Prépa. Agrég écrit d'Analyse, octobre 2004.

Extension de mesures

Quand on enseigne l'intégration devant de vrais étudiants, on part souvent de la mesure de Lebesgue sur $[0, 1]$ comme étant donnée d'avance sur la tribu borélienne ; il n'est pourtant pas évident d'attribuer une mesure à tous les boréliens, de façon que les axiomes habituels de la théorie de la mesure soient vérifiés. La seule chose qui est très claire est la mesure des unions finies d'intervalles. Cette famille d'ensembles formée des unions finies d'intervalles est une *algèbre de parties*. Le problème qui se pose est donc de prolonger la mesure à une tribu contenant les intervalles. Nous allons rappeler le théorème de prolongement qui permet de régler ce problème. Nous présenterons seulement le cas crucial, le prolongement d'une mesure *finie*. Pour plus d'informations, consulter par exemple D. Revuz, Intégration.

1. Le théorème de prolongement

Définition. Une *algèbre* $\mathcal{A}$ de parties de Ω est une famille de parties $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(\Omega)$ qui contient l'élément $\Omega \in \mathcal{P}(\Omega)$, et qui est stable par union finie et passage au complémentaire :

$$\mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathcal{A} \Rightarrow \mathrm{A} \cup \mathrm{B} \in \mathcal{A}\,; \quad \mathrm{A} \in \mathcal{A} \Rightarrow \mathrm{A}^c \in \mathcal{A}.$$

La conjonction de ces deux propriétés donne la stabilité par intersection finie. On voit aussi que $\emptyset \in \mathcal{A}$.

Définition. Une mesure *positive, finie, et finiment additive* μ sur une algèbre $\mathcal{A}$ de parties de Ω est une application de $\mathcal{A}$ dans $[0, +\infty[$, telle que

$$\forall \mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathcal{A}, \quad \Big(\mathrm{A} \cap \mathrm{B} = \emptyset \Rightarrow \mu(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) = \mu(\mathrm{A}) + \mu(\mathrm{B})\Big).$$

Il en résulte que $\mu(\emptyset) = 0$ (appliquer avec $\mathrm{A} = \mathrm{B} = \emptyset$), que μ est croissante : si $\mathrm{A} \subset \mathrm{B}$, on a $\mu(\mathrm{A}) \le \mu(\mathrm{B})$; en effet, $\mu(\mathrm{B}) - \mu(\mathrm{A}) = \mu(\mathrm{B} \setminus \mathrm{A}) \ge 0$. L'additivité pour deux ensembles disjoints se généralise par récurrence à une famille finie quelconque : on a $\mu\big(\bigcup_{j=1}^n \mathrm{A}_j\big) = \sum_{j=1}^n \mu(\mathrm{A}_j)$ lorsque les ensembles $\mathrm{A}_j \in \mathcal{A}$, $j = 1, \ldots, n$ sont deux à deux disjoints. On voit aussi que

$$\mu(\mathrm{A}) + \mu(\mathrm{B}) = \mu(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) + \mu(\mathrm{A} \cap \mathrm{B})$$

pour tous les ensembles $\mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathcal{A}$.

Remarque 1. Si on a une suite $(\mathrm{B}_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$ d'ensembles deux à deux disjoints, dont la réunion $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{B}_n$ est contenue dans un ensemble $\mathrm{A} \in \mathcal{A}$, on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \mu(\mathrm{B}_n) = \lim_{\mathrm{N}} \nearrow \sum_{n=0}^{\mathrm{N}} \mu(\mathrm{B}_n) = \lim_{\mathrm{N}} \mu\Big(\bigcup_{n=0}^{\mathrm{N}} \mathrm{B}_n\Big) \le \mu(\mathrm{A}).$$

En particulier, pour toute suite $(\mathrm{B}_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$ d'ensembles deux à deux disjoints, la série $\sum \mu(\mathrm{B}_n)$ converge et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \mu(\mathrm{B}_n) \le \mu(\Omega) < +\infty.$$

Définition. On dit que la mesure finie positive et finiment additive μ sur l'algèbre $\mathcal{A}$ est *σ-additive* si

$$\mu(\mathrm{A}) = \sum_{i \in \mathrm{I}} \mu(\mathrm{A}_i)$$

lorsque $\mathrm{A} \in \mathcal{A}$ est la réunion d'une famille $(\mathrm{A}_i)_{i \in \mathrm{I}}$ d'ensembles de $\mathcal{A}$, deux à deux disjoints, indexée par un ensemble **dénombrable** I.

