4. Fourier

Contenu du chapitre

4.1. Séries de Fourier

Dans cette section on s'intéresse à la représentation de phénomènes 2π-périodiques au moyen de séries de Fourier. Suivant le cas, on considérera une fonction $\mathrm{F}(z)$ définie sur le cercle unité du plan complexe, ou bien une fonction 2π-périodique $f(\theta)$ sur $\mathbb{R}$, ou encore une fonction f définie sur une période $[a, a+2\pi[$ qu'on prolonge ensuite à $\mathbb{R}$ par périodicité ; le passage d'un point de vue à l'autre se fait en posant $z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ et $f(\theta) = \mathrm{F}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})$. On va travailler avec des séries de Fourier complexes sur un intervalle de longueur 2π, en général $[0, 2\pi]$ ou $[-\pi, \pi]$, muni de la mesure normalisée $dx/(2\pi)$.

Pour chaque entier relatif $n \in \mathbb{Z}$ on note e_n la fonction 2π-périodique définie sur $\mathbb{R}$ par $e_n(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}nt}$; un *polynôme trigonométrique* est une combinaison linéaire $\sum c_n e_n$. On a vu qu'il existe une approximation de l'unité (pour la convolution périodique) formée de polynômes trigonométriques. Pour toute fonction $f \in \mathrm{L}_1$, on pose

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad c_n(f) = \int_0^{2\pi} f(x)\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}nx}\, \frac{dx}{2\pi}.$$

Il est clair que $|c_n(f)| \le \|f\|_1$ pour tout n. On a vu que la convolution (périodique) d'une fonction L_1 avec un polynôme trigonométrique donne un polynôme trigonométrique : on a en effet

$$(f * e_n)(x) = \int_0^{2\pi} f(t)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}n(x-t)}\, \frac{dt}{2\pi} = c_n(f)\, e_n(x)$$

pour tout $n \in \mathbb{Z}$, c'est-à-dire $f * e_n = c_n(f)\, e_n$; ceci entraîne que pour tout polynôme trigonométrique $\mathrm{K} = \sum_{k=\mathrm{M}}^{\mathrm{N}} a_k e_k$ (avec $\mathrm{M} \le \mathrm{N}$ et $\mathrm{M}, \mathrm{N} \in \mathbb{Z}$), on a

$$\mathrm{K} * f = \sum_{k=\mathrm{M}}^{\mathrm{N}} a_k c_k(f) e_k.$$

Dans le cas de fonctions de $\mathrm{L}_2(0,2\pi)$, on dispose du produit scalaire

$$\langle f, g\rangle = \int_0^{2\pi} f(t)\overline{g(t)}\,\frac{dt}{2\pi},$$

et les coefficients de Fourier peuvent alors s'exprimer comme des produits scalaires,

$$c_n(f) = \langle f, e_n\rangle\,;$$

on voit immédiatement que les fonctions $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ forment un système orthonormé : les fonctions e_n, $n \in \mathbb{Z}$, sont deux à deux orthogonales et de norme 1.

Quand on travaille avec des fonctions réelles, on préfère parfois écrire le développement en utilisant les fonctions réelles $t \to \cos(nt)$, pour $n = 0, 1, \ldots$ et $t \to \sin(nt)$, pour $n = 1, 2, \ldots$ (pour $n = 0$, le cosinus donne la fonction constante 1). On définit classiquement les coefficients de Fourier réels de la façon suivante :

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos(nt)\,dt\,; \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\sin(nt)\,dt,$$

où les (a_n) sont définis pour $n \ge 0$ et les (b_n) pour $n \ge 1$; ces coefficients sont réels quand la fonction f est réelle, mais on peut aussi les utiliser pour une fonction complexe, et bien sûr a_n et b_n redeviennent alors complexes. La série de Fourier de f prend la forme

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} \bigl(a_k\cos(kx) + b_k\sin(kx)\bigr).$$

La bizarrerie du traitement de $a_0 = 2\,c_0(f)$ vient du fait que la fonction constante 1 n'a pas la même norme dans L_2 que les fonctions $t \to \cos(nt)$ pour $n \ge 1$. On note que pour $n > 0$,

$$a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos(nx - nt)\,dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\bigl(\mathrm{e}^{\mathrm{i}(nx-nt)} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(nx-nt)}\bigr)\,dt = c_n(f)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx} + c_{-n}(f)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nx}.$$

Classiquement, on désigne par $\mathrm{S}_n f$ la n-ième somme de Fourier d'une fonction f, égale à

$$(\mathrm{S}_n f)(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k(f)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \bigl(a_k\cos(kx) + b_k\sin(kx)\bigr).$$

Le problème général est de voir dans quelle mesure ces sommes partielles approchent la fonction f donnée.

Une fonction périodique f est représentée par une série de cosinus si et seulement si elle est paire, $f(x) = f(-x)$ pour tout x. L'unité approchée $\mathrm{R}_n(t) = r_n(1+\cos(t))^n$ (que nous appelons “de Rudin”) étant formée de fonctions paires (des polynômes en cosinus), on voit facilement que si f est paire (réelle ou complexe), les $\mathrm{R}_n * f$ sont des polynômes de cosinus (à coefficients réels quand f est réelle).

Les propriétés des approximations de l'unité donnent le résultat qui suit.

Proposition. *Les polynômes trigonométriques sont denses dans* $\mathrm{C}(\mathbb{T})$ *(fonctions continues 2π-périodiques) ; pour tout p tel que $1 \le p < +\infty$, les polynômes trigonométriques sont denses dans* $\mathrm{L}_p(0,2\pi)$.

4.1.a. *Le lemme de Riemann-Lebesgue*

Proposition 4.1.1. *Pour toute fonction $f \in \mathrm{L}_1(\mathbb{R})$ la transformée de Fourier $\widehat{f}$, définie par*

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \widehat{f}(t) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}xt}\, dx$$

tend vers 0 *quand* $|t|$ *tend vers l'infini. On a aussi*

$$\lim_{|t| \to +\infty} \int_{\mathbb{R}} f(x) \sin(xt)\, dx = 0,$$

et la même chose en remplaçant sinus par cosinus. Dans le cas de $\mathrm{L}_1(\mathbb{R}^d)$*, on a aussi convergence vers* 0 *à l'infini de la transformée de Fourier* $\widehat{f}$ *de toute fonction* $f \in \mathrm{L}_1(\mathbb{R}^d)$*.*

Preuve. On a vu que les fonctions de classe C^1 à support compact sont denses dans $\mathrm{L}_1(\mathbb{R})$. On a quand g est C^1, à support compact contenu dans $[a, b]$,

$$\int_{\mathbb{R}} g'(x)\, dx = \int_a^b g'(x)\, dx = g(b) - g(a) = 0.$$

Si f est C^1 à support compact, il en est de même pour $g(x) = f(x)\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}xt}$, pour chaque t fixé, donc

$$0 = \int_{\mathbb{R}} g' = \int_{\mathbb{R}} f'(x)\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}xt}\, dx - \mathrm{i}t \int_{\mathbb{R}} f(x)\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}xt}\, dx$$

c'est-à-dire que

$$\widehat{f'}(t) = \mathrm{i}t\widehat{f}(t)$$

pour tout t. De plus, $|\widehat{f'}|$ est une fonction bornée sur $\mathbb{R}$ (bornée par $\|f'\|_1$) ; ceci montre que la transformée de Fourier de f est $\mathrm{O}(|t|^{-1})$ à l'infini dans le cas où f est $\mathrm{C}^1_{\mathrm{comp}}$, donc $\widehat{f}$ tend vers 0 à l'infini.

La famille $f \to \widehat{f}(t)$, $t \in \mathbb{R}$, est une famille équicontinue de formes linéaires sur $\mathrm{L}_1(\mathbb{R})$, qui tend vers 0 quand $|t| \to +\infty$ sur le sous-espace dense $\mathrm{C}^1_{\mathrm{comp}}$. Il y a donc convergence vers 0 pour toute fonction $f \in \mathrm{L}_1$.

Si f est réelle, les affirmations sur les sinus et cosinus sont obtenues en prenant les parties réelle et imaginaire de $\widehat{f}$; si f est complexe, on applique la phrase précédente à ses parties réelle et imaginaire.

On peut aussi démontrer le lemme en utilisant la densité dans L_1 des fonctions en escalier. La démonstration dans le cas multi-dimensionnel est essentiellement identique. Donnons-la en dimension $d = 2$; puisque les combinaisons linéaires d'indicatrices de rectangles sont denses dans $\mathrm{L}_1(\mathbb{R}^2)$, il suffit de traiter le cas $f = \mathbf{1}_{[a,b]\times[c,d]}$. On a si $t = (t_1, t_2) \in \mathbb{R}^2$, avec $t_1, t_2 \neq 0$

$$\widehat{f}(t) = \int_{\mathbb{R}^2} f(x_1, x_2)\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t_1x_1 - \mathrm{i}t_2x_2}\, dx_1\, dx_2 =$$

$$\Bigl(\int_a^b \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t_1x_1}\, dx_1\Bigr)\Bigl(\int_c^d \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t_2x_2}\, dx_2\Bigr) = \Bigl(\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t_1a} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t_1b}}{\mathrm{i}t_1}\Bigr)\Bigl(\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t_2c} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t_2d}}{\mathrm{i}t_2}\Bigr)$$

(si $t_1 = 0$, il faut remplacer la première parenthèse par $(b-a)$ et si $t_2 = 0$, il faut remplacer la seconde par $(d-c)$). On vérifie facilement que cette expression tend vers 0 lorsque $|t| \to +\infty$.

Dans le cas 2-dimensionnel, on aurait pu aussi vérifier que si f est une fonction de classe C^1 à support compact, ses deux dérivées partielles $\mathrm{D}_j f$, pour $j = 1, 2$ vérifient

$$\widehat{(\mathrm{D}_j f)}(t) = \mathrm{i} t_j \, \widehat{f}(t),$$

où $t = (t_1, t_2)$ varie dans $\mathbb{R}^2$. On en déduit que $|t_j| \, |\widehat{f}(t)|$ est bornée par $\|\mathrm{D}_j f\|_1$, donc $(|t_1| + |t_2|) \, |\widehat{f}(t)|$ est bornée sur $\mathbb{R}^2$, ce qui implique que $\widehat{f}(t)$ est $\mathrm{O}(|t|^{-1})$ à l'infini et par conséquent converge vers 0 à l'infini.

Corollaire 4.1.2. *Pour toute fonction $f \in \mathrm{L}_1(0, 2\pi)$, la suite $(c_n(f))_{n \in \mathbb{Z}}$ tend vers 0 quand $|n| \to +\infty$. On a aussi*

$$\lim_{|t| \to +\infty} \int_0^{2\pi} f(x) \sin(xt) \, dx = 0.$$

Preuve. On considère la fonction g sur $\mathbb{R}$ définie par $g(x) = f(x)$ si $x \in [0, 2\pi]$ et $g(x) = 0$ sinon. On voit que

$$2\pi \, c_n(f) = \int_0^{2\pi} f(x) \, \mathrm{e}^{-\mathrm{i} nx} \, dx = \int_{\mathbb{R}} g(x) \, \mathrm{e}^{-\mathrm{i} nx} \, dx = \widehat{g}(n),$$

et

$$\int_0^{2\pi} f(x) \sin(xt) \, dx = \int_{\mathbb{R}} g(x) \sin(xt) \, dx.$$

Le résultat découle donc immédiatement de la proposition précédente 4.1.1.

Dans une certaine mesure, on peut reconnaître le caractère C^k d'une fonction f 2π-périodique à la décroissance de ses coefficients de Fourier. En effet, si on sait que $c_n(f) = \mathrm{O}(|n|^{-k-2})$, on pourra dériver k fois la série de Fourier de f, et toutes ces séries dérivées seront normalement convergentes (la k-ième dérivée fait encore intervenir des coefficients en $|n|^{-2}$ qui donnent une série numérique majorante absolument convergente). Inversement, si f est de classe C^k, l'argument d'intégration par parties utilisé dans la preuve de la proposition montre que $c_n(f) = \mathrm{O}(|n|^{-k})$; il y a bien sûr une différence importante entre les deux conditions, mais qui disparaît pour les fonctions f périodiques de classe C^∞ : elles sont caractérisées par le fait que pour tout entier $k \geq 0$, les coefficients de Fourier de f sont $\mathrm{O}(|n|^{-k})$ quand $|n| \to +\infty$.

4.1.b. *Un résultat de convergence ponctuelle des séries de Fourier*

Pour exprimer qu'une fonction f est représentée par sa série de Fourier, par exemple au sens de la convergence L_2, mais sans préjuger de l'égalité point par point, on écrit parfois

$$f(x) \sim \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k(f) \, \mathrm{e}^{-\mathrm{i} kx} \, .$$

Il est tout de même intéressant de disposer de critères simples qui garantissent l'égalité en un point x donné. On va considérer d'abord un cas particulier d'énoncé assez peu lisible, mais de preuve simple, dont on extraira ensuite les autres résultats. On y prendra $x = 0$, ce qui réduit la série de Fourier au point x à $\sum c_k(f)$.

Lemme 4.1.3. *Soit h une fonction mesurable sur $[-\pi, \pi]$ telle que*

$$(*) \qquad \int_{-\pi}^{\pi} \Bigl|\frac{h(t)}{t}\Bigr| \, dt < +\infty$$

(ce qui implique que $h \in \mathrm{L}_1(\mathbb{T})$) ; dans ce cas, la série de Fourier de h converge au point $x = 0$, et sa somme est nulle,

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k(h) = 0.$$

Démonstration. Pour montrer la convergence aux deux infinis $\pm\infty$ on étudiera la somme $s_{m,n} = \sum_{k=m}^{n} c_k(h)$, et on fera ensuite tendre indépendamment m vers $-\infty$ et n vers $+\infty$. Clairement

$$s_{m,n} = \int_{-\pi}^{\pi} h(t) \Bigl(\sum_{k=m}^{n} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kt} \Bigr) \frac{dt}{2\pi}.$$

Pour tout nombre complexe z non nul et tous $m \le n$, $m, n \in \mathbb{Z}$ on a

$$(z^{-1} - 1)(z^m + z^{m+1} + \cdots + z^n) = z^{m-1} - z^n$$

ce qui donne appliqué à $z = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}$

$$s_{m,n} = \int_{-\pi}^{\pi} h(t) \Bigl(\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(m-1)t} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}nt}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} - 1} \Bigr) \frac{dt}{2\pi}.$$

L'idée simple mais efficace est de regrouper $h(t)$ et le dénominateur, pour former une fonction auxiliaire

$$g(t) = \frac{h(t)}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} - 1},$$

qui est intégrable d'après l'hypothèse $(*)$ car $|g(t)| \le \frac{\pi}{2} \, |h(t)/t|$. Alors

$$s_{m,n} = \int_{-\pi}^{\pi} g(t) \bigl(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(m-1)t} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}nt} \bigr) \frac{dt}{2\pi} = c_{m-1}(g) - c_n(g),$$

qui tend vers 0 quand on fait tendre indépendamment m vers $-\infty$ et n vers $+\infty$, d'après le corollaire de Riemann-Lebesgue 4.1.2, appliqué à la fonction $g \in \mathrm{L}_1(\mathbb{T})$.

