5. Holomorphie

Contenu du chapitre

Sur ces questions il y a au moins deux sources qu'il faut lire :
— Henri Cartan, *Théorie élémentaire des fonctions analytiques d'une ou plusieurs variables complexes*, Collection Enseignement des Sciences, Hermann
— Walter Rudin, *Real and complex analysis*, McGraw-Hill, traduit comme *Analyse réelle et complexe*, Masson.
Le volume 2 du traité en trois volumes de Chatterji (Srishti Chatterji, *Cours d'analyse*, Presses Polytechniques et Universitaires Romandes, Lausanne) contient aussi une masse d'informations, qui commence tout doucement, avec la définition des nombres complexes... Le livre de Zuily-Queffélec (*Éléments d'Analyse pour l'agrégation*, Masson) contient des éléments intéressants pour des développements (par exemple sur l'étude des séries entières sur le cercle de convergence), et une section sur l'holomorphie d'intégrales dépendant d'un paramètre qu'il *faut* connaître.

5.1. Holomorphie

Une *fonction holomorphe* f est une fonction qui est dérivable au sens complexe. Un point tout à fait remarquable est que pour développer la théorie des fonctions holomorphes, on n'a pas pas besoin de supposer que $z \to f'(z)$ soit continue ; on verra en fait que f est développable en série entière au voisinage de chaque point de Ω, ce qui impliquera que f' est elle aussi holomorphe dans Ω, et on peut donc continuer de dériver indéfiniment. On aura ainsi établi l'identité entre le point de vue *holomorphe* et le point de vue *analytique* (fondé sur les développements en séries entières).

Remarques élémentaires sur la $\mathbb{C}$-linéarité

On va jouer souvent sur la double représentation $\mathbb{C} \sim \mathbb{R}^2$; désignons par φ la bijection de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{C}$ donnée par

$$\varphi : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \to x + \mathrm{i}y \in \mathbb{C}.$$

Examinons à quelle condition une application $\mathbb{R}$-linéaire a de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ fournit une application $\mathbb{C}$-linéaire de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ quand on la lit au moyen du dictionnaire φ, en considérant l'application $a_{\mathbb{C}} = \varphi \circ a \circ \varphi^{-1}$ de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$; il est évidemment nécessaire que

$$a_{\mathbb{C}}(\mathrm{i}) = a_{\mathbb{C}}(\mathrm{i}\,1) = \mathrm{i}\,a_{\mathbb{C}}(1)$$

et il est facile de voir que cette condition est suffisante. Si

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix}$$

désigne la matrice de a dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$, $a(\varphi^{-1}(\mathrm{i}))$ et $a(\varphi^{-1}(1))$ sont représentés respectivement par

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,2} \\ a_{2,2} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,1} \\ a_{2,1} \end{pmatrix}$$

donc $a_{\mathbb{C}}$ est $\mathbb{C}$-linéaire si et seulement si

$$a_{1,2} + \mathrm{i}a_{2,2} = \varphi((a_{1,2}, a_{2,2})) = a_{\mathbb{C}}(\mathrm{i}) = \mathrm{i}\,a_{\mathbb{C}}(1) = \mathrm{i}\,\varphi((a_{1,1}, a_{2,1})) = \mathrm{i}\,(a_{1,1} + \mathrm{i}a_{2,1})$$

ce qui impose les conditions $a_{1,1} = a_{2,2}$ et $a_{2,1} = -a_{1,2}$; l'application $a_{\mathbb{C}}$ est alors la multiplication par le nombre complexe $\alpha = a_{1,1} + \mathrm{i}a_{2,1} = \alpha_1 + \mathrm{i}\alpha_2$, et la matrice A est de la forme

$$\text{(H)} \qquad \mathrm{A} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & -\alpha_2 \\ \alpha_2 & \alpha_1 \end{pmatrix}.$$

5.1.a. *Fonctions holomorphes*

On dit qu'une fonction f définie dans un voisinage d'un point $z \in \mathbb{C}$, à valeurs dans $\mathbb{C}$, est $\mathbb{C}$-*dérivable* au point z si la limite

$$f'(z) = \lim_{w \to 0} \frac{f(z + w) - f(z)}{w}$$

existe, où w tend vers 0 par *valeurs complexes*. Les opérations habituelles sur les dérivées se justifient comme dans le cas réel usuel : dérivée du produit fg de deux fonctions, dérivée de l'inverse $1/f$ lorsque $f(z) \neq 0$, composition de fonctions $\mathbb{C}$-dérivables, etc. . .
On dit que f est *holomorphe* dans un ouvert Ω de $\mathbb{C}$ si elle admet en tout point $z \in \Omega$ une dérivée au sens complexe ; on désigne par $\mathrm{H}(\Omega)$ l'espace vectoriel (complexe) des fonctions holomorphes dans Ω. On vérifie facilement à la main que les monômes z^n, $n \geq 0$ sont holomorphes sur $\mathbb{C}$, avec dérivée nz^{n-1}, et que les z^n pour $n < 0$ sont holomorphes en dehors de 0, avec la « même » dérivée nz^{n-1}.

Supposons f définie dans un voisinage V du point complexe $z_0 = x_0 + \mathrm{i} y_0$, et définissons, sur le voisinage $\mathrm{W} = \varphi^{-1}(\mathrm{V})$ de $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, une application F à valeurs dans $\mathbb{R}^2$ par la formule $\mathrm{F} = \varphi^{-1} \circ f \circ \varphi$, limitée au voisinage W.

Proposition. *La fonction f est $\mathbb{C}$-dérivable au point z_0 si et seulement si la condition suivante est vérifiée : l'application* F *est différentiable au point (x_0, y_0) et sa différentielle «fournit» une application $\mathbb{C}$-linéaire, c'est-à-dire que sa matrice jacobienne admet la forme* (H).

Désignons par P et Q les deux fonctions réelles, coordonnées de l'application F, ce qui revient à écrire

$$f(x + \mathrm{i}y) = \mathrm{P}(x, y) + \mathrm{i}\,\mathrm{Q}(x, y)$$

pour $(x, y) \in \mathrm{W}$. La matrice jacobienne de F au point (x_0, y_0) est égale à

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \mathrm{P}}{\partial x}(x_0, y_0) & \dfrac{\partial \mathrm{P}}{\partial y}(x_0, y_0) \\ \dfrac{\partial \mathrm{Q}}{\partial x}(x_0, y_0) & \dfrac{\partial \mathrm{Q}}{\partial y}(x_0, y_0) \end{pmatrix}$$

et la condition (H) pour cette matrice se traduit par les deux équations

$$\frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial x}(x_0, y_0) = -\frac{\partial \mathrm{P}}{\partial y}(x_0, y_0)\,; \quad \frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial y}(x_0, y_0) = \frac{\partial \mathrm{P}}{\partial x}(x_0, y_0)$$

qu'on appelle classiquement les *relations de Cauchy-Riemann*. On peut visualiser les choses de la façon suivante : la condition (H) est satisfaite si le gradient de Q se déduit de celui de P par une rotation d'angle $+\pi/2$ dans $\mathbb{R}^2$. La traduction complexe de l'action de A est alors la multiplication par le nombre complexe

$$\alpha = \frac{\partial \mathrm{P}}{\partial x}(x_0, y_0) + \mathrm{i}\,\frac{\partial \mathrm{Q}}{\partial x}(x_0, y_0) \qquad \Big[\quad \text{égal à} \ « \ \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \ »$$

si on considère f comme étant aussi une application de $\mathrm{W} \subset \mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{C}$ $\Big]$.

Preuve de la proposition. Supposons F différentiable au point (x_0, y_0) et supposons que la condition (H) soit vérifiée ; l'expression matricielle de la différentiabilité de F au point (x_0, y_0), à savoir

$$\begin{pmatrix} \mathrm{P}(x_0 + h, y_0 + k) \\ \mathrm{Q}(x_0 + h, y_0 + k) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{P}(x_0, y_0) \\ \mathrm{Q}(x_0, y_0) \end{pmatrix} + \mathrm{A} \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} + o\big(|h| + |k|\big)$$

se traduit, en introduisant le petit accroissement complexe $w = h + \mathrm{i}k$, par la relation

$$f(z_0 + w) = f(z_0) + \alpha w + o(|w|),$$

qui donne l'existence de la dérivée complexe au point z_0, avec valeur $f'(z_0) = \alpha$. L'implication inverse est laissée au lecteur.

On verra que l'existence de la dérivée complexe dans un ouvert Ω implique en fait que f est indéfiniment dérivable. Une deuxième dérivation, les relations de Cauchy-Riemann et le lemme de Schwarz impliquent alors que $\Delta \mathrm{P} = \Delta \mathrm{Q} = 0$ (on a noté Δ le laplacien). On dit que P, Q sont un couple de *fonctions harmoniques conjuguées*.

On peut aussi dire les choses avec l'opérateur $\overline{\partial}$, défini par

$$\overline{\partial} = \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial}{\partial x} + \mathrm{i}\,\frac{\partial}{\partial y}\Big)\ ;$$

une fonction f est holomorphe dans Ω si et seulement si elle y vérifie l'équation $\overline{\partial} f = 0$.

Si γ est une application C^1 d'un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ à valeurs dans un ouvert Ω de $\mathbb{C}$ où une fonction f est holomorphe, on vérifie facilement que la fonction complexe de variable réelle $f \circ \gamma$ admet pour dérivée $t \to f'(\gamma(t))\,\gamma'(t)$. Cette remarque simple est très utile pour le calcul des intégrales sur des chemins (paragraphe suivant).

5.1.b. *Intégrale sur un chemin*

On considère une application γ de classe C^1 d'un intervalle fermé borné $[\alpha, \beta]$, à valeurs dans $\mathbb{C}$, et F une fonction à valeurs réelles ou complexes définie et continue sur la courbe image $\gamma^* = \gamma([\alpha, \beta])$. On pose

$$\int_\gamma \mathrm{F}(z)\,dz = \int_\alpha^\beta \mathrm{F}(\gamma(t))\,\gamma'(t)\,dt$$

où la variable z représente un point de $\gamma^* \subset \mathbb{C}$ et où $\gamma'(t)$ désigne la dérivée au point $t \in \mathbb{R}$ de la fonction γ, qui est une fonction de variable réelle à valeurs complexes. Si on a un autre paramétrage $\gamma_1 : [\alpha_1, \beta_1] \to \mathbb{C}$ du même chemin γ^*, de la forme $\gamma_1 = \gamma \circ \psi$, avec ψ bijection croissante de classe C^1 de $[\alpha_1, \beta_1]$ sur $[\alpha, \beta]$, on aura par le changement de variable $t = \psi(s)$

$$\int_{\alpha_1}^{\beta_1} \mathrm{F}(\gamma_1(s))\,\gamma_1'(s)\,ds = \int_{\alpha_1}^{\beta_1} \mathrm{F}(\gamma(\psi(s)))\,\gamma'(\psi(s))\psi'(s)\,ds = \int_\alpha^\beta \mathrm{F}(\gamma(t))\,\gamma'(t)\,dt.$$

On peut ensuite considérer des chemins γ qui sont C^1 par morceaux ; dans ce cas on posera

$$\int_\gamma \mathrm{F}(z)\,dz = \sum_{j=1}^n \int_{\gamma_j} \mathrm{F}(z)\,dz$$

où γ est définie et continue sur $[\alpha, \beta]$, et où $\alpha = \alpha_0 < \alpha_1 < \ldots < \alpha_n = \beta$ est une subdivision de $[\alpha, \beta]$ telle que pour tout $j = 1, \ldots, n$, la restriction γ_j de γ à l'intervalle $[\alpha_{j-1}, \alpha_j]$ soit de classe C^1. On dira que le chemin $\gamma : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$ « va » du point $a \in \mathbb{C}$ au point $b \in \mathbb{C}$ si $a = \gamma(\alpha)$ et $b = \gamma(\beta)$.

Continuons avec une remarque facile. Si f est holomorphe, avec f' continue (on montrera plus loin que cette propriété de continuité de f' est automatique) dans un ouvert contenant un chemin γ, allant du point $a = \gamma(\alpha)$ au point $b = \gamma(\beta)$, alors

$$\int_\gamma f'(z)\,dz = f(b) - f(a)\,; \tag{1}$$

en effet, si γ est de classe C^1, on a

$$\int_\gamma f'(z)\,dz = \int_\alpha^\beta f'(\gamma(t))\gamma'(t)\,dt$$

qui est l'intégrale de la dérivée de $t \to f(\gamma(t))$, donc

$$\int_\gamma f'(z)\,dz = f(\gamma(\beta)) - f(\gamma(\alpha)) = f(b) - f(a).$$

Lorsque le chemin est de classe C^1 par morceaux, on applique cette égalité sur chacun des morceaux et on ajoute les morceaux. En particulier, l'intégrale de (1) sera nulle pour un chemin fermé (c'est-à-dire quand on a $a = \gamma(\alpha) = \gamma(\beta) = b$, qui implique $f(b) - f(a) = 0$). Cette remarque est essentielle pour le développement des arguments qui suivent.

Proposition 5.1.1. *Si une fonction g continue dans un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}$ admet une primitive au sens* **complexe** *dans cet ouvert, on a*

$$\int_\gamma g(w)\, dw = 0$$

pour tout chemin fermé γ de classe C^1 par morceaux contenu dans Ω ; si $a, b \in \Omega$ et si γ_1, γ_2 sont deux chemins dans Ω qui vont de a à b, on a

$$\int_{\gamma_1} g(w)\, dw = \int_{\gamma_2} g(w)\, dw.$$

Preuve. Désignons par f une primitive de g dans Ω ; sa dérivée $f' = g$ est continue, donc le premier résultat provient de l'équation (1) et du fait que le chemin est fermé. Le second résultat découle directement de l'équation (1), ou bien résulte du premier en considérant le chemin fermé, contenu dans Ω, qui consiste à parcourir d'abord γ_1, de a à b, puis à parcourir γ_2 à l'envers, de b vers a.

