1. Intégration, jusqu'au théorème de Lebesgue

Contenu du chapitre

1.1. Intégration positive

Fonctions et ensembles

Quelques notations : on note A^c le complémentaire dans un ensemble X d'un sous-ensemble $A \subset X$; si f est une fonction réelle sur X et $t \in \mathbb{R}$, on note $\{f > t\}$ le sous-ensemble de X égal à $\{x \in X : f(x) > t\}$ (ou bien $\{f \leq t\}$, etc...) ; plus généralement si U est un sous-ensemble de $\mathbb{R}$, on note similairement $\{f \in U\}$ pour $f^{-1}(U)$. On note $\mathbf{1}_A$ la fonction indicatrice d'un sous-ensemble $A \subset X$, fonction égale à 1 sur A et à 0 en dehors de A.

Arithmétique de $[0, +\infty]$

La topologie de $[0, +\infty]$ peut être définie ainsi : un sous-ensemble V est ouvert si et seulement s'il est réunion d'ensembles de l'une des formes suivantes : intervalles $[0, a[$, $]a, b[$ ou bien $]b, +\infty]$. On peut aussi définir cette topologie à partir d'une distance, par exemple en posant

$$d(x, y) = \Big| \frac{x}{1+x} - \frac{y}{1+y} \Big|,$$

où on convient que $\infty/(1 + \infty) = 1$; ceci revient à rendre $[0, +\infty]$ homéomorphe à $[0, 1]$ au moyen de l'application croissante $x \to x/(1 + x)$. Toute suite croissante d'éléments de $[0, +\infty]$ converge dans $[0, +\infty]$ pour cette topologie.

On définit les opérations d'addition et multiplication de la façon suivante : les résultats ont les valeurs habituelles quand les deux nombres sont finis ; on pose en outre $a + (+\infty) = +\infty$ pour tout $a \geq 0$ (ce qui va de soi), $a \times (+\infty) = +\infty$ si $a > 0$, et enfin $0 \times (+\infty) = 0$. Pour comprendre cette dernière convention il faut voir qu'on fait le choix qui permet de passer à la limite dans le cas de suites **croissantes** ; ainsi $0 = 0 \times n$ tend vers $0 \times (+\infty) = 0$ quand n croît vers $+\infty$. Plus généralement : si $(u_n) \subset [0, +\infty]$ tend en croissant vers u, et si $(v_n) \subset [0, +\infty]$ tend en croissant vers v, on a $u + v = \lim_n (u_n + v_n)$, $u \times v = \lim_n (u_n \times v_n)$.

Tout sous-ensemble de $[0, +\infty]$ admet une borne supérieure dans $[0, +\infty]$; par exemple, la borne supérieure de $\emptyset$ est 0, le plus petit élément de $[0, +\infty]$. On a dit que toute suite croissante d'éléments de $[0, +\infty]$ admet une limite dans $[0, +\infty]$: la limite est égale à la borne supérieure de l'ensemble des termes de la suite. On peut définir sans problème la somme de n'importe quelle série à termes dans $[0, +\infty]$,

$$\sum_{k=0}^{+\infty} u_k = \lim_n (u_0 + u_1 + \cdots + u_n),$$

car $s_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$ définit une suite croissante dans $[0, +\infty]$, qui admet toujours une limite dans $[0, +\infty]$. Plus généralement si $(u_i)_{i \in \mathrm{I}}$ est une famille quelconque d'éléments de $[0, +\infty]$, on posera

$$\sum_{i \in \mathrm{I}} u_i = \sup \Bigl\{ \sum_{j \in \mathrm{J}} u_j : \mathrm{J} \text{ fini } \subset \mathrm{I} \Bigr\}.$$

On doit convenir que $\sum_{i \in \mathrm{I}} u_i = 0$ lorsque I est vide.

Algèbres, σ-algèbres (ou tribus)

Définition. Une *algèbre* $\mathcal{A}$ de parties d'un ensemble X est un sous-ensemble $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\mathrm{X})$, qui contient $\emptyset$ et qui est stable par réunion finie et par passage au complémentaire :

(*i*) $\emptyset \in \mathrm{A}$;
(*ii*) $(\mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathcal{A}) \Rightarrow (\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) \in \mathcal{A}$;
(*iii*) $\mathrm{A} \in \mathcal{A} \Rightarrow \mathrm{A}^c \in \mathcal{A}$.

Il en résulte la stabilité par intersection finie. On peut définir la notion d'algèbre de parties, si on préfère, en remplaçant la propriété (*ii*) par la propriété de *stabilité par intersection finie*.

Définition. Une *tribu* ou *σ-algèbre* de parties de X est une classe $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\mathrm{X})$ qui contient la partie vide $\emptyset$, et qui est stable par complémentaire et par *union dénombrable*.

Autrement dit, il suffit de remplacer dans la définition d'une algèbre l'axiome (*ii*) par l'axiome renforcé

$(ii)_\sigma$ pour toute suite (A_n) d'éléments de $\mathcal{A}$, on a $\bigcup_n \mathrm{A}_n \in \mathcal{A}$.

La tribu est le cadre naturel dans lequel toutes les opérations ensemblistes dénombrables sont permises. Pour qu'une algèbre soit en fait une tribu, il suffit d'ajouter la stabilité par réunion des suites croissantes (parce que $\bigcup_n \mathrm{A}_n$ est aussi égal à la réunion de la suite croissante $\mathrm{B}_n = \mathrm{A}_0 \cup \ldots \cup \mathrm{A}_n$), ou bien la stabilité par intersection des suites décroissantes.

Pour tout ensemble X, l'ensemble $\mathcal{P}(\mathrm{X})$ est évidemment une tribu de parties de X, de même que $\{\emptyset, \mathrm{X}\}$. Sur $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ ou $\mathbb{R}^d$, la tribu naturelle à considérer est la tribu engendrée par les ouverts ; on l'appelle la *tribu borélienne*.

Mesures positives sur une tribu

Un *espace mesurable* $(\Omega, \mathcal{A})$ est simplement le couple d'un ensemble Ω et d'une tribu $\mathcal{A}$ de parties de Ω.

Définition. Une *mesure positive* μ sur un espace mesurable $(\Omega, \mathcal{A})$ est une application $\mu : \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ telle que :

$\mu(\emptyset) = 0$ et pour toute suite (A_n) d'éléments deux à deux disjoints de $\mathcal{A}$, on a $\mu(\bigcup_{n=0}^{+\infty} \mathrm{A}_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mu(\mathrm{A}_n)$ (tous les calculs sont faits avec la valeur $+\infty$ admise).

En prenant $\mathrm{A}_0 = \mathrm{A}$, $\mathrm{A}_1 = \mathrm{B}$ et $\mathrm{A}_n = \emptyset$ pour $n \geq 2$ on retrouve l'additivité finie. Si la mesure prend au moins une valeur finie, l'égalité $\mu(\emptyset) = 0$ résulte de l'additivité. Dans le cas le plus général, on a la mesure pathologique qui vaut $+\infty$ pour tout $\mathrm{A} \neq \emptyset$, qui nous oblige à inclure $\mu(\emptyset) = 0$ dans la définition.

Si on a déjà l'additivité, la σ-additivité s'obtient par la régularité de la mesure pour les limites croissantes : pour toute suite (B_n) croissante d'éléments de $\mathcal{A}$, on a

$$\mu\Bigl(\bigcup_n \mathrm{B}_n\Bigr) = \lim_n \mu(\mathrm{B}_n).$$

On dit qu'une mesure μ sur $(\Omega, \mathcal{A})$ est une *mesure finie* lorsque $\mu(\Omega) < +\infty$. Pour une mesure finie, on peut aussi passer à la limite pour les suites décroissantes, mais la régularité décroissante n'est pas vraie pour les mesures infinies.

Exemples.

1. La mesure sur un ensemble Ω qui est infinie pour tout sous-ensemble sauf pour $\emptyset$ n'a pas beaucoup d'intérêt, mais c'est une mesure, qui permet de voir que certains énoncés trop généraux sont faux.

2. La *mesure de comptage* μ sur un ensemble I est définie sur la tribu $\mathcal{P}(\mathrm{I})$; pour cette mesure, $\mu(\mathrm{A})$ est le nombre des éléments de A, c'est-à-dire aussi

$$\mu(\mathrm{A}) = \sum_{i \in \mathrm{I}} \mathbf{1}_{\mathrm{A}}(i)\,;$$

le résultat est infini pour tout sous-ensemble $\mathrm{A} \subset \mathrm{I}$ infini.

3. La mesure de Lebesgue sur $[0, 1]$, $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}^n$ est un exemple autrement important, mais son existence sur la tribu borélienne est loin d'être évidente.

Exercice. Montrer que pour toute suite croissante de mesures positives (μ_n) sur un espace mesurable $(\Omega, \mathcal{A})$, la limite $\mathrm{A} \in \mathcal{A} \to \mu(\mathrm{A}) = \lim_n \mu_n(\mathrm{A})$ est une mesure positive sur $(\Omega, \mathcal{A})$; pour toute suite $(\nu_k)_{k \geq 0}$ de mesures positives, $\sum_{k=0}^{+\infty} \nu_k$ est une mesure.

Pour les applications en Analyse classique, il est important de ne pas se limiter au cas des mesures finies ; cependant, les mesures infinies conduisent à des difficultés ; par exemple, il n'y a pas de bonne théorie du produit de deux mesures positives quelconques. On va souvent admettre la restriction raisonnable qui suit.

Définition. On dit qu'une mesure μ positive sur $(\Omega, \mathcal{A})$ est *σ-finie* s'il existe une suite (A_n) d'éléments de $\mathcal{A}$ telle que $\Omega = \bigcup_{n=0}^{+\infty} \mathrm{A}_n$ et $\mu(\mathrm{A}_n) < +\infty$ pour tout $n \geq 0$.

La mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$, la mesure de comptage sur $\mathbb{N}$ sont des exemples de mesures σ-finies.

Intégrale des fonctions étagées positives

Le point de vue le plus agréable pour ce paragraphe (et le suivant) est de travailler avec l'ensemble $[0,+\infty]$, muni de l'arithmétique étendue introduite précédemment.

On considère un espace mesuré $(\Omega,\mathcal{A},\mu)$ et on intègre d'abord les fonctions $\mathcal{A}$-étagées à valeurs dans $[0,+\infty]$. Nous appelons fonction $\mathcal{A}$-étagée une fonction f sur Ω qui ne prend qu'un nombre fini de valeurs, disons $v_1,\ldots,v_n \in [0,+\infty]$, de façon que $\{f=v_j\}$ soit un ensemble de $\mathcal{A}$ pour tout $j=1,\ldots,n$.

Si f est une telle fonction étagée, on peut l'exprimer sous la forme $f=\sum_{i=1}^m a_i\,\mathbf{1}_{\mathrm{A}_i}$, où $\mathrm{A}_1,\ldots,\mathrm{A}_m$ est une partition de Ω en ensembles $\mathrm{A}_i\in\mathcal{A}$, et où $a_i\ge 0$ est la valeur constante de f sur A_i (si A_i n'est pas vide ; si A_i est vide, a_i peut être n'importe quel nombre ≥ 0). Une façon d'obtenir une telle expression pour f est de considérer l'ensemble fini $v_1,\ldots,v_n$ des valeurs de f, de poser $\mathrm{V}_i=\{f=v_i\}$ pour tout i et de voir qu'on a $f=\sum_{i=1}^n v_i\,\mathbf{1}_{\mathrm{V}_i}$; cependant il est essentiel de permettre un peu plus de souplesse dans la représentation de f, en n'exigeant pas que A_i soit précisément de la forme $\{f=v\}$ pour un certain v.

