Prépa. Agrég écrit d'Analyse, 2003–2004, exercices 1.

1. Intégration, jusqu'à la convergence dominée

Exercices basiques

Exercice 1.1. Montrer que pour toute suite croissante de mesures positives (μ_n) sur un espace mesurable $(\Omega, \mathcal{A})$, la limite $\mathrm{A} \in \mathcal{A} \to \mu(\mathrm{A}) = \lim_n \mu_n(\mathrm{A})$ est une mesure positive sur $(\Omega, \mathcal{A})$.

Exercice 1.2. Si f est une fonction mesurable ≥ 0, montrer que $\int f\, d\mu = 0$ si et seulement si $\mu(\{f > 0\}) = 0$.

Montrer que si $\int f\, d\mu < \infty$, alors $\mu(\{f = +\infty\}) = 0$.

Exercice 1.3. Soit f une fonction mesurable sur $(\Omega, \mathcal{A})$, à valeurs dans $\mathbb{R}$ (muni bien sûr de sa tribu borélienne) ; on suppose que f est intégrable par rapport à une mesure positive μ sur (Ω, μ). Si on a $\int_{\mathrm{A}} f\, d\mu \geq 0$ pour tout $\mathrm{A} \in \mathcal{A}$, montrer que f est ≥ 0 μ-presque partout.

Exercice 1.4. Si f est intégrable sur $\mathbb{R}$, on pose

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \widehat{f}(t) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\, \mathrm{e}^{-ixt}\, dx.$$

a. Montrer que $\widehat{f}$ est bornée, continue, et tend vers 0 à l'infini.

b. Montrer que si $\int_{\mathbb{R}} |x|^k |f(x)|\, dx < +\infty$, alors $\widehat{f}$ est de classe C^k sur $\mathbb{R}$ (k est un entier ≥ 1).

c. Si μ est une mesure ≥ 0 finie sur $\mathbb{R}$, on pose

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \widehat{\mu}(t) = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-ixt}\, d\mu(x).$$

Généraliser les résultats de continuité et dérivabilité.

Exercice 1.5. Si μ est une probabilité sur $\mathbb{R}$, symétrique (c'est-à-dire que la mesure de tout borélien A est égale à la mesure de son symétrique, image par $x \to -x$), vérifier que $\widehat{\mu}(t) = \int \cos(xt)\, d\mu(x)$.

Si pour une probabilité symétrique μ on a $1 - \widehat{\mu}(t) = \mathrm{O}(t^2)$ quand $t \to 0$, en déduire que $\int x^2\, d\mu(x) < +\infty$.

Si μ est une probabilité sur $\mathbb{R}$ telle que sa transformée de Fourier $\widehat{\mu}$ soit deux fois dérivable à l'origine, alors $\int x^2\, d\mu(x) < +\infty$. Réciproque ?

Exercice 1.6.

Si $\int |g_k|\, d\mu \leq 2^{-k}$ pour tout entier $k \geq 0$, montrer que la suite $(g_k(\omega))$ tend vers 0 pour μ-presque tout $\omega \in \Omega$.

Si $(f_n) \subset \mathrm{L}_p(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ tend vers f en norme L_p, trouver une sous-suite (f_{n_j}) qui tend vers f μ-presque partout.

Exercice 1.7. Si f est une fonction Lebesgue-intégrable sur $\mathbb{R}$, montrer que la fonction g définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-|x-t|}\, f(t)\, dt$$

est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

Prépa. Agrég écrit d'Analyse, 2003–2004, exercices 2.

1. Intégration, jusqu'à la convergence dominée

Exercices additionnels

Exercice 1.a.1. Montrer que

$$\int_{-2}^{2} \Bigl(1 - \frac{x^2}{4}\Bigr)^n \, dx$$

tend vers 0 quand $n \to +\infty$. Montrer que pour tout ε tel que $0 < \varepsilon \le 2$ on a

$$\lim_n \sqrt{n} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \Bigl(1 - \frac{x^2}{4}\Bigr)^n \, dx = 2\sqrt{\pi}.$$

Exercice 1.a.2. On suppose que μ est une mesure ≥ 0 sur $(\mathrm{X}, \mathcal{A})$ et f une fonction $\mathcal{A}$-mesurable ≥ 0 ; montrer que la formule

$$\forall \mathrm{A} \in \mathcal{A}, \quad \nu(\mathrm{A}) = \int_{\mathrm{A}} f \, d\mu = \int \mathbf{1}_{\mathrm{A}} f \, d\mu$$

définit une mesure positive ν sur $(\mathrm{X}, \mathcal{A})$.