Pour que l'on puisse espérer prolonger une mesure μ sur une algèbre $\mathcal{A}$ en mesure σ-additive sur une tribu contenant $\mathcal{A}$, il est évidemment nécessaire que μ soit σ-additive sur l'algèbre $\mathcal{A}$. Il est remarquable que cette condition soit suffisante, comme on le verra dans le théorème ci-dessous.

Lemme 1. *Si un sous-ensemble* $\mathrm{X} \subset \Omega$ *est réunion d'une famille finie ou dénombrable* $(\mathrm{A}_i)_{i \in \mathrm{I}}$ *d'ensembles de* $\mathcal{A}$*, on peut aussi écrire* X *sous la forme*

$$\mathrm{X} = \bigcup_{n=0}^{+\infty} \mathrm{B}_n,$$

où les $\mathrm{B}_n \in \mathcal{A}$ *sont deux à deux disjoints. Il en résulte que pour une mesure σ-additive, on a*

$$\mu(\mathrm{A}) \le \sum_{i \in \mathrm{I}} \mu(\mathrm{A}_i)$$

lorsque $\mathrm{A} \in \mathcal{A}$ *est inclus dans la réunion d'une famille* $(\mathrm{A}_i)_{i \in \mathrm{I}}$ *d'ensembles de* $\mathcal{A}$ *indexée par un ensemble* **dénombrable** I.

Preuve. Si I est fini, on peut se ramener à $\mathrm{I} = \{0, 1, \ldots, \mathrm{N}-1\}$ et si I est dénombrable, on se ramène à $\mathrm{I} = \mathbb{N}$; dans ce second cas on posera $\mathrm{N} = +\infty$. On pose $\mathrm{B}_0 = \mathrm{A}_0$, et tant que $n+1 < \mathrm{N}$ on définit

$$\mathrm{B}_{n+1} = \mathrm{A}_{n+1} \setminus \bigl(\mathrm{A}_0 \cup \ldots \cup \mathrm{A}_n\bigr)\,;$$

on montre facilement par récurrence que les (B_n) sont dans $\mathcal{A}$, deux à deux disjoints, $\mathrm{B}_n \subset \mathrm{A}_n$ et que

$$\mathrm{B}_0 \cup \ldots \cup \mathrm{B}_n = \mathrm{A}_0 \cup \ldots \cup \mathrm{A}_n$$

pour tout entier $n < \mathrm{N}$. Il en résulte que

$$\bigcup_{n<\mathrm{N}} \mathrm{B}_n = \bigcup_{n<\mathrm{N}} \mathrm{A}_n = \mathrm{X},$$

ce qui démontre le premier point (si N est fini, on peut compléter la définition des B_n en posant $\mathrm{B}_n = \emptyset$ quand $n \ge \mathrm{N}$). Supposons maintenant que $\mathrm{A} \subset \mathrm{X}$, avec $\mathrm{A} \in \mathcal{A}$. L'ensemble $\mathrm{A} = \mathrm{A} \cap \mathrm{X}$ est égal à la réunion des $\mathrm{A} \cap \mathrm{B}_n \in \mathcal{A}$, qui sont deux à deux disjoints. Par la σ-additivité supposée de la mesure μ,

$$\mu(\mathrm{A}) = \sum_n \mu(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}_n) \le \sum_n \mu(\mathrm{B}_n) \le \sum_n \mu(\mathrm{A}_n).$$

Dans toute la suite μ désignera une mesure σ-additive définie sur une algèbre $\mathcal{A}$ de parties de Ω.

Théorème. *Si μ est une mesure positive, finie et σ-additive sur une algèbre $\mathcal{A}$ de parties d'un ensemble Ω, il existe une tribu $\mathcal{X}$ contenant $\mathcal{A}$ et une mesure σ-additive $\widetilde{\mu}$ sur $\mathcal{X}$ qui prolonge $\mathcal{A}$.*

La démonstration demande un bon nombre d'étapes. Il est commode d'introduire la différence symétrique de deux sous-ensembles de Ω,

$$\mathrm{X} \vartriangle \mathrm{Y} = (\mathrm{X} \setminus \mathrm{Y}) \cup (\mathrm{Y} \setminus \mathrm{X}).$$