La quantité $\sum_{i=1}^m a_i\,\mu(\mathrm{A}_i)$ peut être $+\infty$ mais on va vérifier qu'elle ne dépend que de la fonction étagée f, et pas de la représentation de f du type précédent. On posera alors

$$\int f\,d\mu=\sum_{i=1}^m a_i\,\mu(\mathrm{A}_i)$$

(élément de $[0,+\infty]$) et on dira que $\int f\,d\mu$ est *l'intégrale* (par rapport à μ) de la fonction étagée $f\ge 0$.

Détaillons la preuve de l'indépendance par rapport à la représentation. Supposons que $f=\sum_{j=1}^n b_j\,\mathbf{1}_{\mathrm{B}_j}$ soit une autre représentation de la même fonction f, avec toujours $b_j\ge 0$ et $\mathrm{B}_j\in\mathcal{A}$ pour tout $j=1,\ldots,n$, qui réalisent une deuxième partition de Ω. Les ensembles $\mathrm{C}_{i,j}=\mathrm{A}_i\cap\mathrm{B}_j$ forment une partition de Ω ; lorsque $\mathrm{C}_{i,j}$ est non vide, $a_i=b_j$ est la valeur de f sur $\mathrm{C}_{i,j}$, qu'on appellera $c_{i,j}=a_i=b_j$; si $\mathrm{C}_{i,j}=\emptyset$, alors $\mu(\mathrm{C}_{i,j})=0$, et $c_{i,j}\,\mu(\mathrm{C}_{i,j})=0=a_i\,\mu(\mathrm{C}_{i,j})=b_j\,\mu(\mathrm{C}_{i,j})$ dans ce cas, pour n'importe quel nombre $c_{i,j}\ge 0$; on aura donc dans tous les cas

$$c_{i,j}\,\mu(\mathrm{C}_{i,j})=a_i\,\mu(\mathrm{C}_{i,j})=b_j\,\mu(\mathrm{C}_{i,j})$$

pour tous i,j. On obtient ainsi

$$\sum_{i,j} c_{i,j}\,\mu(\mathrm{C}_{i,j})=\sum_{i=1}^m\Bigl(\sum_{j=1}^n a_i\,\mu(\mathrm{C}_{i,j})\Bigr)=\sum_{i=1}^m a_i\Bigl(\sum_{j=1}^n \mu(\mathrm{A}_i\cap\mathrm{B}_j)\Bigr)=\sum_{i=1}^m a_i\,\mu(\mathrm{A}_i)$$

(on note que $\mathrm{A}_i=\bigcup_{j=1}^n \mathrm{A}_i\cap\mathrm{B}_j$) et de même dans l'autre sens,

$$\sum_{i,j} c_{i,j}\,\mu(\mathrm{C}_{i,j})=\sum_{j=1}^n\Bigl(\sum_{i=1}^m b_j\,\mu(\mathrm{C}_{i,j})\Bigr)=\sum_{j=1}^n b_j\Bigl(\sum_{i=1}^m \mu(\mathrm{A}_i\cap\mathrm{B}_j)\Bigr)=\sum_{j=1}^n b_j\,\mu(\mathrm{B}_j).$$

On démontre ensuite que $(f \le g) \Rightarrow (\int f\,d\mu \le \int g\,d\mu)$ et l'additivité dans le cas ≥ 0 (ainsi que la propriété triviale $\int (\lambda f)\,d\mu = \lambda \int f\,d\mu$, quand $\lambda \ge 0$) : il suffit de remarquer qu'étant données deux fonctions étagées, on peut raffiner les partitions de façon que les deux fonctions soient constantes sur les atomes $\mathrm{C}_{i,j}$ de la partition raffinée, comme on l'a fait ci-dessus. Si $f = \sum_i a_i \mathbf{1}_{\mathrm{A}_i} \le \sum_j b_j \mathbf{1}_{\mathrm{B}_j} = g$, on aura $a_i\,\mu(\mathrm{C}_{i,j}) \le b_j\,\mu(\mathrm{C}_{i,j})$ pour tous i, j et on raisonne comme ci-dessus ; idem pour l'additivité.

Intégrale des fonctions mesurables positives

Dans ce paragraphe, *fonction mesurable* ≥ 0 signifie fonction mesurable à valeurs dans $[0, +\infty]$. On dit que la fonction $f \ge 0$ sur $(\Omega, \mathcal{A})$ est $\mathcal{A}$-mesurable si l'ensemble $\{f > c\}$ est dans $\mathcal{A}$ pour tout c réel.

Il en résulte que $\{f \ge c\}$ est aussi dans $\mathcal{A}$, car

$$\{f \ge c\} = \bigcap_n \{f > c_n\} \in \mathcal{A}$$

si c_n est une suite strictement croissante vers c ; on a donc aussi $\{f < c\}$, $\{a < f < b\}$, etc… dans $\mathcal{A}$. Inversement, si on avait supposé $\{f < c\}$ mesurable pour tout c, on aurait retrouvé $\{f > c\}$ par les manipulations précédentes ; on peut donc définir la mesurabilité en demandant que $\{f < c\}$ soit dans la tribu $\mathcal{A}$ pour tout réel c.

Remarque 1.1.1. Si $(f_i)_{i\in\mathrm{I}}$ est une famille dénombrable formée de fonctions mesurables positives, les deux fonctions $\sup_{i\in\mathrm{I}} f_i$ et $\inf_{i\in\mathrm{I}} f_i$ sont mesurables. Si (f_n) est une suite monotone de fonctions mesurables positives, $\lim_n f_n$ est mesurable.

Preuve. Pour le sup, on note que pour tout réel c,

$$\{\sup_{i\in\mathrm{I}} f_i > c\} = \bigcup_{i\in\mathrm{I}} \{f_i > c\} \in \mathcal{A},$$

car I est dénombrable ; pour l'inf,

$$\{\inf_{i\in\mathrm{I}} f_i < c\} = \bigcup_{i\in\mathrm{I}} \{f_i < c\} \in \mathcal{A}.$$

Si la suite (f_n) est croissante, sa limite est égale à $\sup_n f_n$, donc elle est mesurable ; si la suite (f_n) est décroissante, sa limite est égale à $\inf_n f_n$.

Proposition 1.1.2. *Toute fonction mesurable positive est limite d'une suite croissante de fonctions étagées.*

Démonstration. Expliquons d'abord le principe général : soit (R_n) une suite croissante de sous-ensembles finis de $[0, +\infty[$, contenant tous 0, et dont la réunion soit dense dans $[0, +\infty]$. On définit $f_n(\omega)$ comme le plus grand élément r de R_n tel que $r \le f(\omega)$.

Si on prend $\mathrm{R}_n = \{i/2^n : i = 0, \ldots, 4^n\}$, on définit f_n qui prend les valeurs $i/2^n$ pour $i = 0, \ldots, 4^n$, avec $\{f_n = i/2^n\} = \{i/2^n \le f < (i+1)/2^n\}$ quand $0 \le i < 4^n$ et $\{f_n = 2^n\} = \{f \ge 2^n\}$. On voit qu'on définit ainsi une fonction f_n qui est $\mathcal{A}$-étagée, et que la suite (f_n) tend simplement vers f, en croissant. On peut aussi définir cette même fonction f_n par la formule

$$\forall \omega \in \Omega, \quad f_n(\omega) = \min\bigl\{2^n,\ 2^{-n}\,\bigl[2^n f(\omega)\bigr]\bigr\}$$

où $[x]$ désigne la partie entière d'un réel x.

Remarque. La somme de deux fonctions mesurables ≥ 0 est mesurable. Si f est mesurable positive et $a \geq 0$, la fonction af est mesurable.

Il suffit d'utiliser les deux résultats qui précèdent : si f, g sont mesurables, alors $f = \lim_n f_n$, $g = \lim_n g_n$, avec (f_n), (g_n) suites croissantes de fonctions étagées, donc $f+g = \lim_n \nearrow (f_n + g_n)$ est mesurable. L'affirmation sur af est évidente, en examinant les ensembles $\{af > c\}$.

Définition. L'intégrale d'une fonction mesurable $f \geq 0$ est le sup des intégrales des fonctions étagées $g \leq f$.

Avec cette définition, il est évident que $0 \leq f_1 \leq f_2$ implique $\int f_1 \, d\mu \leq \int f_2 \, d\mu$; il est clair aussi que $\int (af) \, d\mu = a \int f \, d\mu$ pour tout $a \geq 0$, et de plus on voit que $\int (f_1 + f_2) \, d\mu \geq \int f_1 \, d\mu + \int f_2 \, d\mu$, car si g_1, g_2 sont étagées et $g_j \leq f_j$, pour $j = 1, 2$, la fonction $g_1 + g_2$ est étagée et $\leq f_1 + f_2$; il en résulte que $\int g_1 + \int g_2 = \int (g_1 + g_2) \leq \int (f_1 + f_2)$, d'où le résultat annoncé en passant aux sup. On peut montrer facilement que

$$(*) \qquad \int f \, d\mu = \sum_{i=1}^{m} \int \mathbf{1}_{\mathrm{A}_i} f \, d\mu$$

si $\mathrm{A}_1, \ldots, \mathrm{A}_m$ est une partition de Ω en ensembles de la tribu $\mathcal{A}$: en effet dans ce cas toute fonction étagée $g \leq f$ s'écrit comme la somme $\sum_{i=1}^m \mathbf{1}_{\mathrm{A}_i} g$ de fonctions étagées qui sont chacune plus petite que chaque $\mathbf{1}_{\mathrm{A}_i} f$, ce qui montre que $\int f \, d\mu \leq \sum_{i=1}^m \mathbf{1}_{\mathrm{A}_i} f \, d\mu$, l'inégalité qui nous manquait.

Exemples.

1. On a défini $\sum_{i \in \mathrm{I}} u_i$ pour toute famille $(u_i)_{i \in \mathrm{I}}$ de réels ≥ 0. La quantité $\sum_{i \in \mathrm{I}} u_i$ est l'intégrale pour la mesure de comptage de la fonction positive $u : i \to u_i$ définie sur l'ensemble I.

2. *Intégrale de Riemann.* Désignons par λ la mesure de Lebesgue sur un intervalle fermé borné $[a, b]$. Si une fonction mesurable positive f sur $[a, b]$ est intégrable au sens de Riemann, on voit que

$$\int f \, d\lambda = \int_a^b f(t) \, dt,$$

où la deuxième expression désigne l'intégrale au sens de Riemann. En effet, si φ est une *fonction en escalier*, c'est un cas particulier de fonction étagée, et on vérifie facilement que

$$\int \varphi \, d\lambda = \int_a^b \varphi(t) \, dt \,;$$

par définition de l'intégrale de Riemann, on peut trouver pour tout $\varepsilon > 0$ deux fonctions en escalier φ_1, φ_2 qui vérifient les inégalités $0 \leq \varphi_1 \leq f \leq \varphi_2$ et $\int_a^b \big(\varphi_2(t) - \varphi_1(t)\big) \, dt < \varepsilon$. On aura

$$\int_a^b \varphi_1(t) \, dt = \int \varphi_1 \, d\lambda \leq \int f \, d\lambda \leq \int \varphi_2 \, d\lambda = \int_a^b \varphi_2(t) \, dt$$

ce qui montre que $\int f \, d\lambda$ et $\int_a^b f(t) \, dt$ diffèrent de moins de ε, pour tout $\varepsilon > 0$, donc les deux intégrales sont égales.

Lemme-Exercice corrigé.
a. Si f est mesurable ≥ 0, montrer que $\int f\,d\mu = 0$ si et seulement si $\mu(\{f > 0\}) = 0$.
b. Montrer que si $\int f\,d\mu < \infty$, alors $\mu(\{f = +\infty\}) = 0$.

