Prépa. Agrég écrit d'Analyse, 2004–2005, exercices 1.

1. Intégration, jusqu'à la convergence dominée

Exercice 1.1. Montrer que pour toute suite croissante de mesures positives (μ_n) sur un espace mesurable $(\Omega, \mathcal{A})$, la limite $\mathrm{A} \in \mathcal{A} \to \mu(\mathrm{A}) = \lim_n \mu_n(\mathrm{A})$ est une mesure positive sur $(\Omega, \mathcal{A})$.

Montrer que pour toute suite de mesures positives (ν_k) sur un espace mesurable $(\Omega, \mathcal{A})$, la formule

$$\mathrm{A} \in \mathcal{A} \to \nu(\mathrm{A}) = \sum_{k=0}^{+\infty} \nu_k(\mathrm{A})$$

définit une mesure positive sur $(\Omega, \mathcal{A})$.

Exercice 1.2. Si f est une fonction mesurable ≥ 0, montrer que $\int f\,d\mu = 0$ si et seulement si $\mu(\{f > 0\}) = 0$.

Montrer que si $\int f\,d\mu < \infty$, alors $\mu(\{f = +\infty\}) = 0$.

Exercice 1.3. Soit f une fonction mesurable sur $(\Omega, \mathcal{A})$, à valeurs dans $\mathbb{R}$ (muni bien sûr de sa tribu borélienne) ; on suppose que f est intégrable par rapport à une mesure positive μ sur (Ω, μ). Si on a $\int_\mathrm{A} f\,d\mu \geq 0$ pour tout $\mathrm{A} \in \mathcal{A}$, montrer que f est ≥ 0 μ-presque partout.

Exercice 1.4. On suppose que μ est une mesure ≥ 0 sur $(\mathrm{X}, \mathcal{A})$ et f une fonction $\mathcal{A}$-mesurable ≥ 0 ; montrer que la formule

$$\forall \mathrm{A} \in \mathcal{A}, \quad \nu(\mathrm{A}) = \int_\mathrm{A} f\,d\mu = \int \mathbf{1}_\mathrm{A} f\,d\mu$$

définit une mesure positive ν sur $(\mathrm{X}, \mathcal{A})$.

Exercice 1.5. Si f est intégrable sur $\mathbb{R}$, on pose

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \widehat{f}(t) = \int_\mathbb{R} f(x)\,\mathrm{e}^{-ixt}\,dx.$$

a. Montrer que $\widehat{f}$ est bornée, continue, et tend vers 0 à l'infini.

b. Montrer que si $\int_\mathbb{R} |x|^k |f(x)|\,dx < +\infty$, alors $\widehat{f}$ est de classe C^k sur $\mathbb{R}$ (k est un entier ≥ 1).

c. Si μ est une mesure ≥ 0 finie sur $\mathbb{R}$, on pose

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \widehat{\mu}(t) = \int_\mathbb{R} \mathrm{e}^{-ixt}\,d\mu(x).$$

Généraliser les résultats de continuité et dérivabilité.

Exercice 1.6. Si μ est une probabilité sur $\mathbb{R}$, symétrique (c'est-à-dire que la mesure de tout borélien A est égale à la mesure de son symétrique, image par $x \to -x$), vérifier que $\widehat{\mu}(t) = \int \cos(xt)\,d\mu(x)$.

Si pour une probabilité symétrique μ on a $1 - \widehat{\mu}(t) = \mathrm{O}(t^2)$ quand $t \to 0$, en déduire que $\int x^2\,d\mu(x) < +\infty$.

Si μ est une probabilité sur $\mathbb{R}$ telle que sa transformée de Fourier $\widehat{\mu}$ soit deux fois dérivable à l'origine, alors $\int x^2\,d\mu(x) < +\infty$. Réciproque ?

Exercice 1.7.

Si $\int |g_k|\,d\mu \le 2^{-k}$ pour tout entier $k \ge 0$, montrer que la suite $(g_k(\omega))$ tend vers 0 pour μ-presque tout $\omega \in \Omega$.

Si $(f_n) \subset \mathrm{L}_p(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ tend vers f en norme L_p, trouver une sous-suite (f_{n_j}) qui tend vers f μ-presque partout.

Exercice 1.8. Si f est une fonction Lebesgue-intégrable sur $\mathbb{R}$, montrer que la fonction g définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-|x-t|}\, f(t)\,dt$$

est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$.

Exercice 1.9. Montrer que

$$\int_{-2}^{2} \Bigl(1 - \frac{x^2}{4}\Bigr)^n \,dx$$

tend vers 0 quand $n \to +\infty$. Montrer que pour tout ε tel que $0 < \varepsilon \le 2$ on a

$$\lim_n \sqrt{n} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \Bigl(1 - \frac{x^2}{4}\Bigr)^n \,dx = 2\sqrt{\pi}.$$

Prépa. Agrég écrit d'Analyse, 2004–2005, exercices 2.

2. Intégration, jusqu'à Fubini

Exercice 2.1. Montrer que tout ouvert de $\mathbb{R}$ est réunion (finie ou) dénombrable d'intervalles ouverts *deux à deux disjoints.*

Exercice 2.2. Si (f_n) est une suite de fonctions réelles mesurables définies sur $(\Omega, \mathcal{A})$, montrer que l'ensemble A des points $\omega \in \Omega$ où la limite $\lim_n f_n(\omega)$ existe est un ensemble de la tribu $\mathcal{A}$.

