum_{k=-n}^{n} (n+1-|k|)\, \mathrm{e}^{ikt},$$

ce qui donne $(n+1)\mathrm{K}_n = \mathrm{L}_n^2$,

$$\mathrm{K}_n(t) = \frac{1}{n+1}\, \frac{\sin^2\big[(n+1)t/2\big]}{\sin^2(t/2)}.$$

On a donc $\mathrm{K}_n(t) \ge 0$. En utilisant la forme (1) de K_n on voit que $\int_0^{2\pi} \mathrm{K}_n(t)\, \frac{dt}{2\pi} = 1$. De plus, pour tout α tel que $0<\alpha<\pi$, on constate que

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \mathbf{1}_{\{|t|>\alpha\}} \mathrm{K}_n(t)\, dt \le \frac{1}{(n+1)\pi}\int_{\alpha}^{\pi} \frac{1}{\sin^2(\alpha/2)}\, dt \le \frac{1}{(n+1)\sin^2(\alpha/2)}$$

qui tend vers 0 quand $n \to +\infty$. On voit donc que la suite (K_n) fournit une approximation de l'unité. On aura donc des résultats de convergence pour les sommes de Fejér

$$(\sigma_n f)(x) = (\mathrm{K}_n * f)(x) = \sum_{k=-n}^{n} \Bigl(1 - \frac{|k|}{n+1}\Bigr)\, c_k(f)\ \mathrm{e}^{ikx}\,.$$

On note que $\sigma_\mathrm{N} f$ est la moyenne des valeurs des sommes de Fourier usuelles $\mathrm{S}_0 f, \ldots, \mathrm{S}_\mathrm{N} f$: dire que les sommes de Fejér convergent en un point x vers $f(x)$ signifie que la série de Fourier au point x converge *au sens de Cesàro* vers $f(x)$,

$$f(x) = \lim_{\mathrm{N}\to+\infty} \frac{1}{\mathrm{N}+1} \sum_{k=0}^{\mathrm{N}} (\mathrm{S}_k f)(x).$$

Les résultats généraux sur l'approximation par convolution donnent donc les deux parties du *théorème de Fejér* qui suit.

Théorème. *Si f est continue 2π-périodique sur $\mathbb{R}$, la suite de fonctions $(\sigma_n f)$ converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}$. Si $f \in \mathrm{L}_p(0, 2\pi)$, avec $1 \le p < +\infty$, on a $\|\sigma_n f - f\|_p \to 0$.*

Conséquence-Exercice. L'application qui associe à toute fonction $f \in \mathrm{L}_1(0, 2\pi)$ la suite $(c_n(f))_{n\in\mathbb{Z}} \in c_0(\mathbb{Z})$ est injective.

Exercice classique. Si f est continue et si les sommes de Fourier $(\mathrm{S}_n f)(x)$ au point x convergent vers une limite ℓ, on a nécessairement $\ell = f(x)$.

Les polynômes de Tchebychev et le théorème de Weierstrass

Pour toute fonction continue g sur $[-1, 1]$ on construit une fonction continue F sur le cercle unité $\mathbb{T}$ (ou bien une fonction continue périodique f sur $\mathbb{R}$) de la façon suivante : on projette le point $z = \mathrm{e}^{it} \in \mathbb{T}$ sur l'axe réel, obtenant ainsi $x = \cos(t)$, et on pose $\mathrm{F}(\mathrm{e}^{it}) = f(t) = g(\cos(t))$. On obtient ainsi des fonctions périodiques f *paires*, dont les coefficients en sinus sont tous nuls. Posons $f = \mathrm{T}(g)$; l'application T est une isométrie linéaire de $\mathrm{C}([-1, 1])$ dans $\mathrm{C}(\mathbb{T})$. Il est clair qu'elle n'est pas surjective, puisque l'image est formée de fonctions paires.

Si $g(x) = x^k$ pour un entier $k \ge 0$, la fonction correspondante f est $\cos^k(t)$ qui se linéarise sous la forme $\sum_{j=0}^{k} c_{k,j} \cos(jt)$ avec $c_{k,k} = 2^{-k+1} \ne 0$. La transformation T est triangulaire à diagonale non nulle, donc elle induit une bijection de $\mathrm{Vect}_\mathbb{K}(1, \ldots, x^n)$ sur $\mathrm{Vect}_\mathbb{K}(1, \cos(t), \ldots, \cos(nt))$. Il en résulte que l'image par T de $\mathrm{Vect}_\mathbb{K}(1, \ldots, x^n)$ est exactement $\mathrm{Vect}_\mathbb{K}(1, \cos(t), \ldots, \cos(nt))$. Si on étend à tous les degrés, on voit que T induit une bijection S des fonctions polynomiales sur $[-1, 1]$, vers les polynômes trigonométriques en cosinus. L'image de $\cos(kt)$ par la bijection réciproque S^{-1} est à un coefficient près le k-ième *polynôme de Tchebychev* T_k,

$$\forall x \in [-1, 1], \quad \mathrm{T}_k(x) = \cos(k\ \arccos x).$$

La méthode de convolution par les noyaux de Rudin, qui sont pairs, donne la densité en norme uniforme des polynômes de cosinus dans le sous-espace de $\mathrm{C}(\mathbb{T})$ formé des fonctions paires. En changeant de variable, on vient de trouver une des démonstrations du théorème de Weierstrass, dans le cas de l'intervalle $[-1,1]$ (voir ZQ, chapitre IV, théorème III.3, *vii)*).

Soient en effet g une fonction continue quelconque sur $[-1,1]$ et $\varepsilon > 0$; posons $f = \mathrm{T}(g)$; on peut trouver un polynôme trigonométrique $\mathrm{P} = \sum_k c_k \cos(kt)$ tel que $\|f - \mathrm{P}\|_\infty < \varepsilon$; alors P est l'image par T de la fonction polynomiale $\mathrm{Q}(x) = \sum_k c_k \mathrm{T}_k(x)$ sur $[-1,1]$, donc

$$\|g - \mathrm{Q}\|_\infty = \|f - \mathrm{P}\|_\infty < \varepsilon.$$

Les polynômes de Tchebychev apparaissent dans le problème de l'approximation polynomiale (voir Demailly), par l'intermédiaire des *points de Tchebychev*, qui sont les zéros de polynômes de Tchebychev. On pourra voir que ces points de Tchebychev, dont le rôle peut paraître mystérieux, correspondent simplement à des points régulièrement espacés sur le cercle unité, dans notre correspondance T.

4.2. Un peu d'espaces de Hilbert

Définition. On appelle *espace de Hilbert* un espace vectoriel H sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ muni d'un produit scalaire $(x,y) \to \langle x,y\rangle \in \mathbb{K}$, tel que la semi-norme $x \to \sqrt{\langle x,x\rangle}$ soit une norme sur H, qui rende cet espace **complet**.

Un *produit scalaire* doit vérifier les trois propriétés suivantes : pour tout $y \in \mathrm{H}$, l'application $x \to \langle x,y\rangle$ est $\mathbb{K}$-linéaire sur H ; on a $\langle y,x\rangle = \overline{\langle x,y\rangle}$ pour tous $x,y \in \mathrm{H}$, et enfin le réel $\langle x,x\rangle$ est ≥ 0 pour tout $x \in \mathrm{H}$.

Si H est un espace de Hilbert, on note $\|x\| = \sqrt{\langle x,x\rangle}$ pour tout $x \in \mathrm{H}$. L'inégalité de Cauchy-Schwarz dit que $|\langle x,y\rangle| \le \|x\|\,\|y\|$.

Exemple. L'espace $\mathrm{L}_2(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ est un espace de Hilbert pour le produit scalaire

$$\langle f,g\rangle = \int_\Omega f(s)\overline{g(s)}\,d\mu(s).$$

L'espace ℓ_2 est un cas particulier, obtenu lorsque $\Omega = \mathbb{N}$ est muni de la mesure de comptage (définie par $\mu(\{n\}) = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$).

Lemme 1. *Soient* $(u_1, \ldots, u_n)$ *des vecteurs deux à deux orthogonaux d'un espace de Hilbert* H *; on a*

$$\Big\|\sum_{k=1}^n u_k\Big\|^2 = \sum_{k=1}^n \|u_k\|^2.$$

En particulier, des vecteurs orthogonaux non nuls *sont linéairement indépendants.*

Démonstration. Facile, en développant le carré scalaire $\langle \sum_{k=1}^n u_k, \sum_{k=1}^n u_k\rangle$.

Lemme 2. *Soit* $(e_1, \ldots, e_n)$ *une suite orthonormée finie dans un espace de Hilbert* H, *et posons* $\mathrm{F} = \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_n)$ *; pour tout vecteur* $x \in \mathrm{H}$, *le vecteur*

$$\mathrm{P_F}\, x = \sum_{i=1}^n \langle x, e_i\rangle\, e_i$$

est la projection orthogonale de x *sur* F, *c'est-à-dire que* $\mathrm{P_F}\, x \in \mathrm{F}$ *et que le vecteur* $x - \mathrm{P_F}\, x$ *est orthogonal à* F. *On a* $\|x - \mathrm{P_F}\, x\| \le \|x - z\|$ *pour tout* $z \in \mathrm{F}$ *(le point* $\mathrm{P_F}\, x$ *est le point de* F *le plus proche de* x*).*

Démonstration. Il est évident que $y = \mathrm{P}_\mathrm{F}\, x \in \mathrm{F}$, et il est clair que $\langle y, e_j\rangle = \langle x, e_j\rangle$ pour tout $j = 1, \ldots, n$, donc $x - y$ est orthogonal à tous les (e_j), ce qui implique que $x - y$ est orthogonal à F. Pour la deuxième affirmation, on écrit $x - z = (x - \mathrm{P}_\mathrm{F}\, x) + (\mathrm{P}_\mathrm{F}\, x - z)$ et on utilise l'orthogonalité de $x - \mathrm{P}_\mathrm{F}\, x$ et de $\mathrm{P}_\mathrm{F}\, x - z \in \mathrm{F}$.