On peut facilement majorer le module de l'intégrale d'une fonction continue F sur un chemin,

$$\Big| \int_\gamma \mathrm{F}(z)\, dz \Big| \le \ell(\gamma)\ \max\{|\mathrm{F}(z)| : z \in \gamma^*\} \tag{2}$$

où $\ell(\gamma) = \int_\alpha^\beta |\gamma'(t)|\, dt$ désigne la longueur du chemin γ (avec « répétition » : cette longueur peut être plus grande que celle du chemin géométrique γ^*, si par exemple on a fait plusieurs fois le tour d'un cercle). En particulier, si le segment $\gamma^* = [a, b]$ est contenu dans un ouvert Ω, et si f est holomorphe dans cet ouvert Ω, avec f' continue, on en déduit la majoration

$$|f(b) - f(a)| \le |b - a|\ \max\{|f'(z)| : z \in \gamma^*\}. \tag{3}$$

Dans la suite on arrivera à faire tout le travail en combinant seulement des chemins de deux types fondamentaux, les segments et les cercles : si a, b sont deux points complexes, on posera

$$\int_{[a,b]} f(w)\, dw = (b - a) \int_0^1 f\big(a + t(b - a)\big)\, dt,$$

ce qui revient à considérer le chemin $\gamma_{a,b}(t) = (1 - t)a + b$; on désignera par $\gamma_r(z_0)$ le parcours du cercle de rayon $r > 0$ centré en z_0 donné par $\gamma_r(z_0)(\theta) = z_0 + r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, avec $\theta \in [0, 2\pi]$. On notera simplement γ_r lorsque $z_0 = 0$.

Lemme. *Si g est une fonction continue sur le cercle γ_r^*, la fonction* F *définie pour $|\lambda| \neq r$ par*

$$\mathrm{F}(\lambda) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_{\gamma_r} \frac{g(z)\,dz}{z-\lambda}$$

est développable, pour $|\lambda| < r$, en série de puissances de λ,

$$\mathrm{F}(\lambda) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \lambda^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \Bigl(\frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_{\gamma_r} \frac{g(z)\,dz}{z^{n+1}} \Bigr) \lambda^n$$

(donc la série entière précédente a un rayon de convergence $\geq r$), et développable en série de puissances de $1/\lambda$ pour $|\lambda| > r$,

$$\mathrm{F}(\lambda) = -\sum_{n=0}^{+\infty} \Bigl(\frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_{\gamma_r} z^n g(z)\,dz \Bigr) \lambda^{-n-1}.$$

Démonstration. C'est simplement une interversion série-intégrale. Fixons $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $|\lambda| < r$; on écrit pour $|z| = r$

$$\frac{1}{z-\lambda} = \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\lambda^n}{z^n} ;$$

cette série de fonctions de z converge normalement pour $z \in \gamma_r^*$, donc

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_{\gamma_r} \frac{g(z)\,dz}{z-\lambda} = \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^n \Bigl(\frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_{\gamma_r} \frac{g(z)\,dz}{z^{n+1}} \Bigr).$$

La démonstration est identique pour $|\lambda| > r$, si on commence par écrire

$$\frac{1}{z-\lambda} = -\frac{1}{\lambda} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{\lambda^n}.$$

5.1.c. *Dérivabilité complexe de la somme d'une série entière*

Revenons au tout début de ces histoires, avec l'exemple fondamental donné par la série géométrique. Si x est tel que $0 < x < 1$, la relation

$$(1-x)(1+x+\cdots+x^n) = 1 - x^{n+1}, \tag{4}$$

et le fait que $\lim_n x^n = 0$ dans ce cas, impliquent que la série $\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$ converge, et que sa somme est égale à $1/(1-x)$. Comme chacune des fonctions $t \to t^n$, $n \geq 0$, est croissante sur $[0,1]$, on voit facilement que

$$\frac{1}{1-x} - \sum_{k=0}^{n} x^k = \sum_{k>n} x^k$$

est une fonction croissante de x sur $[0, 1]$, donc sa dérivée est ≥ 0, ce qui fournit l'inégalité

$$1 + 2x + \cdots + nx^{n-1} \leq \frac{1}{(1-x)^2}$$

qui prouve la convergence de la série à termes positifs $\sum nx^{n-1}$. En dérivant l'équation (4) on obtient la relation

$$(1-x)(1 + 2x + \cdots + nx^{n-1}) - (1 + x + \cdots + x^n) = -(n+1)x^n$$

qui implique que la somme de la série $\sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1}$ est égale à $(1-x)^{-2}$. Rappelons un fait simple mais crucial.

Proposition. *Si la série $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z_0^n$ converge au point $z_0 \in \mathbb{C}$, alors la série $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, z^n$ ainsi que la « série dérivée » $\sum_{n=1}^{+\infty} na_n\, z^{n-1}$ convergent uniformément (et même normalement) dans tout disque centré en 0 et de rayon $r < |z_0|$.*

Preuve. Si la série $\sum a_n z_0^n$ converge, on en déduit que son terme général tend vers 0, donc est borné : il existe M tel que

$$\forall n \geq 0, \quad |a_n z_0^n| \leq \mathrm{M}.$$

Posons $r_0 = |z_0|$. Quand z reste dans le disque fermé de rayon $r < r_0$, on a les majorations

$$n|a_n z^{n-1}| \leq n|a_n| r^{n-1} \leq (\mathrm{M}/r_0)\, n\, (r/r_0)^{n-1} =: u_n,$$

qui montrent que la série dérivée $\sum na_n z^{n-1}$ converge normalement dans le disque fermé de rayon r, puisqu'on a trouvé une série numérique majorante $\sum u_n$ convergente de la forme $\mathrm{C} \sum nx^{n-1}$, avec $x = r/r_0 < 1$. Pour la série $\sum a_n z^n$ les choses sont encore plus simples puisque

$$|a_n z^n| \leq |a_n| r^n \leq \mathrm{M}\, (r/r_0)^n =: v_n,$$

ce qui donne une autre série majorante convergente.

Rappelons brièvement pourquoi la somme de la série dérivée est la dérivée (complexe) de $z \to f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$. Si on prend $0 < r < \mathrm{R}$ et $|z_1|, |z_2| \leq r$ on aura pour tout entier $n \geq 2$, en utilisant une intégrale sur le segment de z_1 à z_2, segment qui est contenu dans le disque fermé de rayon r,

$$|z_2^{n-1} - z_1^{n-1}| = \Bigl| \int_{[z_1, z_2]} (n-1) w^{n-2}\, dw \Bigr| \leq (n-1)\, r^{n-2}\, |z_2 - z_1|$$

(on utilise par exemple la majoration (3) ci-dessus). L'inégalité est vraie aussi (et évidente) pour $n = 1$. On suppose ensuite que $|z_0|, |z_0 + h| \leq r$ et on pose pour t réel dans $[0, 1]$

$$\varphi(t) = (z_0 + th)^n - z_0^n - nz_0^{n-1} th\,;$$

en appliquant la majoration $|\varphi(1) - \varphi(0)| \leq \int_0^1 |\varphi'(t)|\, dt$, avec

$$|\varphi'(t)| = \bigl| n(z_0 + th)^{n-1} h - nz_0^{n-1} h \bigr| = n|h| \bigl| (z_0 + th)^{n-1} - z_0^{n-1} \bigr| \leq n(n-1) r^{n-2} |h|^2\, t$$

on aura

$$\big|(z_0+h)^n - z_0^n - n z_0^{n-1} h\big| \le \frac{n(n-1)}{2}\, r^{n-2} |h|^2.$$

Il en résulte que

$$\Big| f(z_0+h) - f(z_0) - \big(\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n z_0^{n-1}\big)\, h \Big| \le \Big(\sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)|a_n|\, r^{n-2}\Big) |h|^2/2 = \mathrm{K}(r)\, |h|^2$$

ce qui montre la dérivabilité complexe de f au point z_0, et montre aussi que $f'(z_0)$ est égal à la somme de la série dérivée. On a

$$\mathrm{K}(r) = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)|a_n|\, r^{n-2} < +\infty$$

parce que la série dérivée seconde (formelle) est absolument convergente au point $r < \mathrm{R}$.

Exemple. La fonction définie sur $\mathbb{C}$ par

$$f(z) = \mathrm{e}^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$$

est holomorphe et $f'(z) = f(z)$ pour tout z (regarder la série dérivée) ; la fonction $z \rightarrow \mathrm{e}^{-z}\, \mathrm{e}^z$ est donc de dérivée nulle, par conséquent constante, égale à 1 (faire $z = 0$) ; si g est une autre fonction holomorphe sur un ouvert connexe Ω telle que $g' = g$, on voit que $\mathrm{e}^{-z}\, g(z)$ a une dérivée nulle, et on en déduit que g est un multiple de la fonction exponentielle. On peut montrer ainsi que $\mathrm{e}^{a+b} = \mathrm{e}^a\, \mathrm{e}^b$ pour tous $a, b \in \mathbb{C}$ (considérer $g(z) = \mathrm{e}^b\, \mathrm{e}^{z-b}$).

5.2. De l'holomorphie à l'analyticité

On va aller de l'holomorphie à l'analyticité, en passant par le lemme de Goursat. L'un des cheminements classiques est le suivant :

$\big($ g continue dans une boule ouverte $\mathrm{D} = \mathrm{B}(z_0, r_0)$, holomorphe dans D, sauf peut-être en un point $\big)$

$\Rightarrow_1$ $\big($ l'intégrale curviligne de $g(z)\, dz$ sur le bord de tout triangle contenu dans D est nulle $\big)$

$\Rightarrow_2$ $\big($ g admet une primitive G (au sens complexe) dans D $\big)$

$\Rightarrow_3$ $\big($ l'intégrale de $g(z)\, dz$ sur tout cercle $\mathrm{S}(z_0, r)$, $r < r_0$ est nulle $\big)$

$\Rightarrow_4$ $\big($ la formule de Cauchy pour f holomorphe dans D $\big)$

$\Rightarrow_5$ $\big($ f est développable en série de Taylor $\sum_{n \ge 0} a_n (z - z_0)^n$, convergente pour tout point $z \in \mathrm{D}$ $\big)$

$\Rightarrow_6$ $\big($ f' est holomorphe dans D $\big)$.

L'implication $\Rightarrow_1$ est le lemme de Goursat ; l'implication $\Rightarrow_2$ est facile : il suffit de poser $\mathrm{G}(z) = \int_{\gamma_z} f(w)\, dw$, où γ_z est le segment de z_0 à z. L'implication $\Rightarrow_3$ a déjà été vue (intégrale d'une dérivée continue sur un chemin fermé). Pour l'implication $\Rightarrow_4$, on utilise la fonction $g(z) = (f(z) - f(\lambda))/(z - \lambda)$ qui est holomorphe, sauf peut-être au point λ. L'implication $\Rightarrow_5$ consiste à développer en série $z \rightarrow (z - \lambda)^{-1}$, et le dernier point est du DEUG amélioré (dérivabilité *complexe* de la somme d'une série entière) qu'on a traité ci-dessus.

5.2.a. *Lemme de Goursat*

Le lemme de Goursat, apparu vers 1900, est un très joli complément à la théorie des fonctions holomorphes, qui avait cependant atteint sans ce lemme l'essentiel de son très grand développement, commencé avec les travaux de Cauchy à partir des années 1820. Ce lemme implique que la seule *existence* de la dérivée complexe dans un ouvert Ω entraîne toutes les propriétés voulues.

Si $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}$ sont trois points du plan complexe, on peut considérer le triangle fermé égal à l'enveloppe convexe de ces trois points,

$$\mathrm{T}_{\mathrm{A,B,C}} = \mathrm{conv}\{\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}\} = \{\lambda\mathrm{A} + \mu\mathrm{B} + \nu\mathrm{C} : \lambda, \mu, \nu \ge 0,\ \lambda + \mu + \nu = 1\},$$

et le chemin fermé $\gamma_{\mathrm{A,B,C}}$ qui parcourt les trois segments du bord du triangle, en suivant l'ordre $(\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C})$ des lettres en indice de la lettre γ (considéré comme une permutation circulaire : après C vient A)

$$\int_{\gamma_{\mathrm{A,B,C}}} = \int_{[\mathrm{A,B}]} + \int_{[\mathrm{B,C}]} + \int_{[\mathrm{C,A}]} .$$

Le bord de $\mathrm{T} = \mathrm{T}_{\mathrm{A,B,C}}$ sera noté $\partial\mathrm{T}$, et on écrira aussi de façon un peu imprécise $\int_{\partial\mathrm{T}}$ pour désigner l'intégrale sur le bord de T, parcouru dans l'ordre sous-entendu $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}, \mathrm{A}$. La longueur $\ell(\partial\mathrm{T})$ du bord est la somme des trois longueurs (≥ 0) des segments du bord. On pourra remarquer que pour des raisons de convexité, on a

$$(\delta) \qquad \forall z_1, z_2 \in \mathrm{T}, \quad |z_1 - z_2| \le \max\{\,|\mathrm{B} - \mathrm{A}|, |\mathrm{C} - \mathrm{B}|, |\mathrm{A} - \mathrm{C}|\,\} \le \frac{\ell(\partial\mathrm{T})}{2}.$$

Introduisons trois nouveaux points : A' est le milieu de BC, B' celui de CA et C' celui de AB. On introduit ainsi quatre nouveaux triangles $\mathrm{T}_1, \mathrm{T}_2, \mathrm{T}_3, \mathrm{T}_4$: trois sont obtenus en substituant deux des lettres a, b ou c par les lettres accentuées, et en changeant le sens de parcours ; le dernier nouveau triangle est obtenu en accentuant les trois lettres et en gardant le sens de parcours :

$$\mathrm{C}'\mathrm{B}'\mathrm{A}\,,\ \mathrm{C}'\mathrm{B}\mathrm{A}'\,,\ \mathrm{C}\mathrm{B}'\mathrm{A}'\,;\ \mathrm{A}'\mathrm{B}'\mathrm{C}'.$$

Ces triangles T_j ont des côtés de longueur moitié de ceux de T. Il en résulte que

$$\ell(\partial\mathrm{T}_j) = \frac{1}{2}\,\ell(\partial\mathrm{T}),\ j = 1, 2, 3, 4.$$

Le point crucial pour la suite est que

$$\int_{\partial\mathrm{T}} = \sum_{j=1}^{4} \int_{\partial\mathrm{T}_j} .$$

Voici une justification, aussi algébrique qu'il m'est possible : chaque segment bi-accentué provenant d'un des trois segments des bords des T_j, comme $\mathrm{A}'\mathrm{B}'$ par exemple, apparaît deux fois comme constituant d'un bord de l'un des quatre sous-triangles : une fois dans le même ordre, dans $\mathrm{A}'\mathrm{B}'\mathrm{C}'$ et une fois dans l'ordre inverse, dans $\mathrm{C}\mathrm{B}'\mathrm{A}'$; cela implique que la contribution des segments bi-accentués est nulle dans la somme des quatre intégrales ; pour ce qui concerne les segments avec un seul accent, chaque lettre accentuée, par exemple C', apparaît une fois suivie de B, et une fois précédant A (dans la permutation circulaire inversée (*cba*) utilisée pour les triangles bi-accentués) ; on forme ainsi $\int_{\mathrm{C}'\mathrm{B}} + \int_{\mathrm{A}\mathrm{C}'} = \int_{\mathrm{AB}}$ qui est un morceau du bord du grand triangle.