Solution de a. Supposons que $\{f > 0\}$ soit μ-négligeable. Par définition, $\int f\,d\mu$ est le sup des $\int g\,d\mu$ pour les g étagées telles que $0 \leq g \leq f$. Si on écrit $g = \sum_{i=1}^{n} a_i \mathbf{1}_{\mathrm{A}_i}$, avec (A_i) partition de Ω en ensembles de $\mathcal{A}$, on aura que $\mathrm{A}_i \subset \{f > 0\}$ si $a_i > 0$, donc $\mu(\mathrm{A}_i) = 0$ et $a_i\,\mu(\mathrm{A}_i) = 0$ dans ce cas ; si $a_i = 0$ on a aussi $a_i\,\mu(\mathrm{A}_i) = 0$, donc $a_i\,\mu(\mathrm{A}_i) = 0$ pour tout i, donc $\int g\,d\mu = \sum_{i=1}^{n} a_i\,\mu(\mathrm{A}_i) = 0$.

Inversement si $\int f\,d\mu = 0$, on pose $\mathrm{B}_n = \{f \geq 2^{-n}\}$ pour tout entier $n \geq 0$ et on constate que $0 \leq 2^{-n}\mathbf{1}_{\mathrm{B}_n} \leq f$ donc $0 \leq 2^{-n}\mu(\mathrm{B}_n) \leq \int f\,d\mu = 0$, donc $\mu(\mathrm{B}_n) = 0$; ceci étant vrai pour tout n, on aura $\mu(\bigcup_n \mathrm{B}_n) = 0$, et $\bigcup_n \mathrm{B}_n = \{f > 0\}$.
Solution de b. Pour tout entier n on a $2^n \mathbf{1}_{\{f=+\infty\}} \leq f$ donc $2^n\mu(\{f = +\infty\}) \leq \int f\,d\mu$ ce qui donne $\mu(\{f = +\infty\}) \leq 2^{-n} \int f\,d\mu$ pour tout n et $\mu(\{f = +\infty\}) = 0$ à la limite.

Lemme. *Soient $\mathrm{A} \in \mathcal{A}$ et $a \geq 0$; si une suite croissante (f_n) de fonctions mesurables positives vérifie $a\mathbf{1}_{\mathrm{A}} \leq \lim_n f_n$, alors*

$$a\,\mu(\mathrm{A}) \leq \lim_n \int f_n\,d\mu.$$

Démonstration. Si $a = 0$, alors $a\,\mu(\mathrm{A}) = 0$ et l'inégalité est évidente. Supposons donc $a > 0$ et soit $0 < b < a$; l'ensemble $\mathrm{B}_n = \{f_n > b\}$ est croissant avec n, de limite $\mathrm{B} = \{\lim_n f_n > b\}$; l'hypothèse implique que $\mathrm{B} \supset \mathrm{A}$, et on a $b\,\mathbf{1}_{\mathrm{B}_n} \leq f_n$ donc

$$b\,\mu(\mathrm{A}) \leq b\,\mu(\mathrm{B}) = \lim_n b\,\mu(\mathrm{B}_n) = \lim_n \int (b\mathbf{1}_{\mathrm{B}_n})\,d\mu \leq \lim_n \int f_n\,d\mu.$$

Il ne reste plus qu'à faire croître b vers a.

Proposition 1.1.3 : lemme des suites croissantes, ou de convergence monotone. *Si une suite (f_n) de fonctions mesurables ≥ 0 tend en croissant vers f, on a*

$$\int f\,d\mu = \lim_n \int f_n\,d\mu.$$

Démonstration. On sait que la limite f est mesurable, d'après la remarque 1.1.1. Soit $g = \sum_{j=1}^{m} a_j \mathbf{1}_{\mathrm{A}_j}$ une fonction étagée positive $\leq f$, avec des $\mathrm{A}_j \in \mathcal{A}$ non vides qui réalisent une partition de Ω, et $a_j \geq 0$ pour $j = 1, \ldots, m$; pour chaque indice j, la suite $(\mathbf{1}_{\mathrm{A}_j} f_n)_n$ est croissante et tend vers $\mathbf{1}_{\mathrm{A}_j} f \geq \mathbf{1}_{\mathrm{A}_j} g = a_j \mathbf{1}_{\mathrm{A}_j}$, donc

$$a_j\,\mu(\mathrm{A}_j) \leq \lim_n \int \mathbf{1}_{\mathrm{A}_j} f_n\,d\mu$$

d'après le lemme précédent. Il n'y a plus qu'à additionner en j pour obtenir, à l'aide de l'égalité $(*)$

$$\int g\,d\mu \leq \sum_{j=1}^{m} \Bigl(\lim_n \int \mathbf{1}_{\mathrm{A}_j} f_n\,d\mu\Bigr) = \lim_n \Bigl(\sum_{j=1}^{m} \int 1_{\mathrm{A}_j} f_n\,d\mu\Bigr) = \lim_n \int f_n\,d\mu,$$

et ceci pour toute fonction étagée $g \leq f$. Il en résulte que $\int f\,d\mu \leq \lim_n \int f_n\,d\mu$. L'inégalité inverse est évidente.

Conséquence : additivité de l'intégrale. Si f et g sont deux fonctions mesurables ≥ 0, on peut trouver deux suites croissantes (f_n) et (g_n) de fonctions étagées qui tendent vers f et g respectivement ; on passe à la limite croissante dans l'additivité pour les fonctions étagées, et on obtient pour tous $a, b \geq 0$, puisque $af + bg$ est la limite croissante de la suite $af_n + bg_n$

$$\int (af + bg)\, d\mu = a \int f\, d\mu + b \int g\, d\mu.$$

Proposition 1.1.4. *Si (u_k) est une suite de fonctions mesurables ≥ 0, on a*

$$\int_\Omega \Big(\sum_{k=0}^{+\infty} u_k(\omega) \Big)\, d\mu(\omega) = \sum_{k=0}^{+\infty} \int_\Omega u_k(\omega)\, d\mu(\omega)$$

avec les conventions d'usage sur la valeur $+\infty$.

Démonstration. La suite $f_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$ est croissante, de limite $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k$; par convergence monotone et additivité de l'intégrale on obtient

$$\int_\Omega \Big(\sum_{k=0}^{+\infty} u_k \Big)\, d\mu = \lim_n \int_\Omega f_n\, d\mu = \lim_n \Big(\sum_{k=0}^{n} \int_\Omega u_k\, d\mu \Big) = \sum_{k=0}^{+\infty} \int_\Omega u_k\, d\mu.$$

Mesures à densité

Si f est une fonction $\mathcal{A}$-mesurable ≥ 0 sur Ω, on peut définir une nouvelle mesure $\nu = f\mu$ sur $(\Omega, \mathcal{A})$ (on dit et on note aussi $d\nu(\omega) = f(\omega) d\mu(\omega)$, ou $d\nu = f\, d\mu$) en posant pour tout $\mathrm{A} \in \mathcal{A}$

$$\nu(\mathrm{A}) = \int_\Omega \mathbf{1}_\mathrm{A} f\, d\mu = \int_\mathrm{A} f\, d\mu.$$

La proposition précédente montre que ν est une mesure ; en effet, si les (A_k) sont deux à deux disjoints de réunion A, on a $\mathbf{1}_\mathrm{A} = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbf{1}_{\mathrm{A}_k}$ donc

$$\nu(\mathrm{A}) = \int \Big(\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbf{1}_{\mathrm{A}_k} f \Big)\, d\mu = \sum_{k=0}^{+\infty} \int \mathbf{1}_{\mathrm{A}_k} f\, d\mu = \sum_{k=0}^{+\infty} \nu(\mathrm{A}_k).$$

De plus, pour toute fonction mesurable positive g on a

$$\int g\, d\nu = \int g f\, d\mu.$$

La relation est vraie pour les fonctions g étagées par définition et linéarité, et passe aux fonctions g mesurables par le lemme de convergence monotone appliqué deux fois, une fois à μ et une fois à ν.

Remarque en passant. *Si on a associé à chaque fonction $\mathcal{A}$-mesurable positive f sur Ω un nombre $\mathrm{I}(f) \in [0,+\infty]$ de façon que :* **1.**— *l'application* I *vérifie la propriété de «linéarité positive», c'est-à-dire que $\mathrm{I}(af+bg) = a\mathrm{I}(f) + b\mathrm{I}(g)$ quand $a, b \in [0,+\infty]$;* **2.**— *on a $\mathrm{I}(f) = \lim_n \mathrm{I}(f_n)$ quand f est la limite croissante de la suite (f_n), alors*

- *la formule $\mathrm{A} \in \mathcal{A} \to \mu(\mathrm{A}) = \mathrm{I}(\mathbf{1}_\mathrm{A})$ définit une mesure μ sur $(\Omega, \mathcal{A})$;*
- *pour toute fonction $\mathcal{A}$-mesurable positive f sur Ω, on a*

$$\mathrm{I}(f) = \int f\, d\mu.$$

On a vu dans la preuve de la proposition 1.1.4 que l'additivité et le passage à la limite croissante impliquent que

$$\mathrm{I}\Big(\sum_{k=0}^{+\infty} u_k\Big) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathrm{I}(u_k)$$

pour toute série $\sum u_k$ de fonctions positives ; en particulier, si $(\mathrm{A}_k) \subset \mathcal{A}$ est une famille d'ensembles deux à deux disjoints, et si $\mathrm{A} = \bigcup_{k=0}^{+\infty} \mathrm{A}_k$,

$$\mu(\mathrm{A}) = \mathrm{I}(\mathbf{1}_\mathrm{A}) = \mathrm{I}\Big(\sum_{k=0}^{+\infty} \mathbf{1}_{\mathrm{A}_k}\Big) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathrm{I}(\mathbf{1}_{\mathrm{A}_k}) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mu(\mathrm{A}_k)$$

donc μ est une mesure ; par linéarité positive, on a pour toute fonction étagée positive $\varphi = \sum_{j=1}^n c_j \mathbf{1}_{\mathrm{A}_j}$

$$\mathrm{I}(\varphi) = \sum_{j=1}^n c_j \mathrm{I}(\mathbf{1}_{\mathrm{A}_j}) = \sum_{j=1}^n c_j \mu(\mathrm{A}_j) = \int \varphi\, d\mu,$$

et on passe aux fonctions mesurables positives générales par limite croissante de suites d'étagées positives, en utilisant le lemme de convergence monotone pour l'intégrale et la propriété **2** de l'application I.

Proposition 1.1.5 : lemme de Fatou. *Si (f_n) est une suite de fonctions mesurables* ≥ 0,

$$\int \liminf_n f_n\, d\mu \leq \liminf_n \int f_n\, d\mu.$$

Démonstration. Posons $g_n = \inf_{m \geq n} f_m \geq 0$. On sait que g_n est mesurable (d'après la remarque 1.1.1). Pour chaque entier $m \geq n$ on a évidemment $g_n \leq f_m$, donc $\int g_n \leq \int f_m$ et par conséquent on a aussi

$$\int g_n\, d\mu \leq \inf_{m \geq n} \int f_m\, d\mu.$$

D'après le lemme des suites croissantes 1.1.3, le premier terme de l'inégalité précédente croît vers $\int \liminf_n f_n$, parce que (g_n) tend en croissant vers $\liminf_n f_n$, alors que le deuxième croît vers $\liminf_n \int f_n$, ce qui donne à la limite le résultat voulu.

Intégrale des fonctions réelles

Contrairement aux paragraphes précédents, on considère maintenant des fonctions mesurables à valeurs dans $\mathbb{R}$. On dit qu'une fonction réelle f sur Ω est *$\mathcal{A}$-mesurable* si l'ensemble $\{f > c\}$ est dans la tribu $\mathcal{A}$, pour tout nombre réel c ; on a vu que cela implique que les ensembles $\{f \geq c\}$, $\{f < c\}$, $\{f \leq c\}$ sont tous dans $\mathcal{A}$. On peut écrire $f = f^+ - f^-$, où $f^+ = \max(f, 0)$ et $f^- = \max(-f, 0)$. Ces deux fonctions f^+ et f^- sont mesurables ≥ 0 car l'ensemble $\{f^+ > c\}$ est soit égal à $\{f > c\} \in \mathcal{A}$ (lorsque $c \geq 0$), soit égal à Ω (quand $c < 0$) ; on voit de même que f^- est mesurable. On a $f^+, f^- \leq f^+ + f^- = |f|$; notons que $|f| = f^+ + f^-$ est mesurable.