En termes de fonctions indicatrices,

$$\mathbf{1}_{\mathrm{X}\vartriangle\mathrm{Y}} = \bigl|\mathbf{1}_{\mathrm{X}} - \mathbf{1}_{\mathrm{Y}}\bigr|\,;$$

cette remarque nous donne immédiatement, par l'inégalité triangulaire pour les fonctions, l'inclusion

$$(\mathrm{DS}_1) \qquad \mathrm{X} \vartriangle \mathrm{Z} \subset (\mathrm{X} \vartriangle \mathrm{Y}) \cup (\mathrm{Y} \vartriangle \mathrm{Z}).$$

Si $(\mathrm{X}_i)_{i\in\mathrm{I}}$ et $(\mathrm{Z}_i)_{i\in\mathrm{I}}$ sont deux familles de parties de Ω indexées par le même ensemble I, on vérifie sans peine que

$$(\mathrm{DS}_2) \qquad \Bigl(\bigcup_{i\in\mathrm{I}} \mathrm{X}_i\Bigr) \vartriangle \Bigl(\bigcup_{i\in\mathrm{I}} \mathrm{Y}_i\Bigr) \subset \bigcup_{i\in\mathrm{I}} (\mathrm{X}_i \vartriangle \mathrm{Y}_i).$$

A. *La mesure extérieure*

On définit *la mesure extérieure* $\mu^*(\mathrm{X})$ d'un sous-ensemble $\mathrm{X} \subset \Omega$ quelconque ainsi : la valeur $\mu^*(\mathrm{X})$ est l'infimum de $\sum_{i\in\mathrm{I}} \mu(\mathrm{A}_i)$, pour toutes les familles finies ou dénombrables $(\mathrm{A}_i)_{i\in\mathrm{I}}$ de parties de $\mathcal{A}$ qui recouvrent X, c'est-à-dire telles que

$$\mathrm{X} \subset \bigcup_{i\in\mathrm{I}} \mathrm{A}_i.$$

Proposition. *La mesure extérieure possède les propriétés suivantes :*

1. *Pour tout $\mathrm{X} \subset \Omega$, on a $0 \le \mu^*(\mathrm{X}) \le \mu(\Omega)$ (positivité, finitude).*

2. *Pour tous $\mathrm{X} \subset \mathrm{Y} \subset \Omega$, on a $\mu^*(\mathrm{X}) \le \mu^*(\mathrm{Y})$ (croissance).*

3. *Pour toute famille finie ou dénombrable $(\mathrm{X}_i)_{i\in\mathrm{I}}$,*

$$\mu^*\Bigl(\bigcup_{i\in\mathrm{I}} \mathrm{X}_i\Bigr) \le \sum_{i\in\mathrm{I}} \mu^*(\mathrm{X}_i)$$

(sous-additivité dénombrable).

4. *Pour tout $\mathrm{A} \in \mathcal{A}$, on a $\mu^*(\mathrm{A}) = \mu(\mathrm{A})$.*

Preuve. Il est évident que $\mu^*(\mathrm{X}) \ge 0$; en prenant le recouvrement de X consistant du seul ensemble Ω, on déduit que $\mu^*(\mathrm{X}) \le \mu(\Omega)$. Il est évident que $\mathrm{X} \subset \mathrm{Y}$ implique $\mu^*(\mathrm{X}) \subset \mu^*(\mathrm{Y})$.

Passons au point **3** : introduisons des nombres $\varepsilon_i > 0$ tels que $\sum_{i \in \mathrm{I}} \varepsilon_i < \varepsilon$. Pour tout i, on peut trouver, par définition de $\mu^*(\mathrm{X}_i)$, une famille $(\mathrm{A}_{i,j})$ dans $\mathcal{A}$, indexée par un ensemble fini ou dénombrable J_i, et telle que

$$\mathrm{X}_i \subset \bigcup_{j \in \mathrm{J}_i} \mathrm{A}_{i,j}, \quad \sum_{j \in \mathrm{J}_i} \mu(\mathrm{A}_{i,j}) \leq \mu^*(\mathrm{X}_i) + \varepsilon_i\,;$$

la famille doublement indexée des $\mathrm{A}_{i,j}$ est finie ou dénombrable, et on a en désignant par K l'ensemble fini ou dénombrable des couples (i, j), où $i \in \mathrm{I}$ et $j \in \mathrm{J}_i$

$$\bigcup_{i \in \mathrm{I}} \mathrm{X}_i \subset \bigcup_{(i,j) \in \mathrm{K}} \mathrm{A}_{i,j} \quad \text{et} \quad \sum_{(i,j) \in \mathrm{K}} \mu(\mathrm{A}_{i,j}) \leq \sum_{i \in \mathrm{I}} \mu^*(\mathrm{X}_i) + \varepsilon.$$