Lemme 5.2.1. *On suppose que f est continue dans Ω, holomorphe dans Ω sauf peut-être en un point z_1 de Ω. On suppose que T est un triangle (fermé) contenu dans Ω. Si $\partial\mathrm{T}$ désigne le chemin qui parcourt le bord de T, on a*

$$\int_{\partial\mathrm{T}} f(z)\,dz = 0.$$

Démonstration. Supposons que $z_1 \notin \mathrm{T}$ (pour commencer). On pose

$$c := \ell(\partial\mathrm{T})^{-2}\,\Big|\int_{\partial\mathrm{T}} f(z)\,dz\Big|$$

et on veut montrer que $c = 0$. On considère $\mathrm{T}^{(0)} = \mathrm{T}$ et $\gamma_0 = \partial\mathrm{T}$ comme les premiers termes d'une suite de triangles et de chemins. On considère la décomposition du triangle $\mathrm{T}^{(0)} = \mathrm{T}_{\mathrm{A,B,C}}$ en quatre triangles $\mathrm{T}_j = \mathrm{T}_j^{(0)}$, $j = 1, 2, 3, 4$, comme on l'a expliqué avant l'énoncé du lemme. Puisque l'intégrale sur le bord de $\mathrm{T}^{(0)}$ est la somme des quatre intégrales sur les bords des $\mathrm{T}_j^{(0)}$, on doit avoir pour au moins un triangle T' parmi $\mathrm{T}_1^{(0)}, \ldots, \mathrm{T}_4^{(0)}$ l'inégalité

$$\ell(\partial\mathrm{T}^{(0)})^{-2}\,\Big|\int_{\partial\mathrm{T}'} f(z)\,dz\Big| \ge c/4. \tag{5}$$

Désignons par $\mathrm{T}^{(1)}$ l'un des triangles $\mathrm{T}_j^{(0)}$ qui vérifie l'inégalité (5). Puisque la longueur de $\partial\mathrm{T}^{(1)}$ est la moitié de celle de $\partial\mathrm{T}^{(0)}$ on a, en écrivant γ_1 pour $\partial\mathrm{T}^{(1)}$

$$\ell(\gamma_1)^{-2}\,\Big|\int_{\gamma_1} f(z)\,dz\Big| \ge c.$$

On continue, par récurrence, à définir des triangles $\mathrm{T}^{(n)}$ qui vérifient pour tout $n \ge 0$

$$\ell(\gamma_n)^{-2}\,\Big|\int_{\gamma_n} f(z)\,dz\Big| \ge c \tag{6}$$

où on a, pour abréger, désigné le chemin $\partial\mathrm{T}^{(n)}$ par γ_n. À chaque étape, le triangle $\mathrm{T}^{(n+1)}$ est obtenu en divisant $\mathrm{T}^{(n)}$ en quatre, comme expliqué précédemment, et en choisissant un sous-triangle dont l'intégrale sur le bord est maximale en module. Il résulte de la construction que la taille des côtés de $\mathrm{T}^{(n)}$ est 2^{-n} fois celle du triangle initial. Les triangles $(\mathrm{T}^{(n)})$ forment une suite décroissante de fermés, de diamètres tendant vers 0 d'après la relation (δ) ; l'intersection de cette suite contient donc un point unique $z_0 \in \Omega$; on conclura en faisant un DL (complexe) au voisinage de z_0 : en posant $g(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z-z_0)$, et étant donné $\varepsilon > 0$, on peut trouver $\alpha > 0$ tel que $|f(z)-g(z)| < \varepsilon\,|z-z_0|$ pour tout point z tel que $|z - z_0| < \alpha$. Choisissons N_0 assez grand pour que $\ell(\gamma_n) < \alpha$ pour tout $n \ge \mathrm{N}_0$. On aura alors en utilisant (δ) l'inégalité $|f(z) - g(z)| < \varepsilon\,|z - z_0|$ pour tout point $z \in \gamma_n^*$. Comme l'intégrale de g (qui est une dérivée) est nulle sur γ_n, on obtient

$$\Big|\int_{\gamma_n} f(z)\,dz\Big| = \Big|\int_{\gamma_n} (f(z) - g(z))\,dz\Big| \le \ell(\gamma_n)\,\max\{|f(z) - g(z)| : z \in \gamma_n^*\} \le \varepsilon\,\ell(\gamma_n)^2$$

et

$$c \leq \ell(\gamma_n)^{-2} \Big| \int_{\gamma_n} f(z)\, dz \Big| \leq \varepsilon$$

ce qui donne bien $c = 0$ puisque ε est arbitraire. Ceci termine la preuve du cas où le point exceptionnel z_1 n'est pas dans le triangle.

On notera que le cas d'un triangle dégénéré (les points $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C}$ sont alignés) est facile, toujours vrai, et se réduit à la «relation de Chasles» pour les intégrales sur la droite réelle. Dans le cas où le triangle T (non dégénéré) contient le point exceptionnel z_1, on procède par approximation de l'intégrale sur le bord de T par des intégrales sur des bords de triangles qui ne contiennent pas le point z_1. Si z_1 est sur le bord de $\mathrm{T} = \mathrm{T}_{\mathrm{A},\mathrm{B},\mathrm{C}}$, on approchera par des triangles ne contenant pas z_1 de la façon suivante : supposons par exemple que z_1 soit sur le côté $[\mathrm{A}, \mathrm{B}]$, considérons le sommet opposé C et le «vecteur» $v = \mathrm{C} - z_1$; on voit facilement que pour tout $\varepsilon > 0$, le triangle translaté $\mathrm{T}_\varepsilon = \mathrm{T} + \varepsilon v$ ne contient pas le point z_1. La fonction f est holomorphe dans un ouvert contenant T_ε, donc l'intégrale de f sur le bord de T_ε est nulle par ce qui précède, et elle tend vers l'intégrale de f sur le bord de T lorsque $\varepsilon \to 0$: cet argument d'approximation est justifié par la continuité de f.

Finalement, si z_1 est intérieur au triangle T, on découpe T en trois triangles qui ont z_1 pour sommet. L'argument ci-dessus et le découpage de l'intégrale sur le bord de T en trois intégrales sur les bords des sous-triangles termine la preuve.

5.2.b. *Primitives*

On dit que $\Omega \subset \mathbb{C}$ est *étoilé* par rapport à $z_0 \in \Omega$ si on peut «voir» tous les points z de Ω depuis le point z_0 : pour tout $z \in \Omega$, le segment $[z_0, z]$ est contenu dans Ω.

Ainsi, un ensemble est convexe s'il est étoilé par rapport à chacun de ses points.

Théorème 5.2.2. *Soit Ω un ouvert étoilé par rapport à un point z_0, soient $z_1 \in \Omega$ et f une fonction continue dans Ω, holomorphe dans $\Omega \setminus \{z_1\}$; la fonction F définie par*

$$\forall z \in \Omega, \quad \mathrm{F}(z) = \int_{[z_0, z]} f(w)\, dw$$

est une primitive (au sens complexe) de f dans Ω.

Démonstration. Soit $z \in \Omega$ un point fixé ; on note que pour tout $h \neq 0$

$$f(z) = h^{-1} \int_{[z, z+h]} f(z)\, dw\,;$$

lorsque $h \in \mathbb{C}$ est assez petit pour que $[z, z+h] \subset \Omega$, on voit que le triangle $\mathrm{T}_{z_0, z, z+h}$ est contenu dans Ω, grâce à l'hypothèse *étoilé* (tracer tous les segments joignant z_0 aux points du segment opposé $[z, z+h] \subset \Omega$) ; on écrit ensuite, en utilisant la nullité de l'intégrale sur le bord du triangle $\mathrm{T}_{z_0, z, z+h}$ (nullité donnée par le lemme 5.2.1)

$$\Big| \frac{\mathrm{F}(z+h) - \mathrm{F}(z)}{h} - f(z) \Big| = |h|^{-1} \Big| \int_{[z, z+h]} \big(f(w) - f(z)\big)\, dw \Big| \leq \int_0^1 |f(z+th) - f(z)|\, dt$$

qui tend vers 0 quand $h \to 0$, par la continuité de f au point z.

Corollaire 5.2.3. *Soit Ω un ouvert étoilé par rapport à un point z_0, soient $z_1 \in \Omega$ et f une fonction continue dans Ω, holomorphe dans $\Omega \setminus \{z_1\}$; pour tout chemin fermé γ contenu dans Ω, on a*

$$\int_\gamma f(w)\, dw = 0.$$

Preuve. Ceci résulte de la proposition 5.1.1.

Un peu de logarithme complexe

On considère l'ouvert $\Omega_0 = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$ de tous les nombres complexes z tels que $\mathrm{Re}\, z > 0$ ou bien $\mathrm{Im}\, z \neq 0$. Cet ouvert est étoilé par rapport au point $z_0 = 1$. On peut donc poser

$$\forall z \in \Omega_0, \quad \mathrm{F}(z) = \int_{[1,z]} \frac{dw}{w} \cdot$$

On obtient ainsi une primitive dans Ω_0 de la fonction $1/z$ (d'après le théorème 5.2.2). On voit que $\mathrm{F}(1) = 0$, et on constate que la fonction F vérifie la propriété caractéristique des logarithmes

$$\forall z \in \Omega_0, \quad \mathrm{e}^{\mathrm{F}(z)} = z$$

en montrant que $z\, \mathrm{e}^{-\mathrm{F}(z)}$ est constante (donc égale à 1) dans l'ouvert Ω_0 (la dérivée $\mathrm{e}^{-\mathrm{F}(z)} - z\, \mathrm{e}^{-\mathrm{F}(z)}/z$ est nulle dans Ω_0, qui est connexe). La fonction F est une *détermination du logarithme complexe.*

La conclusion du calcul de dérivée précédent serait valable dans tout ouvert connexe ne contenant pas 0, dans lequel serait définie une primitive F de $1/z$: dans un tel ouvert, le produit $z\, \mathrm{e}^{-\mathrm{F}(z)}$ sera constant.

Dans l'ouvert Ω_0 que nous avons choisi, il est facile de calculer F, une fois que nous savons que c'est une primitive de $1/z$ dans Ω_0 : nous pouvons maintenant, grâce au corollaire précédent 5.2.3, ou bien directement par la formule (1), utiliser n'importe quel chemin γ contenu dans Ω_0, allant de $z_0 = 1$ à $z = r\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, où $r > 0$ et $-\pi < \theta < \pi$. Si nous allons d'abord de 1 à r sur l'axe réel, puis de r à $r\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ sur un arc de cercle $\alpha \to r\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}$, où α varie de 0 à θ, on verra facilement que

$$\mathrm{F}(z) = \int_1^r \frac{dt}{t} + \int_0^\theta \frac{r\, \mathrm{i}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}\, d\alpha}{r\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}} = \ln(r) + \mathrm{i}\theta.$$

Si $z = \mathrm{e}^{a+\mathrm{i}b}$ est dans Ω_0, on aura donc $\mathrm{F}(z) = a + \mathrm{i}b + 2k\mathrm{i}\pi$, où $k \in \mathbb{Z}$ est choisi pour que $-\pi < b + 2k\pi < \pi$. On retrouve ainsi très facilement le fait que $\mathrm{e}^{\mathrm{F}(z)} = z$.

5.2.c. *Indice d'un chemin fermé*

On trouvera, par exemple dans Rudin, théorème 10.10, le résultat suivant.

Théorème. *Soit γ un chemin fermé ; pour tout $z \notin \gamma^*$, on considère l'intégrale*

$$\mathrm{Ind}_\gamma(z) = \frac{1}{2\mathrm{i}\pi} \int_\gamma \frac{dw}{w - z} \cdot$$

La fonction Ind_γ, définie hors de γ^*, est à valeurs dans $\mathbb{Z}$, constante sur chaque composante connexe de $\mathbb{C} \setminus \gamma^*$, et nulle sur la composante non bornée de $\mathbb{C} \setminus \gamma^*$.

Démonstration. Montrons pour commencer que l'indice est entier. Supposons que γ soit une courbe C^1, définie sur un intervalle $[\alpha,\beta]$, et ne passant pas par z. On va montrer que la fonction g définie par

$$g(t) = (\gamma(t)-z)\,\exp\Bigl(-\int_\alpha^t \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s)-z}\,ds\Bigr)$$

est constante sur $[\alpha,\beta]$, en calculant sa dérivée. Posons $h(t)=\int_\alpha^t \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s)-z}\,ds$. On sait que $h'(t)=\gamma'(t)/(\gamma(t)-z)$, donc

$$g'(t) = \gamma'(t)\,\mathrm{e}^{-h(t)} - (\gamma(t)-z)\,\mathrm{e}^{-h(t)}\,h'(t) = 0.$$

Pour un chemin C^1 par morceaux, on montre que g est constante en découpant l'intervalle $[\alpha,\beta]$ en un nombre fini de morceaux sur lesquels γ est C^1. On a finalement

$$(\gamma(\beta)-z)\,\mathrm{e}^{-h(\beta)} = g(\beta) = g(\alpha) = (\gamma(\alpha)-z)\,\mathrm{e}^0 = \gamma(\alpha)-z.$$

Lorsque γ est un chemin fermé ne passant pas par z, on a $\gamma(\beta)=\gamma(\alpha)$ et de tout ceci résulte l'égalité $\mathrm{e}^{h(\beta)} = (\gamma(\beta)-z)/(\gamma(\alpha)-z) = 1$, c'est-à-dire

$$\exp\Bigl(\int_\gamma \frac{dw}{w-z}\Bigr) = 1 \quad\Rightarrow\quad \int_\gamma \frac{dw}{w-z} \in 2\mathrm{i}\pi\,\mathbb{Z}.$$

On a ainsi montré que

$$\mathrm{N}(z) = \frac{1}{2\mathrm{i}\pi}\int_\gamma \frac{dw}{w-z}$$

est un entier pour tout $z\notin\gamma^*$. Par ailleurs, on montre facilement que $z\to\mathrm{N}(z)$ est continue sur $\mathbb{C}\setminus\gamma^*$ (continuité d'une intégrale dépendant d'un paramètre) ; il en résulte que $\mathrm{N}(z)$ est localement constant, donc constant sur les composantes connexes du complémentaire de γ^*. Comme γ^* est compact, il est contenu dans une boule $\mathrm{B}(0,\mathrm{R})$, donc le complémentaire de γ^* contient l'ouvert connexe $\mathrm{B}(0,\mathrm{R})^c$ qui est un voisinage de l'infini, et cet ouvert est contenu dans **la** composante connexe de l'infini de l'ouvert $\mathbb{C}\setminus\gamma^*$. On voit facilement que $\mathrm{N}(z)$ tend vers 0 à l'infini (majorer le module de $(w-z)^{-1}$ par $(|z|-\mathrm{R})^{-1}$, et en déduire $|\mathrm{N}(z)|\le(2\pi)^{-1}\,\ell(\gamma)\,(|z|-\mathrm{R})^{-1}$), donc $\mathrm{N}(z)$ est en fait nul pour $|z|$ grand, donc nul sur la composante de l'infini de $\mathbb{C}\setminus\gamma^*$ (qui est **la** composante connexe non bornée, ici).