Exercice 2.3. Soit (X, d) un espace métrique séparable, muni de sa tribu borélienne $\mathcal{B}$, et soit $(\Omega, \mathcal{A})$ un espace mesurable ; montrer qu'une application f de Ω dans E est mesurable si et seulement si f est limite simple d'une suite (φ_n) de fonctions étagées de $(\Omega, \mathcal{A})$ dans E (indication : soit (x_k) une suite dense dans X ; considérer $k_n(\omega)$, égal au premier indice $k \le n$ tel que $d(x_k, f(\omega)) \le 2^{-n}$, et $k_n(\omega) = 0$ s'il n'existe pas de tel entier k).

Exercice 2.4. Soit (X, d) un espace métrique muni de sa tribu borélienne $\mathcal{B}$ et soit μ une mesure finie sur $(\mathrm{X}, \mathcal{B})$; montrer que la famille des parties $\mathrm{A} \in \mathcal{B}$ telles que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un fermé F et un ouvert V vérifiant $\mathrm{F} \subset \mathrm{A} \subset \mathrm{V}$ et $\mu(\mathrm{V} \setminus \mathrm{F}) < \varepsilon$ est une tribu de parties de X qui contient les ouverts de X.

Montrer que la famille des $\mathrm{A} \in \mathcal{B}$ telles que $\mathbf{1}_\mathrm{A}$ soit limite dans $\mathrm{L}_1(\mathrm{X}, \mathcal{B}, \mu)$ d'une suite (φ_n) de fonctions réelles continues sur X telles que $0 \le \varphi_n \le 1$ est une tribu de parties de X qui contient les ouverts de X.

Montrer que (l'image de) $\mathrm{C}_b(\mathrm{X})$ (continues bornées) est dense dans $\mathrm{L}_1(\mathrm{X}, \mathcal{B}, \mu)$.

Exercice 2.5 : théorèmes d'Egorov et de Lusin. On suppose que μ est une mesure ≥ 0 finie sur $(\Omega, \mathcal{A})$.

a. Si la suite (f_n) de fonctions $\mathcal{A}$-mesurables tend simplement vers 0 sur Ω, trouver pour tout $k \ge 0$ un entier n_k tel que $\mu\{|f_{n_k}| > 2^{-k}\} \le 2^{-k}$.

b. Montrer que pour tout entier k_0, la sous-suite $(f_{n_j})_j$ trouvée en *a* tend uniformément vers 0 sur l'ensemble

$$\mathrm{A}(k_0) = \bigcap_{k \ge k_0} \{|f_{n_k}| \le 2^{-k}\}$$

et que cet ensemble $\mathrm{A}(k_0)$ a une mesure qui tend vers $\mu(\Omega)$ lorsque $k_0 \to +\infty$.

c. Théorème de Lusin. Montrer que pour toute fonction f borélienne sur $[0,1]$, il existe pour tout $\varepsilon > 0$ un compact $\mathrm{K}_\varepsilon \subset [0,1]$ tel que $\lambda([0,1] \setminus \mathrm{K}_\varepsilon) < \varepsilon$ et que la restriction de f à K_ε soit continue.

Exercice 2.6. Si f est mesurable ≥ 0 montrer que

$$\int f \, d\mu = \int_0^{+\infty} \mu(\{f > t\} \, dt.$$

Exercice 2.7. Si f et g sont intégrables sur $\mathbb{R}$ posons

$$\mathrm{F}(x) = \int_{-\infty}^x f(t) \, dt, \quad \mathrm{G}(x) = \int_{-\infty}^x g(t) \, dt.$$

Montrer que pour tous $a < b$ réels on a

$$\int_a^b \mathrm{F}(t) g(t) \, dt = \big[\mathrm{FG}\big]_a^b - \int_a^b f(t) \mathrm{G}(t) \, dt.$$

3. Convolution, inégalités

Exercice 3.1. Soient $f, g \in \mathrm{L}_1(\mathbb{R}^d)$; calculer la transformée de Fourier de $f * g$.

Exercice 3.2. On suppose $0 < r < p < +\infty$. Montrer que

$$\Big(\int_{\mathrm{X}}\Big(\int_{\mathrm{Y}} |f(x,y)|^r \, d\nu(y)\Big)^{p/r} d\mu(x)\Big)^{1/p} \le \Big(\int_{\mathrm{Y}}\Big(\int_{\mathrm{X}} |f(x,y)|^p \, d\mu(x)\Big)^{r/p} d\nu(y)\Big)^{1/r}.$$

Exercice 3.3.