Remarque 1.1.6. Toute fonction $\mathcal{A}$-mesurable réelle f est limite simple d'une suite (f_n) de fonctions $\mathcal{A}$-étagées, qu'on peut choisir telles que $|f_n| \leq |f|$.

Preuve. Il suffit de trouver par 1.1.2 deux suites croissantes de fonctions étagées positives (u_n) et (v_n) qui tendent vers f_+ et f_- ; les fonctions $f_n = u_n - v_n$ sont étagées, tendent vers f et $|f_n| \leq u_n + v_n \leq f_+ + f_- = |f|$.

Définition. On désigne par $\mathcal{L}_1(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ l'espace vectoriel des fonctions $\mathcal{A}$-mesurables f à valeurs dans $\mathbb{R}$ telles que $\int |f| \, d\mu < +\infty$.

Si $f \in \mathcal{L}_1$, on peut écrire $f = f^+ - f^-$, et $f^+, f^- \leq f^+ + f^- = |f|$, donc $\int f^+ \, d\mu$ et $\int f^- \, d\mu$ sont finies ; il y a donc au moins une façon d'écrire $f = f_1 - f_2$ avec $f_1, f_2 \geq 0$ d'intégrale finie. Si on a une autre décomposition $f = g_1 - g_2$ avec $g_1, g_2 \geq 0$ d'intégrale finie, on remarque que $f_1 + g_2 = f_2 + g_1$ et on utilise l'additivité de l'intégrale dans le cas positif pour vérifier que $\int f_1 - \int f_2 = \int g_1 - \int g_2$. On peut donc poser

$$\int f \, d\mu = \int f_1 \, d\mu - \int f_2 \, d\mu$$

pour n'importe quelle façon de représenter f sous la forme $f = f_1 - f_2$ avec $f_1, f_2 \geq 0$ d'intégrale finie. En particulier cette nouvelle définition est cohérente avec la définition antérieure du cas positif. Il est facile de vérifier la linéarité de l'intégrale. Notons aussi que

$$\Bigl|\int f \, d\mu\Bigr| = \Bigl|\int f^+ \, d\mu - \int f^- \, d\mu\Bigr| \leq \int f^+ \, d\mu + \int f^- \, d\mu = \int |f| \, d\mu.$$

Remarque. Si f est mesurable de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$ et si f est intégrable-Riemann sur $[a, b]$, alors f est Lebesgue-intégrable, et les intégrales sont égales.

Preuve : par définition les fonctions Riemann-intégrables sont bornées ; si $|f| \leq \mathrm{M}$, la fonction $f + \mathrm{M}$ est mesurable positive, intégrable Riemann ; on a vu que dans ce cas les intégrales coïncident. On en déduit le résultat annoncé pour $f = (f + \mathrm{M}) - \mathrm{M}$.

Remarque. Si f est mesurable ≥ 0 et si $d\nu = f \, d\mu$, une fonction g mesurable réelle est ν-intégrable si et seulement si gf est μ-intégrable, et

$$\int g \, d\nu = \int gf \, d\mu.$$

En effet, on sait d'après le cas positif que

$$\int |g| \, d\nu = \int |g| f \, d\mu, \quad \int g_+ \, d\nu = \int g_+ f \, d\mu, \quad \int g_- \, d\nu = \int g_- f \, d\mu.$$

Théorème 1.1.7 : théorème de convergence dominée de Lebesgue, première manière. *Si une suite* $(f_n) \subset \mathcal{L}_1(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ *tend simplement vers* $f \in \mathcal{L}_1(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ *et si* $|f_n| \le g$ *pour tout* n*, avec* $g \in \mathcal{L}_1(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$*, alors*

$$\int_\Omega f \, d\mu = \lim_n \int_\Omega f_n \, d\mu.$$

Démonstration. On va montrer un résultat apparemment plus fort, $\int |f - f_n| \, d\mu \to 0$. Pour tous m, n on a $|f_n - f_m| \le 2g$, donc en passant à la limite on obtient $|f_n - f| \le 2g$. On considère $g_n = 2g - |f - f_n| \ge 0$, qui tend simplement vers $2g$. D'après Fatou

$$\int_\Omega 2g \, d\mu = \int_\Omega \liminf_n \bigl(2g - |f - f_n|\bigr) \, d\mu \le \liminf_n \int_\Omega \bigl(2g - |f - f_n|\bigr) \, d\mu\,;$$

comme $\int 2g \, d\mu$ est finie, l'information précédente se transforme en

$$\int_\Omega 2g \, d\mu \le \int_\Omega 2g \, d\mu - \limsup_n \int_\Omega |f - f_n| \, d\mu,$$

donc $\limsup_n \int_\Omega |f - f_n| \, d\mu \le 0$, ce qui n'est possible que si $\lim_n \int_\Omega |f - f_n| \, d\mu = 0$.

1.2. Jeux de tribus

Toute intersection de tribus de parties de X est une tribu de parties de X. Il en résulte que pour toute classe $\mathcal{C}$ de parties de X, il existe une plus petite tribu contenant $\mathcal{C}$. On l'appelle la *tribu engendrée* par la classe $\mathcal{C}$, et on la note $\sigma(\mathcal{C})$. Évidemment, si $\mathcal{C}$ est déjà une tribu, alors $\sigma(\mathcal{C}) = \mathcal{C}$.

Principe trivial et répété sans cesse :

si $\mathcal{C} \subset \mathcal{A}$*, avec* $\mathcal{A}$ *une tribu, alors* $\sigma(\mathcal{C}) \subset \mathcal{A}$*.*

Mettons ce petit principe en application. La tribu borélienne de $\mathbb{R}$ est la tribu $\mathcal{B}_\mathbb{R}$ qui est engendrée par les ouverts de $\mathbb{R}$.

Proposition. *La tribu borélienne de* $\mathbb{R}$ *est engendrée par la classe* $\mathcal{C}$ *formée des intervalles* $]c, +\infty[$*, où* c *varie dans* $\mathbb{R}$*.*

Démonstration. Posons $\mathcal{A} = \sigma(\mathcal{C})$, et montrons que $\mathcal{A} = \mathcal{B}_\mathbb{R}$. Évidemment $\mathcal{A} \subset \mathcal{B}_\mathbb{R}$ puisque $\mathcal{B}_\mathbb{R}$ contient tous les générateurs de $\mathcal{A}$, qui sont des intervalles *ouverts*. Pour tout c, l'intervalle fermé $[c, +\infty[$ est l'intersection de la suite des $]c - 2^{-n}, +\infty[$, donc $[c, +\infty[\in \mathcal{A}$ pour tout c réel ; en passant au complémentaire on voit que $]-\infty, b[$ est dans $\mathcal{A}$, et par intersection avec $]a, +\infty[$ on déduit que tout intervalle $]a, b[$ est dans $\mathcal{A}$. Comme tout ouvert de $\mathbb{R}$ est réunion dénombrable d'intervalles ouverts, on voit que les générateurs de $\mathcal{B}_\mathbb{R}$ sont dans $\mathcal{A}$, donc $\mathcal{B}_\mathbb{R} \subset \mathcal{A}$, d'où l'égalité des deux tribus.

On montre de la même façon que la tribu borélienne de $\overline{\mathbb{R}}$ est engendrée par les intervalles $]c, +\infty]$. Rappelons pourquoi tout ouvert de $\mathbb{R}$ est réunion dénombrable d'intervalles ouverts : la famille $\mathcal{F}$ des intervalles de la forme $]q, r[$ avec q, r rationnels, $q < r$, est dénombrable puisqu'elle est indexée par un sous-ensemble de l'ensemble dénombrable $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$; si V est un ouvert de $\mathbb{R}$, désignons par $\mathcal{F}_\mathrm{V}$ le sous-ensemble de $\mathcal{F}$ formé des intervalles $]q, r[$ contenus dans V ; c'est encore un ensemble dénombrable d'intervalles.

Pour tout point $x \in \mathrm{V}$, on peut trouver $\varepsilon > 0$ tel que $]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\subset \mathrm{V}$, puis trouver deux rationnels q, r tels que $x - \varepsilon < q < x < r < x + \varepsilon$. L'intervalle $]q, r[$ est dans la famille $\mathcal{F}_{\mathrm{V}}$, donc

$$x \in \mathrm{U} = \bigcup \{\mathrm{I} : \mathrm{I} \in \mathcal{F}_{\mathrm{V}}\}.$$

On a évidemment $\mathrm{U} \subset \mathrm{V}$, et tout point x de V est dans U, donc $\mathrm{V} = \mathrm{U}$, réunion dénombrable d'intervalles ouverts.

Définition : produit de tribus. On suppose donnés X_1 et X_2 avec chacun une tribu $\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{A}_2$; on définit la *tribu produit* sur l'ensemble produit $\mathrm{X}_1 \times \mathrm{X}_2$, tribu qui est notée $\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2$: c'est la tribu engendrée par les ensembles de la forme $\mathrm{A}_1 \times \mathrm{A}_2$, avec $\mathrm{A}_j \in \mathcal{A}_j$:

$$\mathcal{A}_1 \otimes \mathcal{A}_2 = \sigma\big(\{\mathrm{A}_1 \times \mathrm{A}_2 : \mathrm{A}_1 \in \mathcal{A}_1, \mathrm{A}_2 \in \mathcal{A}_2\}\big).$$

Exercice. Si $\mathcal{A}$ est une tribu de parties de Ω, si X est un sous-ensemble de Ω, montrer que la classe $\mathcal{A}_{\mathrm{X}}$ formée des $\mathrm{A} \cap \mathrm{X}$, pour $\mathrm{A} \in \mathcal{A}$, est une tribu de parties de X ; si la classe $\mathcal{C}$ engendre la tribu $\mathcal{A}$, montrer que les $\mathrm{C} \cap \mathrm{X}$, pour $\mathrm{C} \in \mathcal{C}$, engendrent la tribu $\mathcal{A}_{\mathrm{X}}$. Montrer qu'une fonction f est $\mathcal{A}_{\mathrm{X}}$-mesurable positive sur X si et seulement si elle est la restriction à X d'une fonction $\mathcal{A}$-mesurable sur Ω.

La mesurabilité abstraite

Définition. Étant donnés deux espaces mesurables $(\Omega_1, \mathcal{A}_1)$ et $(\Omega_2, \mathcal{A}_2)$, on dit qu'une application $f : \Omega_1 \to \Omega_2$ est *mesurable* si $f^{-1}(\mathcal{A}_2) \subset \mathcal{A}_1$.

Propriété évidente : la composition de deux applications mesurables $f : (\Omega_1, \mathcal{A}_1) \to (\Omega_2, \mathcal{A}_2)$ et $g : (\Omega_2, \mathcal{A}_2) \to (\Omega_3, \mathcal{A}_3)$ fournit une application mesurable $g \circ f$ de $(\Omega_1, \mathcal{A}_1)$ dans $(\Omega_3, \mathcal{A}_3)$.

Critère suffisant de mesurabilité : *pour que f soit mesurable de $(\Omega_1, \mathcal{A}_1)$ dans $(\Omega_2, \mathcal{A}_2)$, il suffit que $\{f \in \mathrm{C}\} \in \mathcal{A}_1$ pour tout C d'une classe $\mathcal{C}$ qui engendre $\mathcal{A}_2$.*
En effet, on montre facilement que la classe

$$\mathcal{D} = \{\mathrm{B} \in \mathcal{A}_2 : \{f \in \mathrm{B}\} \in \mathcal{A}_1\}$$

est une tribu, et elle contient $\mathcal{C}$ par hypothèse. Elle contient donc $\sigma(\mathcal{C})$, et est donc égale à $\mathcal{A}_2$.