Pour transformer la condition $(*)$ en l'intégrabilité de g, on a utilisé le fait que $|1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}| = 2 \, |\sin(t/2)|$ et le fait que

$$\bigl(0 < t \le \pi\bigr) \Rightarrow \frac{2}{\pi} \le \frac{\sin(t/2)}{t/2} \le 1.$$

La majoration est bien connue ; la minoration vient de la concavité du sinus sur l'intervalle $[0, \pi/2]$.

Corollaire 4.1.4. *Soit f une fonction 2π-périodique mesurable, soient x un point fixé et ℓ un scalaire vérifiant*

$$\int_{-\pi}^{\pi} \Bigl| \frac{f(x+t)-\ell}{t} \Bigr| \, dt < +\infty\,;$$

on a

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}nx} = \ell.$$

Démonstration. On applique le lemme préliminaire 4.1.3 à la fonction $h(t) = f(x+t)-\ell$, qui vérifie évidemment la condition $(*)$ de ce lemme. On a donc

$$0 = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k(h), \tag{1}$$

et en introduisant le symbole de Kronecker $\delta_{0,k}$, qui est nul sauf quand $k = 0$, auquel cas $\delta_{0,0} = 1$,

$$c_k(h) = \int_{-\pi}^{\pi} \bigl(f(x+t)-\ell\bigr)\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kt} \, \frac{dt}{2\pi} = \int_{-\pi}^{\pi} f(s)\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k(s-x)} \, \frac{dt}{2\pi} - \ell\delta_{k,0} = c_k(f)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} - \ell\delta_{k,0}\,;$$

l'équation (1) se transforme donc en le résultat attendu,

$$0 = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k(h) = \Bigl(\sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k(f)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}\Bigr) - \ell.$$

Remarque. La condition du corollaire 4.1.4 est satisfaite en particulier quand f est une fonction intégrable sur $[-\pi,\pi]$, partout définie et *dérivable* au point x : on prend $\ell = f(x)$, et on conclut que la série de Fourier converge au point x et que sa somme vaut bien $f(x)$.

Définition. On dit qu'une fonction f vérifie une *condition de Hölder* d'ordre $\alpha > 0$ s'il existe une constante M telle que $|f(t) - f(s)| \le \mathrm{M}\,|t-s|^\alpha$ pour tous $s,t \in \mathbb{R}$. On peut aussi limiter la propriété aux couples s,t tel que $|t-s| \le 1$; pour les fonctions périodiques, qui nous intéressent ici, cela ne fait aucune différence. Une notation assez classique pour cet espace de fonctions est $\mathrm{L}ip_\alpha$.

Seul le cas $\alpha \le 1$ est intéressant : on voit facilement qu'une fonction α-hölderienne pour un $\alpha > 1$ est constante (découper l'intervalle entre x et y en un grand nombre de petits morceaux de longueurs égales, et majorer $|f(y)-f(x)|$ par la somme des majorants des morceaux correspondants).

Corollaire 4.1.5. *Soit f une fonction 2π-périodique vérifiant une condition de Hölder d'ordre $\alpha > 0$; pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a*

$$f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}\,.$$

Démonstration. Pour chaque x la condition de Hölder entraîne que

$$\int_{-\pi}^{\pi} \Bigl| \frac{f(x+t)-f(x)}{t} \Bigr| \, dt \le 2\mathrm{M} \int_0^{\pi} \frac{dt}{t^{1-\alpha}} < +\infty.$$

On applique le corollaire précédent 4.1.4 avec $\ell = f(x)$.

Exercice. Si K est un compact de $L_1(0, 2\pi)$, montrer que le lemme de Riemann-Lebesgue est vrai uniformément sur K. Si f est 2π-périodique et $f \in \mathrm{L}ip_\alpha$ pour un $\alpha > 0$, montrer que les fonctions $(g_x)_{x\in[0,2\pi]}$ définies par

$$g_x(t) = \frac{f(x+t) - f(x)}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} - 1}$$

forment un compact de $L_1(0, 2\pi)$. En déduire que pour une fonction f de $\mathrm{L}ip_\alpha$, la série de Fourier converge uniformément vers f (revenir à la preuve du lemme 4.1.3).

Le résultat de l'exercice précédent redémontre que la suite $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est totale dans L_2. En effet, le résultat s'applique à toute fonction continue f périodique linéaire par morceaux : les sommes de Fourier $S_N(f)$ tendent uniformément vers la fonction f, donc aussi en norme L_2 ; ceci montre la totalité de la suite $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$.

Noyau de Dirichlet

Exprimons la somme de Fourier d'ordre $N \geq 0$ d'une fonction f ; on a

$$(S_N f)(x) = \sum_{n=-N}^{N} c_n(f)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx} = \int_0^{2\pi} \Bigl(\sum_{n=-N}^{N} \mathrm{e}^{\mathrm{i}n(x-s)}\Bigr) f(s)\,\frac{ds}{2\pi} =$$

$$= \int_0^{2\pi} \Bigl(\sum_{n=-N}^{N} \mathrm{e}^{\mathrm{i}nt}\Bigr) f(x-t)\,\frac{dt}{2\pi} = \int_0^{2\pi} D_N(t) f(x-t)\,\frac{dt}{2\pi},$$

où on a posé

$$D_N(t) = \sum_{n=-N}^{N} \mathrm{e}^{\mathrm{i}nt} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}Nt}\bigl(1 + \mathrm{e}^{\mathrm{i}t} + \cdots + \mathrm{e}^{\mathrm{i}2Nt}\bigr) =$$

$$= \mathrm{e}^{-\mathrm{i}Nt}\ \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(2N+1)t} - 1}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} - 1} = \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t/2}}{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t/2}}\ \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(N+1)t} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}Nt}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} - 1} = \frac{\sin\bigl((N+1/2)t\bigr)}{\sin(t/2)}.$$

La fonction D_N s'appelle le *noyau de Dirichlet* d'indice N. Il est clair sur la première expression de D_N que son intégrale est égale à 1 (l'intégrale de la fonction e_0 : toutes les autres fonctions e_j sont d'intégrale nulle). De plus D_N est une fonction paire, donc son intégrale sur $[0, \pi]$ est la moitié de l'intégrale totale,

$$(**) \qquad \int_{-\pi}^{\pi} D_N(t)\,\frac{dt}{2\pi} = 1, \quad \int_0^{\pi} D_N(t)\,\frac{dt}{2\pi} = 1/2.$$

4.1.c. *Critère de Dirichlet-Dini*

On considère une fonction 2π-périodique intégrable f et un point x fixé ; on suppose qu'il existe deux valeurs a_+ et a_- qui donnent une approximation raisonnable de f à droite et à gauche du point x, au sens que

$$(\mathrm{DD}_x) \qquad \int_0^\pi \frac{|f(x+t)-a_+|}{t}\,dt < +\infty \quad \textbf{et} \quad \int_{-\pi}^0 \frac{|f(x+t)-a_-|}{|t|}\,dt < +\infty.$$

Théorème 4.1.6. *Sous l'hypothèse* (DD_x)*, les sommes de Fourier* $(\mathrm{S}_n f)(x)$ *au point fixé* x *tendent vers* $(a_+ + a_-)/2$*,*

$$\lim_n (\mathrm{S}_n f)(x) = c_0(f) + \sum_{n=1}^{+\infty} \bigl(c_n(f)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx} + c_{-n}(f)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nx}\bigr) = \frac{a_+ + a_-}{2}.$$

Démonstration. Considérons la fonction 2π-périodique $t \to a(t)$ égale à a_+ sur $(0,\pi)$ et à a_- sur $(-\pi,0)$. Si on définit $h(t) = f(x+t) - a(t)$, l'hypothèse (DD_x) dit exactement que l'intégrale

$$\int_{-\pi}^{\pi} \Bigl|\frac{h(t)}{t}\Bigr|\,dt$$

est finie. On sait donc d'après le lemme préliminaire 4.1.3 que

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k(h) = 0 = \lim_{\mathrm{N}} (\mathrm{S}_\mathrm{N} h)(0).$$

On voit d'après $(**)$ que

$$(*) \qquad (\mathrm{S}_\mathrm{N}\, a)(0) = a_- \int_0^\pi \mathrm{D}_\mathrm{N}(t)\,\frac{dt}{2\pi} + a_+ \int_{-\pi}^0 \mathrm{D}_\mathrm{N}(t)\,\frac{dt}{2\pi} = \frac{a_+ + a_-}{2}.$$

Calculons les coefficients de Fourier de la fonction $g = h + a$, qui est égale à $g(t) = f(x+t)$. On a en posant $x + t = u$

$$c_k(g) = \int_{-\pi}^{\pi} g(t)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kt}\,\frac{dt}{2\pi} = \int_{-\pi}^{\pi} f(u)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k(u-x)}\,\frac{du}{2\pi} = c_k(f)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}kx}$$

donc

$$(\mathrm{S}_\mathrm{N} g)(0) = \sum_{k=-\mathrm{N}}^{\mathrm{N}} c_k(g) = (\mathrm{S}_\mathrm{N} f)(x),$$

et

$$(\mathrm{S}_\mathrm{N} f)(x) - \frac{a_+ + a_-}{2} = (\mathrm{S}_\mathrm{N} g)(0) - (\mathrm{S}_\mathrm{N} a)(0) = (\mathrm{S}_\mathrm{N} h)(0) \to 0$$

comme promis.

Remarque : convergence bilatérale. On a vu que dans le résultat de convergence 4.1.4, la série de Fourier *complexe* de f au point x converge aux deux infinis de l'ensemble d'indices $\mathbb{Z}$. Cette convergence aux deux côtés n'est absolument pas la situation générale. Dans la situation du théorème 4.1.6 (ou bien du théorème de Dirichlet classique, où une fonction de classe C^1 par morceaux admet au point x une limite à droite et une limite à gauche), il **faut** prendre les sommes de Fourier symétriques pour obtenir un résultat de convergence : on justifiera cette affirmation dans l'exemple 4.1.7.

Exercice. On définit une fonction 2π-périodique f sur $\mathbb{R}$ en posant pour $-\pi \le t < \pi$

$$f(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}at}$$

où a est un nombre réel ou complexe qui n'est pas dans $2\pi\mathbb{Z}$. Expliciter le résultat obtenu en appliquant le théorème de Dirichlet à la fonction f au point π.

Exemple 4.1.7.

Considérons $f_0(x) = \mathrm{sign}(\sin(x))$, fonction 2π-périodique sur $\mathbb{R}$, égale à 1 sur $]0,\pi[$ et à -1 sur $]-\pi,0[$; on voit que $c_{2k}(f_0) = 0$ pour tout entier k : en effet il est clair que $c_0(f_0) = 0$ par imparité, et pour $k \ne 0$ on a

$$\int_0^\pi \mathrm{e}^{-2k\mathrm{i}x}\,dx = -\frac{1}{2k\mathrm{i}}\Big[\mathrm{e}^{-2k\mathrm{i}x}\Big]_0^\pi = -\frac{1}{2k\mathrm{i}}\big(1-1\big) = 0,$$

et de même

$$-\int_{-\pi}^0 \mathrm{e}^{-2k\mathrm{i}x}\,dx = 0$$

donc $c_{2k}(f_0) = 0$. Si $n = 2k+1$, on a

$$2\pi\, c_{2k+1}(f_0) = \int_0^\pi \mathrm{e}^{-(2k+1)\mathrm{i}x}\,dx - \int_{-\pi}^0 \mathrm{e}^{-(2k+1)\mathrm{i}x}\,dx =$$

$$= -\frac{1}{(2k+1)\mathrm{i}}\Big[\mathrm{e}^{-(2k+1)\mathrm{i}x}\Big]_0^\pi + \frac{1}{(2k+1)\mathrm{i}}\Big[\mathrm{e}^{-(2k+1)\mathrm{i}x}\Big]_{-\pi}^0 = \frac{4}{(2k+1)\mathrm{i}},$$

ce qui montre que $c_n(f_0) = c_{2k+1}(f_0) = 2\,(\pi\mathrm{i}n)^{-1}$; on voit à l'évidence que la "partie positive" $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n(f_0)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}$ de la série de Fourier complexe de f_0 ne peut pas converger au point $x = 0$, alors que le théorème de Dirichlet s'applique en ce point. On obtient ainsi, en regroupant les indices k et $-k$ du développement complexe

$$(\mathrm{S}_n f_0)(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{0 \le k \le (n-1)/2} \frac{\sin(2k+1)x}{2k+1}.$$

On a raté une belle occasion de se servir des coefficients de Fourier réels (a_n) et (b_n) : il est clair que $a_n = 0$ pour tout $n \ge 0$ à cause de l'imparité de la fonction f_0, et

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^\pi f_0(t)\sin(nt)\,dt = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \sin(nt)\,dt = \frac{2}{\pi n}\big(1-\cos(n\pi)\big),$$

ce qui conduit heureusement au même résultat. On constate bien qu'au point $x = 0$, la série converge (trivialement, en stationnant) vers la valeur 0, qui est la demi-somme des limites à droite et à gauche de f_0 au point 0. Par ailleurs, d'après le corollaire 4.1.4 appliqué en un point x tel que $0 < x < \pi$, on a

$$1 = f_0(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\sin(2k+1)x}{2k+1}$$

alors que pour $-\pi < x < 0$ on a par imparité

$$-1 = f_0(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\sin(2k+1)x}{2k+1}.$$

Le théorème de Dirichlet à partir de l'exemple précédent

Si on a seulement montré le corollaire 4.1.4 (et pas le théorème à la Dirichlet), on peut déduire le théorème de Dirichlet à partir du corollaire 4.1.4 et de l'exemple précédent, où le théorème de Dirichlet a été vérifié "à la main" au point $x = 0$ pour la fonction f_0. Supposons qu'une fonction 2π-périodique localement intégrable f vérifie au point $x = 0$ l'hypothèse de type "théorème de Dirichlet" suivante :

la fonction f admet deux limites (finies) $f(0-)$ et $f(0+)$ à gauche et à droite de 0, et de plus on a $f(t) - f(0+) = \mathrm{O}(t)$ et $f(0-) - f(-t) = \mathrm{O}(t)$ pour $t > 0$ petit.