On en déduit le résultat voulu en **3**. Pour le point **4**, il est clair que $\mu^*(\mathrm{A}) \leq \mu(\mathrm{A})$, en prenant le recouvrement de $\mathrm{X} = \mathrm{A}$ par un seul ensemble de $\mathcal{A}$, égal à A ($\mathrm{I} = \{0\}$, $\mathrm{A}_0 = \mathrm{A}$). L'inégalité inverse est donnée par le lemme 1.

B. *La semi-distance δ et la tribu $\mathcal{X}$*

Pour deux sous-ensembles $\mathrm{X}, \mathrm{Y} \subset \Omega$ on pose

$$\delta(\mathrm{X}, \mathrm{Y}) = \mu^*(\mathrm{X} \vartriangle \mathrm{Y}).$$

Cette quantité est une semi-distance : elle est symétrique en X, Y (évidemment) et vérifie l'inégalité triangulaire (par la sous-additivité de μ^* et la propriété (DS_1)). On a bien $\delta(\mathrm{X}, \mathrm{X}) = 0$ mais en général, la relation $\delta(\mathrm{X}, \mathrm{Y}) = 0$ n'implique pas $\mathrm{X} = \mathrm{Y}$. Si $\mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathcal{A}$ on a

$$\begin{aligned} |\mu(\mathrm{A}) - \mu(\mathrm{B})| &= |\mu(\mathrm{A} \setminus \mathrm{B}) - \mu(\mathrm{B} \setminus \mathrm{A})| \leq \mu(\mathrm{A} \setminus \mathrm{B}) + \mu(\mathrm{B} \setminus \mathrm{A}) \\ &= \mu(\mathrm{A} \vartriangle \mathrm{B}) = \mu^*(\mathrm{A} \vartriangle \mathrm{B}) = \delta(\mathrm{A}, \mathrm{B}). \end{aligned}$$

Retenons cette inégalité importante pour la suite.

$$\text{(L)} \qquad \forall \mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathcal{A}, \quad |\mu(\mathrm{A}) - \mu(\mathrm{B})| \leq \delta(\mathrm{A}, \mathrm{B}).$$

On introduit l'adhérence dans $\mathcal{P}(\Omega)$ de la classe $\mathcal{A}$,

$$\mathcal{X} = \{\mathrm{X} \subset \Omega : \forall \varepsilon > 0,\ \exists \mathrm{A} \in \mathcal{A}, \quad \delta(\mathrm{X}, \mathrm{A}) < \varepsilon\}.$$

Remarque 2. Si un ensemble Y est réunion d'une famille finie ou dénombrable $(\mathrm{A}_i)_{i \in \mathrm{I}}$ d'ensembles de $\mathcal{A}$, on a $\mathrm{Y} \in \mathcal{X}$.

D'après le lemme 1, on peut aussi écrire Y sous la forme

$$\mathrm{Y} = \bigcup_{n=0}^{+\infty} \mathrm{B}_n,$$

où les $\mathrm{B}_n \in \mathcal{A}$ sont deux à deux disjoints. D'après la remarque 1, la série $\sum \mu(\mathrm{B}_n)$ est convergente ; pour tout $\varepsilon > 0$ on peut trouver un entier N tel que $\sum_{j > \mathrm{N}} \mu(\mathrm{B}_j) < \varepsilon$. Posons $\mathrm{C} = \bigcup_{i \leq \mathrm{N}} \mathrm{B}_i$; l'ensemble C est dans l'algèbre $\mathcal{A}$, et il est contenu dans Y ; par conséquent, la différence symétrique $\mathrm{Y} \vartriangle \mathrm{C}$ est égale à $\mathrm{Y} \setminus \mathrm{C}$, qui est la réunion des ensembles B_n pour $n > \mathrm{N}$. Par définition de μ^*,

$$\mu^*(\mathrm{Y} \setminus \mathrm{C}) = \mu^*\Big(\bigcup_{n > \mathrm{N}} \mathrm{B}_n\Big) \leq \sum_{j > \mathrm{N}} \mu(\mathrm{B}_j) < \varepsilon$$

donc

$$\delta(\mathrm{Y}, \mathrm{C}) = \mu^*(\mathrm{Y} \setminus \mathrm{C}) < \varepsilon.$$