On aurait pu dire aussi que si R est comme ci-dessus, si $\Omega=\mathrm{B}(0,\mathrm{R})$ et $z\notin\Omega$, la fonction $w\to(w-z)^{-1}$ est holomorphe sur l'ouvert étoilé Ω, donc son intégrale sur le chemin fermé γ contenu dans Ω est nulle par le corollaire 5.2.3.

Exemple 5.2.4. Pour un cercle $\gamma_r(z_0)$ on trouve $\mathrm{Ind}_{\gamma_r(z_0)}(z)=0$ lorsque $|z-z_0|>r$, et $\mathrm{Ind}_{\gamma_r(z_0)}(z)=1$ lorsque $|z-z_0|<r$; le premier point a été traité dans le théorème précédent (nullité de l'indice sur la composante connexe de l'infini). Pour le deuxième, on utilise le fait que l'indice est localement constant pour se ramener au cas $z=z_0$; dans ce cas le paramétrage du cercle $\gamma_r(z_0)$ par $w=z_0+r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, $\theta\in[0,2\pi]$, donne

$$\int_{\gamma_r(z_0)} \frac{dw}{w-z_0} = \int_0^{2\pi} \frac{r\,\mathrm{i}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\,d\theta}{r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}} = 2\mathrm{i}\pi.$$

On aurait pu aussi calculer l'indice en développant en série la fonction $w\to(w-z)^{-1}$.

Indice et Brouwer dans $\mathbb{R}^2$

On assimile $\mathbb{R}^2$ au plan complexe $\mathbb{C}$. Désignons par D le disque unité fermé du plan complexe. Le théorème de Brouwer en dimension deux affirme que

toute fonction continue de D *dans* D *possède un point fixe.*

La discussion qui suit se réduira à trois lignes quand on aura mis en place les outils du paragraphe *homotopie*, mais on va le faire tout à la main ici. Soit φ une fonction continue de D dans D ; on commence par la prolonger en fonction à support compact définie sur $\mathbb{C}$ tout entier, de la façon suivante : soit θ une fonction réelle, continue à support compact, définie sur $\mathbb{C}$, telle que $0 \le |z|\,\theta(z) \le 1$ partout et $\theta(z) = 1$ pour tout $z \in \mathrm{D}$. Posons $\psi(z) = \theta(z)\,\varphi(\theta(z)\,z)$ pour tout $z \in \mathbb{C}$. Alors ψ est continue sur $\mathbb{C}$, à support compact et à valeurs dans D. De plus on a $\psi(z) = \varphi(z)$ quand $z \in \mathrm{D}$. Il est clair que $\psi(z) \ne z$ pour $|z| > 1$ puisque dans ce cas $|\psi(z)| \le 1 < |z|$. Il est ainsi clair que φ admet un point fixe si et seulement si ψ en admet un.

Dans le cas contraire, la fonction $z \to z - \psi(z)$ ne s'annulerait pas sur $\mathbb{C}$; comme $|z - \psi(z)| \ge |z| - 1$ tend vers l'infini à l'infini, le minimum du module existe sur $\mathbb{C}$ et est donc un nombre $\delta > 0$. Par convolution avec une fonction réelle $k \ge 0$, de classe C^∞ à support compact et d'intégrale un, on pourra obtenir $\psi_1 = k * \psi$ de classe C^∞ à support compact telle que $\|\psi_1 - \psi\|_\infty < \delta/2$, ce qui entraîne que $|z - \psi_1(z)| \ge \delta/2$ pour tout $z \in \mathbb{C}$.

Posons $g(z) = z - \psi_1(z)$; cette fonction est de classe C^1 sur $\mathbb{C}$, ne s'annule jamais, et on a $g(z) = z$ lorsque $|z| \ge \mathrm{R}$ puisque ψ_1 est à support compact. On va montrer qu'une telle fonction g ne peut pas exister.

Pour $r \in [0, \mathrm{R}]$ considérons le chemin fermé χ_r paramétré par $\theta \in [0, 2\pi]$ et défini par $\chi_r(\theta) = g(r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})$. Puisque g ne s'annule pas, on a une famille de chemins C^1 qui ne passent pas par 0, ce qui permet de considérer les indices

$$\mathrm{N}(r) = \mathrm{Ind}_{\chi_r}(0) = \frac{1}{2\mathrm{i}\pi} \int_{\chi_r} \frac{dz}{z} \in \mathbb{Z}.$$

On montrera plus loin que $r \to \mathrm{N}(r)$ est continue, par un argument usuel d'intégrale dépendant d'un paramètre. Puisque le résultat est entier, il doit être constant sur $[0, \mathrm{R}]$. Mais on a $g(z) = z$ lorsque $|z| = \mathrm{R}$, donc χ_R est le parcours du cercle de rayon R,

$$\mathrm{N}(\mathrm{R}) = \frac{1}{2\mathrm{i}\pi} \int_{\gamma_\mathrm{R}} \frac{dz}{z} = 1$$

alors que $\mathrm{N}(0) = 0$ (le chemin χ_0 est de longueur nulle). Cette contradiction montre que l'hypothèse que φ soit sans point fixe est absurde.

Écrivons le paramétrage qui nous convaincra de la continuité de $r \to \mathrm{N}(r)$. Posons $\mathrm{G}(x, y) = g(x + \mathrm{i}y)$ pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$; cette fonction G à valeurs complexes définie sur $\mathbb{R}^2$ est de classe C^1 puisque g est de classe C^1. Pour r fixé dans $[0, \mathrm{R}]$ on écrit $\chi_r(\theta) = g(r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}) = \mathrm{G}(r\cos\theta, r\sin\theta)$, et on a

$$\chi_r'(\theta) = \Bigl(\frac{\partial \mathrm{G}}{\partial x}(\mathrm{M}_\theta)(-r\sin\theta) + \frac{\partial \mathrm{G}}{\partial y}(\mathrm{M}_\theta)(r\cos\theta)\Bigr) =: h(r, \theta)$$

où $\mathrm{M}_\theta = (r\cos\theta, r\sin\theta)$. La fonction h est un peu désagréable, mais il est clair qu'elle est continue en (r,θ) puisque G est de classe C^1. On a maintenant

$$\mathrm{N}(r) = \frac{1}{2\mathrm{i}\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\chi_r'(\theta)}{\chi_r(\theta)}\, d\theta = \frac{1}{2\mathrm{i}\pi} \int_0^{2\pi} \frac{h(r,\theta)}{g(r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})}\, d\theta$$

qui est continue en r d'après les théorème usuels sur la continuité d'intégrales dépendant d'un paramètre.

5.2.d. *Développement en série de puissances*

Théorème : formule de Cauchy élémentaire. *Soient $z_0 \in \Omega$, $r_0 > 0$ et f une fonction holomorphe dans le disque ouvert $\mathrm{B}(z_0, r_0)$; pour tout $r < r_0$ et tout z tel que $|z - z_0| < r$ on a*

$$f(z) = \frac{1}{2\mathrm{i}\pi} \int_{\gamma_r(z_0)} \frac{f(w)}{w - z}\, dw.$$

Démonstration. Dans l'ouvert $\mathrm{U} = \mathrm{B}(z_0, r_0)$ fixons un point z et considérons la fonction continue g définie par $g(w) = \big(f(w) - f(z)\big)/(w - z)$ si $w \neq z$ et $g(z) = f'(z)$. Cette fonction est holomorphe dans $\mathrm{U} \setminus \{z\}$. Puisque U est étoilé, il résulte du corollaire 5.2.3 que $\int_{\gamma_r(z_0)} g(w)\, dw = 0$ pour tout cercle $\gamma_r(z_0)$ dans U, de centre z_0 et de rayon $r < r_0$. On a donc, en découpant $g(w)$ en deux morceaux, l'égalité

$$\int_{\gamma_r(z_0)} \frac{f(w)}{w - z}\, dw = f(z) \int_{\gamma_r(z_0)} \frac{1}{w - z}\, dw = 2\mathrm{i}\pi f(z),$$

où on a utilisé le calcul d'indice de l'exemple 5.2.4.

Théorème. *Soient Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ et f une fonction holomorphe dans Ω ; soient ensuite $z_0 \in \Omega$ et $r_0 = \mathrm{dist}(z_0, \Omega^c) > 0$; la fonction f coïncide dans le disque ouvert $\mathrm{B}(z_0, r_0)$ avec la somme d'une série entière,*

$$\forall z \in \mathrm{B}(z_0, r_0), \quad f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z_0)\, (z - z_0)^n.$$

La fonction f est donc indéfiniment dérivable (au sens complexe) dans le disque $\mathrm{B}(z_0, r_0)$ et on a nécessairement

$$a_n(z_0) = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$$

pour tout entier $n \geq 0$.

Démonstration. Dans l'ouvert $\mathrm{U} = \mathrm{B}(z_0, r_0)$ on fixe un point z et on considère un nombre r tel que $|z - z_0| < r < r_0$. On vient de voir que

$$f(z) = \frac{1}{2\mathrm{i}\pi} \int_{\gamma_r(z_0)} \frac{f(w)}{w - z}\, dw.$$

Utilisons le paramétrage $w = z_0 + r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, avec $\theta \in [0, 2\pi]$. L'égalité précédente devient

$$f(z) = \frac{1}{2\mathrm{i}\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})}{r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} + z_0 - z}\, r\,\mathrm{i}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\, d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})}{1 - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}(z - z_0)/r}\, d\theta.$$

Considérons le développement en série

$$\frac{f(z_0 + r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})}{1 - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}(z - z_0)/r} = \sum_{n=0}^{+\infty} f(z_0 + r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\,\mathrm{e}^{-n\mathrm{i}\theta}(z - z_0)^n/r^n\,;$$

comme $|z - z_0| < r$, la série des modules est bornée par une valeur finie indépendante de θ

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |f(z_0 + r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})|\,|z - z_0|^n/r^n \le \mathrm{M}\sum_{n=0}^{+\infty} |z - z_0|^n/r^n = \frac{\mathrm{M}}{1 - |z - z_0|/r}$$

où M désigne le maximum de $|f|$ sur le cercle $\gamma_r(z_0)^*$. Ceci permet par le corollaire 1.3.2 d'intervertir la série et l'intégrale, donc

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z_0 + r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\,\mathrm{e}^{-n\mathrm{i}\theta}(z - z_0)^n/r^n\,d\theta = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(z_0)\,(z - z_0)^n,$$

où

$$a_n(z_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z_0 + r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\,\mathrm{e}^{-n\mathrm{i}\theta}\,r^{-n}\,d\theta = \frac{1}{2\mathrm{i}\pi}\int_{\gamma_r(z_0)} \frac{f(w)}{(w - z_0)^{n+1}}\,dw$$

pour tout entier $n \ge 0$.

5.3. Propriétés des fonctions holomorphes

5.3.a. *Principe des zéros isolés*

Proposition. *Si une fonction f holomorphe dans un ouvert Ω s'annule en une suite $(z_n)_{n\ge 1}$ de points de Ω qui tend vers un point $z_0 \in \Omega$, et si $z_0 \ne z_n$ pour tout $n \ge 1$, alors f est nulle au voisinage de z_0. Autrement dit, lorsque l'ensemble des zéros de f ne contient aucun ouvert non vide, chaque zéro de f dans Ω est* isolé *dans Ω ; si Ω est connexe et si f s'annule dans un ouvert non vide $\mathrm{U} \subset \Omega$, alors f est nulle dans Ω.*

Démonstration. On écrit

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n\,(z - z_0)^n$$

pour tout $z \in \mathrm{B}(z_0, r_0)$, où $r_0 = \mathrm{dist}(z_0, \Omega^c) > 0$. Si f n'est pas identiquement nulle au voisinage de z_0, il existe au moins un coefficient c_n non nul ; si on désigne par m le premier entier tel que $c_m \ne 0$, on aura pour tout $z \in \mathrm{B}(z_0, r_0)$

$$f(z) = c_m\,(z - z_0)^m\,\bigl(1 + d_1\,(z - z_0) + \cdots + d_k\,(z - z_0)^k + \cdots\bigr)$$

où $c_m\,d_k = c_{m+k}$, c'est-à-dire que $f(z) = c_m\,(z - z_0)^m\,g(z)$ dans un voisinage de z_0, avec g continue et $g(z_0) = 1$. Il est alors clair qu'il existe un voisinage de z_0 dans lequel z_0 est le seul zéro de f, contredisant ainsi l'existence d'une suite de zéros (z_n) différents de z_0 et tendant vers z_0.

On en déduit que l'ensemble N des points $z \in \Omega$ tels qu'il existe un ouvert $\mathrm{U} \subset \Omega$ contenant z et dans lequel f est nulle, forme un sous-ensemble ouvert (évident) et fermé de Ω : en effet, si une suite $(z_n) \subset \mathrm{N}$ tend vers $z \in \Omega$, ou bien $z = z_{n_0}$ pour un certain indice n_0 et dans ce cas $z \in \mathrm{N}$ directement, ou bien z est limite de zéros $z_n \ne z$, et f est nulle au voisinage de z par ce qui précède, donc $z \in \mathrm{N}$ à nouveau. Si Ω est connexe, on aura $\mathrm{N} = \Omega$ dès que N n'est pas vide.

Exemple. On a utilisé ce principe pour calculer la transformée de Fourier des gaussiennes à partir de leur transformée de Laplace : la fonction holomorphe

$$z \to \mathrm{e}^{-z^2/2} - \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}zx - x^2/2} \, \frac{dx}{\sqrt{2\pi}}$$

est calculable sur l'axe imaginaire, et elle est nulle sur l'axe imaginaire ; elle est donc nulle en tout point du connexe $\mathbb{C}$.

Points réguliers, points singuliers sur le cercle de convergence d'une série entière

On considère la somme $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ d'une série entière de rayon de convergence r_0, avec $0 < r_0 < +\infty$. On dit que le point λ du cercle de convergence ($|\lambda| = r_0$) est *régulier* pour f s'il existe une boule ouverte $\mathrm{B}(\lambda, \delta)$, $\delta > 0$ et une fonction holomorphe f_1 dans $\mathrm{B}(\lambda, \delta)$ telle que $f_1 = f$ dans l'intersection $\mathrm{B}(0, r_0) \cap \mathrm{B}(\lambda, \delta)$; cela revient à dire que f se prolonge en fonction holomorphe dans l'ouvert réunion $\mathrm{B}(0, r_0) \cup \mathrm{B}(\lambda, \delta)$.