a. On suppose que $\alpha, \beta, \gamma > 0$ vérifient $\alpha + \beta + \gamma = 1$. Montrer que pour toutes fonctions positives intégrables u, v, w sur un espace mesuré $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ on a

$$\int u^\alpha v^\beta w^\gamma \, d\mu \le \Big(\int u \, d\mu\Big)^\alpha \Big(\int v \, d\mu\Big)^\beta \Big(\int w \, d\mu\Big)^\gamma.$$

b. On suppose que $\alpha, \beta, \gamma > 0$ vérifient $\alpha + \beta + \gamma = 2$. Montrer que pour toutes fonctions positives intégrables $\mathrm{U}, \mathrm{V}, \mathrm{W}$ sur $\mathbb{R}^d$ on a

$$\int \mathrm{U}(x-y)^\alpha \mathrm{V}(y)^\beta \mathrm{W}(x)^\gamma \, dx \, dy \le \Big(\int \mathrm{U}(x) \, dx\Big)^\alpha \Big(\int \mathrm{V}(x) \, dx\Big)^\beta \Big(\int \mathrm{W}(x) \, dx\Big)^\gamma.$$

En déduire que si $p, q, r \ge 1$ et $1/p + 1/q = 1 + 1/r$, on a $\mathrm{L}_p * \mathrm{L}_q \subset \mathrm{L}_r$, et plus précisément $\|f * g\|_r \le \|f\|_p \, \|g\|_q$ (*inégalité de convolution de Young*).

Indication pour un cas particulier, $\alpha = \beta = \gamma = 2/3$: on écrit le produit

$$\mathrm{U}(x-y)^{2/3} \mathrm{V}(y)^{2/3} \mathrm{W}(x)^{2/3}$$

comme produit des trois termes $(\mathrm{U}(x-y)\mathrm{V}(y))^{1/3}$, $(\mathrm{V}(y)\mathrm{W}(x))^{1/3}$ et $(\mathrm{U}(x-y)\mathrm{W}(x))^{1/3}$, on applique l'inégalité de Hölder pour trois fonctions avec les exposants $1/3, 1/3, 1/3$.

Exercice 3.4. Soit A un borélien de mesure > 0 dans $\mathbb{R}^d$; montrer que l'ensemble $\mathrm{A} - \mathrm{A} = \{a - b : a, b \in \mathrm{A}\}$ est un voisinage de 0 dans $\mathbb{R}^d$.

Exercice 3.5. On considère une fonction $g \in \mathrm{L}_1(0, 2\pi)$, et l'opérateur linéaire borné T_g de $\mathrm{L}_1(0, 2\pi)$ dans lui-même donné par

$$\forall f \in \mathrm{L}_1(0, 2\pi), \quad \mathrm{T}_g(f) = f * g.$$

a. Montrer que $\|\mathrm{T}_g\|_{\mathcal{L}(\mathrm{L}_1)} = \|g\|_1$. Montrer la même égalité pour l'opérateur T_g, agissant cette fois de $\mathrm{C}_{\mathrm{per}}([0, 2\pi])$ dans lui-même.

b. Déduire du théorème de Banach-Steinhaus qu'il existe des fonctions continues et 2π-périodiques dont la série de Fourier ne converge pas uniformément, et des fonctions de $\mathrm{L}_1(0, 2\pi)$ dont la série de Fourier ne converge pas en norme L_1.

c. On suppose que g est 2π-périodique continue. Montrer que l'opérateur T_g est compact de $\mathrm{L}_1(0, 2\pi)$ dans $\mathrm{C}_{\mathrm{per}}([0, 2\pi])$, donc *a fortiori* compact de $\mathrm{L}_1(0, 2\pi)$ dans $\mathrm{L}_1(0, 2\pi)$.

Exercice 3.6. Soit $f \in \mathrm{L}_\infty(\mathbb{R})$; montrer que l'application $t \in \mathbb{R} \to \tau_t f$ est continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathrm{L}_\infty(\mathbb{R})$ si et seulement si la classe f admet un représentant uniformément continu.

4. Fourier

Pour toute fonction $f \in \mathrm{L}_1(0, 2\pi)$ on pose

$$\forall n \in \mathbb{Z}, \quad c_n(f) = \int_0^{2\pi} f(t)\, \mathrm{e}^{-int}\, dt/(2\pi).$$

Exercice 4.1. Utiliser la théorie des séries de Fourier pour retrouver, d'une façon ou d'une autre, la relation plus que classique

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

On pourra en particulier utiliser Parseval, qui donne pour toute fonction $f \in \mathrm{L}_2(0, 2\pi)$ l'égalité

$$\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 \frac{dt}{2\pi} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n(f)|^2.$$

Exercice 4.2. Soit f une fonction continue 2π-périodique ; on suppose que

$$\text{(S)} \qquad \sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n(f)| < +\infty.$$

Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a

$$f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n(f)\, \mathrm{e}^{inx}.$$

Adapter l'exercice dans le cas où on a encore (S), mais où on suppose seulement au départ que : 1. $f \in \mathrm{L}_2(0, 2\pi)$; 2. $f \in \mathrm{L}_1(0, 2\pi)$.

Exercice 4.3. Si deux fonctions $f, g \in \mathrm{L}_1(0, 2\pi)$ vérifient $c_n(f) = c_n(g)$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$, montrer que $f = g$.