Lemme. *La classe $\mathcal{X}$ est une tribu de parties de Ω, qui contient l'algèbre $\mathcal{A}$.*

Preuve. Il est facile de voir que la classe $\mathcal{X}$ contient $\mathcal{A}$ (si $\mathrm{X} \in \mathcal{A}$, prendre $\mathrm{A} = \mathrm{X}$ pour tout $\varepsilon > 0$), en particulier $\mathcal{X}$ contient Ω. Il est clair que $\mathrm{X} \in \mathcal{X} \Rightarrow \mathrm{X}^c \in \mathcal{X}$, car

$$\mathrm{X} \vartriangle \mathrm{A} = \mathrm{X}^c \vartriangle \mathrm{A}^c$$

et $\mathrm{A}^c \in \mathcal{A}$ si et seulement si $\mathrm{A} \in \mathcal{A}$. Pour finir montrons la stabilité par union dénombrable : supposons que $\mathrm{X}_i \in \mathcal{X}$ pour tout i d'un ensemble fini ou dénombrable I, et considérons l'ensemble $\mathrm{X} = \bigcup_{i \in \mathrm{I}} \mathrm{X}_i$; pour chaque indice i on peut trouver $\mathrm{A}_i \in \mathcal{A}$ tel que $\delta(\mathrm{X}_i, \mathrm{A}_i) < \varepsilon_i$; posons $\mathrm{Y} = \bigcup_{i \in \mathrm{I}} \mathrm{A}_i$. On a $\mathrm{X} \vartriangle \mathrm{Y} \subset \bigcup_{i \in \mathrm{I}} (\mathrm{X}_i \vartriangle \mathrm{A}_i)$ par la propriété (DS_2), donc par le point **3** de la proposition

$$\delta(\mathrm{X}, \mathrm{Y}) = \mu^*(\mathrm{X} \vartriangle \mathrm{Y}) \le \mu^*\Bigl(\bigcup_{i \in \mathrm{I}} (\mathrm{X}_i \vartriangle \mathrm{A}_i)\Bigr) \le \sum_{i \in \mathrm{I}} \mu^*(\mathrm{X}_i \vartriangle \mathrm{A}_i) < \varepsilon\,;$$

d'après la remarque 2 on peut trouver $\mathrm{B} \in \mathcal{A}$ tel que $\delta(\mathrm{Y}, \mathrm{B}) < \varepsilon$, donc finalement $\delta(\mathrm{X}, \mathrm{B}) < 2\varepsilon$. Puisque $\varepsilon > 0$ est arbitraire, il en résulte bien que $\mathrm{X} \in \mathcal{X}$.

C. *Définition de l'extension $\widetilde{\mu}$*

Soit $\mathrm{X} \in \mathcal{X}$; on remarque que pour toute suite $(\mathrm{A}_n) \subset \mathcal{A}$ telle que $\lim_n \delta(\mathrm{X}, \mathrm{A}_n) = 0$, la suite $(\mu(\mathrm{A}_n))$ converge vers $\mu^*(\mathrm{X})$, car

$$\bigl|\mu^*(\mathrm{X}) - \mu(\mathrm{A}_n)\bigr| = \bigl|\mu^*(\mathrm{X}) - \mu^*(\mathrm{A}_n)\bigr| = \bigl|\delta(\mathrm{X}, \emptyset) - \delta(\mathrm{A}_n, \emptyset)\bigr| \le \delta(\mathrm{X}, \mathrm{A}_n).$$

Il en résulte que $\mu^*(\mathrm{X}) = \lim_n \mu(\mathrm{A}_n)$ lorsque $\delta(\mathrm{X}, \mathrm{A}_n) \to 0$. Tout ceci permet de définir le prolongement $\widetilde{\mu}$ de μ à la classe $\mathcal{X}$ en posant

$$\forall \mathrm{X} \in \mathcal{X}, \quad \widetilde{\mu}(\mathrm{X}) = \mu^*(\mathrm{X}) = \lim_n \mu(\mathrm{A}_n)$$

pour n'importe quelle suite $(\mathrm{A}_n) \subset \mathcal{A}$ telle que $\lim_n \delta(\mathrm{X}, \mathrm{A}_n) = 0$. En particulier, $\widetilde{\mu}$ prolonge μ

$$\forall \mathrm{A} \in \mathcal{A}, \quad \widetilde{\mu}(\mathrm{A}) = \mu(\mathrm{A})$$