2. Tribus, Fubini

Exercices basiques

Exercice 2.1. Montrer que tout ouvert de $\mathbb{R}$ est réunion (finie ou) dénombrable d'intervalles ouverts.

Exercice 2.2. Si (f_n) est une suite de fonctions réelles mesurables définies sur $(\Omega, \mathcal{A})$, montrer que l'ensemble A des points $\omega \in \Omega$ où la limite $\lim_n f_n(\omega)$ existe est un ensemble de la tribu $\mathcal{A}$.

Exercice 2.3. Mesurabilité et topologie. Montrer qu'une fonction à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ est mesurable si et seulement si elle est limite d'une suite de fonctions étagées.

Montrer que toute limite simple d'une suite (f_n) de fonctions mesurables de $(\Omega, \mathcal{A})$ dans $(\mathrm{X}, \mathcal{B})$ (X métrique, $\mathcal{B}$ sa tribu borélienne) est mesurable.

Montrer que toute application continue de $\mathbb{R}^m$ dans $\mathbb{R}^n$ est borélienne, c'est-à-dire mesurable pour les tribus boréliennes.

Si f_1, f_2 sont deux applications mesurables de $(\Omega, \mathcal{A})$ dans $(\mathbb{R}^{d_j}, \mathcal{B}_j)$, $j = 1, 2$ (tribus boréliennes) alors l'application $\omega \to (f_1(\omega), f_2(\omega))$ est mesurable de $(\Omega, \mathcal{A})$ dans l'espace produit $\mathbb{R}^{d_1} \times \mathbb{R}^{d_2}$.

Exercice 2.4.

a. On désigne par λ la mesure de Lebesgue sur $[0, 1]$. Montrer que pour tout borélien B de $[0, 1]$ et tout $\varepsilon > 0$ il existe un fermé $\mathrm{F} \subset \mathrm{B}$ tel que $\lambda(\mathrm{B} \setminus \mathrm{F}) < \varepsilon$.

b. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une fonction φ continue sur $[0, 1]$ telle que $\int_0^1 |\varphi(x) - \mathbf{1}_{\mathrm{B}}(x)| \, dx < \varepsilon$.

c. Montrer que $\mathrm{C}([0, 1])$ est dense dans $\mathrm{L}_1([0, 1])$.

d. Les résultats obtenus dépendent-ils beaucoup du fait que la mesure soit la mesure de Lebesgue ?

Exercice 2.5. Soit (K, d) un compact métrique muni de sa tribu borélienne $\mathcal{B}$ et soit μ une mesure finie sur $(\mathrm{K}, \mathcal{B})$; montrer que la famille des $\mathrm{A} \in \mathcal{B}$ telles que $\mathbf{1}_{\mathrm{A}}$ soit limite dans $\mathrm{L}_1(\mathrm{K}, \mu)$ d'une suite (φ_n) de fonctions réelles continues sur K telles que $0 \le \varphi_n \le 1$ est une tribu de parties de K qui contient les ouverts de K.

Montrer que (l'image de) $\mathrm{C}(\mathrm{K})$ est dense dans $\mathrm{L}_1(\mathrm{K}, \mathcal{B}, \mu)$.

Exercice 2.6. Soient $(\Omega_1, \mathcal{A}_1)$ et $(\Omega_2, \mathcal{A}_2)$ deux espaces mesurables ; montrer que pour tout ensemble $\mathrm{A} \in \mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$ et pour tout $x \in \Omega_1$, les sections

$$\mathrm{A}_x = \{y \in \Omega_2 : (x, y) \in \mathrm{A}\}$$

sont des ensembles de $\mathcal{A}_2$.