Exercice 4.4. Formule de Poisson.

a. Soit G une fonction paire positive sur $\mathbb{R}$, décroissante sur l'intervalle $[0, +\infty[$ et telle que $\int_{\mathbb{R}} \mathrm{G}(x)\, dx < +\infty$; soient F une fonction continue sur $\mathbb{R}$, telle que $|\mathrm{F}(x)| \le \mathrm{G}(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, et $\widehat{\mathrm{F}}$ sa transformée de Fourier, définie par

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \widehat{\mathrm{F}}(t) = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{F}(x)\, \mathrm{e}^{-ixt}\, dx.$$

Montrer que la fonction $f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \mathrm{F}(x + 2\pi n)$ est définie, continue et 2π-périodique. Trouver une relation entre les valeurs $\widehat{\mathrm{F}}(n)$, $n \in \mathbb{Z}$ et les coefficients de Fourier de f.

b. On suppose de plus que $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |\widehat{\mathrm{F}}(n)| < +\infty$. Démontrer la *formule de Poisson*,

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \mathrm{F}(2\pi n) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \widehat{\mathrm{F}}(n).$$

Expliciter l'égalité obtenue en appliquant à $\mathrm{F}(x) = \mathrm{e}^{-a|x|}$, $a > 0$, puis étendre au cas a complexe.

Exercice 4.5. Si deux fonctions 2π-périodiques f et g, intégrables sur $(0, 2\pi)$, sont égales dans un intervalle non vide $]s - \varepsilon, s + \varepsilon[$, montrer que

$$\lim_n \big(\mathrm{S}_n(f; s) - \mathrm{S}_n(g; s)\big) = 0$$

(principe de localisation), où on a posé pour tout entier $n \geq 0$

$$\mathrm{S}_n(f; x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k(f)\, \mathrm{e}^{ikx} .$$

Exercice 4.6. Si K est un compact de $\mathrm{L}_1(0, 2\pi)$, montrer que le lemme de Riemann-Lebesgue est vrai uniformément sur K : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n_0 > 0$ tel que pour toute fonction $f \in \mathrm{K}$, on ait

$$\Big| \int_0^{2\pi} f(x)\, \mathrm{e}^{-ixt}\, dx \Big| < \varepsilon$$

pour tout réel t tel que $|t| \geq n_0$.

Soit f une fonction 2π-périodique sur $\mathbb{R}$ et appartenant à $\mathrm{L}ip_\alpha$, $0 < \alpha \leq 1$, c'est-à-dire qu'il existe M tel que $|f(x) - f(y)| \leq \mathrm{M}\, |x - y|^\alpha$ pour tous x, y ; montrer que les fonctions $(g_x)_{x \in [0, 2\pi]}$ définies par

$$g_x(t) = \frac{f(x - t) - f(x)}{t}$$

forment un compact de $\mathrm{L}_1(0, 2\pi)$. En déduire que pour toute fonction f de $\mathrm{L}ip_\alpha$, la série de Fourier de f converge uniformément vers f.

Exercice 4.7. On considère une fonction $g \in \mathrm{L}_1(0, 2\pi)$, et l'opérateur linéaire borné T_g de $\mathrm{L}_1(0, 2\pi)$ dans lui-même donné par

$$\forall f \in \mathrm{L}_1(0, 2\pi), \quad \mathrm{T}_g(f) = f * g.$$

Montrer que $\|\mathrm{T}_g\|_{\mathcal{L}(\mathrm{L}_1)} = \|g\|_1$. Montrer la même égalité pour l'opérateur T_g, agissant cette fois de $\mathrm{C}_{\mathrm{per}}([0, 2\pi])$ dans lui-même.

Déduire du théorème de Banach-Steinhaus qu'il existe des fonctions continues et 2π-périodiques dont la série de Fourier ne converge pas uniformément, et des fonctions de $\mathrm{L}_1(0, 2\pi)$ dont la série de Fourier ne converge pas en norme L_1.

Exercice 4.8. On donne un paramètre réel ou complexe $a \notin 2\pi\mathbb{Z}$, et on définit une fonction 2π-périodique f_a sur $\mathbb{R}$ en posant

$$\forall x \in [-\pi, \pi[, \quad f_a(x) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}ax}\,.$$

Expliciter le résultat obtenu en appliquant le théorème de convergence de Dirichlet à la fonction f_a au point $x = \pi$.

5. Transformation de Fourier

Exercice 5.1. On suppose que f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$ et que f, f', f'' sont intégrables. Montrer que $\widehat{f}(t)$ est $\mathrm{O}(|t|^{-2})$ lorsque $|t| \to +\infty$.

Exercice 5.2. Si $f \in \mathrm{L}_1(\mathbb{R}^d)$ et $g \in \mathrm{L}_2(\mathbb{R}^d)$, montrer que la transformée de Fourier de $f * g$ est le produit des transformées de Fourier de f et de g.

Exercice 5.3. Soit f une fonction sur $\mathbb{R}$ telle que $\int_{\mathbb{R}} |f(x)|\, \mathrm{e}^{ax}\, dx < +\infty$ pour tout nombre réel a ; montrer que la transformée de Fourier de f se prolonge au plan complexe et que ce prolongement, qu'on notera $\widehat{f}(z)$, est la somme d'une série entière de rayon de convergence infinie.