Lemme 3 : inégalité de Bessel. *Soient* H *un espace de Hilbert et* $(e_i)_{i\in\mathrm{I}}$ *une famille orthonormée dans* H *; pour tout* $x \in \mathrm{H}$ *la famille* $(|\langle x, e_i\rangle|^2)_{i\in\mathrm{I}}$ *est sommable et*

$$\sum_{i\in\mathrm{I}} |\langle x, e_i\rangle|^2 \le \|x\|^2.$$

Démonstration. Pour qu'une famille $(u_i)_{i\in\mathrm{I}}$ de réels ≥ 0 soit sommable, il faut et il suffit qu'il existe un majorant M pour l'ensemble des sommes finies $\sum_{i\in\mathrm{J}} u_i$, $\mathrm{J} \subset \mathrm{I}$, J fini. On a alors $\sum_{i\in\mathrm{I}} u_i \le \mathrm{M}$. Il suffit donc de montrer le résultat du lemme pour une suite finie $e_1, \ldots, e_n$. On a vu que si on pose $y = \sum_{i=1}^n \langle x, e_i\rangle\, e_i$, le vecteur $x - y$ est orthogonal au sous-espace $\mathrm{F} = \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_n)$, donc $x - y$ est orthogonal à $y \in \mathrm{F}$. On aura puisque $x = y + (x - y)$

$$\|x\|^2 = \|y\|^2 + \|x - y\|^2 \ge \|y\|^2 = \sum_{i=1}^n |\langle x, e_i\rangle|^2$$

d'où le résultat.

Lemme 4. *Soit* $(u_i)_{i\in\mathrm{I}}$ *une famille orthogonale dans un espace de Hilbert* H *; la famille est sommable dans* H *si et seulement si* $\sum_{i\in\mathrm{I}} \|u_i\|^2 < +\infty$*, et dans ce cas*

$$\Bigl\|\sum_{i\in\mathrm{I}} u_i\Bigr\|^2 = \sum_{i\in\mathrm{I}} \|u_i\|^2.$$

Si $(e_i)_{i\in\mathrm{I}}$ *est une famille orthonormée, la famille de vecteurs* $(c_i e_i)_{i\in\mathrm{I}}$ *est sommable dans* H *si et seulement si* $\sum_{i\in\mathrm{I}} |c_i|^2 < +\infty$*, et dans ce cas on a* $\bigl\|\sum_{i\in\mathrm{I}} c_i e_i\bigr\|^2 = \sum_{i\in\mathrm{I}} |c_i|^2$.

Démonstration. Supposons $\sum_{i\in\mathrm{I}} \|u_i\|^2 < +\infty$. On peut trouver une suite croissante d'ensembles finis $\mathrm{I}_n \subset \mathrm{I}$ telle que la suite croissante $s_n = \sum_{i\in\mathrm{I}_n} \|u_i\|^2$ tende vers la somme $s = \sum_{i\in\mathrm{I}} \|u_i\|^2$ de la famille $(\|u_i\|^2)_{i\in\mathrm{I}}$. Posons $\mathrm{U}_n = \sum_{i\in\mathrm{I}_n} u_i$ pour tout $n \ge 0$. Si $m < n$ on a par orthogonalité

$$\|\mathrm{U}_n - \mathrm{U}_m\|^2 = \sum_{i\in\mathrm{I}_n\setminus\mathrm{I}_m} \|u_k\|^2 = s_n - s_m.$$

A partir de là, il est clair que la suite (U_n) est de Cauchy dans H, donc converge vers un vecteur $x \in \mathrm{H}$. Ce vecteur x est la *somme* de la famille $(u_i)_{i\in\mathrm{I}}$: pour tout $\varepsilon > 0$ donné, on peut trouver un sous-ensemble J_0 fini dans I tel que $\|x - \sum_{i\in\mathrm{J}} u_i\| < \varepsilon$ pour tout J fini contenant J_0 ; il suffit en effet de choisir $\mathrm{J}_0 = \mathrm{I}_n$ pour un entier n tel que $s - s_n < \varepsilon^2$.

La norme de la somme de la famille s'obtient en passant à la limite dans l'égalité du lemme 1, qui donne $\|\mathrm{U}_n\|^2 = s_n$ pour tout $n \ge 0$.

Définition. On appelle *base hilbertienne* d'un espace de Hilbert H une famille orthonormée $(e_i)_{i\in\mathrm{I}}$ qui est de plus *totale* dans H, c'est-à-dire que l'espace vectoriel engendré $\mathrm{Vect}(e_i : i \in \mathrm{I})$ est dense dans H.

L'un des intérêts (peut-être mineur) de la notion de *famille sommable* est de permettre de définir la notion de base hilbertienne $(e_i)_{i\in\mathrm{I}}$ dans le cas le plus général (l'ensemble d'indices I peut être non dénombrable) et de pouvoir l'utiliser sans trop de périphrases : tout vecteur x de H est la *somme* $x = \sum_{i\in\mathrm{I}} \langle x, e_i\rangle\, e_i$ de la famille sommable $(\langle x, e_i\rangle\, e_i)_{i\in\mathrm{I}}$. Par exemple, pour tout ensemble d'indices I, on a un espace de Hilbert $\ell_2(\mathrm{I})$ des familles $(c_i)_{i\in\mathrm{I}}$ de scalaires telles que $\sum_{i\in\mathrm{I}} |c_i|^2 < +\infty$, qui a une base hilbertienne canonique qu'on devine ; tout espace de Hilbert H est isomorphe à l'un de ces espaces $\ell_2(\mathrm{I})$.

Proposition. *Supposons que* H *admette une base hilbertienne* dénombrable. *Pour toute énumération* $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *de cette base, et pour tout vecteur* x *de* H, *on a*

$$x = \sum_{k=0}^{+\infty} \langle x, e_k\rangle\, e_k \quad \text{et} \quad \|x\|^2 = \sum_{k=0}^{+\infty} |\langle x, e_k\rangle|^2.$$

Démonstration. Pour tout $n \ge 0$, la projection orthogonale de x sur $\mathrm{F}_n = \mathrm{Vect}(e_0, \ldots, e_n)$ est égale à $x_n = \sum_{k=0}^{n} \langle x, e_k\rangle\, e_k$. Par ailleurs, les coefficients $c_k = \langle x, e_k\rangle$ sont de carré sommable d'après Bessel, donc la série $\sum_{k\in\mathbb{N}} c_k e_k$ converge d'après le lemme 4 ; si on pose $y = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k\, e_k$, on a $y = \lim_n x_n$.

Soient $\varepsilon > 0$ donné, et $\mathrm{N}_0 \in \mathbb{N}$ assez grand pour que $\|y - x_n\| < \varepsilon/2$ pour tout $n \ge \mathrm{N}_0$; puisque la famille (e_i) est totale, il existe un vecteur $z \in \mathrm{Vect}(e_i)$ tel que $\|x - z\| < \varepsilon/2$; on peut trouver un entier $n \ge \mathrm{N}_0$ tel que $z \in \mathrm{F}_n$. D'après le lemme 2, on aura $\|x - x_n\| \le \|x - z\| < \varepsilon/2$. Il en résulte que $\|x - y\| < \varepsilon$, pour tout $\varepsilon > 0$, donc $x = y$.

On voit qu'une base hilbertienne $(e_n)_{n\ge 0}$ de H est une suite orthonormée qui vérifie pour tout $x \in \mathrm{H}$ la première propriété indiquée dans la proposition précédente. En effet, cette propriété implique clairement que la suite $(e_n)_{n\ge 0}$ doit être totale dans H.

Exercice. Déterminants de Gram. Soient $(x_1, \ldots, x_{n+1})$ des vecteurs d'un espace de Hilbert, tels que $\mathrm{F} = \mathrm{Vect}(x_1, \ldots, x_n)$ soit de dimension n ; montrer que

$$\mathrm{dist}^2(x_{n+1}, \mathrm{F}) = \frac{\det\big(\langle x_i, x_j\rangle\big)_{i,j=1,\ldots,n+1}}{\det\big(\langle x_i, x_j\rangle\big)_{i,j=1,\ldots,n}}\,.$$

Exercice : le système de Haar. On définit une fonction h sur $\mathbb{R}$ par la formule $h = \mathbf{1}_{(0,1/2)} - \mathbf{1}_{(1/2,1)}$. On définit ensuite des fonctions sur $[0,1]$ en posant $h_{0,0}(t) = h(t)$ pour $t \in [0,1]$, puis pour tout $k \ge 0$ et tout $j = 0, \ldots, 2^k - 1$

$$\forall t \in [0,1], \quad h_{k,j}(t) = 2^{k/2}\, h(2^k t - j).$$

Montrer que le système formé de la fonction constante $\mathbf{1}$ et des fonctions $(h_{k,j})$, $k \ge 0$ et $j = 0, \ldots, 2^k - 1$, constitue une base hilbertienne de $\mathrm{L}_2(0,1)$.

4.2.1. Convergence dans L_2 *des séries de Fourier*

Considérons l'espace de Hilbert $\mathrm{L}_2(0, 2\pi)$ des fonctions complexes de carré sommable pour la mesure $dx/2\pi$. Il est facile de vérifier que les fonctions $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ forment une suite orthonormée dans $\mathrm{L}_2(0, 2\pi)$. On a vu que ce système est total : cela résulte de ce qui a été vu à partir de l'approximation de l'unité de Rudin, qui implique que les polynômes trigonométriques sont denses dans L_p pour tout p tel que $1 \le p < +\infty$, en particulier pour $p = 2$, ou bien cela résulte du théorème plus spécifique de Fejér. La famille dénombrable $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est donc une base orthonormée de $\mathrm{L}_2([0, 2\pi], dx/2\pi)$.

Pour voir que la suite $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est totale, on aurait pu aussi employer le marteau-pilon Stone-Weierstrass : l'espace vectoriel complexe L engendré par les $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ se trouve être une algèbre, invariante par conjugaison complexe et qui sépare les points du compact $\mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$. Il en résulte que L est dense, pour la norme uniforme, dans l'espace des fonctions continues 2π-périodiques, ce qui implique la densité dans $\mathrm{L}_2(0, 2\pi)$.

Pour toute fonction $f \in \mathrm{L}_2(0, 2\pi)$, les coefficients du développement de f dans cette base sont les coefficients de Fourier complexes

$$c_n(f) = \langle f, e_n\rangle = \int_0^{2\pi} f(s)\,\mathrm{e}^{-ins}\;\frac{ds}{2\pi}.$$

D'après Parseval, on a

$$\|f\|_2^2 = \int_0^{2\pi} |f(s)|^2\,\frac{ds}{2\pi} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)|^2.$$

Cette identité est la source d'une multitude d'exercices calculatoires, tels que par exemple le calcul de la somme de la série numérique $\sum_{n\geq 1} 1/n^2$.

On écrit souvent le développement de Fourier d'une fonction $f \in \mathrm{L}_2$ sous la forme

$$f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)\,\mathrm{e}^{inx},$$

mais cette écriture est *a priori* incorrecte, car rien ne nous dit que la série numérique ci-dessus converge vers $f(x)$: ce que nous savons est que f est la somme de la série de fonctions *au sens de* L_2. En fait, un théorème très difficile démontré vers 1960 par le mathématicien suédois L. Carleson justifie l'écriture précédente : pour presque tout x, la série de Fourier converge au point x et sa somme est égale à $f(x)$.