Exercice 2.7. Si f est mesurable ≥ 0 montrer que

$$\int f\, d\mu = \int_0^{+\infty} \mu(\{f > t\}\, dt.$$

Exercice 2.8. Si f et g sont intégrables sur $\mathbb{R}$ posons

$$\mathrm{F}(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt, \quad \mathrm{G}(x) = \int_{-\infty}^{x} g(t)\, dt.$$

Montrer que pour tous $a < b$ réels on a

$$\int_a^b \mathrm{F}(t) g(t)\, dt = \big[\mathrm{FG}\big]_a^b - \int_a^b f(t)\mathrm{G}(t)\, dt.$$

Exercices additionnels

Exercice 2.a.1. Montrer que tout ouvert de $\mathbb{R}$ est réunion (finie ou) dénombrable d'intervalles ouverts *deux à deux disjoints*.

Exercice 2.a.2. Soit $g : \Omega \to \mathbb{R}$ une application quelconque, $\mathcal{A} = g^{-1}(\mathcal{B}_{\mathbb{R}})$ (qu'on appelle en probabilité la tribu engendrée par la v.a. g) ; montrer que f est mesurable de $(\Omega, \mathcal{A})$ dans $\mathbb{R}$ si et seulement si $f = \varphi(g)$, avec φ borélienne de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Exercice 2.a.3. Théorème d'Egorov.

On suppose que μ est une mesure ≥ 0 finie sur $(\Omega, \mathcal{A})$.

a. Si la suite (f_n) de fonctions $\mathcal{A}$-mesurables tend simplement vers 0 sur Ω, trouver pour tout $k \ge 0$ un entier n_k tel que

$$\mu\{|f_{n_k}| > 2^{-k}\} \le 2^{-k}.$$

b. Montrer que pour tout entier k_0, la sous-suite $(f_{n_j})_j$ trouvée en a tend uniformément vers 0 sur l'ensemble

$$\mathrm{A}(k_0) = \bigcap_{k \ge k_0} \{|f_{n_k}| \le 2^{-k}\}$$

et que cet ensemble $\mathrm{A}(k_0)$ a une mesure qui tend vers $\mu(\Omega)$ lorsque $k_0 \to +\infty$.

c. Théorème de Lusin. Montrer que pour toute fonction f borélienne sur $[0, 1]$, il existe pour tout $\varepsilon > 0$ un compact $\mathrm{K}_\varepsilon \subset [0, 1]$ tel que $\lambda([0, 1] \backslash \mathrm{K}_\varepsilon) < \varepsilon$ et que la restriction de f à K_ε soit continue.

Prépa. Agrég écrit d'Analyse, 2003–2004, exercices 3.

1. Intégration, jusqu'à la convergence dominée

Exercices additionnels

Exercice 1.a.3. On suppose que μ est une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{A})$, et on suppose que pour tout $\mathrm{A} \in \mathcal{A}$ tel que $\mu(\mathrm{A}) > 0$, il existe $\mathrm{B} \in \mathcal{A}$, $\mathrm{B} \subset \mathrm{A}$ et $0 < \mu(\mathrm{B}) < \mu(\mathrm{A})$. Montrer que pour tout $c \in [0, 1]$, il existe un ensemble $\mathrm{A}_c \in \mathcal{A}$ tel que $\mu(\mathrm{A}_c) = c$.

2. Tribus, Fubini

Exercices additionnels

Exercice 2.a.4. Tribus et algèbres de fonctions.

Soit $\mathbf{A}$ une algèbre de fonctions réelles bornées sur un ensemble X, contenant les fonctions constantes et stable par convergence monotone bornée des suites, c'est-à-dire que si une suite $(f_n) \subset \mathbf{A}$ tend en croissant vers f, et si $|f_n| \le 1$ pour tout n, alors $f \in \mathbf{A}$; montrer que $\mathbf{A}$ est exactement l'algèbre $\mathcal{L}_\infty(\mathrm{X}, \mathcal{A})$ pour une tribu $\mathcal{A}$ convenable de parties de X.

Indications : $\mathcal{A}$ est évidente à deviner ; utiliser le théorème de Weierstrass pour montrer que $|f| \in \mathbf{A}$ lorsque $f \in \mathbf{A}$. En déduire que $\sup(f, g) \in \mathbf{A}$ lorsque $f, g \in \mathbf{A}$. Utiliser la suite $f_n = \inf(\sup(f, 0), 1)^n$ pour trouver que $\mathbf{1}_{\{f \ge 1\}} \in \mathbf{A}$.