Appliquer cette remarque à la fonction gaussienne $f(x) = \mathrm{e}^{-x^2/2}$; montrer que $\widehat{f}(\mathrm{i}t)$ se calcule explicitement pour t réel, et en déduire l'expression de $\widehat{f}(t)$.

Exercice 5.4. On pose pour tout entier $n \ge 0$ et tout $x \in \mathbb{R}$

$$\mathrm{P}_n(x) = \mathrm{e}^{x^2}\, \frac{d^n}{dx^n}\, \mathrm{e}^{-x^2}\,.$$

Montrer que P_n est un polynôme de degré n, et que $x \to \mathrm{P}_n(x)\, \mathrm{e}^{-x^2/2}$ est un vecteur propre de la transformée de Fourier (on pourra utiliser une relation de récurrence entre P_n et P_{n+1}, et les rapports entre Fourier et dérivation). Quelles sont les valeurs propres possibles pour la transformée de Fourier $\mathcal{F}$?

Exercice 5.5. Pour tout entier $n \ge 1$ on considère la fonction g_n définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g_n(x) = \mathbf{1}_{\{n^{-1} < |x| < n\}}\, \frac{1}{\pi x}\,.$$

On rappelle que l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx$$

est convergente et vaut $\pi/2$.

Montrer que les transformées de Fourier $\widehat{g}_n$ sont uniformément bornées sur $\mathbb{R}$ et convergent presque partout vers une limite qu'on explicitera. Montrer que pour toute fonction $f \in \mathrm{L}_2(\mathbb{R})$, la suite $f * g_n$ converge dans $\mathrm{L}_2(\mathbb{R})$ vers une limite qu'on notera $\mathrm{H}(f)$. Déterminer la transformée de Fourier de la fonction $\mathrm{H}(f)$. Comparer les normes de f et $\mathrm{H}(f)$ dans $\mathrm{L}_2(\mathbb{R})$.

Exercice 5.6. Si une fonction f intégrable et bornée sur $\mathbb{R}$ est telle que $\widehat{f}(t) \geq 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, montrer que $\widehat{f}$ est intégrable.

Indication : considérer une fonction g sur $\mathbb{R}$ telle que g et $\widehat{g}$ soient intégrables sur $\mathbb{R}$ (par exemple une fonction gaussienne), puis former $g_n(x) = ng(nx)$ pour tout $n \geq 1$. Calculer l'intégrale de $\widehat{f}\,\widehat{g}_n$ en la comparant à $(f * g_n)(0)$. Appliquer ensuite les arguments limite convenables.

Exercice 5.7. On considère une fonction $f \in \mathrm{L}_2(\mathbb{R})$, nulle hors de $[-\pi, \pi]$; on considère aussi la fonction 2π-périodique g définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in [-\pi, \pi[, \quad g(x) = f(x)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}ax}$$

où a est un paramètre réel. En utilisant la série de Fourier de g, montrer que

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2\,dx = 2\pi \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2\,\frac{dx}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sum_{n \in \mathbb{Z}} |\widehat{f}(n+a)|^2.$$

En déduire que

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2\,dx = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} |\widehat{f}(t)|^2\,dt.$$

Si on suppose de plus que f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}$, à support dans $[-\pi, \pi]$, modifier la méthode précédente pour retrouver la formule d'inversion de Fourier.

Holomorphie

Exercice 6.1. On suppose que $f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, z^n$ existe pour tout $z \in \mathbb{C}$; on suppose de plus que la partie réelle $g(z) = \operatorname{Re} f(z)$ vérifie une majoration de la forme

$$\exists \mathrm{N} \in \mathbb{N},\ \exists \mathrm{M},\ \forall z \in \mathbb{C}, \quad |g(z)| \le \mathrm{M}\,(1 + |z|^{\mathrm{N}}).$$

En déduire que f est un polynôme de degré $\le \mathrm{N}$.

Indication : pour r tendant vers l'infini, étudier les coefficients de la série de Fourier de la fonction 2π-périodique définie par $\theta \in [0, 2\pi] \to g(r\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})$.

Exercice 6.2. Soit φ une fonction de $\mathrm{L}_2(0, 2\pi)$, admettant une série de Fourier de la forme $\sum_{n \ge 0} c_n\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}$ (autrement dit, tous ses coefficients de Fourier négatifs sont nuls) ; montrer qu'il existe une unique fonction holomorphe f dans le disque unité U du plan complexe telle que les fonctions φ_r, définies pour $r < 1$ par la formule $\varphi_r(\theta) = f(r\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})$ convergent vers φ dans $\mathrm{L}_2(0, 2\pi)$, lorsque $r \to 1$.

Montrer que pour chaque fonction *réelle* $\psi \in \mathrm{L}_2(0, 2\pi)$ il existe une unique fonction réelle $\mathrm{H}(\psi) \in \mathrm{L}_2(0, 2\pi)$ d'intégrale nulle telle que la fonction $\varphi = \psi + \mathrm{i}\mathrm{H}(\psi)$ vérifie les conditions du paragraphe précédent. Montrer que H définit un opérateur linéaire borné sur $\mathrm{L}_2^{\mathbb{R}}(0, 2\pi)$ et calculer sa norme.