Les deux propriétés précédentes seront vraies (par la règle de l'Hospital) si on suppose que f est dérivable sur $(-\pi, \pi)$ pour $x \neq 0$, et que la dérivée f' possède une limite (finie) à gauche et à droite de 0. On va (re)montrer que sous ces hypothèses,

les sommes de Fourier $(\mathrm{S_N} f)(0)$ tendent vers $\big(f(0-) + f(0+)\big)/2$.

Posons $d = f(0+) - f(0-)$; alors la fonction f_1 définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_1(x) = f(x) - \frac{d}{2} f_0(x)$$

est équivalente à une fonction continue au voisinage de 0, égale à $f(0-) + d/2 = f(0+) - d/2 = \big(f(0-) + f(0+)\big)/2$ pour $x = 0$, et f_1 vérifie de plus la condition intégrale du corollaire 4.1.4, avec $\ell = \big(f(0-) + f(0+)\big)/2$, parce que les hypothèses impliquent que $f_1(t) - \ell = \mathrm{O}(|t|)$ au voisinage de $t = 0$. Comme on a vérifié à la main le théorème de Dirichlet pour la fonction f_0, on en déduit le résultat pour $f = f_1 + \frac{d}{2} f_0$ au point 0 : les sommes partielles de la série de Fourier de f au point 0 convergent vers

$$\ell + 0 = \big(f(0-) + f(0+)\big)/2.$$

4.1.d. *Les noyaux classiques. Théorème de Fejér*

On va s'intéresser aux sommes de Cesàro de la suite des sommes de Fourier,

$$\sigma_n f = \frac{1}{n+1}\Big(\mathrm{S}_0 f + \cdots + \mathrm{S}_n f\Big).$$

Ces sommes, appelées *sommes de Fejér*, s'obtiennent évidemment par convolution de f avec le noyau correspondant

$$\mathrm{K}_n = \frac{1}{n+1}\Big(\mathrm{D}_0 + \cdots + \mathrm{D}_n\Big)$$

(tout le monde n'est pas d'accord sur la numérotation : comparer Chatterji et Zuily-Queffélec). Puisque $\mathrm{D}_k = \sum_{j=-k}^{k} e_j$ on obtient facilement (à la Fubini)

$$\mathrm{K}_n = \sum_{k=-n}^{n} \Big(1 - \frac{|k|}{n+1}\Big)\, e_k. \tag{1}$$

D'un autre côté, le calcul de $\mathrm{D}_0 + \mathrm{D}_1 + \cdots + \mathrm{D}_n$ fait intervenir une somme de sinus,

$$\mathrm{S} := \sum_{k=0}^{n} \sin(kt + t/2) = \mathrm{Im}\Big(\sum_{k=0}^{n} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,(kt+t/2)}\Big) = \mathrm{Im}\,\mathrm{Z}$$

où

$$\mathrm{Z} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,t/2} \sum_{k=0}^{n} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,kt} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,t/2}\, \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,(n+1)t} - 1}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,t} - 1} = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,(n+1)t} - 1}{2\mathrm{i}\sin(t/2)}$$

donc

$$\mathrm{S} = \mathrm{Im}\,\mathrm{Z} = \frac{1 - \cos\big((n+1)t\big)}{2\sin(t/2)} = \frac{\sin^2\big((n+1)t/2\big)}{\sin(t/2)}$$

ce qui donne puisque $(n+1)\sin(t/2)\,\mathrm{K}_n(t) = \mathrm{S}$

$$\mathrm{K}_n(t) = \frac{1}{n+1}\, \frac{\sin^2\big[(n+1)t/2\big]}{\sin^2(t/2)}.$$

On a donc $\mathrm{K}_n(t) \geq 0$. En utilisant la forme (1) de K_n on voit que $\int_0^{2\pi} \mathrm{K}_n(t)\, \frac{dt}{2\pi} = 1$. De plus, pour tout α tel que $0 < \alpha < \pi$, on constate que

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \mathbf{1}_{\{|t|>\alpha\}} \mathrm{K}_n(t)\, dt \leq \frac{1}{(n+1)\pi} \int_{\alpha}^{\pi} \frac{1}{\sin^2(\alpha/2)}\, dt \leq \frac{1}{(n+1)\sin^2(\alpha/2)}$$

qui tend vers 0 quand $n \to +\infty$. On voit donc que la suite (K_n) fournit une approximation de l'unité. On aura donc des résultats de convergence pour les sommes de Fejér

$$(\sigma_n f)(x) = (\mathrm{K}_n * f)(x) = \sum_{k=-n}^{n} \Big(1 - \frac{|k|}{n+1}\Big)\, c_k(f)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,kx}.$$

Les résultats généraux sur l'approximation par convolution donnent donc les deux parties du *théorème de Fejér* qui suit.

Théorème 4.1.8. *Si f est continue 2π-périodique sur $\mathbb{R}$, la suite de fonctions $(\sigma_n f)$ converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}$.*

Si $f \in \mathrm{L}_p(0, 2\pi)$ et si $1 \le p < +\infty$, on a $\|\sigma_n f - f\|_p \to 0$.

On note que $\sigma_{\mathrm{N}} f$ est la moyenne des valeurs des sommes de Fourier usuelles $\mathrm{S}_0 f, \ldots, \mathrm{S}_{\mathrm{N}} f$: dire que les sommes de Fejér convergent en un point x vers $f(x)$ signifie que la série de Fourier au point x converge *au sens de Cesàro* vers $f(x)$,

$$f(x) = \lim_{\mathrm{N} \to +\infty} \frac{1}{\mathrm{N}+1} \sum_{k=0}^{\mathrm{N}} (\mathrm{S}_k f)(x).$$

Conséquences-Exercices.

1. L'application qui associe à toute fonction $f \in \mathrm{L}_1(0, 2\pi)$ la suite $(c_n(f))_{n \in \mathbb{Z}} \in c_0(\mathbb{Z})$ est injective.

2. Si f est 2π-périodique continue et si les sommes de Fourier $(\mathrm{S}_n f)(x)$ au point x convergent vers une limite ℓ, on a nécessairement $\ell = f(x)$.

4.2. Un peu d'espaces de Hilbert

4.2.a. *Orthogonalité, bases*

Définition. On appelle *espace de Hilbert* un espace vectoriel H sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ muni d'un produit scalaire $(x, y) \to \langle x, y \rangle \in \mathbb{K}$, tel que la semi-norme $x \to \sqrt{\langle x, x \rangle}$ soit une norme sur H, qui rende cet espace **complet**.

Un *produit scalaire* doit vérifier les trois propriétés suivantes : pour tout $y \in \mathrm{H}$, l'application $x \to \langle x, y \rangle$ est $\mathbb{K}$-linéaire sur H ; on a $\langle y, x \rangle = \overline{\langle x, y \rangle}$ pour tous $x, y \in \mathrm{H}$, et enfin le réel $\langle x, x \rangle$ est ≥ 0 pour tout $x \in \mathrm{H}$.

Si H est un espace de Hilbert, on note $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ pour tout $x \in \mathrm{H}$. L'inégalité de Cauchy-Schwarz dit que $|\langle x, y \rangle| \le \|x\| \, \|y\|$.

Exemple. L'espace $\mathrm{L}_2(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ est un espace de Hilbert pour le produit scalaire

$$\langle f, g \rangle = \int_\Omega f(s) \overline{g(s)} \, d\mu(s).$$

L'espace ℓ_2 est un cas particulier, obtenu lorsque $\Omega = \mathbb{N}$ est muni de la mesure de comptage (définie par $\mu(\{n\}) = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$).

Lemme 4.2.1. *Soient $(u_1, \ldots, u_n)$ des vecteurs deux à deux orthogonaux d'un espace de Hilbert* H *; on a*

$$\Bigl\| \sum_{k=1}^n u_k \Bigr\|^2 = \sum_{k=1}^n \|u_k\|^2.$$

En particulier, des vecteurs orthogonaux non nuls *sont linéairement indépendants.*

Démonstration. Facile, en développant le carré scalaire $\langle \sum_{k=1}^n u_k, \sum_{k=1}^n u_k \rangle$.

Lemme 4.2.2. *Soit* $(e_1, \ldots, e_n)$ *une suite orthonormée finie dans un espace de Hilbert* H*, et posons* $\mathrm{F} = \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_n)$ *; pour tout vecteur* $x \in \mathrm{H}$*, le vecteur*

$$\mathrm{P_F}\, x = \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle\, e_i$$

est la projection orthogonale de x *sur* F*, c'est-à-dire que* $\mathrm{P_F}\, x \in \mathrm{F}$ *et que le vecteur* $x - \mathrm{P_F}\, x$ *est orthogonal à* F*. On a* $\|x - \mathrm{P_F}\, x\| \le \|x - z\|$ *pour tout* $z \in \mathrm{F}$ *(le point* $\mathrm{P_F}\, x$ *est le point de* F *le plus proche de* x*).*

Démonstration. Il est évident que $y = \mathrm{P_F}\, x \in \mathrm{F}$, et il est clair que $\langle y, e_j \rangle = \langle x, e_j \rangle$ pour tout $j = 1, \ldots, n$, donc $x - y$ est orthogonal à tous les (e_j), ce qui implique que $x - y$ est orthogonal à F. Pour la deuxième affirmation, on écrit $x - z = (x - \mathrm{P_F}\, x) + (\mathrm{P_F}\, x - z)$ et on utilise l'orthogonalité de $x - \mathrm{P_F}\, x$ et de $\mathrm{P_F}\, x - z \in \mathrm{F}$.

On a déjà introduit la terminologie *famille sommable* dans le cas de réels positifs au chapitre 1 ; une famille de *vecteurs* $(u_i)_{i \in \mathrm{I}}$ d'un espace normé est dite *sommable* s'il existe un vecteur x tel que pour tout $\varepsilon > 0$, on puisse trouver un ensemble fini $\mathrm{J}_0 \subset \mathrm{I}$ tel que pour tout sous-ensemble fini $\mathrm{J} \supset \mathrm{J}_0$, on ait

$$\Big\| x - \sum_{j \in \mathrm{J}} u_j \Big\| < \varepsilon.$$

Lemme 4.2.3 : inégalité de Bessel. *Soient* H *un espace de Hilbert et* $(e_i)_{i \in \mathrm{I}}$ *une famille orthonormée dans* H *; pour tout* $x \in \mathrm{H}$ *la famille* $(|\langle x, e_i \rangle|^2)_{i \in \mathrm{I}}$ *est sommable et*

$$\sum_{i \in \mathrm{I}} |\langle x, e_i \rangle|^2 \le \|x\|^2.$$

Démonstration. Pour qu'une famille $(u_i)_{i \in \mathrm{I}}$ de réels ≥ 0 soit sommable, il faut et il suffit qu'il existe un majorant M pour l'ensemble des sommes finies $\sum_{i \in \mathrm{J}} u_i$, $\mathrm{J} \subset \mathrm{I}$, J fini. On a alors $\sum_{i \in \mathrm{I}} u_i \le \mathrm{M}$. Il suffit donc de montrer le résultat du lemme pour une suite finie $e_1, \ldots, e_n$. On a vu que si on pose $y = \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle\, e_i$, le vecteur $x - y$ est orthogonal au sous-espace $\mathrm{F} = \mathrm{Vect}(e_1, \ldots, e_n)$, donc $x - y$ est orthogonal à $y \in \mathrm{F}$. On aura puisque $x = y + (x - y)$

$$\|x\|^2 = \|y\|^2 + \|x - y\|^2 \ge \|y\|^2 = \sum_{i=1}^{n} |\langle x, e_i \rangle|^2$$

d'où le résultat.

Lemme 4.2.4. *Soit* $(u_i)_{i \in \mathrm{I}}$ *une famille orthogonale dans un espace de Hilbert* H *; la famille est sommable dans* H *si et seulement si* $\sum_{i \in \mathrm{I}} \|u_i\|^2 < +\infty$*, et dans ce cas*

$$\Big\| \sum_{i \in \mathrm{I}} u_i \Big\|^2 = \sum_{i \in \mathrm{I}} \|u_i\|^2.$$

Si $(e_i)_{i \in \mathrm{I}}$ *est une famille orthonormée, la famille de vecteurs* $(c_i e_i)_{i \in \mathrm{I}}$ *est sommable dans* H *si et seulement si* $\sum_{i \in \mathrm{I}} |c_i|^2 < +\infty$*, et dans ce cas on a* $\big\| \sum_{i \in \mathrm{I}} c_i e_i \big\|^2 = \sum_{i \in \mathrm{I}} |c_i|^2$.

Démonstration. Supposons $\sum_{i \in \mathrm{I}} \|u_i\|^2 < +\infty$. On peut trouver une suite croissante d'ensembles finis $\mathrm{I}_n \subset \mathrm{I}$ telle que la suite croissante $s_n = \sum_{i \in \mathrm{I}_n} \|u_i\|^2$ tende vers la somme $s = \sum_{i \in \mathrm{I}} \|u_i\|^2$ de la famille $(\|u_i\|^2)_{i \in \mathrm{I}}$. Posons $\mathrm{U}_n = \sum_{i \in \mathrm{I}_n} u_i$ pour tout $n \geq 0$. Si $m < n$ on a par orthogonalité

$$\|\mathrm{U}_n - \mathrm{U}_m\|^2 = \sum_{i \in \mathrm{I}_n \setminus \mathrm{I}_m} \|u_k\|^2 = s_n - s_m.$$

A partir de là, il est clair que la suite (U_n) est de Cauchy dans H, donc converge vers un vecteur $x \in \mathrm{H}$. Ce vecteur x est la *somme* de la famille $(u_i)_{i \in \mathrm{I}}$: pour tout $\varepsilon > 0$ donné, on peut trouver un sous-ensemble J_0 fini dans I tel que $\|x - \sum_{i \in \mathrm{J}} u_i\| < \varepsilon$ pour tout J fini contenant J_0 ; il suffit en effet de choisir $\mathrm{J}_0 = \mathrm{I}_n$ pour un entier n tel que $s - s_n < \varepsilon^2$.