Exercice 2.a.5. Soit E un espace de Banach séparable, muni de sa tribu borélienne $\mathcal{B}$, et soit $(\Omega, \mathcal{A})$ un espace mesurable ; montrer qu'une application f de Ω dans E est mesurable si et seulement si f est limite simple d'une suite (φ_n) de fonctions étagées de $(\Omega, \mathcal{A})$ dans E, telle que $\|\varphi_n(\omega)\| \le \|f(\omega)\|$ pour tout n (indication : soit (x_k) une suite dense dans E, telle que $x_0 = 0$; définir $k_n(\omega)$ comme le premier indice $k \le n$ tel que $\|x_k\| \le \|f(\omega)\|$ et $\|x_k - f(\omega)\| \le 2^{-n}$, et $k_n(\omega) = 0$ s'il n'existe pas de tel entier k ; poser $\varphi_n(\omega) = x_{k_n(\omega)}$).

Exercice 2.a.6. Soient g et h deux fonctions continues strictement croissantes et inverses l'une de l'autre, telles que $g(0) = h(0) = 0$; montrer que

$$\int_0^x g(s)\, ds = \int_0^{g(x)} h(t)\, dt = xg(x).$$

3. Convolution, inégalités

Exercice 3.1. Soient $f, g \in \mathrm{L}_1(\mathbb{R}^d)$; calculer la transformée de Fourier de $f * g$.

Exercice 3.2. On suppose $0 < r < p < +\infty$. Montrer que

$$\Bigl(\int_\mathrm{X} \Bigl(\int_\mathrm{Y} |f(x,y)|^r \, d\nu(y)\Bigr)^{p/r} d\mu(x)\Bigr)^{1/p} \le \Bigl(\int_\mathrm{Y} \Bigl(\int_\mathrm{X} |f(x,y)|^p \, d\mu(x)\Bigr)^{r/p} d\nu(y)\Bigr)^{1/r}.$$

Exercice 3.3.

a. On suppose que $\alpha, \beta, \gamma > 0$ vérifient $\alpha + \beta + \gamma = 1$. Montrer que pour toutes fonctions positives intégrables u, v, w sur un espace mesuré $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ on a

$$\int u^\alpha v^\beta w^\gamma \, d\mu \le \Bigl(\int u \, d\mu \Bigr)^\alpha \Bigl(\int v \, d\mu \Bigr)^\beta \Bigl(\int w \, d\mu \Bigr)^\gamma .$$

b. On suppose que $\alpha, \beta, \gamma > 0$ vérifient $\alpha + \beta + \gamma = 2$. Montrer que pour toutes fonctions positives intégrables $\mathrm{U}, \mathrm{V}, \mathrm{W}$ sur $\mathbb{R}^d$ on a

$$\int \mathrm{U}(x-y)^\alpha \mathrm{V}(y)^\beta \mathrm{W}(x)^\gamma \, dx \, dy \le \Bigl(\int \mathrm{U}(x) \, dx \Bigr)^\alpha \Bigl(\int \mathrm{V}(x) \, dx \Bigr)^\beta \Bigl(\int \mathrm{W}(x) \, dx \Bigr)^\gamma .$$

En déduire que si $p, q, r \ge 1$ et $1/p + 1/q = 1 + 1/r$, on a $\mathrm{L}_p * \mathrm{L}_q \subset \mathrm{L}_r$, et plus précisément $\|f * g\|_r \le \|f\|_p \, \|g\|_q$ (*inégalité de convolution de Young*).