Ne pas confondre le fait que λ soit régulier ou non avec le fait que la série de Taylor de f à l'origine converge ou non au point λ. Par exemple, la série $\sum z^n$ diverge en **tout** point du cercle unité ; pourtant, sa somme $f(z) = (1-z)^{-1}$ se prolonge à $\mathbb{C} \setminus \{1\}$, donc tous les $\lambda \neq 1$ du cercle unité sont réguliers. Il y a bien un point singulier sur le cercle unité, conformément au théorème qui suit.

Théorème. *Il existe au moins un point singulier sur le cercle de convergence.*

Démonstration. Supposons $r_0 = 1$ pour fixer les idées. Si aucun point singulier n'existe sur le cercle de convergence, on aura pour tout point x du cercle de rayon 1 une boule ouverte B_x de centre x et une fonction holomorphe f_x dans B_x qui coïncide avec f dans $\mathrm{B}(0,1) \cap \mathrm{B}_x$; par compacité, on trouve un nombre fini $\mathrm{B}_1, \ldots, \mathrm{B}_\mathrm{N}$ de ces boules ouvertes qui couvre le cercle unité, et des fonctions $f_1, \ldots, f_\mathrm{N}$, telles que chaque f_j soit holomorphe dans B_j et coïncide avec f dans $\mathrm{B}_j \cap \mathrm{B}(0,1)$, pour tout $j = 1, \ldots, \mathrm{N}$. L'ensemble $\Omega = \mathrm{B}_1 \cup \ldots \cup \mathrm{B}_\mathrm{N} \cup \mathrm{B}(0,1)$ est un ouvert qui contient le disque unité fermé, donc il existe $\delta > 0$ tel que $\mathrm{B}(0, 1+\delta) \subset \Omega$.

Notons $\mathrm{B}_0 = \mathrm{B}(0,1)$ et $f_0 = f$. On va montrer qu'on peut définir une fonction holomorphe g dans $\mathrm{B}(0, 1+\delta)$ en posant $g(z) = f_j(z)$ si $z \in \mathrm{B}_j$, $j = 0, \ldots, \mathrm{N}$. Alors g sera développable en série entière de rayon de convergence $\geq 1 + \delta$; mais cette série est aussi la série de Taylor de f, puisque $g = f$ au voisinage de 0 ; on aura donc une contradiction au fait que le rayon de convergence était égal à 1.

Pour terminer, il suffit de voir que $f_j(z) = f_k(z)$ lorsque $z \in \mathrm{B}_j \cap \mathrm{B}_k$, $0 \leq j < k \leq \mathrm{N}$. C'est vrai par construction si $j = 0$. Sinon, B_j et B_k sont deux boules centrées en des points x_j et x_k du cercle unité ; si $\mathrm{U} = \mathrm{B}_j \cap \mathrm{B}_k$ n'est pas vide, c'est un ouvert qui contient des points du cercle unité, donc U doit rencontrer B_0 ; sur l'ouvert non vide $\mathrm{V} = \mathrm{B}_0 \cap \mathrm{B}_j \cap \mathrm{B}_k$, on sait que $f_j = f_0 = f_k$; pour finir, U est connexe et $f_j - f_k$ est nulle sur un ouvert non vide $\mathrm{V} \subset \mathrm{U}$: il en résulte que $f_j - f_k = 0$ dans $\mathrm{B}_j \cap \mathrm{B}_k$.

Exercice. On considère la série entière

$$f(z) = z + z^3 + z^7 + \cdots + z^{2^n - 1} + \cdots$$

a. Vérifier que le rayon de convergence est égal à 1.

b. Pour tout $x \in \mathbb{C}$ on pose $g(x) = (x + x^2)/2$; montrer que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que

$$\big(|x| < 1 + \delta\big) \Rightarrow \big(|g(x)| < 1 \quad \text{ou} \quad |x - 1| < \varepsilon\big).$$

c. Montrer que si 1 était régulier pour f, il existerait $\delta > 0$ tel que $x \to f(g(x))$ soit holomorphe dans $\mathrm{B}(0, 1+\delta)$. Montrer que ceci est impossible en étudiant la série entière de $f(g(x))$ pour $x = 1$.

d. Généraliser à tout point λ du cercle unité : tous les points du cercle unité sont singuliers pour f.

5.3.b. *Fonctions holomorphes dans une couronne. Développement de Laurent*

Désignons par $\mathrm{C}(\mathrm{R}_1, \mathrm{R}_2)$ la couronne ouverte du plan complexe centrée en 0 égale à $\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{R}_1 < |z| < \mathrm{R}_2\}$. On suppose $\mathrm{R}_1 < \mathrm{R}_2$, et on peut admettre les cas extrêmes $\mathrm{R}_2 = +\infty$ et $\mathrm{R}_1 = 0$; ainsi, la couronne $\mathrm{C}(0, +\infty)$ est égale à $\mathbb{C}^*$.

Lemme. *Soit h une fonction holomorphe dans la couronne $\mathrm{C}(\mathrm{R}_1, \mathrm{R}_2)$, et désignons par*

$$\mu(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h(r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\, d\theta$$

la moyenne de h sur le cercle centré en 0 et de rayon r, $\mathrm{R}_1 < r < \mathrm{R}_2$; cette moyenne reste constante quand r varie entre R_1 et R_2.

Preuve. On aura en effet, en posant $\mathrm{H}(r, \theta) = h(r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})$

$$2\pi r\,\mathrm{i}\, \frac{d\mu(r)}{dr} = \int_0^{2\pi} h'(r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}) r\,\mathrm{i}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\, d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{\partial \mathrm{H}}{\partial \theta}(r, \theta)\, d\theta = \mathrm{H}(r, 2\pi) - \mathrm{H}(r, 0) = 0,$$

ce qui montre que $\mu(r)$ reste constant sur l'intervalle $]\mathrm{R}_1, \mathrm{R}_2[$. Autres méthodes pour montrer cette constance : invariance par homotopie (voir Cartan, paragraphe II.1.6), ou bien la démonstration du *Théorème de Cauchy global*, dans Rudin, 3ième édition, théorème 10.35.

Si f est holomorphe dans $\mathrm{C}(\mathrm{R}_1, \mathrm{R}_2)$, et si $\lambda = r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}$ est un point fixé de cette couronne, on considère la fonction périodique g_r définie par $g_r(\theta) = f(r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})$. La fonction g_r est de classe C^1, ce qui suffit largement (voir le corollaire 4.1.5) à assurer qu'elle est représentable en tout point par son développement de Fourier, convergent en $\pm\infty$

$$f(\lambda) = g_r(\alpha) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} c_m(r)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}m\alpha}, \tag{7}$$

où pour tout $m \in \mathbb{Z}$ le coefficient de Fourier $c_m(r)$ de g_r est donné par

$$c_m(r) = \int_0^{2\pi} g_r(\theta)\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}m\theta}\, \frac{d\theta}{2\pi}.$$

Si on pose $h_m(z) = f(z)/z^m$ pour tout z de la couronne, on voit que

$$\frac{c_m(r)}{r^m} = \int_0^{2\pi} \frac{g_r(\theta)}{r^m\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}m\theta}}\, \frac{d\theta}{2\pi} = \int_0^{2\pi} h_m(r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}) \frac{d\theta}{2\pi}$$

est la moyenne de la fonction holomorphe h_m sur le cercle γ_r. On a vu que cette moyenne est constante, ce qui permet d'écrire $c_m(r) = a_m r^m$ pour tout $m \in \mathbb{Z}$, où a_m ne dépend plus de r. L'équation (7) devient

$$f(\lambda) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} a_m r^m \,\mathrm{e}^{\mathrm{i} m\alpha} = \sum_{m \in \mathbb{Z}} a_m \lambda^m$$

où

$$a_m = \int_0^{2\pi} h_m(r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}) \frac{d\theta}{2\pi} = \frac{1}{2\mathrm{i}\pi} \int_{\gamma_r} \frac{f(z)}{z^m} \frac{dz}{z}.$$

Il s'agit donc d'un développement de f de la forme $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n z^n$, convergent pour tout $z \in \mathrm{C}(\mathrm{R}_1, \mathrm{R}_2)$. En y regardant de plus près, on va voir que la série est normalement convergente sur tout compact K contenu dans la couronne ouverte, et que le développement est unique.

Proposition. *On suppose que la fonction f est holomorphe dans la couronne* $\mathrm{C}(\mathrm{R}_1, \mathrm{R}_2)$ *et qu'elle y est représentée par une série de la forme*

$$f(z) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} a_m z^m,$$

convergente en $+\infty$ et $-\infty$. Cette série converge uniformément sur tout compact K *contenu dans la couronne ouverte, et les coefficients (a_m) sont uniquement déterminés à partir de la fonction f : pour tout r tel que $\mathrm{R}_1 < r < \mathrm{R}_2$ et tout $m \in \mathbb{Z}$, on a*

$$a_m = \frac{1}{2\mathrm{i}\pi} \int_{\gamma_r} \frac{f(z)}{z^m} \frac{dz}{z}. \tag{8}$$

Preuve. Si K est un compact contenu dans la couronne ouverte, il existe r_1 et r_2 tels que $\mathrm{R}_1 < r_1 \le r_2 < \mathrm{R}_2$ et que tout point z de K vérifie $r_1 \le |z| \le r_2$. Choisissons ρ_1 et ρ_2 tels que $\mathrm{R}_1 < \rho_1 < r_1 \le r_2 < \rho_2 < \mathrm{R}_2$; puisque ρ_1 et ρ_2 sont deux points de la couronne, les séries $\sum a_m \rho_1^m$ et $\sum a_m \rho_2^m$ sont convergentes, ce qui signifie pour nous qu'elles convergent aux deux côtés $\pm\infty$; en particulier leurs termes généraux sont bornés : il existe $\mathrm{M}_1, \mathrm{M}_2$ tels que

$$\forall m \in \mathbb{Z}, \quad |a_m|\, \rho_1^m \le \mathrm{M}_1, \quad |a_m|\, \rho_2^m \le \mathrm{M}_2.$$

On peut alors majorer pour tout $z \in \mathrm{K}$ les termes d'indices m négatifs de la série de Laurent par

$$|a_m z^m| \le r_1^m |a_m| = \Bigl(\frac{r_1}{\rho_1}\Bigr)^m \rho_1^m |a_m| \le \mathrm{M}_1 \Bigl(\frac{r_1}{\rho_1}\Bigr)^m,$$

ce qui donne une série majorante convergente ; pour la partie positive de la série on utilise $r_2, \rho_2, \mathrm{M}_2$. À partir de cette information de convergence normale, on peut intervertir série et intégrale,

$$\int_{\gamma_r} \frac{f(z)}{z^{n+1}}\, dz = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \Bigl(\int_{\gamma_r} a_m z^{m-n-1}\, dz \Bigr) = 2\mathrm{i}\pi a_n.$$

On aurait pu aussi invoquer l'unicité du développement de Fourier.

Remarque. L'utilisation des séries de Fourier permet un passage très rapide des fonctions holomorphes aux fonctions analytiques, à condition de supposer que la fonction holomorphe en question soit de classe C^1 : si f est de classe C^1 dans la boule $\mathrm{B}(z_0, r_0)$, et $\mathbb{C}$-dérivable dans cette boule, on sait par le lemme ci-dessus que les moyennes des fonctions $z \to f(z)/(z-z_0)^n$ sur les cercles centrés en z_0 sont indépendantes du rayon $r < r_0$; on en déduit comme on l'a fait ci-dessus un développement de Laurent, et on montre ensuite que tous les coefficients d'indice négatif sont nuls, en utilisant la formule (8) pour $r \to 0$ (voir la démonstration de la proposition 5.3.2).

5.3.c. *Applications du développement de Laurent*

Si $\mathrm{R}_1, \mathrm{R}_2$ sont deux nombres tels que $0 \le \mathrm{R}_1 < \mathrm{R}_2 \le +\infty$ et si f est une fonction holomorphe dans la couronne ouverte $\mathrm{C}(\mathrm{R}_1, \mathrm{R}_2) = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{R}_1 < |z| < \mathrm{R}_2\}$, on a vu qu'elle admet un développement en série de la forme

$$\text{(L)} \qquad \forall z \in \mathrm{C}(\mathrm{R}_1, \mathrm{R}_2), \quad f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n \, z^n$$

où les coefficients $(a_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ peuvent s'exprimer par

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad a_n = \frac{1}{2\mathrm{i}\pi} \int_{\gamma_r} \frac{f(w)}{w^{n+1}} \, dw$$

pour tout cercle γ_r centré en 0 et tel que $\mathrm{R}_1 < r < \mathrm{R}_2$. La série précédente (L), appelée *série de Laurent* de f, converge uniformément sur tout compact K contenu dans la couronne. On obtient par translation le même type de résultat pour une fonction f holomorphe dans une couronne $\mathrm{C}(z_0; \mathrm{R}_1, \mathrm{R}_2)$ centrée en z_0,

$$\mathrm{C}(z_0; \mathrm{R}_1, \mathrm{R}_2) = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{R}_1 < |z - z_0| < \mathrm{R}_2\}.$$

On aura dans ce cas un développement de la forme

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z_0) \, (z - z_0)^n$$

dans la couronne en question. Les formules pour le calcul des coefficients se transforment de façon évidente par translation,

$$\forall m \in \mathbb{Z}, \quad a_m(z_0) = \frac{1}{2\mathrm{i}\pi} \int_{\gamma_r(z_0)} \frac{f(w)}{(w - z_0)^{m+1}} \, dw.$$

La formule précédente, dans le cas $m = -1$ donne

$$\int_{\gamma_r(z_0)} f(z) \, dz = 2\mathrm{i}\pi \, a_{-1}(z_0) \, ;$$

cette formule est à la base de la *méthode des résidus* ; on verra qu'on peut, sous certaines conditions, déformer le chemin $\gamma_r(z_0)$ en un nouveau chemin γ sans changer l'intégrale.

On pourra ainsi donner la valeur de l'intégrale de f sur des chemins γ plus généraux que les seuls cercles autour de z_0.

Exercice 5.3.1. Calculer par la méthode des résidus

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}tx}}{\pi(1+x^2)}\, dx$$

où t est un paramètre réel (utiliser le contour Γ_{R} formé du segment $[-\mathrm{R},\mathrm{R}]$ et du demi-cercle ayant l'intervalle $[-\mathrm{R},\mathrm{R}]$ comme diamètre, et tournant dans $\operatorname{Im} z > 0$ ou bien $\operatorname{Im} z < 0$ selon le signe de t).