La norme de la somme de la famille s'obtient en passant à la limite dans l'égalité du lemme 4.2.1, qui donne $\|\mathrm{U}_n\|^2 = s_n$ pour tout $n \geq 0$.

Définition. On appelle *base hilbertienne* d'un espace de Hilbert H une famille orthonormée $(e_i)_{i \in \mathrm{I}}$ qui est de plus *totale* dans H, c'est-à-dire que l'espace vectoriel engendré $\mathrm{Vect}(e_i : i \in \mathrm{I})$ est dense dans H.

L'un des intérêts (peut-être mineur) de la notion de *famille sommable* est de permettre d'utiliser la notion de base hilbertienne $(e_i)_{i \in \mathrm{I}}$ dans le cas le plus général (l'ensemble d'indices I peut être non dénombrable) pour représenter les vecteurs de l'espace, sans faire de périphrases : tout vecteur x de H est la *somme* $x = \sum_{i \in \mathrm{I}} \langle x, e_i \rangle\, e_i$ de la famille sommable $(\langle x, e_i \rangle\, e_i)_{i \in \mathrm{I}}$. En effet, la famille est sommable par la conjonction des lemmes 4.2.3 et 4.2.4 ; si s désigne la somme de la famille, on voit que $x - s$ est orthogonal à tous les e_i, donc à leurs combinaisons linéaires, donc à H entier puisque (e_i) est totale. Ainsi, on a bien $x = s$.

Pour tout ensemble d'indices I, on a un espace de Hilbert $\ell_2(\mathrm{I})$ des familles $(c_i)_{i \in \mathrm{I}}$ de scalaires telles que $\sum_{i \in \mathrm{I}} |c_i|^2 < +\infty$, qui a une base hilbertienne canonique qu'on devine ; tout espace de Hilbert H est isomorphe à l'un de ces espaces $\ell_2(\mathrm{I})$.

Proposition. *Supposons que* H *admette une base hilbertienne* dénombrable. *Pour toute énumération* $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *de cette base, et pour tout vecteur* x *de* H, *on a*

$$x = \sum_{k=0}^{+\infty} \langle x, e_k \rangle\, e_k \quad \text{et} \quad \|x\|^2 = \sum_{k=0}^{+\infty} |\langle x, e_k \rangle|^2.$$

Démonstration. Pour tout $n \geq 0$, la projection orthogonale de x sur $\mathrm{F}_n = \mathrm{Vect}(e_0, \ldots, e_n)$ est égale à $x_n = \sum_{k=0}^{n} \langle x, e_k \rangle\, e_k$. Par ailleurs, les coefficients $c_k = \langle x, e_k \rangle$ sont de carré sommable d'après Bessel, donc la série $\sum_{k \in \mathbb{N}} c_k e_k$ converge d'après le lemme 4.2.4 ; si on pose $y = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k\, e_k$, on a $y = \lim_n x_n$.

Soient $\varepsilon > 0$ donné, et $\mathrm{N}_0 \in \mathbb{N}$ assez grand pour que $\|y - x_n\| < \varepsilon/2$ pour tout $n \geq \mathrm{N}_0$; puisque la famille (e_i) est totale, il existe un vecteur $z \in \mathrm{Vect}(e_i)$ tel que $\|x - z\| < \varepsilon/2$; on peut trouver un entier $n \geq \mathrm{N}_0$ tel que $z \in \mathrm{F}_n$. D'après le lemme 4.2.2, on aura $\|x - x_n\| \leq \|x - z\| < \varepsilon/2$. Il en résulte que $\|x - y\| < \varepsilon$, pour tout $\varepsilon > 0$, donc $x = y$.

On voit qu'une base hilbertienne $(e_n)_{n\ge 0}$ de H est une suite orthonormée qui vérifie pour tout $x \in \mathrm{H}$ la première propriété indiquée dans la proposition précédente. En effet, cette propriété implique clairement que la suite $(e_n)_{n\ge 0}$ doit être totale dans H.

Exercice. Déterminants de Gram. Soient $(x_1, \ldots, x_{n+1})$ des vecteurs d'un espace de Hilbert, tels que $\mathrm{F} = \mathrm{Vect}(x_1, \ldots, x_n)$ soit de dimension n ; montrer que

$$\mathrm{dist}^2(x_{n+1}, \mathrm{F}) = \frac{\det\bigl(\langle x_i, x_j\rangle\bigr)_{i,j=1,\ldots,n+1}}{\det\bigl(\langle x_i, x_j\rangle\bigr)_{i,j=1,\ldots,n}}\,.$$

Exercice : le système de Haar. On définit une fonction «fondamentale» h sur $\mathbb{R}$ par la formule $h = \mathbf{1}_{(0,1/2)} - \mathbf{1}_{(1/2,1)}$. On définit ensuite des fonctions sur $[0,1]$ en posant $h_{0,0}(t) = h(t)$ pour $t \in [0,1]$, puis pour tout $k \ge 0$ et tout $j = 0, \ldots, 2^k - 1$

$$\forall t \in [0,1], \quad h_{k,j}(t) = 2^{k/2}\, h(2^k t - j).$$

Montrer que le système formé de la fonction constante $\mathbf{1}$ et des fonctions $(h_{k,j})$, $k \ge 0$ et $j = 0, \ldots, 2^k - 1$, constitue une base hilbertienne de $\mathrm{L}_2(0,1)$.

4.2.b. *Convergence dans* L_2 *des séries de Fourier*

Considérons l'espace de Hilbert $\mathrm{L}_2(0, 2\pi)$ des fonctions complexes de carré sommable pour la mesure $dx/2\pi$. Il est facile de vérifier que les fonctions $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ forment une suite orthonormée dans $\mathrm{L}_2(0, 2\pi)$. On a vu que ce système est total : cela résulte de ce qui a été vu à partir de l'approximation de l'unité de Rudin, qui implique que les polynômes trigonométriques sont denses dans L_p pour tout p tel que $1 \le p < +\infty$, en particulier pour $p = 2$, ou bien cela résulte du théorème plus spécifique de Fejér. La famille dénombrable $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est donc une base orthonormée de $\mathrm{L}_2([0, 2\pi], dx/2\pi)$.

Pour voir que la suite $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ est totale, on aurait pu aussi employer le marteau-pilon Stone-Weierstrass : l'espace vectoriel complexe L engendré par les $(e_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ se trouve être une algèbre, invariante par conjugaison complexe et qui sépare les points du compact $\mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$. Il en résulte que L est dense, pour la norme uniforme, dans l'espace des fonctions continues 2π-périodiques, ce qui implique la densité dans $\mathrm{L}_2(0, 2\pi)$.

Pour toute fonction $f \in \mathrm{L}_2(0, 2\pi)$, les coefficients du développement de f dans cette base sont les coefficients de Fourier complexes

$$c_n(f) = \langle f, e_n\rangle = \int_0^{2\pi} f(s)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}ns}\,\frac{ds}{2\pi}.$$

D'après Parseval, on a

$$\|f\|_2^2 = \int_0^{2\pi} |f(s)|^2\,\frac{ds}{2\pi} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)|^2.$$

Cette identité est la source d'une multitude d'exercices calculatoires, tels que par exemple le calcul de la somme de la série numérique $\sum_{n\ge 1} 1/n^2$.

On a dit qu'on écrit parfois le développement de Fourier d'une fonction $f \in \mathrm{L}_2$ sous la forme

$$f(x) \sim \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx},$$

et que cette écriture ne nous dit pas que la série numérique ci-dessus converge vers $f(x)$ pour un x particulier : ce que nous savons est que f est la somme de la série de fonctions *au sens de* L_2. En fait, un théorème très difficile démontré vers 1960 par le mathématicien suédois L. Carleson affirme que pour presque tout x, la série de Fourier converge au point x et sa somme est égale à $f(x)$ (à partir de la convergence presque-partout, le fait que la somme soit $f(x)$ est facile : exercice).

Exercice. Utiliser la théorie des séries de Fourier pour retrouver, d'une façon ou d'une autre, la relation plus que classique

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Exercice. Formule de Poisson.
a. Soit f une fonction continue 2π-périodique sur $\mathbb{R}$; montrer que si $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |c_n(f)| < +\infty$, on a $f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
b. Soient F une fonction continue sur $\mathbb{R}$, telle que $|\mathrm{F}(x)| \le \mathrm{C}\,(1+|x|)^{-a}$ pour un $a > 1$ et tout $x \in \mathbb{R}$, et $\widehat{\mathrm{F}}$ sa transformée de Fourier ; montrer que la fonction f définie par $f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \mathrm{F}(x + 2\pi n)$ est continue et 2π-périodique. Trouver une relation entre les valeurs $\widehat{\mathrm{F}}(n)$, $n \in \mathbb{Z}$ et les coefficients de Fourier de f.
c. On suppose de plus que $\sum |\widehat{\mathrm{F}}(n)| < +\infty$. Démontrer la *formule de Poisson*,

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \mathrm{F}(2\pi n) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{\mathrm{F}}(n).$$

Appliquer avec $\mathrm{F}(x) = \mathrm{e}^{-a|x|}$, $a > 0$.

4.2.c. *Séries de Fourier à plusieurs variables*

Donnons une idée du cas $d = 2$; le produit scalaire sur $\mathrm{L}_2([0, 2\pi]^2)$ est alors donné par

$$\langle f, g\rangle = \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f(s,t)\overline{g(s,t)}\,\frac{ds\,dt}{4\pi^2}.$$

On considère les fonctions définies sur $\mathbb{R}^2$ par

$$e_{m,n}(s,t) = e_m(s)e_n(t) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}(ms+nt)},$$

indexées par $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$. On vérifie facilement qu'elles forment encore un système orthonormé. On définira pour $f \in \mathrm{L}_1([0, 2\pi]^2)$ et $m, n \in \mathbb{Z}$

$$c_{m,n}(f) = \int_{[0,2\pi]^2} f(s,t)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(ms+nt)}\,\frac{ds\,dt}{4\pi^2},$$

égal à $\langle f, e_{m,n}\rangle$ lorsque $f \in \mathrm{L}_2$. On peut montrer que ce système $(e_{m,n})$ est total dans $\mathrm{L}_2([0,2\pi]^2)$ en introduisant les puissances de la fonction $\varphi \geq 0$ définie par

$$\varphi(s,t) = (1+\cos s)(1+\cos t),$$

qui atteint un unique maximum sur $[-\pi,\pi]^2$ en $(0,0)$ (voir le chapitre 3, section 3.4.c) ; les puissances de cette fonction sont des polynômes trigonométriques en deux variables. En fait la totalité de cette suite double résulte d'un fait général : si (f_m) est une base hilbertienne de $\mathrm{L}_2(\mathrm{X},\mu)$ et si (g_n) est une base hilbertienne de $\mathrm{L}_2(\mathrm{Y},\nu)$, les fonctions $(s,t) \to f_m(s)g_n(t)$ forment une base hilbertienne de $\mathrm{L}_2(\mathrm{X}\times\mathrm{Y},\mu\otimes\nu)$.

Disons quelques mots de la convergence ponctuelle. On introduit les sommes de Fourier doubles,

$$\mathrm{S}_\mathrm{N}^{(2)} f = \sum_{|m|,|n|\leq \mathrm{N}} c_{m,n}(f)\, e_{m,n}.$$

Si u est une fonction d'une variable et si $g(x,y) = u(x)$, il est facile de vérifier que

$$(\mathrm{S}_\mathrm{N}^{(2)} g)(x,y) = (\mathrm{S}_\mathrm{N} u)(x),$$

et le résultat analogue si $g(x,y) = v(y)$. Il y a donc convergence simple des sommes de Fourier doubles si g est hölderienne et ne dépend en fait que d'une seule variable. Si f est une fonction doublement 2π-périodique et α-hölderienne, $0 < \alpha \leq 1$, introduisons

$$\varphi(x,y) = f(x,y) - f(x,0) - f(0,y) + f(0,0).$$

Il est facile de voir que φ est α-hölderienne ; de plus on constate que

$$|\varphi(x,y)| \leq |f(x,y) - f(0,y)| + |f(x,0) - f(0,0)| \leq \mathrm{M}\,|x|^\alpha,$$

et de même on voit que $|\varphi(x,y)| \leq \mathrm{M}\,|y|^\alpha$; ainsi

$$|\varphi(x,y)| = |\varphi(x,y)|^{1/2}|\varphi(x,y)|^{1/2} \leq \mathrm{M}\,|x|^{\alpha/2}|y|^{\alpha/2}\,;$$

on voit ensuite que

$$(\mathrm{S}_\mathrm{N}^{(2)}\varphi)(0,0) = \int_{[0,2\pi]^2} \varphi(-s,-t)\mathrm{D}_\mathrm{N}(s)\mathrm{D}_\mathrm{N}(t)\,\frac{ds\,dt}{4\pi^2} =$$

$$\int_{[0,2\pi]^2} \frac{\varphi(-s,-t)}{\sin(s/2)\sin(t/2)}\,\sin((\mathrm{N}+1/2)s)\sin((\mathrm{N}+1/2)t)\,\frac{ds\,dt}{4\pi^2},$$

et

$$\int_{[0,2\pi]^2} \Bigl|\frac{\varphi(-s,-t)}{\sin(s/2)\sin(t/2)}\Bigr|\,\frac{ds\,dt}{4\pi^2} < \infty$$

par les majorations obtenues sur φ. On en déduit que $(\mathrm{S}_\mathrm{N}^{(2)}\varphi)(0,0)$ tend vers 0 par Riemann-Lebesgue en deux variables, et on conclut finalement que

$$f(0,0) = \lim_\mathrm{N}\,(\mathrm{S}_\mathrm{N}^{(2)} f)(0,0).$$

Bien sûr le point $(0,0)$ ne joue aucun rôle particulier, et la convergence ponctuelle est vraie pour tout point (x,y).