Indication pour un cas particulier, $\alpha = \beta = \gamma = 2/3$. On écrit le produit

$$\mathrm{U}(x-y)^{2/3} \mathrm{V}(y)^{2/3} \mathrm{W}(x)^{2/3}$$

comme produit des trois termes $(\mathrm{U}(x-y)\mathrm{V}(y))^{1/3}$, $(\mathrm{V}(y)\mathrm{W}(x))^{1/3}$ et $(\mathrm{U}(x-y)\mathrm{W}(x))^{1/3}$. On pose ensuite $u(x,y) = \mathrm{V}(y)\mathrm{W}(x)$, $v(x,y) = \mathrm{U}(x-y)\mathrm{W}(x)$ et pour finir $w(x,y) = \mathrm{U}(x-y)\mathrm{V}(y)$; on applique l'inégalité de Hölder pour trois fonctions à u, v, w avec les exposants $1/3, 1/3, 1/3$ de somme 1, sur l'espace mesuré $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ muni de la mesure produit $dx \, dy$.

Exercice 3.4. Soit A un borélien de mesure > 0 dans $\mathbb{R}^d$; montrer que l'ensemble $\mathrm{A} - \mathrm{A} = \{a - b : a, b \in \mathrm{A}\}$ est un voisinage de 0 dans $\mathbb{R}^d$.

4. Fourier

Exercice 4.1. Utiliser la théorie des séries de Fourier pour retrouver, d'une façon ou d'une autre, la relation plus que classique

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

On pourra en particulier utiliser Parseval, qui donne pour toute fonction $f \in \mathrm{L}_2(0, 2\pi)$ l'égalité

$$\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 \, \frac{dt}{2\pi} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)|^2.$$

Exercice 4.2. Soit f une fonction continue 2π-périodique ; on suppose que

$$\text{(S)} \qquad \sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)| < +\infty$$

où $c_n(f) = \int_0^{2\pi} f(t)\,\mathrm{e}^{-int}\, dt/(2\pi)$, pour tout $n \in \mathbb{Z}$. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a

$$f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)\ \mathrm{e}^{inx}.$$

Adapter l'exercice dans le cas où on a encore (S), mais où on suppose seulement au départ que : 1. $f \in \mathrm{L}_2(0, 2\pi)$; 2. $f \in \mathrm{L}_1(0, 2\pi)$.

Exercice 4.3. Formule de Poisson.

a. Soient F une fonction continue sur $\mathbb{R}$, telle que $|\mathrm{F}(x)| \le \mathrm{C}\,(1 + |x|)^{-a}$ pour un $a > 1$ et tout $x \in \mathbb{R}$, et $\widehat{\mathrm{F}}$ sa transformée de Fourier, définie par

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \widehat{\mathrm{F}}(t) = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{F}(x)\,\mathrm{e}^{-ixt}\, dx.$$

Montrer que la fonction $f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \mathrm{F}(x + 2\pi n)$ est définie, continue et 2π-périodique. Trouver une relation entre les valeurs $\widehat{\mathrm{F}}(n)$, $n \in \mathbb{Z}$ et les coefficients de Fourier de f.

b. On suppose de plus que $\sum |\widehat{\mathrm{F}}(n)| < +\infty$. Démontrer la *formule de Poisson*,

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \mathrm{F}(2\pi n) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{\mathrm{F}}(n).$$

Appliquer avec $\mathrm{F}(x) = \mathrm{e}^{-a|x|}$, $a > 0$.

Exercice 4.4. Si deux fonctions $f, g \in \mathrm{L}_1(0, 2\pi)$ vérifient $c_n(f) = c_n(g)$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$, montrer que $f = g$.

Exercice 4.5. Si deux fonctions 2π-périodiques f et g, intégrables sur $(0, 2\pi)$, sont égales dans un intervalle non vide $]s-\varepsilon, s+\varepsilon[$, montrer que

$$\lim_n \big(\mathrm{S}_n(f;s) - \mathrm{S}_n(g;s)\big) = 0$$

(principe de localisation), où on a posé pour tout entier $n \ge 0$

$$\mathrm{S}_n(f;x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k(f)\ \mathrm{e}^{ikx}\,.$$

Exercice 4.6. Si K est un compact de $\mathrm{L}_1(0, 2\pi)$, montrer que le lemme de Riemann-Lebesgue est vrai uniformément sur K : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n_0 > 0$ tel que pour toute fonction $f \in \mathrm{K}$, on ait

$$\Big|\int_0^{2\pi} f(x)\,\mathrm{e}^{-ixt}\ dx\Big| < \varepsilon$$

pour tout réel t tel que $|t| \ge n_0$.