Exercice. Utiliser la théorie des séries de Fourier pour retrouver, d'une façon ou d'une autre, la relation plus que classique

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Exercice. Formule de Poisson.

a. Soit f une fonction continue 2π-périodique sur $\mathbb{R}$; montrer que si $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)| < +\infty$, on a $f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)\,\mathrm{e}^{inx}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

b. Soient F une fonction continue sur $\mathbb{R}$, telle que $|\mathrm{F}(x)| \leq \mathrm{C}\,(1 + |x|)^{-a}$ pour un $a > 1$ et tout $x \in \mathbb{R}$, et $\widehat{\mathrm{F}}$ sa transformée de Fourier ; montrer que la fonction f définie par $f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \mathrm{F}(x + 2\pi n)$ est continue et 2π-périodique. Trouver une relation entre les valeurs $\widehat{\mathrm{F}}(n)$, $n \in \mathbb{Z}$ et les coefficients de Fourier de f.

c. On suppose de plus que $\sum |\widehat{\mathrm{F}}(n)| < +\infty$. Démontrer la *formule de Poisson*,

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \mathrm{F}(2\pi n) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{\mathrm{F}}(n).$$

Appliquer avec $\mathrm{F}(x) = \mathrm{e}^{-a|x|}$, $a > 0$.

Séries de Fourier à plusieurs variables

Donnons une idée du cas $d = 2$; le produit scalaire sur $\mathrm{L}_2([0, 2\pi]^2)$ est alors donné par

$$\langle f, g\rangle = \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} f(s,t)\overline{g(s,t)}\,\frac{ds\,dt}{4\pi^2}.$$

On considère les fonctions définies sur $\mathbb{R}^2$ par

$$e_{m,n}(s,t) = e_m(s)e_n(t) = \mathrm{e}^{i(ms+nt)},$$

indexées par $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$. On vérifie facilement qu'elles forment encore un système orthonormé. On définira pour $f \in \mathrm{L}_1([0, 2\pi]^2)$ et $m, n \in \mathbb{Z}$

$$c_{m,n}(f) = \int_{[0,2\pi]^2} f(s,t)\,\mathrm{e}^{-i(ms+nt)}\;\frac{ds\,dt}{4\pi^2},$$

égal à $\langle f, e_{m,n}\rangle$ lorsque $f \in \mathrm{L}_2$. On peut montrer que ce système $(e_{m,n})$ est total dans L_2 en introduisant les puissances de la fonction $\varphi \geq 0$ définie par

$$\varphi(s,t) = (1 + \cos s)(1 + \cos t),$$

qui atteint un unique maximum sur $[-\pi, \pi]^2$ en $(0, 0)$; les puissances de cette fonction sont des polynômes trigonométriques en deux variables. En fait la totalité de cette suite double résulte d'un fait général : si (f_m) est une base hilbertienne de $\mathrm{L}_2(\mathrm{X}, \mu)$ et (g_n) une base hilbertienne de $\mathrm{L}_2(\mathrm{Y}, \nu)$, les fonctions $(s,t) \to f_m(s)g_n(t)$ forment une base hilbertienne de $\mathrm{L}_2(\mathrm{X}\times\mathrm{Y}, \mu\otimes\nu)$.

Disons quelques mots de la convergence ponctuelle. On introduit les sommes de Fourier doubles,

$$\mathrm{S}_\mathrm{N}^{(2)} f = \sum_{|m|,|n|\leq \mathrm{N}} c_{m,n}(f)\,e_{m,n}.$$

Si u est une fonction d'une variable et si $g(x,y) = u(x)$, il est facile de vérifier que

$$(\mathrm{S}_\mathrm{N}^{(2)} g)(x,y) = (\mathrm{S}_\mathrm{N} u)(x),$$

et le résultat analogue si $g(x,y) = v(y)$. Il y a donc convergence simple des sommes de Fourier doubles si g est hölderienne et ne dépend en fait que d'une seule variable. Si f est une fonction doublement 2π-périodique et α-hölderienne, $0 < \alpha \leq 1$, introduisons

$$\varphi(x,y) = f(x,y) - f(x,0) - f(0,y) + f(0,0).$$

Il est facile de voir que φ est α-hölderienne, et de plus $|\varphi(x,y)| \leq \mathrm{M}\,|x|^\alpha$, ainsi que $|\varphi(x,y)| \leq \mathrm{M}\,|y|^\alpha$; on voit ensuite que

$$(\mathrm{S}_\mathrm{N}^{(2)}\varphi)(0,0) = \int_{[0,2\pi]^2} \varphi(-s,-t)\mathrm{D}_\mathrm{N}(s)\mathrm{D}_\mathrm{N}(t)\,\frac{ds\,dt}{4\pi^2} =$$

$$\int_{[0,2\pi]^2} \frac{\varphi(-s,-t)}{\sin(s/2)\sin(t/2)}\;\sin((\mathrm{N}+1/2)s)\sin((\mathrm{N}+1/2)t)\,\frac{ds\,dt}{4\pi^2},$$

et

$$\int_{[0,2\pi]^2} \Bigl| \frac{\varphi(-s,-t)}{\sin(s/2)\sin(t/2)} \Bigr| \frac{ds\,dt}{4\pi^2} < \infty$$

par les majorations obtenues sur φ. On en déduit que $(\mathrm{S}_{\mathrm{N}}^{(2)}\varphi)(0,0)$ tend vers 0 par Riemann-Lebesgue en deux variables, et on conclut finalement que

$$f(0,0) = \lim_{\mathrm{N}} (\mathrm{S}_{\mathrm{N}}^{(2)} f)(0,0).$$

Bien sûr le point $(0,0)$ ne joue aucun rôle particulier, et la convergence ponctuelle est vraie pour tout point (x,y).

4.2.2. Théorème de projection et conséquences

Si C est un convexe fermé non vide d'un espace de Hilbert H et x un point de H, il existe un point unique $y \in \mathrm{C}$ tel que

$$\|x - y\| = \mathrm{dist}(x, \mathrm{C}).$$

On obtient ce résultat en considérant la famille des fermés non vides

$$\mathrm{F}_\varepsilon = \{z \in \mathrm{C} : \|x - z\|^2 \le d^2 + \varepsilon^2\}$$

où $d = \mathrm{dist}(x, \mathrm{C})$ et $\varepsilon > 0$; le fermé F_ε décroît quand ε décroît vers 0, avec diamètre tendant vers 0. On voit en effet avec la relation du parallélogramme que $\mathrm{diam}(\mathrm{F}_\varepsilon) \le 2\varepsilon$: si u, v sont deux points de F_ε, posons $m = x - (u+v)/2$ et $h = (u-v)/2$. Alors $(u+v)/2 \in \mathrm{C}$ par la convexité de C, donc $\|m\| \ge d$ et

$$\begin{aligned} 2\,(d^2 + \varepsilon^2) \ge \|x - u\|^2 + \|x - v\|^2 = \|m - h\|^2 + \|m + h\|^2 = \\ = 2\|m\|^2 + 2\|h\|^2 \ge 2d^2 + 2\|h\|^2, \end{aligned}$$

donc $\|h\| \le \varepsilon$, et le sup des valeurs de $\|h\|$ est égal au demi-diamètre de F_ε.

Dans le cas où $\mathrm{C} = \mathrm{F}$ est un sous-espace vectoriel fermé, on montre que la projection de plus courte distance $y = \mathrm{P}_\mathrm{F}\, x$ est caractérisée par

$$\mathrm{P}_\mathrm{F}\, x \in \mathrm{F} \quad \text{et} \quad x - \mathrm{P}_\mathrm{F}\, x \perp \mathrm{F}.$$

Il en résulte que l'application P_F est un projecteur linéaire de H sur F. Si ℓ est une forme linéaire non nulle sur H, on peut trouver un vecteur $v_1 \in \mathrm{H}$ tel que $\ell(v_1) \ne 0$; posons $\mathrm{F} = \ker \ell$, et $w = \mathrm{P}_\mathrm{F}\, v_1$. Alors $\ell(v_1 - w) = \ell(v_1) \ne 0$; le vecteur $v_1 - w$ est orthogonal à F ; posons

$$v_0 = \frac{1}{\ell(v_1 - w)}\,(v_1 - w).$$

Le vecteur v_0 est orthogonal à F et $\ell(v_0) = 1$. Soit x un vecteur quelconque de H ; le vecteur $x - \ell(x)\,v_0$ est dans $\ker \ell = \mathrm{F}$, ce qui entraîne que

$$0 = \langle x - \ell(x) v_0, v_0 \rangle$$

et donc

$$\ell(x) = \langle x, \frac{1}{\langle v_0, v_0 \rangle}\, v_0 \rangle.$$

Ceci montre que la forme linéaire continue ℓ est représentée par le produit scalaire avec le vecteur $v = \|v_0\|^{-2} v_0$.

Théorème. *Pour toute forme linéaire continue ℓ sur un espace de Hilbert* H, *il existe un vecteur $v \in \mathrm{H}$ unique tel que*

$$\forall x \in \mathrm{H}, \quad \ell(x) = \langle x, v \rangle.$$

4.2.3. Dual de L_p*, quand* $1 \le p \le 2$

On va utiliser le cas de L_2 pour étudier aussi le dual de $\mathrm{L}_p(\Omega, \mu)$, lorsque μ est une probabilité et $1 \le p \le 2$. On désigne par q l'exposant conjugué de p. Comme μ est une probabilité, il existe une injection j de norme 1 de $\mathrm{L}_2(\mu)$ dans $\mathrm{L}_p(\mu)$.