(prendre $\mathrm{A}_n = \mathrm{A}$ pour tout n). Il est clair que les valeurs de $\widetilde{\mu}$ sont dans l'intervalle $[0, \mu(\Omega)]$. Il reste à montrer pour finir que $\widetilde{\mu}$ est σ-additive sur la tribu $\mathcal{X}$.

Additivité de $\widetilde{\mu}$

Supposons que $\mathrm{X}, \mathrm{Y} \in \mathcal{X}$ soient disjoints, et que $\mathrm{A}_n, \mathrm{B}_n \in \mathcal{A}$ soient tels que $\delta(\mathrm{X}, \mathrm{A}_n) \to 0$ et $\delta(\mathrm{Y}, \mathrm{B}_n) \to 0$. Comme X et Y sont disjoints, on voit que tout point $\omega \in \Omega$ est hors de X ou hors de Y, donc

$$\mathrm{A}_n \cap \mathrm{B}_n \subset (\mathrm{A}_n \setminus \mathrm{X}) \cup (\mathrm{B}_n \setminus \mathrm{Y}) \subset (\mathrm{A}_n \vartriangle \mathrm{X}) \cup (\mathrm{B}_n \vartriangle \mathrm{Y})$$

ce qui implique par la sous-additivité de μ^* que

$$\mu(\mathrm{A}_n \cap \mathrm{B}_n) = \mu^*(\mathrm{A}_n \cap \mathrm{B}_n) \le \mu^*(\mathrm{A}_n \vartriangle \mathrm{X}) + \mu^*(\mathrm{B}_n \vartriangle \mathrm{Y}) = \delta(\mathrm{X}, \mathrm{A}_n) + \delta(\mathrm{Y}, \mathrm{B}_n) \to 0.$$

De plus par (DS_2) on a l'inclusion

$$(\mathrm{X} \cup \mathrm{Y}) \vartriangle (\mathrm{A}_n \cup \mathrm{B}_n) \subset (\mathrm{X} \vartriangle \mathrm{A}_n) \cup (\mathrm{Y} \vartriangle \mathrm{B}_n),$$

qui implique $\delta(\mathrm{X} \cup \mathrm{Y}, \mathrm{A}_n \cup \mathrm{B}_n) \to 0$, ce qui entraîne que

$$\widetilde{\mu}(\mathrm{X}) + \widetilde{\mu}(\mathrm{Y}) - \widetilde{\mu}(\mathrm{X} \cup \mathrm{Y}) = \lim_n \Bigl(\mu(\mathrm{A}_n) + \mu(\mathrm{B}_n) - \mu(\mathrm{A}_n \cup \mathrm{B}_n)\Bigr) = \lim_n \mu(\mathrm{A}_n \cap \mathrm{B}_n) = 0.$$

On voit donc que $\widetilde{\mu}$ est une mesure finiment additive sur $\mathcal{X}$; elle est aussi positive et finie d'après le point **1** de la proposition.

σ-additivité de $\widetilde{\mu}$

Si (X_n) est une suite d'éléments de $\mathcal{X}$, deux à deux disjoints, la remarque 1 appliquée à la mesure finiment additive $\widetilde{\mu}$ sur l'algèbre $\mathcal{X}$ donne

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \widetilde{\mu}(\mathrm{X}_n) \leq \widetilde{\mu}\Big(\bigcup_{n=0}^{+\infty} \mathrm{X}_n\Big)\,;$$

par ailleurs par la propriété **3** de la mesure extérieure

$$\widetilde{\mu}\Big(\bigcup_{n=0}^{+\infty} \mathrm{X}_n\Big) = \mu^*\Big(\bigcup_{n=0}^{+\infty} \mathrm{X}_n\Big) \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \mu^*(\mathrm{X}_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} \widetilde{\mu}(\mathrm{X}_n),$$

ce qui donne l'inégalité inverse, et termine la preuve de la σ-additivité de $\widetilde{\mu}$.