Soit f une fonction 2π-périodique sur $\mathbb{R}$ et appartenant à $\mathrm{L}ip_\alpha$, $0 < \alpha \le 1$, c'est-à-dire qu'il existe M tel que $|f(x) - f(y)| \le \mathrm{M}\,|x-y|^\alpha$ pour tous x, y ; montrer que les fonctions $(g_x)_{x \in [0,2\pi]}$ définies par

$$g_x(t) = \frac{f(x-t) - f(x)}{t}$$

forment un compact de $\mathrm{L}_1(0, 2\pi)$. En déduire que pour toute fonction f de $\mathrm{L}ip_\alpha$, la série de Fourier de f converge uniformément vers f.

Exercice 4.7. On considère une fonction $g \in \mathrm{L}_1(0, 2\pi)$, et l'opérateur linéaire borné T_g de $\mathrm{L}_1(0, 2\pi)$ dans lui-même donné par

$$\forall f \in \mathrm{L}_1(0, 2\pi), \quad \mathrm{T}_g(f) = f * g.$$

Montrer que $\|\mathrm{T}_g\|_{\mathcal{L}(\mathrm{L}_1)} = \|g\|_1$. Montrer la même égalité pour l'opérateur T_g, agissant cette fois de $\mathrm{C}_{\mathrm{per}}([0, 2\pi])$ dans lui-même.

Déduire du théorème de Banach-Steinhaus qu'il existe des fonctions continues et 2π-périodiques dont la série de Fourier ne converge pas uniformément, et des fonctions de $\mathrm{L}_1(0, 2\pi)$ dont la série de Fourier ne converge pas en norme L_1.

Prépa. Agrég écrit d'Analyse, 2003–2004, exercices 5.

Méthodes hilbertiennes

Exercice H.1. Déterminants de Gram. Soient $(x_1, \dots, x_{n+1})$ des vecteurs d'un espace de Hilbert, tels que $\mathrm{F} = \mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_n)$ soit de dimension n ; montrer que la distance de x_{n+1} au sous-espace F est donnée par la formule

$$\mathrm{dist}^2(x_{n+1}, \mathrm{F}) = \frac{\det\bigl(\langle x_i, x_j\rangle\bigr)_{i,j=1,\dots,n+1}}{\det\bigl(\langle x_i, x_j\rangle\bigr)_{i,j=1,\dots,n}}\,.$$

Exercice H.2. On suppose que μ est une mesure sur $(\Omega, \mathcal{A})$, et que $\mathrm{L}_p(\Omega, \mu) \subset \mathrm{L}_q(\Omega, \mu)$. Montrer qu'il existe une constante C telle que

$$\forall f \in \mathrm{L}_p(\Omega, \mu), \quad \|f\|_q \le \mathrm{C}\, \|f\|_p.$$

On suppose maintenant que

$$(*) \qquad \inf\{\mu(\mathrm{A}) : \mu(\mathrm{A}) > 0\} = 0 \quad \text{et} \quad \sup\{\mu(\mathrm{A}) : \mu(\mathrm{A}) < +\infty\} = +\infty\,;$$

montrer qu'aucune inclusion $\mathrm{L}_p \subset \mathrm{L}_q$ n'est possible si $p \neq q$.

Exercice H.3. On suppose que μ est une mesure qui satisfait $(*)$. On désigne par X l'espace vectoriel $\mathrm{L}_2(\Omega, \mu) \cap \mathrm{L}_4(\Omega, \mu)$.

a. Montrer que X est complet pour la norme définie par

$$\forall f \in \mathrm{X}, \quad \|f\|_{\mathrm{X}} = \|f\|_2 + \|f\|_4.$$

b. Montrer que toute fonction $g \in \mathrm{L}_2 + \mathrm{L}_{4/3}$, c'est-à-dire de la forme $g = g_0 + g_1$ avec $g_0 \in \mathrm{L}_2(\Omega, \mu)$ et $g_1 \in \mathrm{L}_{4/3}(\Omega, \mu)$, définit une forme linéaire ξ continue sur X par la formule

$$\forall f \in \mathrm{X}, \quad \xi(f) = \int_\Omega f g \, d\mu.$$

c. On suppose que ℓ est une forme linéaire continue sur X (muni de la norme précédente) et on définit une fonction réelle φ sur X en posant