Mentionnons deux applications du critère de mesurabilité précédent :

1. *pour que f soit mesurable de $(\Omega, \mathcal{A})$ dans $\mathbb{R}$ (ou dans $\overline{\mathbb{R}}$) muni de la tribu borélienne, il faut et il suffit que*

$$\forall c \in \mathbb{R}, \quad \{f > c\} \in \mathcal{A}\,;$$

2. *si f_1 et f_2 sont deux applications mesurables de $(\Omega, \mathcal{A})$ dans $(\mathrm{X}_j, \mathcal{B}_j)$, pour $j = 1, 2$, l'application couple $f : \omega \to (f_1(\omega), f_2(\omega))$ est mesurable de $(\Omega, \mathcal{A})$ dans l'espace produit $(\mathrm{X}_1 \times \mathrm{X}_2, \mathcal{B}_1 \otimes \mathcal{B}_2)$.*
En effet, il suffit de tester l'image inverse des générateurs de la forme $\mathrm{B}_1 \times \mathrm{B}_2$, ce qui est facile :

$$f^{-1}(\mathrm{B}_1 \times \mathrm{B}_2) = f_1^{-1}(\mathrm{B}_1) \cap f_2^{-1}(\mathrm{B}_2) \in \mathcal{A}.$$

Topologie et tribus ; tribus boréliennes

Définition. Soit X un espace topologique ; la *tribu borélienne* de X, qu'on notera $\mathcal{B}_{\mathrm{X}}$, est la tribu de parties de X engendrée par la classe $\mathcal{O}_{\mathrm{X}}$ des ouverts de X, c'est-à-dire $\mathcal{B}_{\mathrm{X}} = \sigma(\mathcal{O}_{\mathrm{X}})$.

D'après le critère de mesurabilité, pour que f soit mesurable de $(\Omega, \mathcal{A})$ dans $(\mathrm{X}, \mathcal{B}_{\mathrm{X}})$, il suffit que $f^{-1}(\mathrm{V}) \in \mathcal{A}$ pour tout ouvert V de X. En particulier, toute application continue entre deux espaces topologiques X_1 et X_2 est mesurable de $(\mathrm{X}_1, \mathcal{B}_{\mathrm{X}_1})$ dans $(\mathrm{X}_2, \mathcal{B}_{\mathrm{X}_2})$. Si $\mathcal{C}$ est une classe d'ouverts telle que tout ouvert de X soit réunion dénombrable d'éléments de $\mathcal{C}$, on aura $\mathcal{B}_{\mathrm{X}} = \sigma(\mathcal{C})$.

Théorème 1.2.1. *La tribu borélienne de $\mathbb{R}^2$ est égale à la tribu produit tensoriel $\mathcal{B}_{\mathbb{R}} \otimes \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$. Plus généralement,*

$$\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n} = \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \otimes \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \otimes \cdots \otimes \mathcal{B}_{\mathbb{R}},$$

où le produit tensoriel contient n facteurs, tribu de parties de $\mathbb{R}^n$ engendrée par les pavés mesurables $\mathrm{A}_1 \times \cdots \times \mathrm{A}_n$, avec $\mathrm{A}_j \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$, $j = 1, \ldots, n$.

Démonstration. On se limitera au cas de deux facteurs. Montrons d'abord l'inclusion $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^2} \subset \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \otimes \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$. Pour cela il suffit de montrer que tout ouvert V du produit $\mathbb{R}^2$ appartient à $\mathcal{B}_{\mathbb{R}} \otimes \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$. Comme on l'a fait en dimension 1, on voit que tout ouvert V de $\mathbb{R}^2$ est réunion dénombrable de pavés $]q_1, r_1[\times]q_2, r_2[$, avec q_1, q_2, r_1, r_2 rationnels. Tous ces pavés sont dans $\mathcal{B}_{\mathbb{R}} \otimes \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$, donc tout ouvert V est dans $\mathcal{B}_{\mathbb{R}} \otimes \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$, d'où $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^2} \subset \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \otimes \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$.

L'inclusion inverse $\mathcal{B}_{\mathbb{R}} \otimes \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \subset \mathcal{B}_{\mathbb{R}^2}$ est vraie pour tout espace topologique produit $\mathrm{X} \times \mathrm{Y}$; il faut maintenant montrer que pour tous boréliens A_1 et A_2 de $\mathbb{R}$, le produit $\mathrm{A}_1 \times \mathrm{A}_2$ est un borélien de $\mathbb{R}^2$. On introduit d'abord, lorsque V_2 est un ouvert fixé de $\mathbb{R}$, la classe

$$\mathcal{C}_1 = \{\mathrm{A}_1 \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}} : \mathrm{A}_1 \times \mathrm{V}_2 \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^2}\} ;$$

on vérifie que $\mathcal{C}_1$ est une tribu, et $\mathcal{C}_1$ contient les ouverts de $\mathbb{R}$, donc $\mathcal{C}_1 = \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ pour tout V_2, ce qui veut dire que $\mathrm{A}_1 \times \mathrm{V}_2 \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^2}$ pour tous $\mathrm{A}_1 \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ et V_2 ouvert de $\mathbb{R}$. Dans un deuxième temps on considère pour A_1 fixé

$$\mathcal{C}_2 = \{\mathrm{A}_2 \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}} : \mathrm{A}_1 \times \mathrm{A}_2 \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^2}\} ;$$

de même, $\mathcal{C}_2$ est une tribu, qui contient les ouverts V_2 d'après le premier pas, donc $\mathcal{C}_2 = \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$, ce qui donne ce que nous voulons.

Définition. On dit qu'une application f entre deux espaces topologiques X et Y est *borélienne* si elle est mesurable de $(\mathrm{X}, \mathcal{B}_{\mathrm{X}})$ dans $(\mathrm{Y}, \mathcal{B}_{\mathrm{Y}})$. En particulier, toute application continue est borélienne.

Proposition. *Soient φ une fonction borélienne de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ et $f_1, f_2, \ldots, f_n$ des fonctions mesurables de $(\Omega, \mathcal{A})$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$. L'application $\omega \to \varphi(f_1(\omega), \ldots, f_n(\omega))$ est mesurable de $(\Omega, \mathcal{A})$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$.*

Démonstration. Faisons la pour $n = 2$. L'application couple $(\omega \to (f_1(\omega), f_2(\omega))$ est mesurable de $(\Omega, \mathcal{A})$ dans $(\mathbb{R}^2, \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \otimes \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$, et φ est par définition mesurable de $(\mathbb{R}^2, \mathcal{B}_{\mathbb{R}^2})$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$. Puisque $\mathcal{B}_{\mathbb{R}} \otimes \mathcal{B}_{\mathbb{R}} = \mathcal{B}_{\mathbb{R}^2}$, tout roule.

Proposition 1.2.2. *Si une application f de Ω dans un espace* X *métrisable est limite simple d'une suite d'applications mesurables de* $(\Omega, \mathcal{A})$ *dans* $(\mathrm{X}, \mathcal{B}_\mathrm{X})$, *elle est mesurable de* $(\Omega, \mathcal{A})$ *dans* $(\mathrm{X}, \mathcal{B}_\mathrm{X})$.

Si une application à valeurs dans un espace topologique X *métrisable* **séparable** *est mesurable de* $(\Omega, \mathcal{A})$ *dans* $(\mathrm{X}, \mathcal{B}_\mathrm{X})$, *elle est limite simple d'une suite d'applications* $\mathcal{A}$*-étagées.*

Démonstration. Supposons que f soit limite simple d'une suite (f_n) d'applications mesurables de $(\Omega, \mathcal{A})$ dans $(\mathrm{X}, \mathcal{B})$. Pour montrer que l'application f est mesurable, il suffit de montrer que $\{f \in \mathrm{U}\} = f^{-1}(\mathrm{U}) \in \mathcal{A}$ pour tout U ouvert de X.

Soit d une distance sur X qui définit la topologie de X ; si $\mathrm{A} \subset \mathrm{X}$ et $x \in \mathrm{X}$, posons $\mathrm{dist}(x, \mathrm{A}) = \inf\{d(x, a) : a \in \mathrm{A}\}$. Considérons pour tout entier $k \geq 0$ l'ensemble ouvert

$$\mathrm{U}_k = \{x \in \mathrm{U} : \mathrm{dist}(x, \mathrm{U}^c) > 2^{-k}\} \,;$$

on obtient une suite croissante dont la réunion est U. Si $f(\omega) \in \mathrm{U}$, il existe un entier k tel que $\mathrm{dist}(f(\omega), \mathrm{U}^c) > 2^{-k}$, donc par la continuité de la distance on a pour n assez grand, disons pour n plus grand qu'un certain m, l'inégalité $\mathrm{dist}(f_n(\omega), \mathrm{U}^c) > 2^{-k}$ c'est-à-dire que $\omega \in \bigcap_{n \geq m} \{f_n \in \mathrm{U}_k\}$. On a donc

$$\{f \in \mathrm{U}\} \subset \mathrm{B} = \bigcup_k \bigcup_m \bigcap_{n \geq m} \{f_n \in \mathrm{U}_k\}.$$

Inversement si $\omega \in \mathrm{B}$, il existe k et m tels que $\mathrm{dist}(f_n(\omega), \mathrm{U}^c) > 2^{-k}$ pour tout $n \geq m$, ce qui implique que $\mathrm{dist}(f(\omega), \mathrm{U}^c) \geq 2^{-k} > 0$ à la limite, donc $\omega \in \{f \in \mathrm{U}\}$. On a donc bien égalité des deux ensembles $\{f \in \mathrm{U}\}$ et B, et $\mathrm{B} \in \mathcal{A}$ puisqu'il se déduit par des opérations dénombrables des $\{f_n \in \mathrm{U}_k\}$, eux-mêmes dans $\mathcal{A}$ puisque chaque f_n est mesurable et U_k ouvert.

Montrons la partie inverse de la proposition. Soient $(x_k)_{k \geq 0}$ une suite dense dans X et introduisons une distance d sur X qui définisse la topologie de X ; pour tout entier $k \geq 0$ posons $\delta_k(\omega) = \min\{d(f(\omega), x_j) : 0 \leq j \leq k\}$. D'après la densité de la suite, on a $\delta_k(\omega) \to 0$; posons aussi $j_k(\omega) = \min\{j \leq k : d(f(\omega), x_j) = \delta_k(\omega)\}$, et enfin $f_k(\omega) = x_{j_k(\omega)}$. On a bien $d(f_k(\omega), f(\omega)) \to 0$, et on vérifie que f_k est $\mathcal{A}$-étagée puisque

$$\{f_k = x_j\} = \{\omega : d(f(\omega), x_j) = \delta_k(\omega)\} \;\cap \bigcap_{0 \leq i < j} \{\omega : d(f(\omega), x_i) > \delta_k(\omega)\} \in \mathcal{A}$$

pour tout $j = 0, \ldots, k$.