Si ℓ est une forme linéaire continue sur $\mathrm{L}_p(\mu)$, on obtient une forme linéaire $\widetilde{\ell} = \ell \circ j$ continue sur $\mathrm{L}_2(\mu)$, qui est donc représentable par un produit scalaire avec une fonction $f_1 \in \mathrm{L}_2(\mu)$,

$$\forall \varphi \in \mathrm{L}_2(\mu), \quad \widetilde{\ell}(\varphi) = \langle \varphi, f_1 \rangle = \int \varphi \overline{f_1}\, d\mu.$$

Il reste à montrer que $f = \overline{f_1}$ est dans $\mathrm{L}_q(\mu)$, et que ℓ coïncide avec la forme linéaire ℓ_f continue sur $\mathrm{L}_p(\mu)$ définie par $\ell_f(g) = \int g f\, d\mu$ pour toute fonction $g \in \mathrm{L}_p(\mu)$. On pose $\mathrm{A}_n = \{|f| \le n\}$, $f(\omega) = \mathrm{e}^{i\theta(\omega)}\, |f(\omega)|$ et

$$\varphi_n = \mathrm{e}^{-i\theta(\omega)}\, |f(\omega)|^{q-1} 1_{\mathrm{A}_n}(\omega).$$

On a $\varphi_n \in \mathrm{L}_2(\mu)$, ce qui permet d'écrire

$$\widetilde{\ell}(\varphi_n) = \int \varphi_n f\, d\mu = \int_{\mathrm{A}_n} |f|^q\, d\mu,$$

et la majoration

$$|\widetilde{\ell}(\varphi_n)| = |\ell(\varphi_n)| \le \|\ell\|\, \|\varphi_n\|_p = \|\ell\| \Bigl(\int_{\mathrm{A}_n} |f|^{p(q-1)}\, d\mu \Bigr)^{1/p} = \|\ell\| \Bigl(\int_{\mathrm{A}_n} |f|^q\, d\mu \Bigr)^{1/p}$$

d'où

$$\Bigl(\int_{\mathrm{A}_n} |f|^q\, d\mu \Bigr)^{1/q} \le \|\ell\|,$$

et ceci pour tout n, donc

$$\Bigl(\int_{\Omega} |f|^q\, d\mu \Bigr)^{1/q} \le \|\ell\|.$$

Les formes linéaires ℓ et ℓ_f, continues sur l'espace $\mathrm{L}_p(\mu)$, coïncident sur le sous-espace dense $\mathrm{L}_2(\mu)$, donc elles coïncident partout sur $\mathrm{L}_p(\mu)$, donc $\ell = \ell_f$.

4.2.4. Dual de L_4

Dans ce paragraphe on va traiter un cas particulier de la recherche du dual de L_p quand $p > 2$. Le cas $p > 2$ général se traite habituellement avec le théorème de Radon-Nikodym. On considère une mesure $\mu \ge 0$ quelconque sur un espace mesurable $(\Omega, \mathcal{A})$ et une forme linéaire continue ℓ sur l'espace réel $\mathrm{L}_4(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$. On définit ensuite une fonction réelle φ sur L_4 par

$$\forall f \in \mathrm{L}_4(\Omega, \mu), \quad \varphi(f) = \int_{\Omega} f^4\, d\mu - 4\, \ell(f).$$

Cette fonction φ est continue sur $\mathrm{L}_4(\mu)$ (la norme est continue, et $\varphi(f) = \|f\|_4^4 - 4\, \ell(f)$ est donc continue). De plus, φ est minorée sur $\mathrm{L}_4(\mu)$ car

$$\varphi(f) \ge \|f\|_4^4 - 4\, \|\ell\|\, \|f\|_4 \ge \mathrm{M},$$

où

$$\mathrm{M} = \min\{t^4 - 4\,t\|\ell\| : t \in \mathbb{R}\} = -3\,\|\ell\|^{4/3}.$$

Posons

$$m = \inf \varphi(\mathrm{L}_4(\mu)) > -\infty$$

et pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\mathrm{F}_\varepsilon = \{f \in \mathrm{L}_4(\mu) : \varphi(f) \leq m + \varepsilon^4\}.$$

L'ensemble F_ε est un fermé non vide, qui décroît avec ε, et on va montrer que son diamètre tend vers 0 lorsque ε décroît vers 0. Il en résultera que la fonction φ atteint un minimum sur $\mathrm{L}_4(\mu)$, en un point unique f_0. On remarque que si x, y sont deux réels,

$$\frac{1}{2}\Big((x+y)^4 + (x-y)^4\Big) - x^4 = 6x^2y^2 + y^4 \geq y^4.$$

Soient f_1, f_2 deux éléments de F_ε, et posons $f_1 = f + h$, $f_2 = f - h$; on a

$$\frac{1}{2}\Big(\varphi(f+h) + \varphi(f-h)\Big) - \varphi(f) \geq \int_\Omega h^4\,d\mu,$$

et d'autre part puisque $\varphi(f) \geq m$,

$$\varepsilon^4 = \frac{1}{2}\,\Big((m+\varepsilon^4) + (m+\varepsilon^4)\Big) - m \geq \frac{1}{2}\Big(\varphi(f+h) + \varphi(f-h)\Big) - \varphi(f).$$

On a donc $\int h^4 \leq \varepsilon^4$; la norme de $\|h\|$ est la moitié de la distance de f_1 à f_2, donc

$$\mathrm{diam}(\mathrm{F}_\varepsilon) \leq 2\,\varepsilon.$$

On sait maintenant que φ atteint son minimum en un point unique $f_0 \in \mathrm{L}_4(\mu)$. Si g est une fonction quelconque de $\mathrm{L}_4(\mu)$, on aura pour tout réel t

$$\varphi(f_0 + tg) - \varphi(f_0) \geq 0,$$

soit en développant la puissance quatrième

$$t\Big(\int_\Omega (4f_0^3)\,g\,d\mu - 4\,\ell(g)\Big) + 6t^2 \int_\Omega f_0^2 g^2\,d\mu + 4t^3 \int_\Omega f_0 g^3\,d\mu + t^4 \int g^4 \geq 0.$$

En faisant tendre t vers 0, on déduit que le coefficient de t est nul,

$$\int_\Omega f_0^3\,g\,d\mu = \ell(g)$$

et ceci est vrai pour toute fonction $g \in \mathrm{L}_4(\mu)$. On voit donc que la forme linéaire ℓ est représentée par la fonction f_0^3, qui est un élément de $\mathrm{L}_{4/3}(\Omega, \mu)$.

Après avoir traité le dual de L_4, on peut traiter celui de L_p pour $2 < p < 4$, comme on a traité le cas $1 < p < 2$ à partir de L_2. On peut aussi faire pour L_6, L_8, etc… ce qu'on a fait pour L_4.

On peut montrer le théorème général suivant.

Théorème. *Soit μ une mesure positive quelconque sur (Ω, μ), et soit $1 < p < +\infty$; pour toute forme linéaire continue ℓ sur $\mathrm{L}_p(\Omega, \mu)$, il existe une fonction $f \in \mathrm{L}_q(\Omega, \mu)$ (avec $1/q + 1/p = 1$) unique telle que*

$$\forall g \in \mathrm{L}_p(\Omega, \mu), \quad \ell(g) = \int_\Omega g(\omega) f(\omega)\, d\mu(\omega).$$

Si la mesure μ est σ-finie, le résultat précédent est vrai aussi pour $p = 1$.

4.2.5. Radon-Nikodym

Définition. Soient μ, ν deux mesures positives sur $(\Omega, \mathcal{A})$; on dira que ν est *absolument continue* par rapport à μ si pour tout $\mathrm{A} \in \mathcal{A}$, la condition $\mu(\mathrm{A}) = 0$ implique $\nu(\mathrm{A}) = 0$.

On note $\nu << \mu$ quand ν est absolument continue par rapport à μ ; si ν est une mesure à densité par rapport à μ, c'est-à-dire qu'il existe une fonction mesurable $f \geq 0$ finie telle que

$$\forall \mathrm{A} \in \mathcal{A}, \quad \nu(\mathrm{A}) = \int_\mathrm{A} f\, d\mu,$$

on sait que $\nu << \mu$. Le théorème de Radon-Nikodym fournit des réciproques.

Théorème (Radon-Nikodym). *Si μ et ν sont σ-finies ≥ 0 sur $(\Omega, \mathcal{A})$ et $\nu << \mu$, il existe une densité de ν par rapport à μ, c'est-à-dire une fonction f mesurable ≥ 0 finie telle que*

$$\forall \mathrm{A} \in \mathcal{A}, \quad \nu(\mathrm{A}) = \int_\mathrm{A} f\, d\mu.$$

Preuve. Puisque la mesure ν est σ-finie, il existe des ensembles (A_m) de mesure finie pour ν qui réalisent une partition de Ω. Si on montre le théorème pour chaque mesure finie ν_m, restriction de ν à la partie A_m, il suffira de recoller les morceaux de densité f_m, définis sur chaque A_m, pour obtenir f. On note que la restriction ν_m de ν à A_m est absolument continue par rapport à μ.

On suppose donc désormais que ν est finie, $\nu << \mu$ et on considère $\xi = \mu + \nu$; on a pour tout $\mathrm{A} \in \mathcal{A}$

$$\nu(\mathrm{A}) \leq \mu(\mathrm{A}) + \nu(\mathrm{A}) = \xi(\mathrm{A})$$

(valeur infinie admise) ; on va trouver une fonction mesurable φ telle que $0 \leq \varphi \leq 1$ et

$$\forall \mathrm{A} \in \mathcal{A}, \quad \nu(\mathrm{A}) = \int_\mathrm{A} \varphi\, d\xi = \int_\mathrm{A} \varphi\, (d\nu + d\mu).$$

Pour le faire on remarque que la forme linéaire $\ell : g \to \int g\, d\nu$ est définie et continue sur le sous-espace dense $\mathcal{E}$ de $\mathrm{L}_2(\xi)$ (espace réel), formé des combinaisons linéaires des indicatrices $\mathbf{1}_\mathrm{A}$ telles que $\xi(\mathrm{A}) < \infty$: si $g = \sum_{j=1}^n a_j \mathbf{1}_{\mathrm{A}_j} \in \mathcal{E}$ on a

$$\Bigl| \int g\, d\nu \Bigr| \leq \int |g|\, d\nu \leq \nu(\Omega)^{1/2}\, \|g\|_{\mathrm{L}_2(\nu)} = \nu(\Omega)^{1/2} \Bigl(\sum_{j=1}^n |a_j|^2\, \nu(\mathrm{A}_j) \Bigr)^{1/2} \leq$$

$$\leq \nu(\Omega)^{1/2} \Big(\sum_{j=1}^n |a_j|^2 \, \xi(\mathrm{A}_j) \Big)^{1/2} = \nu(\Omega)^{1/2} \, \|g\|_{\mathrm{L}_2(\xi)}.$$

Cette forme linéaire ℓ est donc prolongeable à $\mathrm{L}_2(\xi)$, donc représentable par un produit scalaire avec une fonction réelle $\varphi \in \mathrm{L}_2$. Montrons que φ est ≥ 0 ξ-presque partout. Soit $\mathrm{C} = \{\varphi < 0\}$; comme μ est σ-finie, l'ensemble C est union croissante d'ensembles C_n tels que $\mu(\mathrm{C}_n) < \infty$, donc $\xi(\mathrm{C}_n) < \infty$. Les fonctions $\mathbf{1}_{\mathrm{C}_n}$ sont dans $\mathcal{E}$, donc

$$0 \leq \nu(\mathrm{C}_n) = \int \mathbf{1}_{\mathrm{C}_n} \, d\nu = \ell(\mathbf{1}_{\mathrm{C}_n}) = \int_{\mathrm{C}_n} \varphi \, d\xi \leq 0,$$

ce qui montre que $\mathbf{1}_{\mathrm{C}_n} \varphi$ est ξ-négligeable pour tout n, et entraîne que $\xi(\mathrm{C}) = 0$.