Exercice 6.3. On désigne par B une matrice complexe fixée, de taille $d \times d$, et par K l'ensemble de ses valeurs propres. On considère un chemin fermé γ dans $\mathbb{C}$ qui ne rencontre pas K. Montrer que la matrice

$$\mathrm{P} = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_\gamma (z\mathrm{I}_d - \mathrm{B})^{-1}\, dz$$

est un multiple entier d'un projecteur, et que c'est un projecteur si γ parcourt (une fois) un cercle dans le sens direct. Montrer que pour r assez grand et $\gamma = \gamma_r$ (le parcours habituel du cercle de rayon r), la matrice P est égale à la matrice unité I_d.

Dans le cas où γ décrit un cercle contenant exactement une valeur propre λ de B, montrer que la matrice P projette sur le sous-espace caractéristique de B associé à la valeur propre λ.

Exercice 6.4. Soit $\mathrm{P}_t = a_0(t) + a_1(t)\,\mathrm{X} + \cdots + a_n(t)\,\mathrm{X}^n \in \mathbb{C}[\mathrm{X}]$ un polynôme dont les coefficients sont des fonctions continues du paramètre t. On suppose que P_0 n'a pas de racine sur le cercle unité et qu'il a exactement k racines dans le disque unité ouvert (comptées avec leur multiplicité). Montrer que pour t suffisamment proche de 0, le polynôme P_t n'a pas de racine sur le cercle unité et a exactement k racines dans le disque unité ouvert (comptées avec leur multiplicité).

Exercice 6.5. Injectivité de la transformation de Laplace. Soit f une fonction sur $\mathbb{R}$, nulle en dehors d'un intervalle de la forme $[a, +\infty[$ et telle que $x \to f(x)\,\mathrm{e}^{-s_0 x}$ soit intégrable sur $\mathbb{R}$ pour un $s_0 \in \mathbb{R}$; on définit la *transformée de Laplace* de la fonction f sur l'ouvert $\mathrm{U} = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > s_0\}$ du plan complexe par

$$\forall z \in \mathrm{U}, \quad (\mathcal{L}f)(z) = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-zx}\, f(x)\, dx.$$

Montrer que $\mathcal{L}f$ est holomorphe dans U. Montrer que si $\mathcal{L}f$ est nulle sur un intervalle non vide de $]s_0, +\infty[$, alors f est nulle presque partout sur $\mathbb{R}$.

Exercice 6.6. On se propose de démontrer la *formule d'inversion de Lagrange* : on suppose que f est holomorphe dans un voisinage de 0 dans $\mathbb{C}$, que $f(0) = 0$ et $f'(0) \neq 0$. On sait que f admet une fonction réciproque holomorphe g dans un voisinage de 0,

$$g(w) = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n w^n$$

qui vérifie donc $g(0) = 0$ et $g(f(z)) = z$ pour z voisin de 0. Si on pose $f(z) = z/p(z)$ avec p holomorphe non nulle au voisinage de 0, la formule de Lagrange dit que pour tout $n \geq 1$,

$$n!\, b_n = \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \, (p(z))^n \Big|_{z=0}$$

Indication : soit γ_0 le parcours d'un petit cercle centré en 0, et soit $\gamma_1 = f \circ \gamma_0$; partir de la formule

$$b_n = \frac{1}{2\mathrm{i}\pi} \int_{\gamma_1} \frac{g(w)}{w^{n+1}} \, dw$$

et la transformer par le changement de variable $w = f(z)$ en une intégrale sur γ_0. On aura besoin de noter en route que $f(z)^{-n} - nzf'(z)f(z)^{-n-1}$ est une dérivée, donc a une intégrale nulle sur γ_0.

Appliquer la formule d'inversion au cas $f(z) = z\,\mathrm{e}^z$ (calculer les coefficients de g, et le rayon de convergence de la série obtenue).

Exercice 6.7. On considère une série numérique $\sum a_n$ telle que $u_n = |a_n| > 0$ pour tout entier $n \geq 0$, et $\sum u_n < +\infty$; on définit une fonction f dans $\Omega = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ par

$$\forall z \in \Omega, \quad f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n^2}{z - x_n}, \tag{1}$$

où (x_n) est une suite de points réels. Montrer que f est holomorphe dans Ω.

Borner $a_n^2/(z - x_n)$ lorsque $\mathrm{Re}\, z$ est hors de l'intervalle $[x_n - c\,u_n, x_n + c\,u_n]$, où $c > 0$. On pose

$$\mathrm{N} = \bigcap_{c>0} \bigcup_{n=0}^{+\infty} [x_n - c\,u_n, x_n + c\,u_n].$$

Montrer que N est négligeable. On posera $\mathrm{X} = \mathbb{R} \setminus \mathrm{N}$. Montrer que la série (1) converge normalement sur toute droite verticale définie par $\mathrm{Re}\, z = x$, $x \in \mathrm{X}$. Il est donc possible de prolonger f par continuité sur toutes ces droites.