Théorème 1.2.3 d'approximation. *Soit* (X, d) *un espace métrique, soient* $\mathcal{B}_\mathrm{X}$ *sa tribu borélienne et* μ *une mesure sur* $(\mathrm{X}, \mathcal{B}_\mathrm{X})$ *; si* A *est un borélien de* X, *contenu dans un ouvert* W *de* **mesure finie**, $\mu(\mathrm{W}) < +\infty$, *il existe pour tout* $\varepsilon > 0$ *un fermé* F *et un ouvert* V *de* X, *tels que* $\mu(\mathrm{V}) < +\infty$,

$$\mathrm{F} \subset \mathrm{A} \subset \mathrm{V} \quad \textit{et} \quad \mu(\mathrm{V}) - \mu(\mathrm{F}) = \mu(\mathrm{V} \setminus \mathrm{F}) < \varepsilon.$$

Il en résulte qu'il existe une fonction φ *réelle continue sur* X, *nulle hors de* W, *telle que*

$$0 \leq \varphi \leq 1 \quad \textit{et} \quad \int_\mathrm{X} |\mathbf{1}_\mathrm{A} - \varphi| \, d\mu < \varepsilon.$$

Démonstration. Pour montrer le premier résultat, il est commode d'introduire la mesure *finie* ν sur $(\mathrm{X}, \mathcal{B}_{\mathrm{X}})$ qui est définie par

$$\forall \mathrm{B} \in \mathcal{B}_{\mathrm{X}}, \quad \nu(\mathrm{B}) = \mu(\mathrm{B} \cap \mathrm{W}),$$

où W est un ouvert fixé de X, tel que $\mu(\mathrm{W}) < +\infty$. On désigne par $\mathcal{D}$ la famille de toutes les parties $\mathrm{D} \subset \mathrm{X}$ qui ont la propriété suivante : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un fermé F et un ouvert V de X tels que

$$\mathrm{F} \subset \mathrm{D} \subset \mathrm{V} \quad \text{et} \quad \nu(\mathrm{V}) - \nu(\mathrm{F}) = \nu(\mathrm{V} \setminus \mathrm{F}) < \varepsilon.$$

On va montrer que $\mathcal{D}$ est une tribu qui contient les ouverts. Il en résultera que $\mathcal{D}$ contient la tribu borélienne $\mathcal{B}_{\mathrm{X}}$, ce qui est l'expression même du résultat attendu ; en effet, si A est un borélien contenu dans W, et si $\mathrm{F} \subset \mathrm{A} \subset \mathrm{V}$ avec $\nu(\mathrm{V} \setminus \mathrm{F}) < \varepsilon$, on pourra raffiner l'encadrement en $\mathrm{F} \subset \mathrm{A} \subset \mathrm{V}_1 := \mathrm{V} \cap \mathrm{W}$, et écrire

$$\mu(\mathrm{V}_1) - \mu(\mathrm{F}) = \mu(\mathrm{V} \cap \mathrm{W}) - \mu(\mathrm{F} \cap \mathrm{W}) = \nu(\mathrm{V}) - \nu(\mathrm{F}) < \varepsilon.$$

Montrons d'abord que tout ouvert V de X est dans la famille $\mathcal{D}$. Posons pour tout entier $n \geq 0$

$$\mathrm{F}_n = \{x \in \mathrm{X} : d(x, \mathrm{V}^c) \geq 2^{-n}\}.$$

On voit que $\mathrm{F}_n \subset \mathrm{V}$ est fermé, croissant avec n et $\mathrm{V} = \bigcup_n \mathrm{F}_n$. On a par conséquent $\nu(\mathrm{V}) = \lim_n \nu(\mathrm{F}_n)$, ce qui peut s'exprimer par $\nu(\mathrm{V}) - \nu(\mathrm{F}_n) \to 0$ puisque la mesure ν est finie. On a ainsi l'approximation souhaitée pour $\mathrm{D} = \mathrm{V}$, en prenant V pour ouvert extérieur et F_n comme fermé intérieur.

Montrons ensuite que $\mathcal{D}$ est une tribu. Si $\mathrm{F} \subset \mathrm{D} \subset \mathrm{V}$, alors $\mathrm{V}^c \subset \mathrm{D}^c \subset \mathrm{F}^c$ donne un encadrement pour le complémentaire, et $\nu(\mathrm{F}^c \setminus \mathrm{V}^c) = \nu(\mathrm{V} \setminus \mathrm{F})$; ceci montre que $\mathrm{D} \in \mathcal{D}$ implique $\mathrm{D}^c \in \mathcal{D}$. On a $\emptyset \in \mathcal{D}$ puisque cet ensemble est ouvert. Enfin, soit (D_n) une suite d'éléments de $\mathcal{D}$; pour chaque entier n encadrons D_n par $\mathrm{F}_n \subset \mathrm{D}_n \subset \mathrm{V}_n$, de façon que $\nu(\mathrm{V}_n) - \nu(\mathrm{F}_n) < 2^{-n-2}\varepsilon$; l'ensemble $\mathrm{Y} = \bigcup_{n=0}^{+\infty} \mathrm{F}_n$ n'est pas en général fermé, mais $\mathrm{Y}_{\mathrm{N}} = \bigcup_{n=0}^{\mathrm{N}} \mathrm{F}_n$ est fermé et $\nu(\mathrm{Y}) = \lim_{\mathrm{N}} \nu(\mathrm{Y}_{\mathrm{N}})$. Si on pose $\mathrm{D} = \bigcup_{n=0}^{+\infty} \mathrm{D}_n$ et $\mathrm{V} = \bigcup_{n=0}^{+\infty} \mathrm{V}_n$, on a les encadrements

$$\mathrm{Y}_{\mathrm{N}} = \bigcup_{n=0}^{\mathrm{N}} \mathrm{F}_n \subset \mathrm{Y} \subset \mathrm{D} \subset \mathrm{V} \,;$$

on voit que $\mathrm{V} \setminus \mathrm{Y} \subset \bigcup_{n=0}^{+\infty} (\mathrm{V}_n \setminus \mathrm{F}_n)$, donc $\nu(\mathrm{V}) - \nu(\mathrm{Y}) < \sum_{n=0}^{+\infty} 2^{-n-2}\varepsilon = \varepsilon/2$. Pour N assez grand on aura aussi $\nu(\mathrm{Y}) - \nu(\mathrm{Y}_{\mathrm{N}}) < \varepsilon/2$, ce qui donne le bon encadrement $\mathrm{Y}_{\mathrm{N}} \subset \mathrm{D} \subset \mathrm{V}$ et $\nu(\mathrm{V}) - \nu(\mathrm{Y}_{\mathrm{N}}) < \varepsilon$, qui prouve que $\mathrm{D} \in \mathcal{D}$. Ceci achève la preuve du fait que $\mathcal{D}$ est une tribu.

Pour terminer on considère un borélien A quelconque contenu dans un ouvert W de mesure finie, et un encadrement $\mathrm{F} \subset \mathrm{A} \subset \mathrm{V} \subset \mathrm{W}$ tel que $\mu(\mathrm{V} \setminus \mathrm{F}) < \varepsilon$; on pose

$$\forall x \in \mathrm{X}, \quad \varphi(x) = \frac{d(x, \mathrm{V}^c)}{d(x, \mathrm{V}^c) + d(x, \mathrm{F})}.$$

Cette fonction est continue, $0 \leq \varphi \leq 1$, $\varphi = 1$ sur F, et $\varphi = 0$ hors de V (donc φ est *a fortiori* nulle hors de W) ; ceci montre que $\mathbf{1}_{\mathrm{F}} \leq \varphi \leq \mathbf{1}_{\mathrm{V}}$; comme on a aussi $\mathbf{1}_{\mathrm{F}} \leq \mathbf{1}_{\mathrm{A}} \leq \mathbf{1}_{\mathrm{V}}$, on voit que $|\mathbf{1}_{\mathrm{A}} - \varphi| \leq \mathbf{1}_{\mathrm{V}} - \mathbf{1}_{\mathrm{F}}$, donc

$$\int_{\mathrm{X}} |\mathbf{1}_{\mathrm{A}} - \varphi| \, d\mu \leq \int_{\mathrm{X}} \bigl(\mathbf{1}_{\mathrm{V}} - \mathbf{1}_{\mathrm{F}}\bigr) \, d\mu = \mu(\mathrm{V}) - \mu(\mathrm{F}) < \varepsilon.$$

Remarque en passant. Si la mesure μ sur $(\mathrm{X}, \mathcal{B}_{\mathrm{X}})$ est finie, on peut prendre $\mathrm{W} = \mathrm{X}$ et les résultats du théorème 1.2.3 s'appliquent dans ce cas à tous les boréliens de X. En revanche, il ne suffit pas que μ soit σ-finie sur $(\mathrm{X}, \mathcal{B}_{\mathrm{X}})$ pour en déduire un lien intéressant entre topologie et mesure : penser à la mesure sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$ qui donne la mesure 1 à chaque rationnel ; cette mesure est σ-finie mais tous les ouverts non vides sont de mesure infinie. L'hypothèse raisonnable pour pouvoir se servir du théorème précédent est que l'espace métrique X soit réunion d'une suite *d'ouverts* de mesure finie, comme c'est le cas pour la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$.

Le théorème précédent utilise assez peu la métrique de X ; de fait, il suffit évidemment que X soit un espace topologique dont la topologie puisse être définie par une distance, ce qu'on appelle un *espace métrisable*. Cette hypothèse nous a servi à montrer que tout ouvert dans un tel espace est réunion d'une suite de fermés : c'est la seule propriété dont on avait besoin pour l'espace topologique X.

1.3. Intégrale des fonctions réelles ou complexes. Classes de fonctions

On a déjà défini l'intégrale des fonctions réelles. Si f est mesurable à valeurs dans $\mathbb{C}$, les fonctions $\operatorname{Re} f$, $\operatorname{Im} f$ et $|f|$ sont mesurables réelles (par composition avec des fonctions continues, de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{R}$) ; on dit alors que f est intégrable si $\int |f| \, d\mu < +\infty$, ce qui équivaut à dire que les deux fonctions $\operatorname{Re} f$ et $\operatorname{Im} f$ sont intégrables.

Remarque. Toute fonction mesurable complexe f est limite simple d'une suite (f_n) de fonctions étagées (complexes), qu'on peut choisir telles que $|f_n| \le |f|$.

Preuve. On connaît le résultat dans le cas réel. Il suffit de l'appliquer à $\operatorname{Re} f$ et $\operatorname{Im} f$ pour obtenir le cas complexe : il existe (u_n), (v_n) étagées qui tendent respectivement vers $\operatorname{Re} f$ et $\operatorname{Im} f$, avec $|u_n| \le |\operatorname{Re} f|$ et $|v_n| \le |\operatorname{Im} f|$; la suite de fonctions étagées $f_n = u_n + \mathrm{i} v_n$ tend vers f et

$$|f_n| = |u_n + \mathrm{i} v_n| = \bigl(u_n^2 + v_n^2\bigr)^{1/2} \le \bigl((\operatorname{Re} f)^2 + (\operatorname{Im} f)^2\bigr)^{1/2} = |f|.$$

On désigne par $\mathcal{L}_1(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ l'espace vectoriel des fonctions mesurables f à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ telles que $\int |f| \, d\mu < +\infty$. Si f est à valeurs complexes, on pose la définition qui va de soi,

$$\int f \, d\mu = \int (\operatorname{Re} f) \, d\mu + \mathrm{i} \int (\operatorname{Im} f) \, d\mu.$$

En écrivant un scalaire complexe z sous la forme $z = a + \mathrm{i} b$, a, b réels, puis en développant $zf = (a \operatorname{Re} f - b \operatorname{Im} f) + \mathrm{i}(a \operatorname{Im} f + b \operatorname{Re} f)$, on vérifie que $\int zf = z \int f$. On voit que l'intégrale est $\mathbb{C}$-linéaire,

$$\forall z, w \in \mathbb{C}, \quad \int (zf + wg) \, d\mu = z \int f \, d\mu + w \int g \, d\mu,$$

et on a la majoration du module

$$\Bigl| \int f \, d\mu \Bigr| \le \int |f| \, d\mu.$$

Pour établir cette majoration, on écrit $\int f\,d\mu = r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$, avec $r \ge 0$ et θ réel. On a

$$r = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta} \int f\,d\mu = \int \bigl(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta} f\bigr)\,d\mu = \int \mathrm{Re}(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta} f)\,d\mu \le$$

$$\le \int |\,\mathrm{Re}(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta} f)|\,d\mu \le \int |\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta} f|\,d\mu = \int |f|\,d\mu.$$