4.2.d. *Théorème de projection*

Si C est un convexe fermé non vide d'un espace de Hilbert H et x un point de H, il existe un point unique $y \in \mathrm{C}$ tel que

$$\|x-y\| = \mathrm{dist}(x, \mathrm{C}).$$

On obtient ce résultat en considérant la famille des fermés non vides

$$\mathrm{F}_\varepsilon = \{z \in \mathrm{C} : \|x-z\|^2 \le d^2 + \varepsilon^2\}$$

où $d = \mathrm{dist}(x, \mathrm{C})$ et $\varepsilon > 0$; le fermé F_ε décroît quand ε décroît vers 0, avec diamètre tendant vers 0. On voit en effet avec la relation du parallélogramme que $\mathrm{diam}(\mathrm{F}_\varepsilon) \le 2\varepsilon$: si u, v sont deux points de F_ε, posons $m = x - (u+v)/2$ et $h = (u-v)/2$. Alors $(u+v)/2 \in \mathrm{C}$ par la convexité de C, donc $\|m\| \ge d$ et

$$2\,(d^2+\varepsilon^2) \ge \|x-u\|^2 + \|x-v\|^2 = \|m-h\|^2 + \|m+h\|^2 =$$

$$= 2\|m\|^2 + 2\|h\|^2 \ge 2d^2 + 2\|h\|^2,$$

donc $\|h\| \le \varepsilon$, et le sup des valeurs de $\|h\|$ est égal au demi-diamètre de F_ε.

Dans le cas où $\mathrm{C} = \mathrm{F}$ est un sous-espace vectoriel fermé, on montre que la projection de plus courte distance $y = \mathrm{P_F}\, x$ est caractérisée par

$$\mathrm{P_F}\, x \in \mathrm{F} \quad \text{et} \quad x - \mathrm{P_F}\, x \perp \mathrm{F}.$$

Il en résulte que l'application $\mathrm{P_F}$ est un projecteur linéaire de H sur F. Si ℓ est une forme linéaire non nulle sur H, on peut trouver un vecteur $v_1 \in \mathrm{H}$ tel que $\ell(v_1) \ne 0$; posons $\mathrm{F} = \ker \ell$, et $w = \mathrm{P_F}\, v_1$. Alors $\ell(v_1 - w) = \ell(v_1) \ne 0$; le vecteur $v_1 - w$ est orthogonal à F ; posons

$$v_0 = \frac{1}{\ell(v_1 - w)}\,(v_1 - w).$$

Le vecteur v_0 est orthogonal à F et $\ell(v_0) = 1$. Soit x un vecteur quelconque de H ; le vecteur $x - \ell(x)\,v_0$ est dans $\ker \ell = \mathrm{F}$, ce qui entraîne que

$$0 = \langle x - \ell(x) v_0, v_0 \rangle$$

et donc

$$\ell(x) = \langle x, \frac{1}{\langle v_0, v_0 \rangle}\, v_0 \rangle.$$

Ceci montre que la forme linéaire continue ℓ est représentée par le produit scalaire avec le vecteur $v = \|v_0\|^{-2} v_0$.

Théorème. *Pour toute forme linéaire continue ℓ sur un espace de Hilbert* H, *il existe un vecteur $v \in \mathrm{H}$ unique tel que*

$$\forall x \in \mathrm{H}, \quad \ell(x) = \langle x, v \rangle.$$

4.3. Transformation de Fourier

4.3.a. *Fourier de* $\mathrm{L}_1(\mathbb{R}^d)$

À toute fonction réelle ou complexe $f \in \mathrm{L}_1(\mathbb{R}^d)$ on associe sa *transformée de Fourier* $\widehat{f}$, définie sur $\mathbb{R}^d$ par la formule

$$\forall t \in \mathbb{R}^d, \quad \widehat{f}(t) = \int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\, t \cdot x} f(x)\, dx,$$

où la notation $t \cdot x$ représente le produit scalaire $t_1\, x_1 + \cdots + t_d\, x_d$ des deux vecteurs $t = (t_1, \ldots, t_d)$ et $x = (x_1, \ldots, x_d)$ de $\mathbb{R}^d$. L'application du théorème de convergence dominée à la famille des fonctions $g_t(x) = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\, x \cdot t} f(x)$, dont les modules sont majorés par la fonction intégrable fixe $x \to |f(x)|$, montre que $\widehat{f}$ est continue. Il est clair que

$$\|\widehat{f}\|_\infty \le \|f\|_1.$$

On a vu de plus que $\widehat{f}$ appartient au sous-espace fermé $\mathrm{C}_0(\mathbb{R}^d)$ de $\mathrm{C}_b(\mathbb{R}^d)$, formé des fonctions continues qui tendent vers 0 à l'infini (lemme de Riemann-Lebesgue 4.1.1). On peut donc dire que $f \to \widehat{f}$ est un opérateur linéaire de norme ≤ 1, de $\mathrm{L}_1(\mathbb{R}^d)$ dans $\mathrm{C}_0(\mathbb{R}^d)$.

Avec Fubini, on voit que lorsque $f, g \in \mathrm{L}_1(\mathbb{R}^d)$, la transformée de Fourier de $f * g$ est égale au produit $\widehat{f}\,\widehat{g}$ des transformées de Fourier,

$$\text{(FC)} \qquad \forall t \in \mathbb{R}^d, \quad (\widehat{f * g})(t) = \widehat{f}(t)\, \widehat{g}(t)\,;$$

on utilise $h(x, y) = f(x-y) g(y)\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\, x \cdot t}$, dont le module est $(x, y) \to |f(x-y) g(y)|$ et dont on a vérifié l'intégrabilité lors de l'étude de la convolution.

Dilatations et Fourier

Soit $f \in \mathrm{L}_1(\mathbb{R}^d)$; pour tout $\lambda > 0$ posons

$$\forall x \in \mathbb{R}^d, \quad f_{[\lambda]}(x) = \lambda^d f(\lambda x).$$

On voit par le changement de variable $y = \lambda x$ que $f_{[\lambda]}$ a la même intégrale et la même norme dans $\mathrm{L}_1(\mathbb{R}^d)$ que f. On trouve immédiatement par le même changement de variable que

$$\forall t \in \mathbb{R}^d, \quad \widehat{f_{[\lambda]}}(t) = \widehat{f}(t/\lambda).$$

Dans le même ordre d'idées, désignons par σ l'application qui associe à toute fonction f la fonction $\sigma f : x \to f(-x)$. Cette application σ est une involution linéaire isométrique de tous les espaces $\mathrm{L}_p(\mathbb{R}^d)$. Désignons par $\mathcal{F}_1$ l'application $f \to \widehat{f}$ définie sur $\mathrm{L}_1(\mathbb{R}^d)$. On voit que

$$\text{(FS)} \qquad \mathcal{F}_1 \circ \sigma = \sigma \circ \mathcal{F}_1\,;$$

ceci équivaut à dire que $\sigma\, \widehat{f} = \widehat{\sigma f}$ pour toutes les fonctions f de L_1 ; on a en effet

$$(\sigma\, \widehat{f})(t) = \widehat{f}(-t) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\, x \cdot t}\, dx = \int_{\mathbb{R}^d} f(-y)\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\, y \cdot t}\, dy = (\widehat{\sigma f})\,(t).$$

Fourier et dérivations

Désignons par $\mathrm{D}_1, \ldots, \mathrm{D}_d$ les d opérateurs de dérivation partielle dans $\mathbb{R}^d$. Ainsi, si $x = (x_1, \ldots, x_d)$ la notation $(\mathrm{D}_1 f)(x)$ désigne la première dérivée partielle de f au point x, qui est égale à la dérivée au point $x_1 \in \mathbb{R}$ de la fonction $t \in \mathbb{R} \to f(t, x_2, \ldots, x_d)$. On peut voir en exercice le résultat suivant.

Soit j tel que $1 \le j \le d$; si f et $x \to x_j f(x)$ sont intégrables sur $\mathbb{R}^d$, alors $\widehat{f}$ admet une $j$ième dérivée partielle, donnée par

$$\forall t \in \mathbb{R}^d, \quad \big(\mathrm{D}_j \widehat{f}\,\big)(t) = \int_{\mathbb{R}} \big(-\mathrm{i} x_j f(x)\big)\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\, x \cdot t}\, dx$$

c'est-à-dire que $i\mathrm{D}_j \widehat{f}$ est la transformée de Fourier de $x \to x_j f(x)$. Il suffit de dériver sous l'intégrale, à la Lebesgue dominé. On a aussi le résultat suivant.

Soit j tel que $1 \le j \le d$; si f et $\mathrm{D}_j f$ sont dans $\mathrm{L}_1(\mathbb{R}^d)$, alors

$$\forall t \in \mathbb{R}^d, \quad (\widehat{\mathrm{D}_j f})(t) = \mathrm{i} t_j \widehat{f}(t).$$

Vérification. On commence en dimension $d = 1$, en supposant donc f et f' intégrables sur $\mathbb{R}$. On procède par intégration par parties,

$$\int_a^b f'(x)\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i} x t}\, dx = \Big[f(x)\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i} x t} \Big]_{x=a}^{b} - \int_a^b f(x)(-\mathrm{i} t)\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i} x t}\, dt.$$

Comme f est intégrable, on peut trouver, pour tout $\varepsilon > 0$ donné, deux valeurs a, b telles que $a < -1/\varepsilon$, $1/\varepsilon < b$ et $|f(a)|, |f(b)| < \varepsilon$. On en déduit le résultat annoncé.

En plusieurs variables, on commence avec Fubini par une intégration dans la variable x_j ; on se trouve alors dans le cas qui vient d'être traité ; ensuite on intègre dans les autres variables.

4.3.b. *Des séries de Fourier à la transformation de Fourier*

On va commencer par établir *l'inversion de Fourier* dans un cas simple, et on verra que la connaissance de ce seul cas permet de trouver assez facilement les propriétés générales de la transformation.

Supposons que f soit de classe C^2 à support dans un intervalle compact $[-a, a]$. Alors f'' est intégrable, et on sait que la transformée de Fourier de f'' est bornée, puisque $f'' \in \mathrm{L}_1(\mathbb{R})$, et $\widehat{f''}(t)$ est égale à $-t^2 \widehat{f}(t)$; on en déduit que $t \to (1 + t^2)\widehat{f}(t)$ est la transformée de Fourier de $f - f''$, donc

$$|(1 + t^2)\widehat{f}(t)| \le \|f - f''\|_1 \le \|f\|_1 + \|f''\|_1.$$

En particulier, la fonction $\widehat{f}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$, puisqu'elle admet un majorant de la forme $\mathrm{M}(1 + t^2)^{-1}$.

Choisissons un entier N tel que $\mathrm{N}\pi > a$. On va appliquer à la fonction f les résultats de convergence ponctuelle des séries de Fourier, mais en commençant par changer d'échelle pour nous ramener à notre normalisation favorite. Considérons la fonction 2π-périodique $g_{\rm N}$ définie en posant

$$\forall x \in [-\pi, \pi[, \quad g_{\rm N}(x) = f({\rm N}x).$$

Pour tout point $x \in]-\pi, \pi[$, le critère de Dirichlet-Dini du corollaire 4.1.4 est satisfait avec $\ell = g_{\rm N}(x)$, puisque $g_{\rm N}$ est dérivable au point x (voir aussi la remarque qui suit ce corollaire) ; on a donc la convergence ponctuelle de la série de Fourier,

$$g_{\rm N}(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_k(g_{\rm N})\,{\rm e}^{{\rm i}kx}\,.$$

On calcule pour tout $k \in \mathbb{Z}$, en posant $y = {\rm N}x$

$$\begin{aligned} c_k(g_{\rm N}) &= \int_{-\pi}^{\pi} g_{\rm N}(x)\,{\rm e}^{-{\rm i}kx}\,\frac{dx}{2\pi} = (2\pi{\rm N})^{-1}\int_{-{\rm N}\pi}^{{\rm N}\pi} f(y)\,{\rm e}^{-{\rm i}ky/{\rm N}}\,dy \\ &= (2\pi{\rm N})^{-1}\int_{\mathbb{R}} f(y)\,{\rm e}^{-{\rm i}ky/{\rm N}}\,dy = (2\pi{\rm N})^{-1}\widehat{f}(k/{\rm N}). \end{aligned}$$

Soit $y \in \mathbb{R}$ quelconque, et posons $y = {\rm N}x$; pour N assez grand, on aura $|x| < \pi$, donc

$$f(y) = g_{\rm N}(x) = \frac{1}{2\pi{\rm N}}\sum_{k\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(k/{\rm N})\,{\rm e}^{{\rm i}yk/{\rm N}}\,.$$

Si on pose $h(t) = \widehat{f}(t)\,{\rm e}^{{\rm i}yt}$, l'expression précédente fait intervenir une sorte de somme de Riemann pour la fonction h,

$$\frac{1}{\rm N}\sum_{k\in\mathbb{Z}} h(k/{\rm N})$$

correspondant à une subdivision (infinie) de $\mathbb{R}$ en intervalles de longueur $1/{\rm N}$, avec les points de subdivision $t_k = k/{\rm N}$, $k \in \mathbb{Z}$. On justifiera plus bas au lemme 4.3.2 la formule de Riemann généralisée

$$\lim_{{\rm N}\to+\infty}\frac{1}{\rm N}\sum_{k\in\mathbb{Z}} h(k/{\rm N}) = \int_{\mathbb{R}} h(t)\,dt,$$

qui conduit donc à la formule d'inversion du lemme 4.3.1, puisque

$$\frac{1}{2\pi{\rm N}}\sum_{k\in\mathbb{Z}} h(k/{\rm N}) = f(y)$$

pour tout N assez grand.

Lemme 4.3.1. *Si f est C^2 à support compact sur $\mathbb{R}$, la fonction $\widehat{f}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ et on a pour tout $y \in \mathbb{R}$ l'égalité*

$$f(y) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(t)\,{\rm e}^{{\rm i}ty}\,dt.$$

Justifions l'affirmation sur la convergence des sommes de Riemann infinies de la fonction h précédente : on appliquera le lemme qui suit deux fois, une fois sur $[0, +\infty[$ et une autre sur $]-\infty, 0]$, en prenant $\mathrm{F} = h$, et on aura

$$|\mathrm{F}(t)| = |h(t)| = |\widehat{f}(t)| \leq \mathrm{G}(t) := \mathrm{M}(1+t^2)^{-1}$$

avec $\mathrm{M} = \|f\|_1 + \|f''\|_1$.