Soit $\mathrm{A} \in \mathcal{A}$ quelconque ; à nouveau, l'ensemble A est union croissante d'ensembles A_n tels que $\xi(\mathrm{A}_n) < \infty$. Les fonctions $\mathbf{1}_{\mathrm{A}_n}$ sont dans $\mathcal{E}$, donc

$$\nu(\mathrm{A}_n) = \int \mathbf{1}_{\mathrm{A}_n} \, d\nu = \ell(\mathbf{1}_{\mathrm{A}_n}) = \int_{\mathrm{A}_n} \varphi \, d\xi,$$

et par limite croissante on obtient

$$\forall \mathrm{A} \in \mathcal{A}, \quad \nu(\mathrm{A}) = \int_{\mathrm{A}} \varphi \, d\xi.$$

On montre que l'inégalité $\varphi \leq 1$ est vraie ξ-presque partout, en utilisant la relation $\nu(\mathrm{A}) \leq \xi(\mathrm{A})$ pour tout A ; si $\mathrm{C} = \{\varphi > 1\}$, on voit que la fonction mesurable positive $k = \mathbf{1}_{\mathrm{C}} \varphi - \mathbf{1}_{\mathrm{C}}$ est d'intégrale nulle car

$$\int k \, d\xi = \int_{\mathrm{C}} \varphi \, d\xi - \xi(\mathrm{C}) = \nu(\mathrm{C}) - \xi(\mathrm{C}) \leq 0,$$

donc $k = 0$ ξ-presque-partout, ce qui signifie que $\xi(\mathrm{C}) = 0$. Si $\mathrm{B} = \{\varphi = 1\}$ on a

$$\nu(\mathrm{B}) = \int_{\mathrm{B}} \varphi \, d\xi = \nu(\mathrm{B}) + \mu(\mathrm{B}),$$

donc $\mu(\mathrm{B}) = 0$, et $\nu(\mathrm{B}) = 0$ puisque $\nu << \mu$. On peut si on y tient modifier φ pour que $0 \leq \varphi < 1$ partout ; soit h une fonction mesurable positive ; on peut écrire h sous la forme $h = g(1 - \varphi)$, et ensuite

$$\int g \, d\nu = \int g\varphi \, (d\nu + d\mu), \quad \text{donc} \quad \int g(1-\varphi) \, d\nu = \int g\varphi \, d\mu,$$

et finalement

$$\int h \, d\nu = \int h \frac{\varphi}{1 - \varphi} \, d\mu.$$

En spécialisant à h de la forme $\mathbf{1}_{\mathrm{A}}$ on voit que le résultat est obtenu, avec $f = \varphi/(1-\varphi)$.

Remarque. Si μ est la mesure de comptage de $\mathbb{R}$ et ν la mesure de Lebesgue, on a bien que $\mu(\mathrm{A}) = 0$ implique $\nu(\mathrm{A}) = 0$, mais il n'y a pas de densité ! ! Cela vient du fait que l'espace $\mathcal{E}$ de la démonstration ne contient que des fonctions à support fini, qui sont négligeables pour ν ; la forme linéaire de la preuve précédente est nulle et ne donne aucune information intéressante.

4.3. Transformation de Fourier

Fourier de L_1

À toute fonction réelle ou complexe $f \in \mathrm{L}_1(\mathbb{R}^d)$ on associe sa *transformée de Fourier* $\widehat{f}$, définie sur $\mathbb{R}^d$ par la formule

$$\forall t \in \mathbb{R}^d, \quad \widehat{f}(t) = \int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{e}^{-it\cdot x}\, f(x)\, dx,$$

où la notation $t \cdot x$ représente le produit scalaire $t_1\, x_1 + \cdots + t_d\, x_d$ des deux vecteurs $t = (t_1, \ldots, t_d)$ et $x = (x_1, \ldots, x_d)$ de $\mathbb{R}^d$. L'application du théorème de convergence dominée à la famille des fonctions $g_t(x) = \mathrm{e}^{-ix\cdot t}\, f(x)$, dont les modules sont majorés par la fonction intégrable fixe $x \to |f(x)|$, montre que $\widehat{f}$ est continue. Il est clair que

$$\|\widehat{f}\|_\infty \le \|f\|_1.$$

On a vu de plus que $\widehat{f}$ appartient au sous-espace fermé $\mathrm{C}_0(\mathbb{R}^d)$ de $\mathrm{C}_b(\mathbb{R}^d)$, formé des fonctions continues qui tendent vers 0 à l'infini (lemme de Riemann-Lebesgue). On peut donc dire que $f \to \widehat{f}$ est un opérateur linéaire de norme ≤ 1, de $\mathrm{L}_1(\mathbb{R}^d)$ dans $\mathrm{C}_0(\mathbb{R}^d)$.

Avec Fubini, on voit que lorsque $f, g \in \mathrm{L}_1(\mathbb{R}^d)$, la transformée de Fourier de $f * g$ est égale au produit $\widehat{f}\,\widehat{g}$ des transformées de Fourier. On utilise $h(x, y) = f(x-y)g(y)\,\mathrm{e}^{-ix\cdot t}$, dont le module est $(x, y) \to |f(x-y)g(y)|$, dont on a vérifié l'intégrabilité lors de l'étude de la convolution.

Dilatations et Fourier

Soit $f \in \mathrm{L}_1(\mathbb{R}^d)$; pour tout $\lambda > 0$ posons

$$\forall x \in \mathbb{R}^d, \quad f_{[\lambda]}(x) = \lambda^d f(\lambda x).$$

On voit par le changement de variable $y = \lambda x$ que $f_{[\lambda]}$ a la même intégrale et la même norme dans $\mathrm{L}_1(\mathbb{R}^d)$ que f. On trouve immédiatement par le même changement de variable que

$$\forall t \in \mathbb{R}^d, \quad \widehat{f_{[\lambda]}}(t) = \widehat{f}(t/\lambda).$$

Dans le même ordre d'idées, désignons par σ l'application qui associe à toute fonction f la fonction $\sigma f : x \to f(-x)$. Cette application σ est une involution linéaire isométrique de tous les espaces $\mathrm{L}_p(\mathbb{R}^d)$. On voit que $\sigma\,\widehat{f} = \widehat{\sigma f}$ pour toutes les fonctions f de L_1 ; en effet

$$(\sigma\,\widehat{f})(t) = \widehat{f}(-t) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\,\mathrm{e}^{ix\cdot t}\;dx = \int_{\mathbb{R}^d} f(-y)\,\mathrm{e}^{-iy\cdot t}\;dy = \widehat{\sigma f}\,(t).$$

Fourier et dérivations

Désignons par $\mathrm{D}_1, \ldots, \mathrm{D}_d$ les d opérateurs de dérivation partielle dans $\mathbb{R}^d$. Ainsi, si $x = (x_1, \ldots, x_d)$ la notation $(\mathrm{D}_1 f)(x)$ désigne la première dérivée partielle de f au point x, qui est égale à la dérivée au point $x_1 \in \mathbb{R}$ de la fonction $t \in \mathbb{R} \to f(t, x_2, \ldots, x_d)$. On peut voir en exercice le résultat suivant.

Soit j tel que $1 \le j \le d$; si f et $x \to x_j f(x)$ sont intégrables sur $\mathbb{R}^d$, alors $\widehat{f}$ admet une $j$ième dérivée partielle, donnée par

$$\forall t \in \mathbb{R}^d, \quad (\mathrm{D}_j \widehat{f})\,(t) = \int_{\mathbb{R}} \bigl(-i x_j f(x)\bigr)\, \mathrm{e}^{-i x \cdot t}\, dx$$

c'est-à-dire que $i\mathrm{D}_j \widehat{f}$ est la transformée de Fourier de $x \to x_j f(x)$. Il suffit de dériver sous l'intégrale, à la Lebesgue dominé. On a aussi le résultat suivant.

Soit j tel que $1 \le j \le d$; si f et $\mathrm{D}_j f$ sont dans $\mathrm{L}_1(\mathbb{R}^d)$, alors

$$\forall t \in \mathbb{R}^d, \quad \widehat{\mathrm{D}_j f}(t) = i t_j \widehat{f}(t).$$

Vérification. On commence en dimension $d = 1$, en supposant donc f et f' intégrables sur $\mathbb{R}$. On procède par intégration par parties,

$$\int_a^b f'(x)\, \mathrm{e}^{-ixt}\, dx = \Bigl[f(x)\, \mathrm{e}^{-ixt}\Bigr]_{x=a}^{b} - \int_a^b f(x)(-it)\, \mathrm{e}^{-ixt}\, dt.$$

Comme f est intégrable, on peut trouver, pour tout $\varepsilon > 0$ donné, deux valeurs a, b telles que $a < -1/\varepsilon$, $1/\varepsilon < b$ et $|f(a)|, |f(b)| < \varepsilon$. On en déduit le résultat annoncé.

En plusieurs variables, on commence avec Fubini par une intégration dans la variable x_j ; on se trouve alors dans le cas qui vient d'être traité ; ensuite on intègre dans les autres variables.