$$\forall f \in \mathrm{X}, \quad \varphi(f) = \int_\Omega (f^2 + f^4)\, d\mu - \ell(f)\,;$$

montrer que

$$m = \inf\{\varphi(f) : f \in \mathrm{X}\} > -\infty.$$

Vérifier que pour toutes $f, h \in \mathrm{X}$

$$\frac{1}{2}\bigl(\varphi(f+h) + \varphi(f-h)\bigr) - \varphi(f) \ge \int_\Omega (h^2 + h^4)\, d\mu.$$

En déduire que le diamètre du fermé $\mathrm{F}_\varepsilon = \{\varphi \le m + \varepsilon\} \subset \mathrm{X}$ tend vers 0 avec $\varepsilon > 0$, puis que φ atteint son minimum m en un point unique $f_0 \in \mathrm{X}$.

Montrer que la forme linéaire ℓ provient de la fonction $g = 2f_0 + 4f_0^3 \in \mathrm{L}_2 + \mathrm{L}_{4/3}$.

d. Pour $2 < p < 4$, montrer que X s'injecte continûment dans $\mathrm{L}_p(\Omega, \mu)$, avec image dense. En déduire que les formes linéaires sur $\mathrm{L}_p(\Omega, \mu)$ proviennent des fonctions de $\mathrm{L}_q(\Omega, \mu)$, $1/q + 1/p = 1$.

Exercice H.4. Le système de Haar.

On définit une fonction h sur $\mathbb{R}$ par la formule $h = \mathbf{1}_{(0,1/2)} - \mathbf{1}_{(1/2,1)}$.

a. On définit ensuite des fonctions sur $[0,1]$ en posant $h_{0,0}(t) = h(t)$ pour $t \in [0,1]$, puis pour tout $k \geq 0$ et tout $j = 0, \ldots, 2^k - 1$

$$\forall t \in [0,1], \quad h_{k,j}(t) = 2^{k/2}\, h(2^k t - j).$$

Montrer que le système formé de la fonction constante $\mathbf{1}$ et des fonctions $(h_{k,j})$, $k \geq 0$ et $j = 0, \ldots, 2^k - 1$, constitue une base hilbertienne de $\mathrm{L}_2(0,1)$.

b. On considère maintenant pour tous $k, j \in \mathbb{Z}$

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad h_{k,j}(t) = 2^{k/2}\, h(2^k t - j).$$

Montrer que le système formé des fonctions $(h_{k,j})$, $k, j \in \mathbb{Z}$, constitue une base hilbertienne de $\mathrm{L}_2(\mathbb{R})$.

Exercice H.5. Suite de l'exercice **H.1**.

On admettra la formule suivante sur les *déterminants de Cauchy* : si $(a_i)_{1 \leq i \leq n}$ et $(b_j)_{1 \leq j \leq n}$ sont deux familles de réels positifs, la matrice carrée $\mathrm{M} = (m_{i,j})$ telle que $m_{i,j} = (a_i + b_j)^{-1}$ admet pour déterminant

$$\det \mathrm{M} = \frac{\prod_{i_1 < i_2} (a_{i_1} - a_{i_2}) \prod_{j_1 < j_2} (b_{j_1} - b_{j_2})}{\prod_{i,j} (a_i + b_j)}.$$

a. On considère dans $\mathrm{H} = \mathrm{L}_2([0,1])$ une famille de fonctions puissances $x_i : t \to t^{k_i}$, $1 \leq k_1 < k_2 < \ldots < k_n$; donner une formule pour la distance de la fonction $\mathbf{1}$ à l'espace $\mathrm{F} = \mathrm{Vect}(x_1, \ldots, x_n)$.

b. Montrer que la suite des fonctions puissances $(t^{k_i})_{i \geq 1}$ est dense dans H si

$$\sum_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{k_i} = +\infty$$

(on commencera par montrer que $\mathbf{1}$ est dans l'adhérence de $\mathrm{Vect}\big((t^{k_i})_{i \geq 1}\big)$, sous la condition précédente ; ensuite, on invoquera Weierstrass).

c. Montrer que la suite formée de $\mathbf{1}$ et des fonctions puissances $(t^{k_i})_{i \geq 1}$ est dense dans $\mathrm{C}([0,1])$ si

$$\sum_{i=1}^{+\infty} \frac{1}{k_i} = +\infty$$

(théorèmes de Müntz et Szász, 1914–1916).