Fonctions définies presque-partout

Définition. On dit que f est une fonction $\mathcal{A}$-mesurable (réelle ou complexe) *définie μ-presque-partout sur* Ω si f est définie en dehors d'un ensemble $\mathrm{N} \in \mathcal{A}$ tel que $\mu(\mathrm{N}) = 0$, de façon que

$$\{\omega \in \Omega : \omega \notin \mathrm{N},\ f(\omega) \in \mathrm{B}\} \in \mathcal{A}$$

pour tout borélien B de $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Si on prolonge f en une fonction $\widetilde{f}$ définie partout sur Ω, en posant par exemple $\widetilde{f} = 0$ sur N, on voit que $\widetilde{f}$ est $\mathcal{A}$-mesurable, car l'ensemble $\{\widetilde{f} \in \mathrm{B}\}$ est égal soit à l'ensemble $\mathrm{X} = \{\omega \notin \mathrm{N} : \ f(\omega) \in \mathrm{B}\} \in \mathcal{A}$, soit à $\mathrm{X} \cup \mathrm{N}$, selon que $0 \in \mathrm{B}$ ou non. D'autre part, si deux fonctions mesurables f_1 et f_2 prolongent f, elles sont égales presque-partout, la valeur absolue de leur différence $|f_1 - f_2|$ est nulle presque-partout ; l'inégalité $|f_2| \le |f_1| + |f_2 - f_1|$ montre que : si f_1 est intégrable, alors f_2 est intégrable aussi et l'inégalité

$$\Bigl|\int f_1\,d\mu - \int f_2\,d\mu\Bigr| \le \int |f_1 - f_2|\,d\mu = 0$$

montre que les deux intégrales sont égales. On dira qu'une fonction mesurable définie presque-partout est *intégrable* si ses prolongements sont intégrables. On voit que si on prolonge f intégrable en une fonction mesurable réelle $\widetilde{f}$ définie partout, l'intégrale du prolongement $\widetilde{f}$ sera toujours la même. On peut donc convenir de poser, pour une fonction intégrable f définie presque-partout sur Ω,

$$\int_\Omega f\,d\mu = \int_\Omega \widetilde{f}\,d\mu,$$

en prolongeant par exemple f par la valeur 0 en dehors de l'ensemble μ-négligeable N.

Théorème 1.3.1 : théorème de convergence dominée de Lebesgue. *Soit* $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ *un espace mesuré ; on donne une suite* (f_n) *de fonctions intégrables réelles ou complexes définies presque partout sur* Ω, *et une fonction intégrable* $g \ge 0$ *définie presque partout. Si*

– *la suite* (f_n) *tend presque partout vers une fonction* f

– *pour tout* n, *on a* $|f_n| \le g$ *presque-partout, avec* $\int_\Omega g\,d\mu < +\infty$,

il en résulte que

$$\int_\Omega f\,d\mu = \lim_n \int_\Omega f_n\,d\mu.$$

Démonstration. On peut introduire un ensemble négligeable $\mathrm{N} \in \mathcal{A}$, réunion dénombrable d'ensembles négligeables, qui contienne :

– l'ensemble N_1 des points où f_n, pour un $n \in \mathbb{N}$, ou bien g ne sont pas définies ;
– les points $\omega \notin \mathrm{N}_1$ tels que la suite $f_n(\omega)$ n'est pas convergente ;
– les points $\omega \notin \mathrm{N}_1$ où on n'a pas $|f_n| \le g$, et les points où $g = +\infty$.

Définissons les fonctions $\widetilde{f_n}$, $\widetilde{g}$ qui sont égales à f_n ou g en dehors de N, et qu'on prolonge par 0 (par exemple) sur l'ensemble N. La suite $\widetilde{f_n}$ converge simplement vers une limite $\widehat{f}$ hors de N et vers 0 sur N ; la fonction $\widetilde{f}$ égale à $\widehat{f}$ hors de N et à 0 sur N est donc mesurable et presque partout égale à f. Toutes les intégrales qui nous intéressent sont les mêmes pour les fonctions avec tilde ou sans tilde. Mais les fonctions tildées vérifient les hypothèses strictes de la première version 1.1.7 du théorème de Lebesgue : $|\widetilde{f_n} - \widetilde{f}|$ tend simplement vers 0 sur Ω en étant dominée par la fonction intégrable $2\widetilde{g}$, ce qui permet de terminer la preuve.

Corollaire 1.3.2. *Considérons une série $\sum u_k$ de fonctions $\mathcal{A}$-mesurables réelles ou complexes sur Ω telle que*

$$\int \Bigl(\sum_{k=0}^{+\infty} |u_k|\Bigr)\, d\mu < +\infty$$

(hypothèse équivalente à $\sum_k \bigl(\int |u_k|\, d\mu\bigr) < +\infty$ d'après la proposition 1.1.4) ; alors
– *chaque fonction u_k est intégrable ;*
– *la série numérique $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k(\omega)$ converge pour μ-presque tout $\omega \in \Omega$; sa somme représente une fonction intégrable définie μ-presque-partout ;*
– *on peut intervertir la série et l'intégrale*

$$\int \Bigl(\sum_{k=0}^{+\infty} u_k\Bigr)\, d\mu = \sum_{k=0}^{+\infty}\Bigl(\int u_k\, d\mu\Bigr).$$

Démonstration. Posons $\mathrm{S}(\omega) = \sum_{k=0}^{+\infty} |u_k(\omega)|$, valeur finie ou égale à $+\infty$. On a supposé que $\int \mathrm{S}\, d\mu < +\infty$. La première affirmation est évidente puisque $|u_k| \le \mathrm{S}$ pour tout k. Puisque l'intégrale de S est finie, il en résulte que l'ensemble

$$\mathrm{N} = \{\mathrm{S} = +\infty\} \in \mathcal{A}$$

est de mesure nulle. La série numérique $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k(\omega)$ est absolument convergente pour tout $\omega \notin \mathrm{N}$, et sa somme donne donc une fonction σ mesurable définie presque-partout (hors de N). Les sommes partielles

$$\sigma_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$$

convergent presque-partout vers σ, en restant dominées presque-partout par la fonction intégrable S. D'après le théorème de Lebesgue, on obtient le résultat,

$$\int \sigma\, d\mu = \lim_n \int \sigma_n\, d\mu = \lim_n \Bigl(\sum_{k=0}^{n} \int u_k\, d\mu\Bigr) = \sum_{k=0}^{+\infty}\Bigl(\int u_k\, d\mu\Bigr).$$

Exercice. Si f est intégrable sur $\mathbb{R}$, on pose

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \widehat{f}(t) = \int_{\mathbb{R}} f(x)\, \mathrm{e}^{-ixt}\, dx.$$

a. Montrer que $\widehat{f}$ est bornée, continue, et tend vers 0 à l'infini.

b. Montrer que si $\int_{\mathbb{R}} |x|^k |f(x)|\, dx < +\infty$, alors $\widehat{f}$ est de classe C^k sur $\mathbb{R}$ (k est un entier ≥ 1).

c. Si μ est une mesure ≥ 0 finie et symétrique sur $\mathbb{R}$, montrer que $\widehat{\mu}$ est de classe C^2 si et seulement si $\int_{\mathbb{R}} x^2\, d\mu(x) < +\infty$.

Espaces L_p

Lemme. *Soient* X *un espace vectoriel sur* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$ *et* q *une fonction réelle* **à valeurs** ≥ 0 *définie sur* X *; pour que* q *soit une semi-norme sur* X, *(il faut et) il suffit que :*

pour tous $x \in \mathrm{X}$ *et* $\lambda \in \mathbb{K}$ *on a* $q(\lambda x) = |\lambda|\, q(x)$, *et l'ensemble* $\{x \in \mathrm{X} : q(x) \leq 1\}$ *est convexe.*

Démonstration. Si q est une semi-norme, il est clair que $\mathrm{C}_q = \{x \in \mathrm{X} : q(x) \leq 1\}$ est convexe. Inversement, supposons que q soit positivement homogène et que C_q soit convexe, et déduisons la sous-additivité de q : soient x et y deux vecteurs de X, et choisissons $a > q(x) \geq 0$ et $b > q(y) \geq 0$; considérons $x_1 = a^{-1}x$ et $y_1 = b^{-1}y$; par homogénéité, $q(x_1) = a^{-1}q(x) < 1$, et de même $q(y_1) < 1$, ce qui montre que les vecteurs x_1 et y_1 sont dans l'ensemble convexe C_q ; formons la combinaison convexe

$$z = \frac{a}{a+b}\, x_1 + \frac{b}{a+b}\, y_1 = \frac{1}{a+b}\, (x+y),$$

qui est dans C_q d'après l'hypothèse de convexité, c'est-à-dire que $q(z) \leq 1$. L'homogénéité de q transforme l'inégalité $q(z) \leq 1$ en $q(x+y) \leq a+b$. En faisant tendre a vers $q(x)$ et b vers $q(y)$ on obtient l'inégalité triangulaire $q(x+y) \leq q(x) + q(y)$.

Pour $1 \leq p < +\infty$, soit $\mathcal{L}_p = \mathcal{L}_p(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ l'espace vectoriel des fonctions f complexes $\mathcal{A}$-mesurables telles que $\int_\Omega |f(s)|^p\, d\mu(s) < +\infty$; la quantité

$$q(f) = \Bigl(\int_\Omega |f(s)|^p\, d\mu(s) \Bigr)^{1/p}$$

est une semi-norme sur $\mathcal{L}_p$.

Pour le vérifier, on voit d'abord que $q(\lambda f) = |\lambda|\, q(f)$ (facile), puis on montre que l'ensemble $\{f \in \mathcal{L}_p : q(f) \leq 1\}$ est convexe. Cela provient de la convexité sur $[0, +\infty[$ de la fonction $u \to u^p$; on a alors si f, g sont deux éléments de $\mathcal{L}_p$ tels que $q(f) \leq 1$, $q(g) \leq 1$ et si $0 \leq t \leq 1$,

$$|(1-t)f(s) + tg(s)|^p \leq \bigl((1-t)|f(s)| + t|g(s)|\bigr)^p \leq (1-t)|f(s)|^p + t|g(s)|^p$$

pour tout $s \in \Omega$, donc

$$\int_\Omega \bigl|(1-t)f(s) + tg(s)\bigr|^p\, d\mu(s) \leq (1-t) \int_\Omega |f(s)|^p\, d\mu(s) + t \int_\Omega |g(s)|^p\, d\mu(s) \leq (1-t) + t = 1.$$

On notera dorénavant

$$\|f\|_p = \Big(\int_\Omega |f(s)|^p \, d\mu(s) \Big)^{1/p}.$$

Notons $\mathcal{N}$ l'ensemble des fonctions f scalaires (avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) qui sont $\mathcal{A}$-mesurables et nulles μ-presque partout. C'est aussi, pour tout $p \in [1, +\infty[$, l'ensemble des fonctions f telles que $\|f\|_p = 0$. On voit facilement que $\mathcal{N}$ est un espace vectoriel, contenu dans $\mathcal{L}_p$ pour tout p, ce qui permet de considérer le quotient $\mathrm{L}_p(\Omega, \mathcal{A}, \mu) = \mathcal{L}_p(\Omega, \mathcal{A}, \mu)/\mathcal{N}$. On vérifie sans peine que la semi-norme $\| \cdot \|_p$ « passe au quotient », parce que sa valeur est constante sur les classes d'équivalence. En effet, si f_1, f_2 sont dans la même classe, l'inégalité triangulaire pour la semi-norme donne

$$\big| \|f_1\|_p - \|f_2\|_p \big| \le \|f_1 - f_2\|_p = 0.$$

Quand on passe aux classes, on obtient une norme sur l'espace $\mathrm{L}_p(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, toujours notée $\|f\|_p$,

$$\forall f \in \mathrm{L}_p(\Omega, \mathcal{A}, \mu), \quad \|f\|_p = \Big(\int_\Omega |f(s)|^p \, d\mu(s) \Big)^{1/p}.$$

Exercice.