Fourier des Gaussiennes

On montre en dimension un, puis en dimension d, que

$$\int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{e}^{-it\cdot x}\, \mathrm{e}^{-|x|^2/2}\, \frac{dx}{(2\pi)^{d/2}} = \mathrm{e}^{-|t|^2/2}$$

où on a noté par $|t|$ la norme euclidienne du vecteur t. Ce résultat se démontre en dimension un, par exemple par des considérations d'intégrales de contour, et le résultat sur $\mathbb{R}^d$ se déduit par Fubini ; on peut aussi utiliser une équation différentielle, ou bien le passage par la transformée de Laplace et l'holomorphie. Développons rapidement cette dernière approche : posons $g(x) = (2\pi)^{-1/2}\, \mathrm{e}^{-x^2/2}$ pour $x \in \mathbb{R}$; on calcule facilement pour s réel

$$\mathrm{L}(s) = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-sx}\, g(x)\, dx = \mathrm{e}^{s^2/2} \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-(x-s)^2/2}\, \frac{dx}{(2\pi)^{1/2}} = \mathrm{e}^{s^2/2}\,.$$

On montre ensuite que la formule pour $\mathrm{L}(s)$ définit une fonction entière sur $\mathbb{C}$, nécessairement égale à la fonction entière $s \to \mathrm{e}^{s^2/2}$ (principe des zéros isolés : la fonction entière

$z \to \mathrm{L}(z) - \mathrm{e}^{z^2/2}$, nulle sur l'axe réel, doit être nulle en tout point de $\mathbb{C}$) ; on conclut en appliquant à $s = it$, t réel. Posons encore en dimension d

$$\forall x \in \mathbb{R}^d, \quad g(x) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \, \mathrm{e}^{-|x|^2/2} \,.$$

On obtient pour les dilatées $g_{[k]}$ la formule $\widehat{g_{[k]}}(t) = \mathrm{e}^{-|t|^2/(2k^2)}$. On remarque que $\widehat{g_{[k]}} \to 1$ quand $k \to +\infty$, ce qui correspond au fait que 1 est la transformée de Fourier de la mesure δ_0 (Dirac du point 0), et que la suite $(g_{[k]})$ est une approximation de l'unité.

Inversion de Fourier et Plancherel

Désignons par X l'ensemble formé de toutes les fonctions f continues sur $\mathbb{R}^d$, telles que f et $\widehat{f}$ soient intégrables sur $\mathbb{R}^d$, et que f vérifie la *formule d'inversion*

$$\text{(I)} \qquad \forall x \in \mathbb{R}^d, \quad f(x) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{f}(t) \, \mathrm{e}^{it \cdot x} \, dt.$$

Il est clair que X est un espace vectoriel de fonctions. On va montrer qu'à partir d'une fonction non nulle dans X, on peut étendre considérablement nos possibilités d'inverser Fourier pour d'autres fonctions. Or nous avons au moins une fonction non nulle dans X : la fonction gaussienne g définie par $g(x) = (2\pi)^{-d/2} \, \mathrm{e}^{-|x|^2/2}$; on voit en effet que $g, \widehat{g}$ sont continues, intégrables sur $\mathbb{R}^d$ et puisque $\widehat{g} = (2\pi)^{d/2} \, g$, on a

$$\frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{g}(t) \, \mathrm{e}^{it \cdot x} \, dt = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} g(t) \, \mathrm{e}^{it \cdot x} \, dt = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \, \widehat{g}(-x) = g(x).$$

Pas a. Si $k \in \mathrm{X}$, alors $f * k \in \mathrm{X}$ pour toute fonction $f \in \mathrm{L}_1(\mathbb{R}^d)$.

Preuve. Pour commencer, $\widehat{f * k} = \widehat{f} \, \widehat{k}$ est intégrable comme produit de la fonction bornée $\widehat{f}$ par la fonction intégrable $\widehat{k}$. Pour chaque x fixé, appliquons Fubini à la fonction intégrable $h(y, t) = (2\pi)^{-d} f(y) \widehat{k}(t) \, \mathrm{e}^{-i(y-x) \cdot t}$ pour obtenir

$$\frac{1}{(2\pi)^d} \int \widehat{f}(t) \widehat{k}(t) \, \mathrm{e}^{ix \cdot t} \, dt = \int \Bigl(\int h(y, t) \, dy \Bigr) \, dt = \int \Bigl(\int h(y, t) \, dt \Bigr) \, dy =$$

$$= \int f(y) \Bigl((2\pi)^{-d} \int \widehat{k}(t) \, \mathrm{e}^{-i(y-x) \cdot t} \, dt \Bigr) \, dy = \int f(y) k(x - y) \, dy = (f * k)(x),$$

ce qui montre que $f * k$ vérifie aussi la formule d'inversion. Fubini est justifié car

$$|h(y, t)| = |f(y) \, \mathrm{e}^{-iy.t} \, \widehat{k}(t) \, \mathrm{e}^{it \cdot x} \, | = |f(y)| \, |\widehat{k}(t)|$$

est intégrable sur $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$.

Pas b. Si $k \in \mathrm{X}$ et si on définit k_n par $k_n(x) = n^d k(nx)$, alors $k_n \in \mathrm{X}$ pour tout $n \geq 1$.

Preuve. On obtient ceci par des changements de variables évidents ; on a vu au paragraphe sur les dilatations que $\widehat{k}_n(t) = \widehat{k}(t/n)$. On a donc en posant $u = t/n$

$$\frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{k}_n(t)\, \mathrm{e}^{it\cdot x}\ dt = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{k}(t/n)\, \mathrm{e}^{it\cdot x}\ dt =$$

$$\frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{k}(u)\, \mathrm{e}^{iu\cdot(nx)}\ n^d du = n^d k(nx).$$

On voit de même que σk est dans X quand $k \in \mathrm{X}$; on a posé $(\sigma k)(x) = k(-x)$ pour tout x, et vérifié que $\sigma\, \widehat{k} = \widehat{\sigma k}$, donc

$$\int \widehat{\sigma k}(t)\, \mathrm{e}^{ix\cdot t}\ dt = \int \widehat{k}(-t)\, \mathrm{e}^{ix\cdot t}\ dt = \int \widehat{k}(s)\, \mathrm{e}^{-ix\cdot s}\ ds = (2\pi)^d k(-x).$$

On remarque aussi que $\widehat{k}$ est dans X quand $k \in \mathrm{X}$; en effet, la définition de $k \in \mathrm{X}$ est que $(2\pi)^d k = \sigma \widehat{\widehat{k}}$; si on pose $h = \widehat{k}$, cette définition devient $(2\pi)^d k = \sigma \widehat{h} = \widehat{\sigma h}$, donc

$$h = \widehat{k} = (2\pi)^{-d}\, \widehat{\widehat{\sigma h}} = (2\pi)^{-d}\, \sigma \widehat{\widehat{h}}.$$

Pas c. Si $k \in \mathrm{X}$, on a

$$\int_{\mathbb{R}^d} |k(x)|^2\, dx = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} |\widehat{k}(t)|^2\, dt.$$

Preuve. Si une fonction g est à la fois intégrable et bornée par un nombre M, elle est de carré intégrable puisque dans ce cas

$$\int_{\mathbb{R}^d} |g(x)|^2\, dx \leq \mathrm{M} \int_{\mathbb{R}^d} |g(x)|\, dx.$$

Si $k \in \mathrm{X}$, elle est intégrable, et bornée par $\|\widehat{k}\|_1/(2\pi)^d$ d'après la formule (I). De même, $\widehat{k}$ est supposée intégrable, et elle est bornée par $\|k\|_1$. Ainsi on a $k, \widehat{k} \in \mathrm{L}_2(\mathbb{R}^d)$. Pour le reste, c'est encore le théorème de Fubini

$$\int k(x)\overline{k(x)}\, dx = \frac{1}{(2\pi)^d} \int \Bigl(\int \widehat{k}(t)\, \mathrm{e}^{it\cdot x}\ dt\Bigr) \overline{k(x)}\, dx = \frac{1}{(2\pi)^d} \int \Bigl(\int \overline{k(x)}\, \mathrm{e}^{it\cdot x}\ dx\Bigr) \widehat{k}(t)\, dt$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^d} \int \overline{\Bigl(\int k(x)\, \mathrm{e}^{-it\cdot x}\ dx\Bigr)} \widehat{k}(t)\, dt = \frac{1}{(2\pi)^d} \int \overline{\widehat{k}(t)}\, \widehat{k}(t)\, dt.$$

Pas d. L'espace X est dense dans $\mathrm{L}_2(\mathbb{R}^d)$.

Preuve. Soit f une fonction quelconque dans $\mathrm{L}_2(\mathbb{R}^d)$; on peut trouver une fonction f_1 continue à support compact telle que $\|f - f_1\|_2 < \varepsilon/2$. Maintenant f_1 est à la fois dans L_1 et dans L_2 ; si on considère l'approximation de l'unité gaussienne (g_n) définie par $g_n(x) = n^d g(nx)$, on sait que $f_1 * g_n$ converge vers f_1 dans L_2 d'après les résultats généraux sur les approximations de l'unité, et $f_1 * g_n \in \mathrm{X}$ par le pas **a**. Pour n assez grand, on aura un élément $f_2 = f_1 * g_n \in \mathrm{X}$ tel que $\|f_1 - f_2\|_2 < \varepsilon/2$, donc finalement $\|f - f_2\|_2 < \varepsilon$.

Fourier dans $\mathrm{L}_2(\mathbb{R}^d)$

Faisons un dernier petit pas pour obtenir la transformation de Fourier pour l'espace de Hilbert $\mathrm{L}_2(\mathbb{R}^d)$.

Théorème. Prolongement à L_2 de la transformation de Fourier. *La transformation de Fourier définie sur* X *se prolonge en une application linéaire continue* $\mathcal{F}$ *de* $\mathrm{L}_2(\mathbb{R}^d)$ *dans lui-même, et on a pour toute fonction* $f \in \mathrm{L}_2(\mathbb{R}^d)$

$$\int_{\mathbb{R}^d} |(\mathcal{F}f)(t)|^2 \, dt = (2\pi)^d \int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|^2 \, dx.$$

De plus, la transformation de Fourier $\mathcal{F}$ *est inversible dans* $\mathcal{L}(\mathrm{L}_2(\mathbb{R}^d))$, *et son inverse est égal à*

$$\mathcal{F}^{-1} = (2\pi)^{-d} \sigma \circ \mathcal{F} = (2\pi)^{-d} \mathcal{F} \circ \sigma.$$

Démonstration. D'après le pas **c**, l'application $f \in \mathrm{X} \to \widehat{f}$ est continue de X, muni de la norme de L_2, à valeurs dans L_2. Par prolongement des applications uniformément continues définies sur un sous-espace dense, à valeurs dans un espace complet, il existe un prolongement unique $\mathcal{F}$ de cette application en une application continue de $\mathrm{L}_2(\mathbb{R}^d)$ dans $\mathrm{L}_2(\mathbb{R}^d)$. Il est clair que ce prolongement est linéaire, puisque l'application initiale est linéaire sur l'espace vectoriel X.