Lemme 4.3.2. *On suppose que* F *est continue sur* $[0, +\infty[$, *que* $|\mathrm{F}| \leq \mathrm{G}$ *où* G *est décroissante sur* $[0, +\infty[$ *et* $\int_0^{+\infty} \mathrm{G}(t)\, dt < +\infty$. *On a*

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{F}(t)\, dt = \lim_{\mathrm{N} \to +\infty} \frac{1}{\mathrm{N}} \sum_{k=1}^{+\infty} \mathrm{F}(k/\mathrm{N}).$$

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$ donné, choisissons A entier tel que

$$\int_{\mathrm{A}}^{+\infty} \mathrm{G}(t)\, dt < \varepsilon/3, \quad \text{ce qui entraîne} \quad \Bigl| \int_{\mathrm{A}}^{+\infty} \mathrm{F}(t)\, dt \Bigr| < \varepsilon/3\,;$$

la convergence des sommes de Riemann pour l'intégrale sur le compact $[0, \mathrm{A}]$ permet de trouver un entier N_0 tel que pour tout $\mathrm{N} \geq \mathrm{N}_0$ on ait

$$\Bigl| \int_0^{\mathrm{A}} \mathrm{F}(t)\, dt - \frac{1}{\mathrm{N}} \sum_{k=1}^{\mathrm{NA}} \mathrm{F}(k/\mathrm{N}) \Bigr| < \varepsilon/3\,;$$

pour tout $k > \mathrm{NA}$, on a $\mathrm{N}^{-1}|\mathrm{F}(k/\mathrm{N})| \leq \mathrm{N}^{-1}\mathrm{G}(k/\mathrm{N}) \leq \int_{(k-1)/\mathrm{N}}^{k/\mathrm{N}} \mathrm{G}(t)\, dt$, donc

$$\Bigl| \frac{1}{\mathrm{N}} \sum_{k > \mathrm{NA}} \mathrm{F}(k/\mathrm{N}) \Bigr| \leq \int_{\mathrm{A}}^{+\infty} \mathrm{G}(t)\, dt < \varepsilon/3.$$

Le résultat en découle par l'inégalité triangulaire,

$$\Bigl| \int_0^{+\infty} \mathrm{F}(t)\, dt - \frac{1}{\mathrm{N}} \sum_{k=1}^{+\infty} \mathrm{F}(k/\mathrm{N}) \Bigr| < \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3.$$

Inversion de Fourier, suite

Supposons que φ soit une fonction ≥ 0 sur $\mathbb{R}$, de classe C^∞ à support compact, et telle que $\int_{\mathbb{R}} \varphi = 1$. Le lemme 4.3.1 s'appliquera à chacune des fonctions φ_n de l'approximation de l'unité constituée comme à l'habitude en posant $\varphi_n(x) = n\varphi(nx)$ pour tout $n \geq 1$. On aura donc pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$\varphi_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \widehat{\varphi}_n(t)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}tx}\, dt.$$

On aura un phénomène analogue en toute dimension $d \ge 1$; par exemple, si $d = 2$ et si on pose $\psi_n(x_1, x_2) = \varphi_n(x_1)\varphi_n(x_2)$, on aura directement avec Fubini, pour tout $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$

$$\psi_n(x) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{R}^2} \widehat{\varphi}_n(t_1)\widehat{\varphi}_n(t_2) \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(t_1x_1+t_2x_2)} \, dt_1 \, dt_2,$$

et

$$\widehat{\varphi}_n(t_1)\widehat{\varphi}_n(t_2) = \int_{\mathbb{R}^2} \varphi_n(y_1)\varphi_n(y_2) \, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(y_1t_1+y_2t_2)} \, dy_1 \, dy_2 = \widehat{\psi}_n(t).$$

On affirmera donc que

il existe une approximation de l'unité (φ_n) dans $\mathrm{L}_1(\mathbb{R}^d)$ formée de fonctions dont la transformée de Fourier est intégrable, et telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}^d, \quad \varphi_n(x) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{\varphi}_n(t) \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}t\cdot x} \, dt. \tag{2}$$

Théorème 4.3.3. *Si f et $\widehat{f}$ sont dans $\mathrm{L}_1(\mathbb{R}^d)$, la fonction f "est" continue, c'est-à-dire que la classe de f admet un représentant continu ; en effet, on a pour presque tout $x \in \mathbb{R}^d$,*

$$f(x) = (2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{f}(t) \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}x\cdot t} \, dt.$$

où la deuxième expression est continue en x ; si f est déjà donnée sous la forme d'une fonction continue définie sur $\mathbb{R}^d$, l'égalité précédente est donc vraie pour tout x.

Démonstration. Reprenons l'approximation de l'unité (φ_n). On a pour tout n et tout $x \in \mathbb{R}^d$, en utilisant (2) puis Fubini,

$$\begin{aligned}(\varphi_n * f)(x) &= \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)\varphi_n(y) \, dy = (2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{R}^d} f(x-y)\Bigl(\int_{\mathbb{R}^d} \widehat{\varphi}_n(t) \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}y\cdot t} \, dt\Bigr) \, dy \\ &= (2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{\varphi}_n(t)\Bigl(\int_{\mathbb{R}^d} f(x-y) \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}y\cdot t} \, dy\Bigr) \, dt = (2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{\varphi}_n(t)\widehat{f}(t) \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}x\cdot t} \, dt.\end{aligned}$$

On a vu que $\widehat{\varphi}_n(t) = \widehat{\varphi}(t/n)$, qui tend simplement vers 1 car

$$\widehat{\varphi}_n(t) = \int_{\mathbb{R}^d} n^d\varphi(nx) \, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t\cdot x} \, dx = \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(y) \, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}y\cdot t/n} \, dy = \widehat{\varphi}(t/n) \to \widehat{\varphi}(0) = \int_{\mathbb{R}^d} \varphi = 1 \,;$$

on a la majoration $|\widehat{\varphi}_n| \le \|\varphi_n\|_1 = 1$; puisqu'on a supposé que $\widehat{f} \in \mathrm{L}_1(\mathbb{R}^d)$, on peut appliquer le théorème de convergence dominée à la suite d'intégrales ci-dessus pour obtenir que

$$\forall x \in \mathbb{R}^d, \quad \lim_n \, (\varphi_n * f)(x) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{f}(t) \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}x\cdot t} \, dt.$$

Par ailleurs, on sait que la suite $(\varphi_n * f)$ tend vers f dans $\mathrm{L}_1(\mathbb{R}^d)$ d'après les résultats généraux sur l'approximation par convolution. Le rapprochement des deux résultats montre que f est presque partout égale à la limite précédente. Autrement dit, la formule

$$\forall x \in \mathbb{R}^d, \quad \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{f}(t) \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}x\cdot t} \, dt$$

définit un représentant continu de la fonction f.

Remarque. La transformation de Fourier est injective sur $\mathrm{L}_1(\mathbb{R}^d)$. En effet, si une fonction $f \in \mathrm{L}_1(\mathbb{R}^d)$ vérifie $\widehat{f} = 0$, on a bien $\widehat{f} \in \mathrm{L}_1(\mathbb{R}^d)$ et la formule d'inversion précédente s'applique, donnant $f = 0$.

Fourier des Gaussiennes

On montre en dimension un, puis en dimension d, que

$$\int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\, t\cdot x}\, \mathrm{e}^{-|x|^2/2}\, \frac{dx}{(2\pi)^{d/2}} = \mathrm{e}^{-|t|^2/2}$$

où on a noté par $|t|$ la norme euclidienne du vecteur t. Ce résultat se démontre en dimension un, par exemple par des considérations d'intégrales de contour, et le résultat sur $\mathbb{R}^d$ se déduit par Fubini ; on peut aussi utiliser une équation différentielle, ou bien le passage par la transformée de Laplace et l'holomorphie. Développons rapidement cette dernière approche : posons $g(x) = (2\pi)^{-1/2}\, \mathrm{e}^{-x^2/2}$ pour $x \in \mathbb{R}$; on calcule facilement pour s réel

$$\mathrm{L}(s) = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-sx}\, g(x)\, dx = \mathrm{e}^{s^2/2} \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-(x-s)^2/2}\, \frac{dx}{(2\pi)^{1/2}} = \mathrm{e}^{s^2/2}\,.$$

On montre ensuite que la formule pour $\mathrm{L}(s)$ définit une fonction entière sur $\mathbb{C}$, nécessairement égale à la fonction entière $s \to \mathrm{e}^{s^2/2}$ (principe des zéros isolés : la fonction entière $z \to \mathrm{L}(z) - \mathrm{e}^{z^2/2}$, nulle sur l'axe réel, doit être nulle en tout point de $\mathbb{C}$) ; on conclut en appliquant à $s = \mathrm{i}t$, t réel. Posons encore en dimension d

$$\forall x \in \mathbb{R}^d, \quad g_d(x) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}}\, \mathrm{e}^{-|x|^2/2}\,.$$

On obtient immédiatement

$$\widehat{g_d}(t) = \mathrm{e}^{-|t|^2/2}$$

car les d variables d'intégration « se séparent ».

4.3.c. *Fourier dans* $\mathrm{L}_2(\mathbb{R}^d)$

Désignons par X l'ensemble formé de toutes les fonctions f continues sur $\mathbb{R}^d$, telles que f et $\widehat{f}$ soient intégrables sur $\mathbb{R}^d$; on a vu au théorème 4.3.3 que f vérifie la *formule d'inversion*

$$\text{(I)} \qquad \forall x \in \mathbb{R}^d, \quad f(x) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{f}(t)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\, t\cdot x}\, dt.$$

Il est clair que X est un espace vectoriel de fonctions. On a vu qu'il existe une approximation de l'unité (φ_n) qui est contenue dans X. On va montrer qu'à partir de là, on peut étendre considérablement nos possibilités d'inverser Fourier pour d'autres fonctions.

Pas a. Si $k \in \mathrm{X}$, alors $f * k \in \mathrm{X}$ pour toute fonction $f \in \mathrm{L}_1(\mathbb{R}^d)$. Autrement dit, on a l'inclusion $\mathrm{L}_1 * \mathrm{X} \subset \mathrm{X}$.

Preuve. Pour commencer, $\widehat{f * k} = \widehat{f}\, \widehat{k}$ est intégrable comme produit de la fonction bornée $\widehat{f}$ par la fonction intégrable $\widehat{k}$. De plus, on sait que $\mathrm{L}_1 * \mathrm{L}_1 \subset \mathrm{L}_1$ d'après le chapitre 3.

On voit de même que σk est dans X quand $k \in \mathrm{X}$; on a posé $(\sigma k)(x) = k(-x)$ pour tout x, et vérifié que $\widehat{\sigma k} = \sigma \widehat{k}$, qui est bien dans L_1. On remarque aussi que $\widehat{k}$ est dans X quand $k \in \mathrm{X}$; en effet, la définition de $k \in \mathrm{X}$ est que $(2\pi)^d k = \sigma \widehat{\widehat{k}}$, donc $\widehat{k}$ a une transformée de Fourier intégrable, $\widehat{\widehat{k}} = (2\pi)^d \sigma k$.

Pas b. Si $k \in \mathrm{X}$, on a

$$\int_{\mathbb{R}^d} |k(x)|^2 \, dx = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} |\widehat{k}(t)|^2 \, dt.$$

Preuve. Si une fonction g est à la fois intégrable et bornée par un nombre M, elle est de carré intégrable puisque dans ce cas

$$\int_{\mathbb{R}^d} |g(x)|^2 \, dx \leq \mathrm{M} \int_{\mathbb{R}^d} |g(x)| \, dx.$$

Si $k \in \mathrm{X}$, elle est intégrable, et bornée par $\|\widehat{k}\|_1/(2\pi)^d$ d'après la formule (I). De même, $\widehat{k}$ est supposée intégrable, et elle est bornée par $\|k\|_1$. Ainsi on a $k, \widehat{k} \in \mathrm{L}_2(\mathbb{R}^d)$. Pour le reste, c'est encore le théorème de Fubini

$$(2\pi)^d \int k(x)\overline{k(x)} \, dx = \int k(x)\overline{\Big(\int \widehat{k}(t) \, \mathrm{e}^{\mathrm{i} t \cdot x} \ dt\Big)} \, dx = \int \int k(x)\overline{\widehat{k}(t)} \, \mathrm{e}^{-\mathrm{i} t \cdot x} \ dx \, dt$$

$$= \int \Big(\int k(x) \, \mathrm{e}^{-\mathrm{i} t \cdot x} \ dx\Big)\overline{\widehat{k}(t)} \, dt = \int \widehat{k}(t) \, \overline{\widehat{k}(t)} \, dt.$$

Pas c. L'espace X est dense dans $\mathrm{L}_2(\mathbb{R}^d)$.

Preuve. Soit f une fonction quelconque dans $\mathrm{L}_2(\mathbb{R}^d)$; on peut trouver une fonction f_1 continue à support compact telle que $\|f - f_1\|_2 < \varepsilon/2$. Maintenant f_1 est à la fois dans L_1 et dans L_2 ; si on considère une approximation de l'unité $(g_n) \subset \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$, on sait que les $\widehat{g}_n$ sont intégrables, donc $g_n \in \mathrm{X}$; on sait que $f_1 * g_n$ converge vers f_1 dans L_2 d'après les résultats généraux sur les approximations de l'unité, et $f_1 * g_n \in \mathrm{X}$ par le pas **a**. Pour n assez grand, on aura un élément $f_2 = f_1 * g_n \in \mathrm{X}$ tel que $\|f_1 - f_2\|_2 < \varepsilon/2$, donc finalement $\|f - f_2\|_2 < \varepsilon$.

Faisons un dernier petit pas pour obtenir la transformation de Fourier pour l'espace de Hilbert $\mathrm{L}_2(\mathbb{R}^d)$.

Théorème 4.3.4 : prolongement à L_2 de la transformation de Fourier. *La transformation de Fourier définie sur* X *se prolonge en une application linéaire continue* $\mathcal{F}$ *de* $\mathrm{L}_2(\mathbb{R}^d)$ *dans lui-même, et on a pour toute fonction* $f \in \mathrm{L}_2(\mathbb{R}^d)$

$$\int_{\mathbb{R}^d} |(\mathcal{F}f)(t)|^2 \, dt = (2\pi)^d \int_{\mathbb{R}^d} |f(x)|^2 \, dx.$$

De plus, la transformation de Fourier $\mathcal{F}$ *est inversible dans* $\mathcal{L}(\mathrm{L}_2(\mathbb{R}^d))$, *et son inverse est égal à*

$$\mathcal{F}^{-1} = (2\pi)^{-d} \sigma \circ \mathcal{F} = (2\pi)^{-d} \mathcal{F} \circ \sigma.$$

Démonstration. D'après le pas **b**, l'application $f \in \mathrm{X} \to \widehat{f}$ est continue de X, muni de la norme de L_2, à valeurs dans L_2. Par prolongement des applications uniformément continues définies sur un sous-espace dense, à valeurs dans un espace complet, il existe un prolongement unique $\mathcal{F}$ de cette application en une application continue de $\mathrm{L}_2(\mathbb{R}^d)$ dans $\mathrm{L}_2(\mathbb{R}^d)$. Il est clair que ce prolongement est linéaire, puisque l'application initiale est linéaire sur l'espace vectoriel X.