Si $\int |g_k| \, d\mu \le 2^{-k}$ pour tout entier $k \ge 0$, montrer que la suite numérique $(g_k(\omega))$ tend vers 0 pour μ-presque tout $\omega \in \Omega$.

Si $(f_n) \subset \mathrm{L}_p(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ tend vers f en norme L_p, montrer qu'il existe une sous-suite (f_{n_j}) qui tend vers f μ-presque partout.

Remarque. Si f est une fonction mesurable définie presque-partout, toutes ses extensions mesurables sont dans la même classe ; on peut donc parler de la classe d'une fonction définie presque partout. De même, une fonction mesurable à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$ qui est presque-partout finie définit une classe de fonctions réelles.

Théorème de Fischer-Riesz

Théorème 1.3.3. *Pour tout $p \in [1 + \infty]$ l'espace $\mathrm{L}_p(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ est un espace de Banach.*

Démonstration. Traitons le cas $1 \le p < +\infty$. Soit (f_n) une suite de Cauchy dans L_p ; on peut trouver une sous-suite d'entiers (n_k) telle que pour tout $k \ge 1$,

$$u_k = f_{n_k} - f_{n_{k-1}}$$

vérifie $\|u_k\|_p \le 2^{-k}$. Nous allons montrer que la série $\sum u_k$ converge dans L_p. Comme

$$\sum_{k=1}^{\mathrm{K}} u_k = f_{n_\mathrm{K}} - f_{n_0},$$

la convergence de la série $\sum u_k$ équivaut à la convergence de la sous-suite (f_{n_k}) ; comme la suite (f_n) est de Cauchy, la convergence d'une sous-suite impliquera la convergence de la suite entière, et démontrera que L_p est complet.

Posons $v_k = |u_k|$, $g_n = \big(\sum_{k=1}^n v_k\big)^p$, remarquons que $\|v_k\|_p = \|u_k\|_p$ pour obtenir

$$\int g_n(s)\,d\mu(s) = \Big\|\sum_{k=1}^n v_k\Big\|_p^p \le \big(\sum_{k=1}^n \|v_k\|_p\big)^p \le \big(\sum_{k=1}^{+\infty} 2^{-k}\big)^p = 1.$$

La suite (g_n) est une suite croissante de fonctions mesurables ≥ 0, elle converge vers une fonction mesurable g dont la valeur en chaque point est égale à $g(s) = \big(\sum_{k=1}^{+\infty} |u_k(s)|\big)^p$ (valeur $+\infty$ admise) ; on sait par la proposition 1.1.3 de convergence monotone que $\int g(s)\,d\mu(s) = \lim_n \int g_n(s)\,d\mu(s) \le 1$. La fonction g est donc finie presque partout. Posons

$$\mathrm{B} = \{g < +\infty\} \in \mathcal{A}\,;$$

on a $\mu(\mathrm{B}^c) = 0$, et la série $\sum u_k(s)$ converge absolument pour tout $s \in \mathrm{B}$; posons

$$\mathrm{U}_n(s) = \sum_{k=1}^n \mathbf{1}_\mathrm{B}(s) u_k(s), \quad \mathrm{U}(s) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbf{1}_\mathrm{B}(s) u_k(s)\,;$$

la fonction U_n est presque-partout égale à $\sum_{k=1}^n u_k$; on remarque que

$$(*) \qquad |\mathrm{U}(s) - \mathrm{U}_n(s)|^p = \Big|\sum_{k>n} u_k(s)\Big|^p \le \Big(\sum_{k>n} |u_k(s)|\Big)^p \le g(s)$$

pour tout s, et que $|\mathrm{U}(s) - \mathrm{U}_n(s)|^p$ tend vers 0 lorsque $n \to +\infty$ pour tout s. Comme la fonction g est intégrable, le théorème de convergence dominée de Lebesgue permet de conclure que

$$\Big\|\mathrm{U} - \sum_{k=1}^n u_k\Big\|_p^p = \|\mathrm{U} - \mathrm{U}_n\|_p^p = \int |\mathrm{U} - \mathrm{U}_n|^p\,d\mu \to 0.$$

On a montré que la série converge dans L_p : sa somme est égale à U (qui est dans L_p parce que $|\mathrm{U}|^p \le g$, en appliquant $(*)$ pour $n = 0$).

L'espace $\mathrm{L}_\infty(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ est l'espace des μ-classes bornées, c'est-à-dire les classes f contenant une fonction bornée. Si f_1 est un représentant de f tel que $|f_1| \le \mathrm{M}$ partout, on aura alors $\mu(\{\,|f_2| > \mathrm{M}\}) = 0$ pour tout autre représentant f_2 de f. On peut définir la norme L_∞ de f comme étant la plus petite constante M avec cette propriété,

$$\|f\|_\infty = \min\big\{\mathrm{M} : \mu(\{|f| > \mathrm{M}\}) = 0\big\}.$$

L'espace L_∞ est complet pour cette norme.

Tribu complétée

Dans certains cas une fonction réelle f définie sur $\mathbb{R}$ n'est pas borélienne, mais est tout de même Lebesgue-presque partout égale à une fonction borélienne intégrable g ; on a alors envie de dire que f est Lebesgue-intégrable, et de poser

$$\int_\mathbb{R} f(x)\,dx = \int_\mathbb{R} g(x)\,dx.$$

On peut faire entrer ce cas dans le cadre général de la mesurabilité abstraite, en agrandissant la tribu : désignons par $\widehat{\mathcal{B}}_\lambda$ la classe des ensembles de la forme $\mathrm{A} \cup \mathrm{N}$, où A est borélien et N est Lebesgue-négligeable, c'est-à-dire qu'il existe un borélien B tel que $\mathrm{N} \subset \mathrm{B}$ et $\lambda(\mathrm{B}) = 0$. On vérifie facilement que cette classe $\widehat{\mathcal{B}}_\lambda$ est une tribu, et on peut définir l'extension $\widehat{\lambda}$ de la mesure de Lebesgue λ à cette tribu en posant

$$\widehat{\lambda}(\mathrm{A} \cup \mathrm{N}) = \lambda(\mathrm{A}).$$

Si f est Lebesgue-presque partout égale à une fonction borélienne g, on voit que $\{f > c\}$ diffère de $\{g > c\}$ par un ensemble négligeable, et il en résulte que $\{f > c\} \in \widehat{\mathcal{B}}_\lambda$. Autrement dit, f est mesurable à valeurs dans $\mathbb{R}$ muni de la *tribu complétée* $\widehat{\mathcal{B}}_\lambda$. On dit dans ce cas que f est Lebesgue-mesurable.

C'est par exemple le cas si f est une fonction intégrable-Riemann sur un intervalle borné $[a, b]$; une telle fonction n'est pas nécessairement borélienne ; cependant, il existe une suite croissante (φ_n) et une suite décroissante (ψ_n) de fonctions en escalier telles que $\varphi_n \leq f \leq \psi_n$ pour tout n et $\int_a^b (\psi_n - \varphi_n)(t)\, dt \to 0$. Dans ce cas les fonctions boréliennes $\varphi = \sup_n \varphi_n$ et $\psi = \inf_n \psi_n$ vérifient $\varphi \leq f \leq \psi$ et $\int (\psi - \varphi) = 0$, donc $\varphi = f = \psi$ Lebesgue-presque partout. Toute fonction Riemann-intégrable est donc Lebesgue-mesurable, et les deux notions d'intégrale coïncident,

$$\int_{[a,b]} f\, d\lambda = \int_a^b f(t)\, dt.$$

En effet, $\int_{[a,b]} f\, d\lambda = \int_{[a,b]} \varphi\, d\lambda = \int_a^b \varphi(t)\, dt = \int_a^b f(t)\, dt$ car la fonction φ est à la fois borélienne et intégrable-Riemann, et on a vérifié l'égalité dans ce cas.

Intégrale Banachique

On suppose que E est un espace de Banach **séparable** et que f est une fonction mesurable de $(\Omega, \mathcal{A})$ dans E, telle que $\int \|f(\omega)\|\, d\mu(\omega) < +\infty$. D'après la proposition 1.2.2, il existe une suite de fonctions étagées (f_n) à valeurs dans E qui converge simplement vers f. De plus, on peut supposer que $\|f_n(\omega)\| \leq \|f(\omega)\|$ pour tout $\omega \in \Omega$: en effet, il existe une suite croissante (φ_n) de fonctions étagées positives qui tend vers la fonction mesurable et intégrable $\|f\| : \omega \to \|f(\omega)\|$; la suite $(\widetilde{f}_n)$ définie par

$$\widetilde{f}_n(\omega) = \frac{\varphi_n(\omega)}{\|f_n(\omega)\| + 2^{-n}}\, f_n(\omega)$$

satisfait nos conditions : les fonctions sont étagées, tendent vers f et $\|\widetilde{f}_n(\omega)\| \leq \|f(\omega)\|$ pour tout n et tout $\omega \in \Omega$.

Définir l'intégrale de fonctions étagées vectorielles ne pose pas plus de problèmes que dans le cas scalaire (bien sûr, ces intégrales sont maintenant des vecteurs de E) ; il faut néanmoins se limiter aux *fonctions étagées intégrables*, c'est-à-dire les fonctions étagées g à valeurs dans E telles que $\int \|g(\omega)\|\, d\mu(\omega) < +\infty$. Si g est une telle fonction étagée à valeurs dans E, on pourra écrire

$$g = \sum_{j=1}^{n} \mathbf{1}_{\mathrm{A}_j} x_j,$$

où $A_1, \ldots, A_n$ est une partition de Ω en ensembles de $\mathcal{A}$, et où $x_1, \ldots, x_n$ sont des vecteurs de E. On sait que $\int \|g\| \, d\mu = \sum_{j=1}^n \mu(A_j) \, \|x_j\| < +\infty$, ce qui implique que $\mu(A_j) < +\infty$ chaque fois que $x_j \neq 0_E$; si on adopte la convention d'écriture $+\infty \cdot 0_E = 0_E$, on peut donc considérer

$$\int g \, d\mu = \sum_{j=1}^{n} \mu(A_j) x_j \in E.$$

L'indépendance par rapport à la représentation se montre essentiellement comme on a fait dans le cas étagé positif. L'inégalité triangulaire dans E donne immédiatement l'inégalité évidente mais fondamentale $\left\| \int g \, d\mu \right\| \leq \int \|g\| \, d\mu$.

Supposons donc que les (f_n) étagées tendent vers f et que $\|f_n\| \leq \|f\|$; la suite des fonctions $\|f - f_n\|$ tend vers 0 en étant dominée par la fonction intégrable $2 \|f\|$; par le théorème de convergence dominée,

$$\int \|f(\omega) - f_n(\omega)\| \, d\mu(\omega) \to 0.$$

Il existe donc un entier N tel que $\int \|f(\omega) - f_n(\omega)\| \, d\mu(\omega) \leq \varepsilon$ pour tout $n \geq N$, ce qui donne par l'inégalité triangulaire pour la norme de E

$$\int \|f_m(\omega) - f_n(\omega)\| \, d\mu(\omega) \leq 2\varepsilon$$

pour tous les entiers $m, n \geq N$; la suite des vecteurs $I_n = \int f_n \, d\mu \in E$ est donc de Cauchy, puisque

$$\|I_m - I_n\| \leq \int \|f_m(\omega) - f_n(\omega)\| \, d\mu(\omega) \leq 2\varepsilon$$

pour tous les entiers $m, n \geq N$; puisque E est complet, cette suite de vecteurs (I_n) tend vers une limite I que l'on peut légitimement définir comme *l'intégrale de la fonction vectorielle* f,

$$\int f \, d\mu = \lim_n \int f_n \, d\mu \in E,$$

car on montre facilement que la limite est indépendante de la suite (f_n) choisie.