Calculer

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx$$

à partir de $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,z}/z$.

Inégalités de Cauchy

Pour une fonction f holomorphe dans la couronne $\mathrm{C}(\mathrm{R}_1,\mathrm{R}_2)$, et pour r entre R_1 et R_2 posons

$$\mathrm{M}_r(f) = \max\{\left|f(r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\right| : \theta \in \mathbb{R}\}.$$

En revenant à la première expression (7) des $(c_m(r))$ comme coefficients de Fourier de la fonction g_r, on voit avec Parseval que

$$(\mathrm{C}_2) \qquad \sum_{m\in\mathbb{Z}} r^{2m}|a_m|^2 = \sum_{m\in\mathbb{Z}} |c_m(r)|^2 = \|g_r\|^2_{\mathrm{L}_2} = \int_0^{2\pi} \left|f(r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\right|^2 \frac{d\theta}{2\pi} \le \mathrm{M}_r(f)^2$$

et en particulier on trouve ainsi les *inégalités de Cauchy*,

$$(\mathrm{C}_\infty) \qquad \forall m \in \mathbb{Z}, \quad r^m|a_m| \le \mathrm{M}_r(f).$$

Singularité artificielle

Nous appellerons *boule épointée* une boule ouverte privée de son centre, par exemple $\mathrm{B}(z_0,\mathrm{R}) \setminus \{z_0\}$; on notera $\mathrm{B}'(z_0,\mathrm{R}) = \mathrm{B}(z_0,\mathrm{R}) \setminus \{z_0\}$; une telle boule épointée est un cas particulier de couronne, $\mathrm{B}'(z_0,\mathrm{R}) = \mathrm{C}(z_0;0,\mathrm{R})$.

Proposition 5.3.2. *Si f est holomorphe dans $\mathrm{B}(z_0,\mathrm{R}) \setminus \{z_0\}$ et si $(z-z_0)f(z)$ tend vers 0 quand $|z-z_0| \to 0$, alors f se prolonge en fonction holomorphe sur $\mathrm{B}(z_0,\mathrm{R})$. En particulier, si f reste bornée quand $|z-z_0| \to 0$, alors f se prolonge en fonction holomorphe sur $\mathrm{B}(z_0,\mathrm{R})$. Si f est définie et continue sur $\mathrm{B}(z_0,\mathrm{R})$ et holomorphe dans $\mathrm{B}(z_0,\mathrm{R}) \setminus \{z_0\}$, alors f est holomorphe sur $\mathrm{B}(z_0,\mathrm{R})$.*

Démonstration. Par translation on se ramène à $z_0 = 0$. En considérant la boule épointée $\mathrm{B}'(0,\mathrm{R}) = \mathrm{B}(0,\mathrm{R}) \setminus \{0\}$ comme une couronne, on écrit un développement de Laurent $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n z^n$ dans $\mathrm{B}'(0,\mathrm{R})$. Puisque $zf(z)$ tend vers 0, on a $r\mathrm{M}_r(f) \to 0$ lorsque $r \to 0$, et *a fortiori* on a $r^m\mathrm{M}_r(f) \to 0$ pour tout $m \ge 1$. D'après les inégalités de Cauchy, on a $|a_n| \le r^{-n}\mathrm{M}_r(f)$ pour tout r tel que $0 < r < \mathrm{R}$ et tout $n < 0$; en posant

$m = -n \geq 1$ et en faisant tendre r vers 0, on en déduit que $a_n = 0$ pour tout $n < 0$; la série de Laurent se réduit donc à une série entière. Le prolongement voulu pour f est donné par la formule

$$\forall z \in \mathrm{B}(0, \mathrm{R}), \quad \widetilde{f}(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n.$$

Définitions. Soit f une fonction holomorphe dans la boule épointée $\mathrm{B}'(z_0, \mathrm{R})$; on dit que z_0 est un *pôle* de f si le développement de Laurent $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z_0)(z - z_0)^n$ de f dans $\mathrm{B}'(z_0, \mathrm{R})$ comporte un nombre **fini non nul** de coefficients $a_n(z_0) \neq 0$ avec $n < 0$.

Le *résidu* de f au point z_0 est le coefficient $a_{-1}(z_0)$; on le note $\mathrm{Res}(f, z_0)$; on a donc

$$\mathrm{Res}(f, z_0) = \frac{1}{2\mathrm{i}\pi} \int_{\gamma_r(z_0)} f(z)\, dz \tag{R}$$

pour tout r tel que $0 < r < \mathrm{R}$.

Dans certains cas on dispose de méthodes simples de développement limité pour identifier ce résidu. Supposons par exemple que $f(z) = \mathrm{P}(z)/\mathrm{Q}(z)$, où P, Q sont holomorphes au voisinage de z_0 et $\mathrm{Q}(z) = (z - z_0)\mathrm{R}(z)$ admet un zéro simple au point z_0, c'est-à-dire $\mathrm{R}(z_0) \neq 0$. Puisque $\mathrm{Q}'(z) = \mathrm{R}(z) + (z - z_0)\mathrm{R}'(z)$, on a $\mathrm{R}(z_0) = \mathrm{Q}'(z_0)$. Ensuite le quotient $\mathrm{P}(z)/\mathrm{R}(z)$ est holomorphe au voisinage de z_0, donc développable en série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n(z - z_0)^n$, et la formule

$$f(z) = \frac{1}{z - z_0} \frac{\mathrm{P}(z)}{\mathrm{R}(z)} = \frac{b_0}{z - z_0} + \sum_{n=0}^{+\infty} b_{n+1}(z - z_0)^n$$

montre que $a_{-1} = b_0 = \mathrm{P}(0)/\mathrm{R}(0)$, c'est-à-dire

$$\mathrm{Res}(f, z_0) = \frac{\mathrm{P}(z_0)}{\mathrm{Q}'(z_0)} \cdot$$

Définition. Soient Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ et A un ensemble discret dans Ω (pour chaque $a \in \mathrm{A}$, il existe $r > 0$ tel que $\mathrm{A} \cap \mathrm{B}(a, r) = \{a\}$) ; on dit que f est *méromorphe* dans Ω si elle est holomorphe dans $\Omega \setminus \mathrm{A}$ et si chaque point de A est un pôle pour f.

Théorème : théorème de Liouville. *On suppose que f est une fonction entière, c'est-à-dire une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$.*

– *Si f tend vers 0 à l'infini, f est nulle.*

– *Si f est bornée sur $\mathbb{C}$, alors f est constante.*

– *Si $f(z) = \mathrm{O}(|z|^m)$ lorsque $|z| \to +\infty$, avec $m \geq 0$, alors f est un polynôme de degré $\leq m$.*

Démonstration. Prouvons la dernière variante. L'hypothèse implique qu'il existe C tel que $\mathrm{M}_r(f) \leq \mathrm{C}\, r^m$ pour $r \geq 1$. D'après les inégalités de Cauchy, on a $|a_n| \leq \mathrm{C}\, r^{m-n}$ pour les coefficients (a_n) du développement en série entière de f, quand $r \geq 1$. Lorsque $n > m$, on en déduit $a_n = 0$ en faisant tendre r vers $+\infty$. Le développement en série de f se limite donc à un polynôme de degré $\leq m$.

Corollaire : théorème de D'Alembert. *Tout polynôme* P *de degré* ≥ 1 *à coefficients complexes admet au moins une racine dans* $\mathbb{C}$.

Démonstration : sinon, la fonction $z \to 1/\mathrm{P}(z)$ serait holomorphe sur $\mathbb{C}$, tendrait vers 0 à l'infini mais ne serait pas nulle, ce qui contredirait le théorème de Liouville.

Variante de Liouville avec $\mathrm{Re}\, f$

En utilisant la partie réelle de f on obtient une variante des inégalités de Cauchy

$$\forall n \geq 1, \quad |a_n| \leq \sqrt{2}\, \frac{\mathrm{M}_r(\mathrm{Re}\, f)}{r^n}. \tag{9}$$

On obtient alors avec les mêmes raisonnements la variante suivante du théorème de Liouville.

Supposons f entière.

– *Si* $\mathrm{Re}\, f$ *tend vers* 0 *à l'infini,* f *est nulle.*
– *Si* $\mathrm{Re}\, f$ *est bornée sur* $\mathbb{C}$*, alors* f *est constante.*
– *Si* $\mathrm{Re}\, f(z) = \mathrm{O}(|z|^m)$ *lorsque* $|z| \to +\infty$*, avec* $m \geq 0$*, alors* f *est un polynôme de degré* $\leq m$.

Démontrons les inégalités (9). Écrivons $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$, puis $a_n = \alpha_n + \mathrm{i}\beta_n$, avec $\alpha_n, \beta_n \in \mathbb{R}$. Pour z de module r écrivons $z = r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, puis $z^n = r^n\bigl(\cos(n\theta) + \mathrm{i}\sin(n\theta)\bigr)$; alors $\mathrm{Re}(a_n z^n) = r^n(\alpha_n \cos(n\theta) - \beta_n \sin(n\theta))$, donc par orthogonalité dans $\mathrm{L}_2(0, 2\pi)$ des fonctions sinus et cosinus

$$\mathrm{M}_r(\mathrm{Re}\, f)^2 \geq \int_0^{2\pi} |\,\mathrm{Re}\, f(r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})|^2 \,\frac{d\theta}{2\pi} = |\alpha_0|^2 + \sum_{n=1}^{+\infty} r^{2n} \Bigl(\frac{|\alpha_n|^2 + |\beta_n|^2}{2}\Bigr).$$

Pour tout $n \geq 1$ on a donc $r^{2n}\,|a_n|^2 \leq 2\,\mathrm{M}_r(\mathrm{Re}\, f)^2$.

Théorème de Morera

Dans le cercle d'implications qui mène de fonction holomorphe à fonction analytique, on peut isoler le théorème de Morera, qui est bien commode pour vérifier que l'holomorphie est préservée dans certaines intégrales dépendant d'un paramètre, ainsi que par certaines limites de suites de fonctions.

Théorème. *Soit f une fonction continue dans un ouvert* Ω *; si on a*

$$\int_{\partial \mathrm{T}} f(z)\, dz = 0$$

pour tout triangle T *contenu dans* Ω*, alors* f *est holomorphe dans* Ω.

Dans l'énoncé, « triangle » signifie triangle « plein », et ∂T est un chemin qui parcourt le bord du triangle T.

Démonstration. Soient $z_0 \in \Omega$ et $\mathrm{C} = \mathrm{B}(z_0, r)$ une boule ouverte contenue dans Ω ; on a vu que la nullité de l'intégrale de f sur les bords des triangles permet de définir une primitive de f si l'ouvert considéré est étoilé ; dans le convexe C la fonction f admet donc une primitive F, qui est par conséquent holomorphe dans C ; la chaîne d'implications vue précédemment donnera que F est développable en série entière dans $\mathrm{B}(z_0, r)$, donc sa dérivée f sera elle aussi dérivable au sens complexe dans C, et en particulier au point z_0, point quelconque de Ω.

5.3.d. *Holomorphie d'intégrales dépendant d'un paramètre*

Lemme 5.3.3. *On suppose que f est holomorphe dans la boule ouverte* $\mathrm{B}(z_0, r_0)$ *; pour tout $r < r_0$ et tout z tel que $|z - z_0| < r$ on a*

$$|f'(z)| \le \frac{r}{(r - |z - z_0|)^2} \max\{|f(z_0 + r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})| : \theta \in \mathbb{R}\}.$$

Preuve. On peut bien sûr se ramener au cas $z_0 = 0$ par translation. On écrit alors $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$. On a vu que $r^n |a_n| \le \mathrm{M}_r(f)$, donc

$$|f'(z)| = \Bigl|\sum_{n \ge 1} n a_n z^{n-1}\Bigr| \le \frac{\mathrm{M}_r(f)}{r} \sum_{n \ge 1} n\Bigl(\frac{|z|}{r}\Bigr)^{n-1} = \frac{\mathrm{M}_r(f)}{r} \frac{1}{(1 - |z|/r)^2}$$

qu'on peut écrire

$$|f'(z)| \le \frac{r\mathrm{M}_r(f)}{(r - |z - z_0|)^2}.$$

On en déduit un théorème d'holomorphie pour les intégrales dépendant d'un paramètre, qui ne demande pas de contrôle de la « grandeur » de la dérivée, mais seulement de celle de la fonction ! Le théorème suivant est le théorème I.7 du chapitre IX de Zuily-Queffélec.

Théorème. *Soit $f(z, t)$ une fonction définie sur $\Omega \times \mathrm{X}$, où Ω est un ouvert non vide de $\mathbb{C}$ et $(\mathrm{X}, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré ; on suppose que*

– *pour tout $t \in \mathrm{X}$, la fonction $z \to f(z, t)$ est holomorphe sur Ω,*

– *pour tout $z \in \Omega$, la fonction $t \to f(z, t)$ est mesurable sur $(\mathrm{X}, \mathcal{A})$,*

– *pour tout compact $\mathrm{K} \subset \Omega$, il existe une fonction μ-intégrable $g_\mathrm{K}(t)$ sur X telle que $|f(z, t)| \le g_\mathrm{K}(t)$ pour tous $z \in \mathrm{K}$, $t \in \mathrm{X}$.*

Il en résulte que la fonction F définie sur Ω par

$$\mathrm{F}(z) = \int_\mathrm{X} f(z, t)\, d\mu(t)$$

est holomorphe dans Ω et

$$\mathrm{F}'(z) = \int_\mathrm{X} \frac{\partial f}{\partial z}(z, t)\, d\mu(t).$$

Démonstration. Fixons un point z_0 dans Ω, posons $r_0 = \mathrm{dist}(z_0, \Omega^c)$, fixons r tel que $0 < r < r_0$ et $t \in \mathrm{X}$; sur le compact $\mathrm{K} = \overline{\mathrm{B}(z_0, r)} \subset \Omega$ la fonction holomorphe f_t définie par $f_t(z) = f(z, t)$ est majorée en module par un nombre $g_\mathrm{K}(t)$ indépendant de $z \in \mathrm{K}$; cette majoration est en particulier valable sur le cercle $\gamma_r(z_0)$, et on en déduit que

$$|f_t'(z)| \le \frac{r g_\mathrm{K}(t)}{(r - |z - z_0|)^2}$$

pour tout $z \in \mathrm{B}(z_0, r)$; si on se limite au voisinage $\mathrm{V} = \mathrm{B}(z_0, r/2)$ on aura

$$\forall z \in \mathrm{V}, \quad |f_t'(z)| \le \frac{4 g_\mathrm{K}(t)}{r}.$$

Le voisinage V étant convexe, cette inégalité entraîne que f_t est lipschitzienne dans V, et

$$\Bigl|\frac{f_t(z_0+h)-f_t(z_0)}{h}\Bigr| \le \frac{4g_{\mathrm{K}}(t)}{r}$$

pour tout $h \in \mathbb{C}$ tel que $|h| < r/2$. Pour toute suite (h_n) tendant vers 0, la suite de fonctions

$$g_n(t) = \frac{f(z_0+h_n,t)-f(z_0,t)}{h_n}$$

converge vers $\dfrac{\partial f}{\partial z}(z_0,t)$, en étant dominée par la fonction intégrable fixe $4r^{-1}g_{\mathrm{K}}$; le théorème de convergence dominée implique que

$$\frac{\mathrm{F}(z_0+h_n)-\mathrm{F}(z_0)}{h_n} = \int_{\mathrm{X}} g_n(t)\,d\mu(t) \to \int_{\mathrm{X}} \frac{\partial f}{\partial z}(z_0,t)\,d\mu(t).$$

Exemple-Exercice. Montrer que la fonction

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1}\,\mathrm{e}^{-t}\,dt$$

définie dans l'ouvert $\Omega = \{z : \operatorname{Re} z > 0\}$, est holomorphe dans cet ouvert. Si on pose $z = x + \mathrm{i}y$, on a

$$\bigl|t^{z-1}\bigr| = \Bigl|\mathrm{e}^{(z-1)\ln t}\Bigr| = \mathrm{e}^{(x-1)\ln t} = t^{x-1}$$

et les majorations amènent à distinguer les cas $x > 1$ et $x < 1$. Mais l'effort total de vérification est moindre que pour vérifier que la fonction Γ est dérivable sur $\mathbb{R}$ par les méthodes purement réelles !