De plus, si $(f_n) \subset \mathrm{X}$ converge vers f dans L_2, l'image $\mathcal{F}f$ est limite dans L_2 de la suite $(\mathcal{F}f_n)$ ce qui entraîne en utilisant le point **c** que

$$\|\mathcal{F}f\|_2^2 = \lim_n \|\mathcal{F}f_n\|_2^2 = (2\pi)^d \lim_n \|f_n\|_2^2 = (2\pi)^d \|f\|_2^2.$$

On a vu que $\sigma \widehat{f} = \widehat{\sigma f}$ pour toute $f \in \mathrm{X}$; ceci signifie que l'application continue de $\mathrm{L}_2(\mathbb{R}^d)$ dans $\mathrm{L}_2(\mathbb{R}^d)$ définie par $\sigma \circ \mathcal{F} - \mathcal{F} \circ \sigma$ est nulle sur le sous-espace dense X ; il en résulte que le prolongement $\mathcal{F}$ vérifie $\sigma \circ \mathcal{F} = \mathcal{F} \circ \sigma$. Lorsque $f \in \mathrm{X}$, la formule d'inversion montre que $(2\pi)^{-d}(\sigma \circ \mathcal{F})(\mathcal{F}f) = f$; puisque $(2\pi)^{-d}\sigma \circ \mathcal{F} \circ \mathcal{F}$ est continue sur L_2 et égale à l'identité sur le sous-espace dense X, on en déduit que

$$\mathcal{F} \circ \Big((2\pi)^{-d} \big(\sigma \circ \mathcal{F}\big) \Big) = (2\pi)^{-d} \mathcal{F} \circ \sigma \circ \mathcal{F} = (2\pi)^{-d} \big(\sigma \circ \mathcal{F}\big) \circ \mathcal{F} = \mathrm{Id},$$

ce qui montre que $(2\pi)^{-d}\sigma \circ \mathcal{F}$ est l'inverse de $\mathcal{F}$. La transformation de Fourier définit donc un isomorphisme surjectif de L_2 sur L_2. On voit que $\mathrm{U} = (2\pi)^{-d/2}\mathcal{F}$ est un opérateur unitaire sur $\mathrm{L}_2(\mathbb{R}^d)$.

Remarque. Si $f \in \mathrm{L}_1(\mathbb{R}^d) \cap \mathrm{L}_2(\mathbb{R}^d)$, le prolongement $\mathcal{F}f$ obtenu à partir de X coïncide avec $\widehat{f}$ défini par la formule intégrale : si f est dans $\mathrm{L}_1 \cap \mathrm{L}_2$, on peut considérer la suite $(f_n) = (f * g_n)$, où (g_n) est l'approximation gaussienne de l'identité. Cette suite converge en norme $\mathrm{L}_1(\mathbb{R}^d)$ vers f, donc $\widehat{f_n}$ tend uniformément vers $\widehat{f}$, et en norme $\mathrm{L}_2(\mathbb{R}^d)$ vers $\mathcal{F}f$. On en déduit que la fonction continue $\widehat{f}$ est dans la classe de $\mathcal{F}f$, c'est-à-dire que $\mathcal{F}f = \widehat{f}$, en termes moins corrects.

Une fois le résultat précédent établi, on peut remarquer que pour toute fonction $f \in \mathrm{L}_2(\mathbb{R}^d)$, la suite (f_n) définie par $f_n = \mathbf{1}_{[-n,n]^d} f$ est dans $\mathrm{L}_1(\mathbb{R}^d) \cap \mathrm{L}_2(\mathbb{R}^d)$ et tend vers f en norme L_2. D'après la continuité de $\mathcal{F}$ et son expression sur $\mathrm{L}_1(\mathbb{R}^d) \cap \mathrm{L}_2(\mathbb{R}^d)$, on voit que pour toute $f \in \mathrm{L}_2(\mathbb{R}^d)$, la transformée de Fourier $\mathcal{F}f$ est la limite en norme L_2 de la suite des fonctions

$$t \in \mathbb{R}^d \to \int_{[-n,n]^d} f(x)\,\mathrm{e}^{-ix.t}\,dx.$$

Ainsi, s'il n'est pas correct de définir brutalement la transformée de Fourier sur $\mathrm{L}_2(\mathbb{R}^d)$ par l'intégrale de Fourier, on arrive à une solution correcte très voisine.

Explicitons un peu plus le cas de la dimension 1. Puisque la suite précédente converge vers $\mathcal{F}f$ en norme L_2, il existe des sous-suites qui convergent presque partout. Si l'intégrale semi-convergente

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{e}^{-ix.t}\,dx$$

existe pour tout $t \in \mathbb{R}$, on en déduit que la fonction

$$t \in \mathbb{R} \to \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{e}^{-ix.t}\,dx$$

appartient à la classe de $\mathcal{F}f$.

Exercice. Si $f \in \mathrm{L}_1(\mathbb{R}^d)$ et $g \in \mathrm{L}_2(\mathbb{R}^d)$, montrer que la transformée de Fourier de $f * g$ est le produit des transformées de Fourier de f et de g.

Remarque. On peut voir l'inversion de Fourier d'une autre façon. Désignons par B l'application anti-linéaire de L_2 dans L_2 définie par $\mathrm{B}f = \overline{f}$ (la fonction complexe conjuguée) ; calculons $\mathrm{B}\mathcal{F}\mathrm{B}$ pour une fonction $g \in \mathrm{X}$; on aura

$$\mathcal{F}(\mathrm{B}g)(x) = \int \overline{g(x)}\,\mathrm{e}^{-it\cdot x}\,dx,$$

puis

$$((\mathrm{B}\mathcal{F}\mathrm{B})g)(x) = \overline{\int \overline{g(x)}\,\mathrm{e}^{-it\cdot x}\,dx} = \int g(x)\,\mathrm{e}^{it\cdot x}\,dx.$$

On voit donc que la formule d'inversion qui définit les éléments $f \in \mathrm{X}$ est

$$f = \frac{1}{(2\pi)^d}\,(\mathrm{B}\mathcal{F}\mathrm{B})(\mathcal{F}f).$$

On a remarqué que $\mathcal{F}$ envoie X dans X, et il est facile de voir que B envoie X dans X. Ainsi, $\mathrm{V} = (2\pi)^{-d/2}\,\mathrm{B}\mathcal{F}$ est une application antilinéaire isométrique de X dans X telle que $\mathrm{V}^2 = \mathrm{Id}$. Il est clair que cette relation se prolonge par continuité à L_2. On en déduit que

l'application $(2\pi)^{-d}\mathrm{B}\mathcal{F}\mathrm{B}$ *est l'inverse de* $\mathcal{F}$.

Exercice. On pose pour tout entier $n \geq 0$ et tout $x \in \mathbb{R}$

$$\mathrm{P}_n(x) = \mathrm{e}^{x^2/2} \, \frac{d^n}{dx^n} \, \mathrm{e}^{-x^2/2} \, .$$

Montrer que P_n est un polynôme de degré n, et que $x \to \mathrm{P}_n(x) \, \mathrm{e}^{-x^2/2}$ est un vecteur propre de la transformée de Fourier. Quelles sont les valeurs propres possibles pour $\mathcal{F}$?

Exercice. Injectivité de la transformation de Laplace. Soit f une fonction sur $\mathbb{R}$, nulle en dehors d'un intervalle de la forme $[a, +\infty[$ et telle que $x \to f(x) \, \mathrm{e}^{-s_0 x}$ soit intégrable pour un $s_0 \in \mathbb{R}$. On définit la *transformée de Laplace* de la fonction f sur l'ouvert $\mathrm{U} = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\, z > s_0\}$ du plan complexe par

$$\forall z \in \mathrm{U}, \quad (\mathcal{L}f)(z) = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-zx} \, f(x) \, dx.$$

Montrer que $\mathcal{L}f$ est holomorphe dans U. Montrer que si $\mathcal{L}f$ est nulle sur un intervalle non vide de $]s_0, +\infty[$, alors f est nulle presque partout sur $\mathbb{R}$.

Description de l'espace X

On va voir que toute fonction f telle que $f \in \mathrm{L}_1(\mathbb{R}^d)$ et $\widehat{f} \in \mathrm{L}_1(\mathbb{R}^d)$ est un élément de X. En effet, reprenons l'approximation de l'unité gaussienne (g_n). D'après les pas **a** et **b**, on a pour tout n et tout $x \in \mathbb{R}^d$

$$(g_n * f)(x) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{g}_n(t) \widehat{f}(t) \, \mathrm{e}^{ix \cdot t} \, dt.$$

On a vu que $\widehat{g}_n(t) = \widehat{g}(t/n)$, qui tend simplement vers $\widehat{g}(0) = \int g = 1$; on a la majoration $|\widehat{g}_n| \leq \|g_n\|_1 = 1$; puisqu'on a supposé que $\widehat{f} \in \mathrm{L}_1(\mathbb{R}^d)$, on peut appliquer le théorème de convergence dominée à la suite d'intégrales ci-dessus pour obtenir que

$$\forall x \in \mathbb{R}^d, \quad \lim_n \, (g_n * f)(x) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{f}(t) \, \mathrm{e}^{ix \cdot t} \, dt.$$

Par ailleurs, on sait que la suite $(g_n * f)$ tend vers f dans $\mathrm{L}_1(\mathbb{R}^d)$ d'après les résultats généraux sur l'approximation par convolution. Le rapprochement des deux résultats montre que f est presque partout égale à la limite précédente. Autrement dit, la formule

$$\forall x \in \mathbb{R}^d, \quad \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{f}(t) \, \mathrm{e}^{ix \cdot t} \, dt$$

définit un représentant continu de la fonction f. On a donc obtenu finalement le résultat qui suit.

Théorème. *Si f et $\widehat{f}$ sont dans $\mathrm{L}_1(\mathbb{R}^d)$, la fonction f "est" continue et*

$$\forall x \in \mathbb{R}^d, \quad f(x) = (2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{f}(t) \, \mathrm{e}^{ix \cdot t} \, dt.$$

Remarque. La transformation de Fourier est injective sur $\mathrm{L}_1(\mathbb{R}^d)$. En effet, si une fonction $f \in \mathrm{L}_1(\mathbb{R}^d)$ vérifie $\widehat{f} = 0$, on a bien $\widehat{f} \in \mathrm{L}_1(\mathbb{R}^d)$ et la formule d'inversion précédente s'applique, donnant $f = 0$.

Exercice traité. On va montrer que la formule d'inversion peut, sous des hypothèses un peu plus restrictives, être obtenue à partir des *séries* de Fourier, dans le cas $d = 1$.

Supposons que f soit de classe C^2 à support dans un intervalle compact $[-a, a]$. Alors f'' est intégrable, et on sait que la transformée de Fourier de f'' est bornée, puisque $f'' \in \mathrm{L}_1(\mathbb{R})$, et égale à $-t^2 \widehat{f}(t)$; on en déduit que $\widehat{f}(t) = \mathrm{O}(|t|^{-2})$ à l'infini.