On suppose maintenant que les a_n sont réels et que la suite (x_n) est dense dans $\mathbb{R}$. On considère un rectangle $\mathrm{R} = [x, y] \times [-1, 1]$ dans $\mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{C}$ avec $x, y \in \mathrm{X}$. Montrer que

$$\frac{1}{2\mathrm{i}\pi} \int_{\partial \mathrm{R}} f(z) \, dz = \sum_{n : x < x_n < y} a_n^2 > 0.$$

En déduire que pour tout point w de l'axe réel et tout $r > 0$, il est impossible de trouver une fonction holomorphe g dans $\mathrm{D} = \mathrm{B}(w, r)$ qui coïncide avec f dans $\Omega^+ \cap \mathrm{D}$ (la fonction g serait réelle sur $\mathrm{D} \cap \mathrm{X}$, donc sur $\mathrm{D} \cap \mathbb{R}$, donc $g(z) = \overline{g(\overline{z})}$... cet exercice est inspiré d'une partie de la thèse d'Émile Borel, 1894).

Prépa. Agrég écrit d'Analyse, 2004–2005, exercices 7.

Compacité

Exercice 7.1. On définit un opérateur linéaire P sur $\mathrm{L}_2(0,1)$ en posant pour toute fonction $f \in \mathrm{L}_2(0,1)$

$$\forall s \in (0,1), \quad (\mathrm{P}f)(s) = \int_0^s f(t)\,dt.$$

a. Vérifier que P est borné ; montrer que P est compact ; montrer que P est injectif.

b. Déterminer l'adjoint P^*. Diagonaliser $\mathrm{P}^*\mathrm{P}$.

Indication : si les fonctions f, g sont continues, les fonctions $\mathrm{P}f$ et P^*g sont dérivables ; montrer que les fonctions propres vérifient une équation différentielle, qu'on résoudra en tenant compte des diverses valeurs aux bornes.

Exercice 7.2. Variante du précédent : on introduit l'opérateur Q de projection de $\mathrm{L}_2(0,1)$ sur le sous-espace des fonctions d'intégrale nulle, en posant pour toute fonction $f \in \mathrm{L}_2(0,1)$

$$\forall s \in (0,1), \quad (\mathrm{Q}f)(s) = f(s) - \int_0^1 f(t)\,dt,$$

et l'opérateur linéaire $\mathrm{T} = \mathrm{QPQ}$ sur $\mathrm{L}_2(0,1)$; diagonaliser $\mathrm{T}^*\mathrm{T}$ en adaptant la méthode de l'exercice précédent.

Exercice 7.3. On rappelle que la fonction de Bessel J_0 peut être exprimée par la formule

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{J}_0(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{2^{2n}(n!)^2}.$$

La fonction J_0 admet une infinité de zéros réels > 0 qui interviendront dans cet exercice, et qu'on notera $z_1 < \ldots < z_k < \ldots$.

a. Vérifier que $x\,\mathrm{J}_0''(x) + \mathrm{J}_0'(x) + x\,\mathrm{J}_0(x) = 0$ pour tout x ; chercher une autre solution $x \to y(x)$ sur $]0, z_1[$ de l'équation différentielle (de Bessel) $x\,y'' + y' + x\,y = 0$, en l'exprimant sous la forme $y(x) = u(x)\mathrm{J}_0(x)$; vérifier que $x\mathrm{J}_0(x)^2 u'(x)$ est constante et en déduire que les solutions sur $]0, z_1[$ qui restent bornées au voisinage de 0 sont proportionnelles à J_0. Si y vérifie l'équation de Bessel et si μ est un réel > 0, quelle est l'équation vérifiée par la fonction z définie par $z(x) = y(\mu x)$?

b. On désigne par μ la mesure à densité $d\mu(t) = t\,dt$ sur l'intervalle $[0,1]$, et on définit un opérateur linéaire T sur l'espace réel $\mathrm{H} = \mathrm{L}_2([0,1], \mu)$ en posant pour toute $f \in \mathrm{H}$

$$\forall s \in]0,1], \quad (\mathrm{T}f)(s) = \ln(s) \int_0^s f(t)\,t\,dt + \int_s^1 \ln(t) f(t)\,t\,dt.$$

Vérifier que T est borné, hermitien, compact ; montrer que $\mathrm{T}f$ se prolonge en fonction continue sur $[0,1]$.

c. Dans le cas où f est continue sur $[0,1]$, montrer que $\mathrm{F} = \mathrm{T}f$ est deux fois dérivable sur l'ouvert $]0,1[$ et y vérifie $(x\mathrm{F}'(x))' = xf(x)$. En déduire que toute fonction φ de classe C^2 à support dans l'ouvert $]0,1[$ est l'image par T de $f = (x\varphi'(x))'/x$, et que T est injectif ; montrer que $\int_0^1 (\mathrm{T}f)(x) f(x)\,x\,dx = -\int_0^1 (\mathrm{F}'(x))^2\,x\,dx \le 0$.

d. Diagonaliser T en montrant que les fonctions propres f doivent vérifier une certaine équation différentielle, avec les conditions au bord $f(1) = 0$ et f bornée au voisinage du point 0 (on devra considérer l'équation satisfaite par $x \to f(x/\mu)$, $\mu > 0$ bien choisi).