Limites de suites de fonctions holomorphes

Proposition. *Si une suite (f_n) de fonctions holomorphes sur un ouvert Ω de $\mathbb{C}$ tend simplement sur Ω vers une fonction f, et si pour tout compact $\mathrm{K} \subset \Omega$ il existe une constante c_{K} telle que $|f_n(z)| \le c_{\mathrm{K}}$ pour tout n et tout $z \in \mathrm{K}$, alors $f \in \mathrm{H}(\Omega)$.*

Il résulte en fait de l'hypothèse que la suite (f_n) converge vers f uniformément sur tout compact $\mathrm{K} \subset \Omega$.

Démonstration. On va d'abord montrer que la suite (f_n) converge uniformément vers f sur toute boule $\mathrm{B}(z_0,r)$ telle que $\overline{\mathrm{B}(z_0,2r)} \subset \Omega$. Soit $z \in \mathrm{B}(z_0,r)$; d'après la formule intégrale de Cauchy,

$$f_n(z)-f_m(z) = \frac{1}{2\mathrm{i}\pi}\int_{\gamma_{2r}(z_0)} \frac{f_n(w)-f_m(w)}{w-z}\,dw.$$

En posant $w = z_0 + 2r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ on obtient, en notant que $|w-z| \ge r$ lorsque $w \in \gamma_{2r}(z_0)^*$

$$|f_n(z)-f_m(z)| \le \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\bigl|(f_n-f_m)(z_0+2r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\bigr|}{r}\,2r\,d\theta.$$

Sur le compact $\mathrm{K} = \gamma_{2r}(z_0)^*$ la suite $(f_n - f_m)$ tend vers 0 en étant dominée par $2c_{\mathrm{K}}$: d'après le théorème de convergence dominée de Lebesgue, il en résulte que

$$\varepsilon_{n,m} := \int_0^{2\pi} \bigl|(f_n - f_m)(z_0 + 2r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\bigr| \,\frac{d\theta}{2\pi}$$

tend vers 0 lorsque m, n tendent vers $+\infty$. On a vu que

$$|f_n(z) - f_m(z)| \le 2\,\varepsilon_{m,n}$$

pour tout $z \in \mathrm{B}(z_0, r)$; la suite (f_n) est donc de Cauchy uniforme dans $\mathrm{B}(z_0, r)$; elle converge uniformément vers f dans $\mathrm{B}(z_0, r)$ puisqu'on avait supposé la convergence simple de $(f_n(z))$ vers $f(z)$ en tout point z de Ω.

Si $\mathrm{K} \subset \Omega$ est compact, on peut le recouvrir par un nombre fini de boules $\mathrm{B}(z_j, r_j)$ telles que $\overline{\mathrm{B}(z_j, 2r_j)} \subset \Omega$: puisque f_n converge uniformément vers f sur chaque boule $\mathrm{B}(z_j, r_j)$ on en déduit la convergence uniforme sur K.

Une fois la convergence uniforme sur tout compact démontrée, on peut par exemple, pour vérifier que la limite f est holomorphe, faire passer l'hypothèse du théorème de Morera à la limite ; on pourrait également, tout aussi simplement, faire passer la formule de Cauchy pour f_n à la limite.

Exercice. Soient U le disque unité ouvert et H(U) l'espace des fonctions holomorphes dans U ; pour tout $\alpha > 0$ on introduit l'espace E_α des fonctions complexes f mesurables dans le disque unité telles que

$$\|f\|^2_{\mathrm{E}_\alpha} = \int_{\mathrm{U}} |f(x + \mathrm{i}y)|^2 (x^2 + y^2)^\alpha \,dx\,dy < +\infty.$$

Montrer que pour tout compact $\mathrm{K} \subset \mathrm{U}$, il existe une constante $c_{\mathrm{K}} = c_{\mathrm{K},\alpha}$ telle que

$$\forall f \in \mathrm{H(U)} \cap \mathrm{E}_\alpha,\ \forall z \in \mathrm{K}, \quad |f(z)| \le c_{\mathrm{K}}\, \|f\|_{\mathrm{E}_\alpha}$$

(on pourra appliquer la formule de Cauchy à une famille de cercles centrés en 0 de rayons r tels que $r_1 < r < r_2 < 1$, où r_1 est choisi de façon que $\mathrm{K} \subset \mathrm{D}(0, r_1)$, et intégrer par rapport au paramètre r).

Montrer que $\mathrm{H(U)} \cap \mathrm{E}_\alpha$ est un sous-espace vectoriel fermé de E_α.

Montrer que l'appartenance de f à $\mathrm{H(U)} \cap \mathrm{E}_\alpha$ peut se caractériser au moyen des coefficients de Taylor de f en 0. Montrer que $\mathrm{H(U)} \cap \mathrm{E}_\alpha$ est l'adhérence dans E_α de l'ensemble des polynômes.

5.3.e. *Principe du maximum*

Lemme. *Si f est holomorphe dans $\mathrm{B}(z_0, r_0)$ et si $|f|$ atteint un maximum au point z_0, la fonction f est constante dans la boule.*

Preuve. On suppose que $|f(z)| \le |f(z_0)|$ pour tout point z de $\mathrm{B}(z_0, r_0)$. On part de la série entière $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\,(z - z_0)^n$, qui fournit sur le cercle des points $z = z_0 + r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, $0 < r < r_0$, un développement de Fourier

$$\theta \to f(z_0 + r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n r^n\ \mathrm{e}^{n\,\mathrm{i}\,\theta}$$

pour lequel Parseval et l'hypothèse donnent

$$|a_0|^2 \le \sum_{m\in\mathbb{Z}} r^{2m} |a_m|^2 = \int_0^{2\pi} \bigl|f(z_0 + r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\bigr|^2 \,\frac{d\theta}{2\pi} \le |f(z_0)|^2 = |a_0|^2,$$

ce qui entraîne que tous les coefficients a_m, $m \ge 1$, sont nuls.

Théorème. *Si Ω est un ouvert borné, f une fonction continue sur le compact $\overline{\Omega}$ et dont la restriction à Ω est holomorphe, on a*

$$\max\{|f(z)| : z \in \overline{\Omega}\} = \max\{|f(z)| : z \in \partial\Omega\}.$$

En raccourci : le maximum de $|f|$ est atteint *au bord* (le bord, ou *frontière* de l'ouvert Ω est noté $\partial\Omega$).

Preuve. Il existe un point z_0 du compact $\overline{\Omega}$ où le maximum est atteint. Si ce point est dans la frontière de Ω, le résultat est établi. Sinon, soit $r_0 = \mathrm{dist}(z_0, \Omega^c) > 0$; puisque $|f|$ atteint son maximum dans $\mathrm{B}(z_0, r_0)$ au centre, la fonction f est constante dans le disque. Mais il existe un point $z_1 \in \partial\Omega$ tel que $|z_1 - z_0| = r_0$. La fonction f est constante sur le segment $[z_0, z_1[$ qui joint z_0 à z_1, donc $f(z_1) = f(z_0)$ par continuité et le maximum du module est aussi atteint sur le bord, au point z_1.

Corollaire. *Soient $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert non vide différent de $\mathbb{C}$, f une fonction continue sur $\overline{\Omega}$, holomorphe dans Ω, et qui tend vers 0 quand $|z| \to +\infty$. Pour tout $z \in \Omega$ on a*

$$|f(z)| \le \max\{|f(w)| : w \in \partial\Omega\}.$$

Démonstration. Si $f = 0$ c'est trivial ; sinon soit z_0 tel que $a = |f(z_0)| > 0$. Soit $\mathrm{R} > |z_0|$ tel que $|z| \ge \mathrm{R}$ implique $|f(z)| < a$; posons $\Omega_\mathrm{R} = \Omega \cap \mathrm{B}(0, \mathrm{R})$; cet ouvert est non vide, borné ; le bord de Ω_R est formé d'une partie du bord de Ω et d'une partie du cercle de rayon R. D'après le résultat précédent, le maximum de $|f|$ sur $\overline{\Omega}_\mathrm{R}$ est atteint sur le bord de Ω_R, et ça ne peut pas être sur la partie cercle de rayon R puisque $|f(w)| < |f(z_0)|$ lorsque $|w| = \mathrm{R}$. On en déduit le résultat cherché.

Corollaire. *Soit $\mathrm{S} = \{z \in \mathbb{C} : 0 < \mathrm{Re}\, z < 1\}$ et soit f une fonction continue sur $\overline{\mathrm{S}}$, holomorphe dans S ; si f est* **bornée** *sur S, on a pour tout $z \in \mathrm{S}$*

$$|f(z)| \le \sup\{|f(w)| : w \in \partial\mathrm{S}\}.$$

On trouve ce corollaire chez Rudin, théorème 12.8. Le bord de la bande S est formé des deux droites $\mathrm{Re}\, z = 0$ et $\mathrm{Re}\, z = 1$. Il faut savoir que le résultat est **faux** si aucune hypothèse n'est ajoutée à l'holomorphie-continuité de f : il existe f holomorphe dans S, de module 1 sur $\partial\mathrm{S}$, et qui n'est pas bornée dans S, par exemple

$$f(z) = \exp\bigl(\cos(\pi z - \pi/2)\bigr).$$

Si on pose $z = x + \mathrm{i}y$, on vérifie que

$$|f(z)| = \exp\bigl(\cos(\pi x - \pi/2)\,\mathrm{ch}(y)\bigr),$$

donc le module est égal à 1 si $x = 0$ ou $x = 1$. En revanche, lorsque $x = 1/2$, on a $|f(z)| = \exp(\mathrm{ch}(y))$ qui tend très (très) vite vers l'infini avec y.

Démonstration. Pour tout $\varepsilon > 0$ on pose

$$\forall z \in \overline{\mathrm{S}}, \quad g_\varepsilon(z) = \mathrm{e}^{\varepsilon z^2}\, f(z).$$

On note que $|\,\mathrm{e}^{\varepsilon(x+\mathrm{i}y)^2}\,| = \mathrm{e}^{\varepsilon(x^2-y^2)} \le \mathrm{e}^{\varepsilon(1-y^2)}$ si $z = (x + \mathrm{i}y) \in \mathrm{S}$. Puisque f est bornée sur S, la fonction g_ε tend vers 0 à l'infini, donc par le corollaire précédent

$$|g_\varepsilon(z)| \le \max\{|\,\mathrm{e}^{\varepsilon w^2}\, f(w)| : \mathrm{Re}\, w = 0, 1\} \le \mathrm{e}^\varepsilon \sup\{|f(w)| : w \in \partial\mathrm{S}\}.$$

En faisant tendre ε vers 0, on obtient le résultat.

On voit qu'on n'avait pas vraiment besoin de savoir que f était bornée pour appliquer la démonstration précédente : il aurait suffit de savoir que $\mathrm{e}^{-\varepsilon y^2} f(x+\mathrm{i}y)$ tend vers 0 quand $z = x + \mathrm{i}y$ tend vers l'infini dans S, pour tout $\varepsilon > 0$. Voir Rudin, section du chapitre 12 sur Phragmen-Lindelöf pour aller plus loin dans cette direction.

Corollaire : lemme des trois droites. *Soit f une fonction continue sur $\overline{\mathrm{S}}$, holomorphe dans* $\mathrm{S} = \{z \in \mathbb{C} : 0 < \operatorname{Re} z < 1\}$, *et* **bornée** *sur* S *; posons pour* $x \in [0,1]$

$$\mathrm{M}_x = \sup\{|f(x+\mathrm{i}y)| : y \in \mathbb{R}\}.$$

Pour tout $\theta \in]0,1[$ *on a*

$$\mathrm{M}_\theta \le \mathrm{M}_0^{1-\theta}\mathrm{M}_1^{\theta}.$$

Pour ce lemme classique voir Zuily-Queffélec, chapitre XI, 2.4 et la suite (p. 467 et suivantes).

Démonstration. On choisit a réel de façon que $\mathrm{e}^{a(x-\theta)}\,\mathrm{M}_x$ prenne la même valeur en $x = 0$ et $x = 1$: il faut que $\mathrm{e}^a = \mathrm{M}_0/\mathrm{M}_1$. Posons $g(z) = \mathrm{e}^{a(z-\theta)}\, f(z)$; sur chacune des deux droites du bord, $j = 0, 1$

$$|g(j+\mathrm{i}y)| = \mathrm{e}^{a(j-\theta)}\,|f(j+\mathrm{i}y)| \le (\mathrm{M}_0/\mathrm{M}_1)^{j-\theta}\mathrm{M}_j = \mathrm{M}_0^{1-\theta}\mathrm{M}_1^{\theta}.$$

Par ailleurs, la remarque

$$|g(\theta+\mathrm{i}y)| = |\,\mathrm{e}^{a\mathrm{i}y}\, f(\theta+\mathrm{i}y)| = |f(\theta+\mathrm{i}y)|$$

et le corollaire précédent appliqué à g terminent la preuve.