De plus, si $(f_n) \subset \mathrm{X}$ converge vers f dans L_2, l'image $\mathcal{F}f$ est limite dans L_2 de la suite $(\mathcal{F}f_n)$ ce qui entraîne en utilisant le point **b** que

$$\|\mathcal{F}f\|_2^2 = \lim_n \|\mathcal{F}f_n\|_2^2 = (2\pi)^d \lim_n \|f_n\|_2^2 = (2\pi)^d \, \|f\|_2^2.$$

On a vu à l'équation (FS) que $\sigma \circ \mathcal{F}_1 = \mathcal{F}_1 \circ \sigma$ sur L_1, en particulier $\sigma \widehat{f} = \widehat{\sigma f}$ pour toute $f \in \mathrm{X}$; ceci signifie que l'application continue de $\mathrm{L}_2(\mathbb{R}^d)$ dans $\mathrm{L}_2(\mathbb{R}^d)$ définie par $\sigma \circ \mathcal{F} - \mathcal{F} \circ \sigma$ est nulle sur le sous-espace dense X ; il en résulte que le prolongement $\mathcal{F}$ vérifie $\sigma \circ \mathcal{F} = \mathcal{F} \circ \sigma$. Lorsque $f \in \mathrm{X}$, la formule d'inversion montre que $(2\pi)^{-d}(\sigma \circ \mathcal{F})(\mathcal{F}f) = f$; puisque $(2\pi)^{-d}\sigma \circ \mathcal{F} \circ \mathcal{F}$ est continue sur L_2 et égale à l'identité sur le sous-espace dense X, on en déduit que

$$\mathcal{F} \circ \Big((2\pi)^{-d}\big(\sigma \circ \mathcal{F}\big)\Big) = (2\pi)^{-d}\mathcal{F} \circ \sigma \circ \mathcal{F} = (2\pi)^{-d}\big(\sigma \circ \mathcal{F}\big) \circ \mathcal{F} = \mathrm{Id},$$

ce qui montre que

$$(2\pi)^{-d}\sigma \circ \mathcal{F}$$

est l'inverse de $\mathcal{F}$. La transformation de Fourier définit donc un isomorphisme surjectif de L_2 sur L_2. On voit que $\mathrm{U} = (2\pi)^{-d/2}\mathcal{F}$ est un opérateur unitaire sur $\mathrm{L}_2(\mathbb{R}^d)$.

Remarque. On peut voir l'inversion de Fourier d'une autre façon. Désignons par B l'application anti-linéaire de L_2 dans L_2 définie par $\mathrm{B}f = \overline{f}$ (la fonction complexe conjuguée) ; calculons $\mathrm{B}\mathcal{F}\mathrm{B}$ pour une fonction $g \in \mathrm{X}$; on aura

$$\mathcal{F}(\mathrm{B}g)(x) = \int \overline{g(x)}\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t\cdot x}\, dx,$$

puis

$$((\mathrm{B}\mathcal{F}\mathrm{B})g)(x) = \overline{\int \overline{g(x)}\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t\cdot x}\, dx} = \int g(x)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}t\cdot x}\, dx.$$

On voit donc que la formule d'inversion qui définit les éléments $f \in \mathrm{X}$ est

$$f = \frac{1}{(2\pi)^d}\, (\mathrm{B}\mathcal{F}\mathrm{B})(\mathcal{F}f).$$

On a remarqué que $\mathcal{F}$ envoie X dans X, et il est facile de voir que B envoie X dans X. Ainsi, $\mathrm{V} = (2\pi)^{-d/2}\,\mathrm{B}\mathcal{F}$ est une application antilinéaire isométrique de X dans X telle que $\mathrm{V}^2 = \mathrm{Id}$. Il est clair que cette relation se prolonge par continuité à L_2. On en déduit que

l'application $(2\pi)^{-d}\mathrm{B}\mathcal{F}\mathrm{B}$ *est l'inverse de* $\mathcal{F}$.

Remarque. Si $f \in \mathrm{L}_1(\mathbb{R}^d) \cap \mathrm{L}_2(\mathbb{R}^d)$, le prolongement $\mathcal{F}f$ obtenu à partir de X coïncide avec $\widehat{f}$ défini par la formule intégrale : si f est dans $\mathrm{L}_1 \cap \mathrm{L}_2$, on peut considérer la suite $(f_n) = (f * g_n)$, où (g_n) est une approximation de l'identité contenue dans X. Cette suite (f_n) converge en norme $\mathrm{L}_1(\mathbb{R}^d)$ vers f, donc $\widehat{f_n}$ tend uniformément vers $\widehat{f}$, et en norme $\mathrm{L}_2(\mathbb{R}^d)$ vers $\mathcal{F}f$. On en déduit que la fonction continue $\widehat{f}$ est dans la classe de $\mathcal{F}f$, c'est-à-dire que $\mathcal{F}f = \widehat{f}$, en termes moins corrects.

On dispose maintenant de deux versions de la transformée de Fourier : l'application $\mathcal{F}_1$ définie sur L_1 et $\mathcal{F}_2$ définie sur L_2, et ces deux applications coïncident sur l'intersection $\mathrm{L}_1 \cap \mathrm{L}_2$. Ceci permet d'envisager la transformation de Fourier sur l'espace $\mathrm{L}_1 + \mathrm{L}_2$, espace vectoriel de toutes les fonctions f qui peuvent s'écrire sous la forme $f = f_1 + f_2$ avec $f_1 \in \mathrm{L}_1(\mathbb{R}^d)$ et $f_2 \in \mathrm{L}_2(\mathbb{R}^d)$; si $f = f_1 + f_2$ avec $f_1 \in \mathrm{L}_1$ et $f_2 \in \mathrm{L}_2$, on voit que la fonction $\mathcal{F}_1 f_1 + \mathcal{F}_2 f_2$ ne dépend pas de la représentation particulière de la fonction f : si $f_1 + f_2 = g_1 + g_2$, alors $f_1 - g_1 = g_2 - f_2$ est dans $\mathrm{L}_1 \cap \mathrm{L}_2$, donc $\mathcal{F}_1 f_1 - \mathcal{F}_1 g_1 = \mathcal{F}_2 g_2 - \mathcal{F}_2 f_2$; ceci permet d'étendre un peu la transformée de Fourier à cet espace $\mathrm{L}_1 + \mathrm{L}_2$ en posant $\mathcal{F}f = \mathcal{F}_1 f_1 + \mathcal{F}_2 f_2$.

Pour tout $p \in [1, 2]$, l'espace $\mathrm{L}_p(\mathbb{R}^d)$ est contenu dans $\mathrm{L}_1(\mathbb{R}^d) + \mathrm{L}_2(\mathbb{R}^d)$; le *théorème de Hausdorff-Young* affirme que la restriction $\mathcal{F}_p$ de $\mathcal{F}$ à L_p est continue de L_p dans L_q, si $1/q + 1/p = 1$.

Exercice. Montrer que la quantité

$$\|f\| = \inf\{\|f_1\|_1 + \|f_2\|_2 : f = f_1 + f_2,\ f_1 \in \mathrm{L}_1,\ f_2 \in \mathrm{L}_2\}$$

définit une norme sur l'espace vectoriel $\mathrm{L}_1 + \mathrm{L}_2$, et que l'espace est complet pour cette norme. Montrer que la transformée de Fourier étendue est continue de $\mathrm{L}_1 + \mathrm{L}_2$ dans l'espace $\mathrm{L}_\infty + \mathrm{L}_2$, muni de la norme analogue.

Intégrales semi-convergentes et transformation de Fourier

Une fois le résultat précédent 4.3.4 établi, on peut remarquer que pour toute fonction $f \in \mathrm{L}_2(\mathbb{R}^d)$, la suite (f_n) définie par $f_n = \mathbf{1}_{[-n,n]^d} f$ est dans $\mathrm{L}_1(\mathbb{R}^d) \cap \mathrm{L}_2(\mathbb{R}^d)$ et tend vers f en norme L_2. D'après la continuité de $\mathcal{F}$ et son expression sur $\mathrm{L}_1(\mathbb{R}^d) \cap \mathrm{L}_2(\mathbb{R}^d)$, on voit que pour toute $f \in \mathrm{L}_2(\mathbb{R}^d)$, la transformée de Fourier $\mathcal{F}f$ est la limite en norme L_2 de la suite des fonctions

$$t \in \mathbb{R}^d \to \int_{[-n,n]^d} f(x)\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x\cdot t}\, dx.$$

Ainsi, s'il n'est pas correct de définir brutalement la transformée de Fourier sur $\mathrm{L}_2(\mathbb{R}^d)$ par l'intégrale de Fourier, on arrive à une solution correcte très voisine.

Explicitons un peu plus le cas de la dimension 1. Puisque la suite précédente converge vers $\mathcal{F}f$ en norme L_2, il existe des sous-suites qui convergent presque partout. Si l'intégrale semi-convergente

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}xt}\, dx$$

existe pour tout $t \in \mathbb{R}$, on en déduit que la fonction

$$t \in \mathbb{R} \to \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}xt}\, dx$$

appartient à la classe de $\mathcal{F}f$.

Proposition 4.3.5. *Soit f une fonction sur $\mathbb{R}$, Riemann-intégrable sur tout intervalle borné, et de carré intégrable sur $\mathbb{R}$; désignons par E l'ensemble mesurable (peut-être vide) formé des points $t \in \mathbb{R}$ tels que l'intégrale*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}tx}\,dx$$

soit une intégrale généralisée convergente. La fonction

$$t \in \mathrm{E} \to \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}tx}\,dx$$

est égale en presque tout point de E *à la restriction de* $\mathcal{F}f$ *à* E.

Démonstration. Pour tout entier $n \geq 0$ posons

$$g_n(t) = \int_{-n}^{n} f(x)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}tx}\,dx\,;$$

cette fonction est continue, égale à la transformée de Fourier de la fonction $f_n = \mathbf{1}_{(-n,n)}f$; on voit facilement que f_n tend vers f dans $\mathrm{L}_2(\mathbb{R})$, donc g_n tend vers $\mathcal{F}f$ dans $\mathrm{L}_2(\mathbb{R})$; il existe par conséquent une sous-suite g_{n_k} qui tend vers $\mathcal{F}f$ presque partout, en particulier presque partout sur E ; mais pour tout point $t \in \mathrm{E}$, la suite $g_n(t)$ tend vers l'intégrale $\mathrm{I}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}tx}\,dx$. Il en résulte que $\mathrm{I}(t) = (\mathcal{F}f)(t)$ pour presque tout $t \in \mathrm{E}$.

Remarque. La proposition 4.3.5 est particulièrement sympathique lorsque l'intégrale de Fourier est semi-convergente *pour tout* $t \in \mathbb{R}$: dans ce cas on sait que la fonction

$$t \in \mathbb{R} \to \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}tx}\,dx$$

représente la transformée de Fourier $\mathcal{F}f$.

Exercice. Si $f \in \mathrm{L}_1(\mathbb{R}^d)$ et $g \in \mathrm{L}_2(\mathbb{R}^d)$, montrer que la transformée de Fourier de $f * g$ est le produit des transformées de Fourier de f et de g.

Exercice. On pose pour tout entier $n \geq 0$ et tout $x \in \mathbb{R}$

$$\mathrm{P}_n(x) = \mathrm{e}^{x^2}\,\frac{d^n}{dx^n}\,\mathrm{e}^{-x^2}\,.$$

Montrer que P_n est un polynôme de degré n, et que $x \to \mathrm{P}_n(x)\,\mathrm{e}^{-x^2/2}$ est un vecteur propre de la transformée de Fourier. Quelles sont les valeurs propres possibles pour $\mathcal{F}$?

Exercice. Injectivité de la transformation de Laplace. Soit f une fonction sur $\mathbb{R}$, nulle en dehors d'un intervalle de la forme $[a,+\infty[$ et telle que $x \to f(x)\,\mathrm{e}^{-s_0x}$ soit intégrable pour un $s_0 \in \mathbb{R}$. On définit la *transformée de Laplace* de la fonction f sur l'ouvert $\mathrm{U} = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > s_0\}$ du plan complexe par

$$\forall z \in \mathrm{U}, \quad (\mathcal{L}f)(z) = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-zx}\,f(x)\,dx.$$

Montrer que $\mathcal{L}f$ est holomorphe dans U. Montrer que si $\mathcal{L}f$ est nulle sur un intervalle non vide de $]s_0,+\infty[$, alors f est nulle presque-partout sur $\mathbb{R}$.