Prépa. Agrég écrit d'Analyse, 2003–2004, exercices 6.

4. Fourier (suite)

Exercice 4.8. On donne un paramètre réel ou complexe $a \notin 2\pi\mathbb{Z}$, et on définit une fonction 2π-périodique f sur $\mathbb{R}$ en posant

$$\forall x \in [-\pi, \pi[, \quad f(x) = \mathrm{e}^{iax}\,.$$

Expliciter le résultat obtenu en appliquant le théorème de convergence de Dirichlet à la fonction f au point π.

Exercice 4.9. Si $f \in \mathrm{L}_1(\mathbb{R}^d)$ et $g \in \mathrm{L}_2(\mathbb{R}^d)$, montrer que la transformée de Fourier de $f * g$ est le produit des transformées de Fourier de f et de g.

Exercice 4.10. On suppose que f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et que f, f', f'' sont intégrables. Montrer que $\widehat{f}(t)$ est $\mathrm{O}(|t|^{-2})$ lorsque $|t| \to +\infty$.

Exercice 4.11. Pour tout entier $n \ge 1$ on considère la fonction g_n définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g_n(x) = \mathbf{1}_{\{n^{-1}<|x|<n\}}\,\frac{1}{\pi x}\cdot$$

On rappelle que l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx$$

est convergente et vaut $\pi/2$.

Montrer que les transformées de Fourier $\widehat{g}_n$ sont uniformément bornées sur $\mathbb{R}$ et convergent presque partout vers une limite qu'on explicitera. Montrer que pour toute fonction $f \in \mathrm{L}_2(\mathbb{R})$, la suite $f * g_n$ converge dans $\mathrm{L}_2(\mathbb{R})$ vers une limite qu'on notera $\mathrm{H}(f)$. Déterminer la transformée de Fourier de la fonction $\mathrm{H}(f)$. Comparer les normes de f et $\mathrm{H}(f)$ dans $\mathrm{L}_2(\mathbb{R})$.

Exercice 4.12. Supposons que f soit de classe C^2, à support dans un intervalle compact $[-a, a]$. Montrer qu'il existe une constante C telle que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad |\widehat{f}(t)| \le \mathrm{C}\,(1+t^2)^{-1}.$$

Soient $x \in \mathbb{R}$ un point fixé et N un entier tel que $\mathrm{N}\pi > \max(a, |x|)$; montrer que

$$f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \Bigl(\int_{-\mathrm{N}\pi}^{\mathrm{N}\pi} f(y)\,\mathrm{e}^{-iny/\mathrm{N}}\,\frac{dy}{2\pi\mathrm{N}}\Bigr)\,\mathrm{e}^{inx/\mathrm{N}} = \frac{1}{2\pi}\Bigl(\frac{1}{\mathrm{N}}\sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(n/\mathrm{N})\,\mathrm{e}^{inx/\mathrm{N}}\Bigr)$$

(appliquer à la fonction 2π-périodique g, définie par $g(u) = f(\mathrm{N}u)$ pour $u \in [-\pi, \pi]$, les résultats de convergence ponctuelle des séries de Fourier). En déduire que la formule d'inversion de Fourier permet d'exprimer f à partir de $\widehat{f}$ (on fera tendre N vers l'infini).

Exercice 4.13. On pose pour tout entier $n \ge 0$ et tout $x \in \mathbb{R}$

$$\mathrm{P}_n(x) = \mathrm{e}^{x^2/2}\,\frac{d^n}{dx^n}\,\mathrm{e}^{-x^2/2}\,.$$

Montrer que P_n est un polynôme de degré n, et que $x \to \mathrm{P}_n(x)\,\mathrm{e}^{-x^2/2}$ est un vecteur propre de la transformée de Fourier. Quelles sont les valeurs propres possibles pour la transformée de Fourier $\mathcal{F}$?