5.4. Homologie, homotopie

5.4.a. *Primitive le long d'un chemin*

On suppose donnés : un ouvert Ω de $\mathbb{C}$, une fonction $f \in \mathrm{H}(\Omega)$, un ouvert U de $\Omega \times \mathbb{R}$, un chemin continu $\gamma : [\alpha, \beta] \to \Omega$ tel que $(\gamma(t), t) \in \mathrm{U}$ pour tout $t \in [\alpha, \beta]$. Une *primitive de f le long de γ* sera une fonction $(z,t) \to \mathrm{F}(z,t)$ définie sur U, à valeurs dans $\mathbb{C}$ et telle que

$$\frac{\partial}{\partial z}\mathrm{F}(z,t) = f(z), \quad \frac{\partial}{\partial t}\mathrm{F}(z,t) = 0.$$

Exemple. On considère l'ouvert $\mathrm{U}_0 = \{z : \operatorname{Im} z \ne 0 \text{ ou } \operatorname{Re} z > 0\}$, puis

$$\mathrm{U} = \{(z,t) : z\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t} \in \mathrm{U}_0\}.$$

On a défini une détermination $\ln_0$ du logarithme dans U_0 ; on pose

$$\mathrm{F}(z,t) = \ln_0(z\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}) + \mathrm{i}t.$$

On montre alors que

$$\frac{\partial}{\partial z}\mathrm{F}(z,t) = \frac{1}{z}, \quad \frac{\partial}{\partial t}\mathrm{F}(z,t) = 0.$$

Considérer cette fonction F revient à suivre la détermination du logarithme en tournant autour de 0.

Lemme. *Si le chemin γ ci-dessus est de classe* C^1 *par morceaux, on a*

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \mathrm{F}(\gamma(\beta),\beta) - \mathrm{F}(\gamma(\alpha),\alpha).$$

Preuve. Il suffit de constater que la dérivée de l'expression

$$g(t) = \mathrm{F}(\gamma(t),t) - \int_\alpha^t f(\gamma(t))\,\gamma'(t)\,dt$$

est nulle dans l'intérieur de chaque sous-intervalle où γ est de classe C^1.

Lemme. *Si f est une fonction holomorphe dans un ouvert Ω et si γ est un chemin continu dans Ω, il existe un ouvert* U *de* $\Omega \times \mathbb{R}$ *et une primitive* F *de f le long de γ, définie dans* U.

Preuve. On suppose γ défini sur $[\alpha,\beta]$. On commence en posant $s_0 = -\infty$, $t_0 = \alpha$, $z_0 = \gamma(t_0)$, $r_0 = \mathrm{dist}(z_0,\Omega^c)$ et $\mathrm{B}_0 = \mathrm{B}(z_0,r_0) \subset \Omega$. Dans l'ouvert convexe B_0, la fonction holomorphe f admet une primitive F_0. On pose

$$t_1 = \min\{t : \mathrm{dist}(\gamma(t),z_0) = r_0/2\}$$

ou bien $t_1 = +\infty$ s'il n'existe pas de tel t. Si $t_1 < +\infty$, on a $\mathrm{dist}(\gamma(t_1),z_0) = r_0/2$ par continuité ; on note donc que $t_1 > t_0$. On considère l'ouvert $\mathrm{U}_0 = \mathrm{B}_0 \times]s_0,t_1[$ et dans cet ouvert on pose

$$\mathrm{F}(z,t) = \mathrm{F}_0(z).$$

Si $t_1 < +\infty$, on choisit maintenant s_1 tel que $t_0 < s_1 < t_1$, on pose $z_1 = \gamma(t_1)$, $r_1 = \mathrm{dist}(z_1,\Omega^c)$, $\mathrm{B}_1 = \mathrm{B}(z_1,r_1) \subset \Omega$. On a vu que $\mathrm{dist}(z_0,z_1) = r_0/2$, donc $z_1 \in \mathrm{B}_0$. Dans l'ouvert convexe B_1, la fonction holomorphe f admet une primitive F_1, qu'on peut choisir telle que $\mathrm{F}_1(z_1) = \mathrm{F}_0(z_1)$. On pose

$$t_2 = \min\{t > t_1 : \mathrm{dist}(\gamma(t),z_1) = r_1/2\}$$

ou bien $t_2 = +\infty$ s'il n'existe pas de tel t. On considère l'ouvert $\mathrm{U}_1 = \mathrm{B}_1 \times]s_1,t_2[$ et dans cet ouvert on veut poser

$$\mathrm{F}(z,t) = \mathrm{F}_1(z),$$

mais il faut vérifier avant tout que les deux définitions précédentes pour F sont cohérentes : si $(z,t) \in \mathrm{U}_0 \cap \mathrm{U}_1$, on a $z \in \mathrm{B}_0 \cap \mathrm{B}_1$; dans cet ouvert convexe, la fonction $\mathrm{F}_1 - \mathrm{F}_0$ est constante, car sa dérivée est nulle, et $\mathrm{F}_1 - \mathrm{F}_0$ est en fait nulle puisque $\mathrm{F}_1(z_1) = \mathrm{F}_0(z_1)$.

On poursuit ainsi, jusqu'à ce que $t_{n+1} = +\infty$ pour un certain n ; on posera alors $\mathrm{U} = \mathrm{U}_0 \cup \mathrm{U}_1 \cup \ldots \cup \mathrm{U}_n$, et F est définie sur U en recollant les morceaux.

Intégrale le long d'un chemin continu

Supposons que γ soit un chemin continu de $[\alpha, \beta]$ dans l'ouvert Ω, et F une primitive de f le long de γ, définie sur un ouvert $\mathrm{U} \subset \Omega \times \mathbb{R}$. On peut trouver une suite (γ_n) de chemins de classe C^1 qui converge uniformément vers γ, et on peut même supposer que $\gamma_n(\alpha) = \gamma(\alpha)$, $\gamma_n(\beta) = \gamma(\beta)$ pour tout n (par exemple, ajouter à γ_n la fonction δ_n affine sur $[\alpha, \beta]$ telle que $\delta_n(\alpha) = \gamma(\alpha) - \gamma_n(\alpha)$, $\delta_n(\beta) = \gamma(\beta) - \gamma_n(\beta)$; pour n assez grand, $\gamma_n + \delta_n$ reste dans Ω). On voit que l'ensemble des $(\gamma_n(t), t)$ sera dans U pour n assez grand ; on aura donc pour tout n assez grand

$$\int_{\gamma_n} f(z)\, dz = \mathrm{F}(\gamma(\beta), \beta) - \mathrm{F}(\gamma(\alpha), \alpha),$$

quantité qui ne dépend pas de n ; il est donc légitime d'introduire la (pseudo)-intégrale de f sur un chemin continu γ, comme la valeur commune des intégrales de f sur les chemins C^1 suffisamment proches de γ ayant les mêmes extrémités que γ.

Homotopie

Si $\gamma(t, u)$ est une fonction continue de $[\alpha, \beta] \times [0, 1]$ dans Ω, telle que $t \to \gamma(t, u)$ soit un chemin fermé γ_u pour tout $u \in [0, 1]$, la quantité

$$u \to \int_{\gamma_u} f(z)\, dz$$

est constante sur $[0, 1]$: il suffit de montrer qu'elle est localement constante. Si u_0 est fixé, on trouve une primitive F de f le long du chemin γ_{u_0}, définie dans un ouvert $\mathrm{U} \subset \Omega \times \mathbb{R}$. Alors, pour u voisin de u_0, le chemin γ_u reste compatible avec F au sens que $(\gamma_u(t), t) \in \mathrm{U}$ pour tout $t \in [\alpha, \beta]$, donc

$$\int_{\gamma_u} f(z)\, dz = \mathrm{F}(\gamma(\beta, u), \beta) - \mathrm{F}(\gamma(\alpha, u), \alpha).$$

Posons $g(u) = \gamma(\beta, u) = \gamma(\alpha, u)$. On peut trouver une boule ouverte B centrée en $g(u_0)$ telle que $\mathrm{B} \times \{\alpha\}$ et $\mathrm{B} \times \{\beta\}$ soit contenus dans U ; pour u voisin de u_0, le point $g(u)$ reste dans B. La fonction $z \to \mathrm{F}(z, \beta) - \mathrm{F}(z, \alpha)$ est constante dans B car sa dérivée est $f(z) - f(z) = 0$.

Exemple. Dans le cas de l'exercice 5.3.1, il est facile de déformer le contour Γ_R utilisé vers un petit cercle $\gamma_r(\mathrm{i})$ autour du point i ; pour ce petit cercle, la série de Laurent donne le résultat,

$$\int_{\Gamma_\mathrm{R}} = \int_{\gamma_r(\mathrm{i})} = 2\mathrm{i}\pi a_{-1}(\mathrm{i})$$

où $a_{-1}(\mathrm{i})$ est le coefficient du développement de Laurent au point i pour la fonction qui est sous l'intégrale.

5.4.b. *Théorème de Cauchy global*

D'après Rudin, théorème 10.35. Un *cycle* Γ est une combinaison formelle finie à coefficients entiers relatifs de chemins fermés (γ_j) dans $\mathbb{C}$, de la forme $\Gamma = \sum_{j=1}^n c_j \gamma_j$; on pose

$$\int_\Gamma = \sum_{j=1}^n c_j \int_{\gamma_j}$$

et $\Gamma^* = \cup_j \gamma_j^*$. Si $z \notin \Gamma^*$ on peut calculer *l'indice de* z *par rapport au cycle* Γ

$$\mathrm{Ind}_\Gamma(z) = \frac{1}{2\mathrm{i}\pi} \int_\Gamma \frac{dw}{w-z} = \sum_{j=1}^n c_j \,\mathrm{Ind}_{\gamma_j}(z).$$

Théorème. *On suppose que* Γ *est un cycle contenu dans un ouvert* Ω *de* $\mathbb{C}$, *et que*

$$\mathrm{Ind}_\Gamma(z) = 0$$

pour tout $z \notin \Omega$. *Pour toute* $f \in \mathrm{H}(\Omega)$, *on a*

$$\forall z \in \Omega \setminus \Gamma^*, \quad \mathrm{Ind}_\Gamma(z)\, f(z) = \int_\Gamma \frac{f(t)}{t-z}\, dt.$$

De plus, $\int_\Gamma f(t)\, dt = 0$.

Démonstration. On pose pour $z, t \in \Omega$

$$g(z,t) = \frac{f(t) - f(z)}{t - z}$$

lorsque $z \neq t$ et $g(z,t) = g'(t)$ quand $z = t$. Pour $t \in \Omega$ fixé, la fonction $z \in \Omega \to g(z,t)$ présente une singularité artificielle au point t, donc elle est holomorphe dans Ω. Le théorème sur l'holomorphie d'intégrales à paramètres implique que

$$h(z) = \frac{1}{2\mathrm{i}\pi} \int_\Gamma \frac{f(t) - f(z)}{t - z}\, dt$$

est holomorphe dans Ω (paramétrer chaque intégrale sur les chemins fermés γ_j qui forment Γ, pour ramener à une intégrale sur un espace mesuré fini $\mathrm{X} = [\alpha_j, \beta_j]$ muni de la mesure de Lebesgue). Posons par ailleurs

$$\Omega_1 = \{z \in \mathbb{C} \setminus \Gamma^* : \mathrm{Ind}_\Gamma(z) = 0\}.$$

Par hypothèse, Ω_1 contient le complémentaire de Ω, et c'est un ouvert d'après la continuité de l'indice ; l'ouvert Ω_1 est aussi un voisinage de l'infini d'après les propriétés de l'indice. On pose pour tout $z \in \Omega_1$

$$h_1(z) = \frac{1}{2\mathrm{i}\pi} \int_\Gamma \frac{f(t)}{t - z}\, dt\,;$$

on montre facilement que h_1 est holomorphe dans Ω_1. De plus, lorsque $z \in \Omega_1 \cap \Omega$, on a

$$h_1(z) - h(z) = \frac{1}{2\mathrm{i}\pi} \int_\Gamma \frac{f(z)}{t-z}\,dt = f(z)\,\mathrm{Ind}_\Gamma(z) = 0$$

par définition de Ω_1. Ceci permet de définir une fonction holomorphe k sur $\Omega_1 \cup \Omega = \mathbb{C}$ en posant $k(z) = h(z)$ si $z \in \Omega$ et $k(z) = h_1(z)$ si $z \in \Omega_1$. La fonction k est entière, mais la forme de h_1 montre que $k(z) = h_1(z)$ tend vers 0 lorsque $|z|$ tend vers l'infini. D'après Liouville, on a $k = 0$, donc $h = 0$, ce qui donne le premier résultat voulu.

Pour le deuxième, on suppose que $g \in \mathrm{H}(\Omega)$, on prend $a \in \Omega \setminus \Gamma^*$ et on pose $f(z) = (z-a)\,g(z)$. Puisque f est nulle au point a, l'application de la formule précédente à cette fonction f et au point $z = a \in \Omega \setminus \Gamma^*$ donne le résultat voulu, $\int_\Gamma g(t)\,dt = 0$.

Exemple. Dans le cas de l'exercice 5.3.1, il est facile de montrer que le cycle

$$\Gamma = \Gamma_\mathrm{R} - \gamma_r(\mathrm{i})$$

formé du contour Γ_R (l'intervalle $[-\mathrm{R}, \mathrm{R}]$ suivi d'un demi-tour dans $\{\mathrm{Im}\, z > 0\}$ sur le cercle γ^*_R) et d'un petit cercle négatif $-\gamma_r(\mathrm{i})$ autour du point i vérifie les hypothèses ; prenons l'ouvert Ω des points $z \neq \mathrm{i}$ tels que $\mathrm{Im}(z) > -1/2$; cet ouvert contient Γ^*, et la fonction sous l'intégrale

$$f(z) = \frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}tz}}{\pi(1+z^2)}$$

est holomorphe dans Ω ; pour calculer les indices des points hors de Ω, on distingue le cas $z = \mathrm{i}$ où on trouvera l'indice égal à $1 - 1 = 0$, et le cas $\mathrm{Im}\, z \leq -1/2$; dans ce second cas la fonction $w \to (w-z)^{-1}$ est holomorphe dans l'ouvert convexe $\{\mathrm{Im}\, z > -1/2\}$, et l'indice est donc de la forme $0 - 0 = 0$. On en déduit que l'intégrale de f sur le cycle Γ est nulle, ce qui ramène l'intégrale voulue sur Γ_R à l'intégrale pour le petit cercle $\gamma_r(\mathrm{i})$, pour laquelle la série de Laurent donne le résultat.