Après la leçon « Utilisation de théorèmes de point fixe »

Exercice. Si $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ et $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n)$ sont deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$, on écrit $\mathbf{x} \le \mathbf{y}$ si $x_j \le y_j$ pour tout $j = 1, \ldots, n$ et $\mathbf{x} < \mathbf{y}$ si $x_j < y_j$ pour tout $j = 1, \ldots, n$; on note $\mathbf{0}$ pour le vecteur nul et $\mathbf{1}$ pour le vecteur $(1, \ldots, 1)$. On munit $\mathbb{R}^n$ de la norme

$$\|\mathbf{x}\| = \sum_{j=1}^{n} |x_j|.$$

a. Vérifier que : les inégalités $\mathbf{0} \le \mathbf{x} \le \mathbf{y}$ impliquent $\|\mathbf{x}\| \le \|\mathbf{y}\|$; si M est une matrice à coefficients ≥ 0, l'inégalité $\mathbf{x} \le \mathbf{y}$ implique $\mathrm{M}\mathbf{x} \le \mathrm{M}\mathbf{y}$; si $\delta > 0$ et $\mathbf{x} \ge \delta \mathbf{1}$, alors

$$\|\mathrm{M}\| \le \delta^{-1} \|\mathrm{M}\mathbf{x}\|,$$

où la norme de M est la norme « subordonnée » à la norme sur $\mathbb{R}^n$ donnée ci-dessus.

b. On rappelle que le *rayon spectral* d'une matrice M, qui est par définition

$$\mathrm{rs}(\mathrm{M}) = \max\{|\lambda| : \lambda \in \mathbb{C},\ \det(\mathrm{M} - \lambda \mathrm{I}_n) = 0\},$$

est aussi égal à $\lim_k \|\mathrm{M}^k\|^{1/k}$. Si $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ est tel que $\mathbf{x} \ge \mathbf{0}$, $\mathbf{x} \ne \mathbf{0}$, et si $\mathrm{M}\mathbf{x} \ge r\,\mathbf{x}$, montrer que $\mathrm{rs}(\mathrm{M}) \ge r$. Si $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ est tel que $\mathbf{x} > \mathbf{0}$, et si $\mathrm{M}\mathbf{x} \le r\,\mathbf{x}$, montrer que $\mathrm{rs}(\mathrm{M}) \le r$.

c. On désigne par K le convexe compact

$$\mathrm{K} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{x} \ge \mathbf{0},\ \|\mathbf{x}\| = 1\}.$$

À partir de maintenant M désigne une matrice $n \times n$ à coefficients *strictement* positifs. Montrer que $\mathrm{M}\mathbf{x} > \mathbf{0}$ pour tout vecteur $\mathbf{x} \in \mathrm{K}$. En appliquant le théorème de Brouwer à l'application $\mathbf{x} \in \mathrm{K} \to \|\mathrm{M}\mathbf{x}\|^{-1}\mathrm{M}\mathbf{x}$, montrer que M admet une valeur propre $\rho > 0$ correspondant à un vecteur propre $\mathbf{v} > \mathbf{0}$. Montrer que $\rho = \mathrm{rs}(\mathrm{M})$.

d. Si $\mathbf{x} \in \mathrm{K}$ et $\mathrm{M}\mathbf{x} \ge r\mathbf{x}$, $\mathrm{M}\mathbf{x} \ne r\mathbf{x}$, montrer qu'il existe $\mathbf{y} \in \mathrm{K}$ et $s > r$ tels que $\mathrm{M}\mathbf{y} \ge s\mathbf{y}$. Si $\mathbf{z} \in \mathbb{C}^n$ est un vecteur complexe non nul tel que $\mathrm{M}\mathbf{z} = \lambda\mathbf{z}$ et si $|\lambda| = \rho$, montrer que le vecteur $|\mathbf{z}|$, dont les composantes sont les modules des composantes z_j de $\mathbf{z}$, est vecteur propre de M pour la valeur propre ρ.

En déduire d'abord que $|z_j| > 0$ pour tout $j = 1, \ldots, n$; montrer ensuite que $\dim\ker(\mathrm{M} - \rho \mathrm{I}_n) = 1$, puis que ρ est la seule valeur propre complexe de la matrice M qui soit de module ρ.

e. Que reste-t-il des résultats précédents, si on suppose seulement que la matrice M a des coefficients ≥ 0 ?

Exercice. Montrer que l'ensemble K de fonctions réelles sur $[0, \mathrm{T}]$ défini par

$$\mathrm{K} = \{g : g(0) = 0 ;\quad \forall x, y \in [0, \mathrm{T}],\quad |g(y) - g(x)| \le |y - x|\}$$

est un convexe compact de l'espace $\mathrm{C}([0, \mathrm{T}])$ des fonctions continues sur l'intervalle borné $[0, \mathrm{T}]$. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue bornée par 1 ; montrer que l'application $\mathrm{T} : g \in \mathrm{K} \to \mathrm{T}g$, où la fonction $\mathrm{T}g$ est définie par

$$\forall x \in [0, \mathrm{T}], \quad (\mathrm{T}g)(x) = \int_0^x f(g(s))\, ds,$$

est continue de K dans K. Déduire du théorème de Schauder qu'il existe une fonction g de classe C^1 sur $[0, \mathrm{T}]$ telle que $g'(x) = f(g(x))$ pour tout $x \in [0, \mathrm{T}]$.