Remarque. Nous avons été amenés à dire que telle propriété des ensembles, dont nous avions besoin pour la preuve, était claire au niveau des fonctions indicatrices ; il est de fait possible de placer toute la preuve dans le cadre d'espaces de fonctions, et de démontrer un *théorème de Daniell :* on part de l'espace vectoriel $\mathcal{E}$ des fonctions étagées engendrées par les ensembles de $\mathcal{A}$, et de la forme linéaire sur cet espace qui consiste à « intégrer » par rapport à cette mesure ; on définit ensuite une intégrale supérieure, puis un espace $\mathcal{F}$ de fonctions qui est l'analogue de la classe $\mathcal{X}$.

2. La mesure de Lebesgue sur $[0,1]$ et les mesures de Stieltjes

On suppose donnée une fonction F croissante, bornée et continue sur $\mathbb{R}$ (le cas où F est discontinue demande un peu plus de précaution ; consulter par exemple Revuz, Intégration). La fonction admet donc des limites en $\pm\infty$, qui seront notées $\mathrm{F}(-\infty)$ et $\mathrm{F}(+\infty)$. Considérons l'algèbre $\mathcal{A}$ des unions finies d'intervalles (de toutes les formes possibles : $[a,b]$, $[a,b[$, $]a,b]$, $]a,b[$, $]-\infty,b[$, $]-\infty,b]$, $[a,+\infty[$, $]a,+\infty[$). Sur cette algèbre on définit la mesure μ en posant d'abord

$$\mu(|a,b|) = \mathrm{F}(b) - \mathrm{F}(a)$$

où $|a,b|$ désigne n'importe lequel des quatre intervalles possibles (deux seulement si $a = -\infty$ ou $b = +\infty$) ; on étend ensuite la définition aux unions finies d'intervalles, et on montre qu'on a ainsi une mesure positive, finie et simplement additive sur $\mathcal{A}$.

On doit montrer que cette mesure est σ-additive sur l'algèbre $\mathcal{A}$. On remarque que pour tout intervalle $|a,b|$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe un intervalle compact K et un intervalle ouvert V tels que $\mathrm{K} \subset |a,b| \subset \mathrm{V}$ et $\mu(\mathrm{V}) - \mu(\mathrm{K}) < \varepsilon$; ceci résulte immédiatement de la continuité de la fonction F. Cette propriété d'approximation par compact-ouvert est clairement vraie aussi pour les unions finies d'intervalles, c'est-à-dire qu'elle est vraie pour tous les éléments de l'algèbre $\mathcal{A}$.

Supposons que $\mathrm{A} \in \mathcal{A}$ soit la réunion d'une suite $(\mathrm{B}_n) \subset \mathcal{A}$ d'éléments deux à deux disjoints ; soit $\mathrm{K} \subset \mathrm{A}$ un compact, élément de $\mathcal{A}$, qui approche la mesure de A à moins de ε, et pour chaque entier n, soit $\mathrm{V}_n \in \mathcal{A}$ un ouvert tel que $\mathrm{B}_n \subset \mathrm{V}_n$ et $\mu(\mathrm{V}_n) - \mu(\mathrm{B}_n) < 2^{-n}\varepsilon$. Puisque $\mathrm{A} = \bigcup_{n=0}^{+\infty} \mathrm{B}_n$, il en résulte que le compact $\mathrm{K} \subset \mathrm{A}$

est couvert par les ouverts $V_n \supset B_n$; on peut donc trouver un nombre fini d'entre eux, $V_0, \ldots, V_N$ qui couvrent déjà K. Par l'additivité finie et la croissance,

$$\mu(K) \le \sum_{n=0}^{N} \mu(V_n)$$

ce qui entraîne par les choix qui ont été faits

$$\mu(A) - \varepsilon \le \sum_{n=0}^{+\infty} \mu(B_n) + \varepsilon,$$

et la conclusion en résulte, puisque ε est arbitraire. On peut donc prolonger la définition de μ à une tribu contenant tous les intervalles. Cette tribu contient certainement la tribu engendrée par les intervalles, qui est la tribu borélienne de $\mathbb{R}$.

Pour retrouver la mesure de Lebesgue sur l'intervalle $[0, 1]$, on peut appliquer la procédure précédente à la fonction F définie par

$$F(x) = x \quad \text{si} \quad 0 \le x \le 1,$$

et $F(x) = 0$ pour $x < 0$, $F(x) = 1$ pour $x > 1$.