Soit x un point fixé ; choisissons un entier N tel que $\mathrm{N} > \max(a, |x|)$. On va appliquer à la fonction f les résultats de convergence ponctuelle des séries de Fourier, mais en travaillant sur l'intervalle $[-\mathrm{N}\pi, \mathrm{N}\pi]$ au lieu de notre intervalle habituel $[-\pi, \pi]$. Il faut donc changer la normalisation du système de Fourier ; pour avoir une base orthonormée dans l'espace de Hilbert $\mathrm{H} = \mathrm{L}_2([-\mathrm{N}\pi, \mathrm{N}\pi], dx/(2\mathrm{N}\pi))$, il faut prendre les fonctions $h_n(t) = \mathrm{e}^{int/\mathrm{N}}$, $n \in \mathbb{Z}$. Puisque f est (largement) suffisamment régulière, on a bien au point fixé $x \in]-\mathrm{N}\pi, \mathrm{N}\pi[$ la convergence ponctuelle de la série de Fourier,

$$f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \langle f, h_n \rangle_{\mathrm{H}} \, h_n(x).$$

Comme f est à support dans $[-\mathrm{N}\pi, \mathrm{N}\pi]$, on a

$$\langle f, h_n \rangle_{\mathrm{H}} = \int_{-\mathrm{N}\pi}^{\mathrm{N}\pi} f(y) \, \mathrm{e}^{-iny/\mathrm{N}} \, \frac{dy}{2\pi\mathrm{N}} = \int_{\mathbb{R}} f(y) \, \mathrm{e}^{-iny/\mathrm{N}} \, \frac{dy}{2\pi\mathrm{N}} = \frac{1}{2\pi\mathrm{N}} \, \widehat{f}(n/\mathrm{N}).$$

Il en résulte que

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \, \mathrm{N}^{-1} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \widehat{f}(n/\mathrm{N}) \, \mathrm{e}^{ixn/\mathrm{N}}.$$

Si on pose $g(t) = f(t) \, \mathrm{e}^{ixt}$, l'expression précédente fait intervenir une sorte de somme de Riemann pour la fonction g, correspondant à une subdivision (infinie) de $\mathbb{R}$ en intervalles de longueur $1/\mathrm{N}$, avec les points de subdivision $t_n = n/\mathrm{N}$, $n \in \mathbb{Z}$. Comme on a vu que $g(t) = \mathrm{O}(|t|^{-2})$ à l'infini, il est facile d'approcher ces sommes de Riemann infinies par de vraies sommes sur un intervalle compact, et de justifier ainsi la formule

$$\lim_{\mathrm{N} \to +\infty} \mathrm{N}^{-1} \Bigl(\sum_{n \in \mathbb{Z}} g(n/\mathrm{N}) \Bigr) = \int_{\mathbb{R}} g(t) \, dt,$$

qui conduit donc à la formule d'inversion

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(t) \, \mathrm{e}^{itx} \, dt.$$

Justifions l'approximation par des sommes de Riemann usuelles, sous l'hypothèse $|g(t)| \le h(t) = t^{-2}$ sur $[1, +\infty[$. On aura si T est un entier > 1

$$\mathrm{N}^{-1} \sum_{n/\mathrm{N} > \mathrm{T}} |g(n/\mathrm{N})| \le \mathrm{N}^{-1} \sum_{n > \mathrm{TN}} h(n/\mathrm{N}) \le \int_{\mathrm{T}}^{+\infty} \frac{dt}{t^2} = \frac{1}{\mathrm{T}},$$

par la technique usuelle de comparaison série-intégrale.

Espaces de Sobolev

Travaillons dans $\mathbb{R}^2$ pour fixer les idées. Si g est une fonction de classe C^1 à support compact définie sur $\mathbb{R}^2$, on a en désignant par $\mathrm{D}_j = \frac{\partial}{\partial x_j}$ l'une des deux dérivées partielles de g

$$\int_{\mathbb{R}^2} (\mathrm{D}_j g)(x)\, dx = 0.$$

En effet, avec Fubini et $j = 1$ par exemple, on a

$$\int_{\mathbb{R}} \Bigl(\int_{\mathbb{R}} (\mathrm{D}_1 g)(x_1, x_2)\, dx_1 \Bigr)\, dx_2 = 0$$

car

$$\int_{\mathbb{R}} (\mathrm{D}_1 g)(x_1, x_2)\, dx_1 = \int_a^b (\mathrm{D}_1 g)(x_1, x_2)\, dx_1 = g(b, x_2) - g(a, x_2) = 0$$

pour tout x_2, si le support de g est contenu dans $[a, b] \times [c, d]$.

Si f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ et φ de classe C^1 à support compact, le produit $g = f\varphi$ est C^1 à support compact et sa dérivée partielle $\mathrm{D}_j g$ est $(\mathrm{D}_j f)\varphi + f(\mathrm{D}_j \varphi)$; cette dérivée a donc une intégrale nulle, c'est-à-dire que

$$\text{(D)} \qquad \int_{\mathbb{R}^2} (\mathrm{D}_j f)(x) \varphi(x)\, dx = -\int_{\mathbb{R}^2} f(x) (\mathrm{D}_j \varphi)(x)\, dx.$$

On gardera cette égalité comme définition de dérivées au sens faible (voir plus loin).

Si φ est C^1 à support compact, $g(x) = \varphi(x)\, \mathrm{e}^{-ix\cdot t}$ est encore à support compact ; en écrivant que sa dérivée partielle $\mathrm{D}_j g$ a une intégrale nulle on obtient

$$\int_{\mathbb{R}^2} (\mathrm{D}_j \varphi)(x)\, \mathrm{e}^{-ix\cdot t}\, dx = it_j \int_{\mathbb{R}^2} \varphi(x)\, \mathrm{e}^{-ix\cdot t}\, dx,$$

ce qui signifie qu'on a la relation suivante entre Fourier et dérivation,

$$\text{(FD)} \qquad \widehat{\mathrm{D}_j \varphi}(t) = it_j\, \widehat{\varphi}(t).$$

On dit que $f \in \mathrm{L}_2(\mathbb{R}^2)$ admet une $j$ième *dérivée partielle au sens faible* $g_j \in \mathrm{L}_2(\mathbb{R}^2)$ si g_j satisfait la relation (D) que satisfait la dérivée partielle quand elle existe,

$$(*) \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2), \quad \int_{\mathbb{R}^2} g_j(x) \varphi(x)\, dx = -\int_{\mathbb{R}^2} f(x) (\mathrm{D}_j \varphi)(x)\, dx.$$

Cette relation s'applique aussi à la fonction complexe conjuguée $\overline{\varphi}$, et elle se lit alors dans l'espace de Hilbert $\mathrm{L}_2(\mathbb{R}^2)$ comme

$$\langle g_j, \varphi \rangle = -\langle f, \mathrm{D}_j \varphi \rangle.$$

Comme $(2\pi)^{-d/2}\mathcal{F} = (2\pi)^{-1}\mathcal{F}$ est une isométrie de $\mathrm{L}_2(\mathbb{R}^2)$, elle préserve le produit scalaire, donc

$$\frac{1}{4\pi^2}\, \langle \widehat{g_j}, \widehat{\varphi} \rangle = -\frac{1}{4\pi^2}\, \langle \widehat{f}, \widehat{\mathrm{D}_j \varphi} \rangle.$$

Compte-tenu de la formule (FD) on aura

$$\langle \widehat{g_j}, \widehat{\varphi} \rangle = \langle it_j\, \widehat{f}, \widehat{\varphi} \rangle$$

pour toute $\varphi \in \mathcal{D}$; comme $(2\pi)^{-1}\mathcal{F}$ est une isométrie bijective et que $\mathcal{D}$ est dense dans L_2, il en résulte que $\mathcal{F}(\mathcal{D})$ est dense ; la fonction $t \to \widehat{g_j}(t) - it_j\, \widehat{f}(t)$ est orthogonale à $\mathcal{F}(\mathcal{D})$, donc elle est nulle. On voit que les dérivées faibles sont caractérisées en Fourier par la même relation que la relation (FD), mais en tant que classes de fonctions,

$$\widehat{g_j}(t) = it_j\, \widehat{f}(t)$$

pour presque tout $t \in \mathbb{R}^2$.

L'espace de Sobolev $\mathrm{H}^1(\mathbb{R}^2)$ est l'espace de toutes les fonctions $f \in \mathrm{L}_2(\mathbb{R}^2)$ qui admettent deux dérivées partielles faibles $g_1, g_2 \in \mathrm{L}_2(\mathbb{R}^2)$. D'après Parseval et ce qui précède, on a en traduisant les appartenances à L_2 de f, g_1, g_2

$$\int_{\mathbb{R}^2} |\widehat{f}(t)|^2\, dt < +\infty, \quad \int_{\mathbb{R}^2} t_1^2\, |\widehat{f}(t)|^2\, dt < +\infty, \quad \int_{\mathbb{R}^2} t_2^2\, |\widehat{f}(t)|^2\, dt < +\infty\,;$$

on voit qu'on peut condenser ces trois hypothèses en une seule,

$$\int_{\mathbb{R}^2} (1 + |t|^2)\, |\widehat{f}(t)|^2\, dt < +\infty.$$

On va montrer qu'inversement, cette propriété caractérise les fonctions $f \in \mathrm{H}^1(\mathbb{R}^2)$. Supposons en effet que

$$\int_{\mathbb{R}^2} (1 + |t|^2)\, |\widehat{f}(t)|^2\, dt < +\infty.$$

On en déduit déjà que $f \in \mathrm{L}_2(\mathbb{R}^2)$. Les deux fonctions $it_1\widehat{f}(t)$ et $it_2\widehat{f}(t)$ sont dans $\mathrm{L}_2(\mathbb{R}^2)$, ce qui entraîne qu'elles sont transformées de Fourier de deux fonctions $g_1, g_2 \in \mathrm{L}_2(\mathbb{R}^2)$. On a évidemment pour $j = 1, 2$ les équations

$$\langle \widehat{g_j}, \widehat{\varphi} \rangle = \langle it_j\, \widehat{f}, \widehat{\varphi} \rangle = -\langle \widehat{f}, \widehat{\mathrm{D}_j \varphi} \rangle$$

pour toute $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$, et on remonte à la définition des dérivées faibles, exprimée par produit scalaire

$$\langle g_j, \varphi \rangle = -\langle f, \mathrm{D}_j \varphi \rangle.$$