Un exemple

Partons de la fonction $f = \frac{1}{2}\,\mathbf{1}_{(-1,1)}$; on calcule facilement sa transformée de Fourier

$$\widehat{f}(t) = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}xt}\,dx = \int_0^1 \cos(xt)\,dx = \frac{\sin t}{t}\cdot$$

La fonction $g(t) = (\sin t)/t$ est de carré intégrable sur $\mathbb{R}$; de plus, elle est paire, donc égale à σg ; d'après la formule d'inversion de la transformée de Fourier dans $\mathrm{L}_2(\mathbb{R})$, on sait que $\mathcal{F}g = \mathcal{F}\sigma g = \mathcal{F}\sigma\mathcal{F}f = 2\pi f$. Par ailleurs l'intégrale

$$h(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}tx}\,dt$$

converge pour tout x différent de 1 ou -1 (voir plus loin), donc vaut $2\pi f(x)$ pour presque tout x. On aimerait pouvoir conclure pour des x donnés, par exemple $x = 0$; cela sera possible si h est continue sur $(-1,1)$; on aura $h(x) = 2\pi f(x) = \pi$ pour presque tout $x \in (-1,1)$, donc $h = \pi$ sur un sous-ensemble dense de $(-1,1)$, donc pour tout $x \in (-1,1)$ par continuité. On en déduira

$$\pi = h(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt,$$

ce qui donne la formule classique $\int_0^{+\infty} (\sin(t)/t)\,dt = \pi/2\cdot$ Il reste à étudier l'intégrale qui définit $h(x)$; on calcule pour $|x| \neq 1$ la primitive

$$\mathrm{F}_x(t) = \int_0^t \sin(u)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}ux}\,du = \int_0^t \Bigl(\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}u} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}u}}{2\mathrm{i}}\Bigr)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}ux}\,du = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t(1-x)} - 1}{2(x-1)} - \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t(1+x)} - 1}{2(x+1)}$$

qui est une fonction bornée de t sur $\mathbb{R}$; sur la première expression intégrale, il est clair que $|\mathrm{F}_x(t)| \le t^2/2$; ensuite par intégration par parties,

$$\int_{-\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} g(t)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}tx}\,dt = \Bigl[\frac{\mathrm{F}_x(t)}{t}\Bigr]_{-\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} + \int_{-\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} \frac{\mathrm{F}_x(t)}{t^2}\,dt\,;$$

le terme tout intégré tend vers 0 quand $\mathrm{A}, \mathrm{B} \to +\infty$, parce que F_x est bornée, et l'intégrale de droite est absolument convergente (il n'y a pas de problème en $t = 0$). Il en résulte que pour tout x différent de 1 ou -1,

$$h(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{F}_x(t)}{t^2}\,dt,$$

une intégrale absolument convergente. Quand x reste dans un compact K qui ne contient ni 1 ni -1, il existe $\delta > 0$ tel que $|x-1| \ge \delta$ et $|x+1| \ge \delta$ pour tout $x \in \mathrm{K}$. On a alors $|\mathrm{F}_x(t)| \le 1/\delta$ et $|\mathrm{F}_x(t)|/t^2 \le 1$ pour tout t, donc la fonction $t \to \mathrm{F}_x(t)/t^2$ reste bornée par une fonction intégrable fixe de la forme $\mathrm{M}_{\mathrm{K}}(1+t^2)^{-1}$; comme F_x est visiblement continue par rapport au paramètre x, il en résulte que h est continue dans l'ouvert $(-1,1)$ (et aussi hors de $[-1,1]$). On a en fait obtenu que

$$\mathrm{J}(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)\cos(xt)}{t}\,dt = \frac{\pi}{2}$$

lorsque $|x| < 1$, et $\mathrm{J}(x) = 0$ quand $|x| > 1$. Quand $x = \pm 1$, l'intégrale précédente se ramène au cas $x = 0$, mais la valeur est $\pi/4$.

Cette valeur est comme par hasard la demi-somme des limites à droite et à gauche, comme dans le théorème de Dirichlet. On reviendra sur cette question dans la section suivante.

Convergence ponctuelle pour l'intégrale de Fourier

Le contenu de cette section est certainement hors programme, et on pourra sauter directement à la suite, page 31. On commence par exprimer l'équivalent des sommes partielles $\mathrm{S}_n f$ des séries de Fourier, en posant pour $f \in \mathrm{L}_1(\mathbb{R})$, $n \geq 1$ et $x \in \mathbb{R}$

$$(s_n f)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-n}^{n} \widehat{f}(t)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}xt}\, dt,$$

et en se demandant dans quel cas cette suite tend vers $f(x)$. Lorsque f est intégrable, on aura avec Fubini

$$(3) \qquad (s_n f)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} f(y) \Bigl(\int_{-n}^{n} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}yt}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}xt}\, dt \Bigr)\, dy = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} f(y) \frac{\sin(n(x-y))}{x-y}\, dy,$$

ce qui montre que $s_n f$ est obtenu par la convolution de f avec la fonction $y \to (\sin ny)/y$. On remarquera l'analogie avec le cas des sommes de Fourier, obtenues par convolution avec le noyau de Dirichlet.

Si $f \in \mathrm{L}_2$, il existe une suite (f_k) dans $\mathrm{L}_1 \cap \mathrm{L}_2$ qui tend vers f en norme L_2 ; les fonctions $\widehat{f_k}$ tendent vers $\widehat{f}$ dans L_2, donc, pour chaque n fixé, $\int_{-n}^{n} \widehat{f}_k(t)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}xt}\, dt$ tend vers $(s_n f)(x)$ quand $k \to +\infty$. D'un autre côté, la fonction $(\sin nx)/x$ est dans L_2, donc l'intégrale

$$(s_n f_k)(x) = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} f_k(y) \frac{\sin(n(x-y))}{x-y}\, dy$$

tend vers (3) quand $k \to +\infty$. L'expression de $s_n f$ donnée par (3) est donc valable aussi pour les fonctions de L_2, et donc pour celles de $\mathrm{L}_1 + \mathrm{L}_2$.

L'énoncé suivant est l'analogue du critère de Dirichlet-Dini, qu'on a démontré pour les séries de Fourier.

Proposition. *On suppose que $f \in \mathrm{L}_1(\mathbb{R}) + \mathrm{L}_2(\mathbb{R})$ et que pour un certain x fixé*

$$(*) \qquad \int_{-1}^{0} \Bigl| \frac{f(x+y) - \ell_-}{y} \Bigr|\, dy + \int_{0}^{1} \Bigl| \frac{f(x+y) - \ell_+}{y} \Bigr|\, dy < +\infty.$$

Alors

$$\frac{\ell_+ + \ell_-}{2} = \lim_n \frac{1}{2\pi} \int_{-n}^{n} \widehat{f}(t)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}xt}\, dt.$$

Esquisse de preuve. Par translation on se ramène facilement au cas $x = 0$, qui simplifiera un peu l'écriture. Si on choisit une fonction θ paire, C^2 à support compact, égale à 1 en 0, on sait que sa transformée de Fourier est intégrable et d'après (3)

$$1 = \theta(0) = \frac{1}{2\pi} \int \widehat{\theta}(t)\, dt = \lim_n \frac{1}{2\pi} \int_{-n}^{n} \widehat{\theta}(t)\, dt = \lim_n \frac{1}{\pi} \int \theta(y) \frac{\sin(ny)}{y}\, dy.$$

Par parité

$$\lim_n \frac{1}{\pi} \int_{0}^{+\infty} \theta(y) \frac{\sin(ny)}{y}\, dy = \frac{1}{2}\,;$$

si on introduit la fonction $\ell(x)$, égale à ℓ_- pour $x<0$ et à ℓ_+ pour $x>0$, on aura donc

$$m := \frac{\ell_+ + \ell_-}{2} = \lim_n \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \theta(y)\ell(y) \frac{\sin(ny)}{y} \, dy = \lim_n (s_n(\theta\ell))(0).$$

La différence $d_n = (s_n f)(0) - (s_n(\theta\ell))(0)$ vaut

$$d_n = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} (f(y) - \theta(y)\ell(y)) \frac{\sin(ny)}{y} \, dy = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{R}} \Bigl(\frac{f(y) - \theta(y)\ell(y)}{y} \Bigr) \sin(ny) \, dy.$$

La fonction $y \to (f(y) - \theta(y)\ell(y))/y$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ d'après $(*)$ et l'hypothèse $f \in \mathrm{L}_1 + \mathrm{L}_2$, donc l'expression précédente tend vers 0 par Riemann-Lebesgue, et on obtient le résultat voulu.

Il existe aussi un théorème de Fejér pour l'intégrale de Fourier : les fonctions

$$x \in \mathbb{R} \to \frac{1}{2\pi} \int_{-n}^{n} (1 - |t|/n) \widehat{f}(t) \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}tx} \, dt$$

tendent vers f, uniformément si f est uniformément continue intégrable, dans L_p si $f \in \mathrm{L}_p \cap \mathrm{L}_1$ et $1 \le p < +\infty$.

4.3.d. *Espaces de Sobolev*

Travaillons dans $\mathbb{R}^2$ pour fixer les idées. Si g est une fonction de classe C^1 à support compact définie sur $\mathbb{R}^2$, on a en désignant par $\mathrm{D}_j = \frac{\partial}{\partial x_j}$ l'une des deux dérivées partielles de g

$$\int_{\mathbb{R}^2} (\mathrm{D}_j g)(x) \, dx = 0.$$

En effet, avec Fubini et $j=1$ par exemple, on a

$$\int_{\mathbb{R}} \Bigl(\int_{\mathbb{R}} (\mathrm{D}_1 g)(x_1, x_2) \, dx_1 \Bigr) \, dx_2 = 0$$

car

$$\int_{\mathbb{R}} (\mathrm{D}_1 g)(x_1, x_2) \, dx_1 = \int_a^b (\mathrm{D}_1 g)(x_1, x_2) \, dx_1 = g(b, x_2) - g(a, x_2) = 0$$

pour tout x_2, si le support de g est contenu dans $[a,b] \times [c,d]$.

Si f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ et φ de classe C^1 à support compact, le produit $g = f\varphi$ est C^1 à support compact et sa dérivée partielle $\mathrm{D}_j g$ est $(\mathrm{D}_j f)\varphi + f(\mathrm{D}_j \varphi)$; cette dérivée a donc une intégrale nulle, c'est-à-dire que

$$\text{(D)} \qquad \int_{\mathbb{R}^2} (\mathrm{D}_j f)(x)\varphi(x) \, dx = - \int_{\mathbb{R}^2} f(x)(\mathrm{D}_j \varphi)(x) \, dx.$$

On gardera cette égalité comme définition de dérivées au sens faible (voir plus loin).

Si φ est C^1 à support compact, $g(x) = \varphi(x) \, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x \cdot t}$ est encore à support compact ; en écrivant que sa dérivée partielle $\mathrm{D}_j g$ a une intégrale nulle on obtient

$$\int_{\mathbb{R}^2} (\mathrm{D}_j \varphi)(x) \, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x \cdot t} \, dx = \mathrm{i}t_j \int_{\mathbb{R}^2} \varphi(x) \, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x \cdot t} \, dx,$$

ce qui signifie qu'on a la relation suivante entre Fourier et dérivation,

$$\text{(FD)} \qquad \widehat{(\mathrm{D}_j\varphi)}(t) = \mathrm{i}t_j\,\widehat{\varphi}(t).$$

On dit que $f \in \mathrm{L}_2(\mathbb{R}^2)$ admet une $j$ième *dérivée partielle au sens faible* $g_j \in \mathrm{L}_2(\mathbb{R}^2)$ si g_j satisfait la relation (D) que satisfait la dérivée partielle quand elle existe,

$$(*) \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2), \quad \int_{\mathbb{R}^2} g_j(x)\varphi(x)\,dx = -\int_{\mathbb{R}^2} f(x)(\mathrm{D}_j\varphi)(x)\,dx.$$

Cette relation s'applique aussi à la fonction complexe conjuguée $\overline{\varphi}$, et elle se lit alors dans l'espace de Hilbert $\mathrm{L}_2(\mathbb{R}^2)$ comme

$$\langle g_j, \varphi\rangle = -\langle f, \mathrm{D}_j\varphi\rangle.$$

Comme $(2\pi)^{-d/2}\mathcal{F} = (2\pi)^{-1}\mathcal{F}$ est une isométrie de $\mathrm{L}_2(\mathbb{R}^2)$, elle préserve le produit scalaire, donc

$$\frac{1}{4\pi^2}\,\langle \widehat{g_j}, \widehat{\varphi}\rangle = -\frac{1}{4\pi^2}\,\langle \widehat{f}, \widehat{\mathrm{D}_j\varphi}\rangle.$$

Compte-tenu de la formule (FD) on aura

$$\langle \widehat{g_j}, \widehat{\varphi}\rangle = -\langle \widehat{f}, \mathrm{i}t_j\,\widehat{\varphi}\rangle = \langle \mathrm{i}t_j\,\widehat{f}, \widehat{\varphi}\rangle$$

pour toute $\varphi \in \mathcal{D}$; comme $(2\pi)^{-1}\mathcal{F}$ est une isométrie bijective et que $\mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$ est dense dans $\mathrm{L}_2(\mathbb{R}^2)$, il en résulte que $\mathcal{F}(\mathcal{D})$ est dense ; la fonction $t \to \widehat{g_j}(t) - \mathrm{i}t_j\,\widehat{f}(t)$ est orthogonale à $\mathcal{F}(\mathcal{D})$, donc elle est nulle. On voit que les dérivées faibles sont caractérisées en Fourier par la même relation que la relation (FD), mais en tant que classes de fonctions,

$$\widehat{g_j}\,(t) = \mathrm{i}t_j\,\widehat{f}(t)$$

pour presque tout $t \in \mathbb{R}^2$.

L'espace de Sobolev $\mathrm{H}^1(\mathbb{R}^2)$ est l'espace de toutes les fonctions $f \in \mathrm{L}_2(\mathbb{R}^2)$ qui admettent deux dérivées partielles faibles $g_1, g_2 \in \mathrm{L}_2(\mathbb{R}^2)$. D'après Parseval et ce qui précède, on a en traduisant les appartenances à L_2 de f, g_1, g_2

$$\int_{\mathbb{R}^2} |\widehat{f}(t)|^2\,dt < +\infty, \quad \int_{\mathbb{R}^2} t_1^2\,|\widehat{f}(t)|^2\,dt < +\infty, \quad \int_{\mathbb{R}^2} t_2^2\,|\widehat{f}(t)|^2\,dt < +\infty\,;$$

on voit qu'on peut condenser ces trois hypothèses en une seule,

$$\int_{\mathbb{R}^2} (1 + |t|^2)\,|\widehat{f}(t)|^2\,dt < +\infty.$$

On va montrer qu'inversement, cette propriété caractérise les fonctions $f \in \mathrm{H}^1(\mathbb{R}^2)$. Supposons en effet que

$$\int_{\mathbb{R}^2} (1 + |t|^2)\,|\widehat{f}(t)|^2\,dt < +\infty.$$

On en déduit déjà que $f \in \mathrm{L}_2(\mathbb{R}^2)$. Les deux fonctions $\mathrm{i}t_1\widehat{f}(t)$ et $\mathrm{i}t_2\widehat{f}(t)$ sont dans $\mathrm{L}_2(\mathbb{R}^2)$, ce qui entraîne qu'elles sont transformées de Fourier de deux fonctions $g_1, g_2 \in \mathrm{L}_2(\mathbb{R}^2)$. On a évidemment pour $j = 1, 2$ les équations

$$\langle \widehat{g_j}, \widehat{\varphi}\rangle = \langle \mathrm{i}t_j\,\widehat{f}, \widehat{\varphi}\rangle = -\langle \widehat{f}, \widehat{\mathrm{D}_j\varphi}\rangle$$

pour toute $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$, et on remonte à la définition des dérivées faibles, exprimée par produit scalaire

$$\langle g_j, \varphi\rangle = -\langle f, \mathrm{D}_j\varphi\rangle.$$