À propos de barrières

On considère une équation différentielle

$$x'(t) = f(t, x(t)) \tag{E}$$

sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, où la fonction $(t, x) \to f(t, x)$ est continue sur $\mathrm{I} \times \mathbb{R}$. On dit qu'une fonction réelle α dérivable sur I est une *barrière inférieure* (large) pour l'équation différentielle (E) si on a pour tout $t \in \mathrm{I}$

$$\alpha'(t) \le f(t, \alpha(t)).$$

L'idée de barrière inférieure est que le graphe $t \to x(t)$ d'une solution de (E) qui partirait au-dessus du graphe de la barrière $t \to \alpha(t)$ ne devrait pas pouvoir passer au-dessous de la barrière ; nous allons voir que ça n'est pas tout à fait vrai dans le cas le plus général. Une barrière supérieure β est définie en inversant les inégalités,

$$\beta'(t) \ge f(t, \beta(t)).$$

On dira qu'une barrière, inférieure ou supérieure, est *poreuse* pour une certaine équation (E) lorsque les graphes des solutions peuvent traverser la barrière. On va en montrer un exemple.

Barrières poreuses

Considérons un nombre réel a et la fonction $x_a(t)$ égale à $(t-a)^2$ lorsque $t \ge a$ et $x_a(t) = 0$ si $t < a$; on voit facilement que x_a est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, avec $x'_a(t) = 2\,(t-a)$ lorsque $t \ge a$ et $x'_a(t) = 0$ si $t < a$; on voit donc que la fonction x_a vérifie l'équation différentielle (autonome, c'est-à-dire que la fonction $f(t, x)$ qui définit l'équation ne dépend pas de t)

$$x'(t) = 2\,|x(t)|^{1/2} \tag{1}$$

pour tout $t \in \mathbb{R}$. La fonction $f(t, x)$ qui définit cette équation différentielle est

$$f(t, x) = g(x) = 2\,|x|^{1/2}.$$

De même la fonction $t \to -x_{-a}(-t)$ est solution ; on peut obtenir toutes les solutions en considérant la famille des fonctions $x_{a,b}$ pour $-\infty \le a \le b \le +\infty$, où on pose

$$x_{a,b}(t) = -(a-t)^2 \quad \text{si} \quad t \le a, \qquad x_{a,b}(t) = (t-b)^2 \quad \text{si} \quad t \ge b$$

et $x_{a,b}(t) = 0$ sinon. Il y a plusieurs solutions de l'équation (1) qui vérifient $x(0) = 0$: la solution nulle (qui correspond à $a = -\infty$ et $b = +\infty$) mais aussi toutes les fonctions $x_{a,b}$ avec $a \le 0 \le b$. Cette non-unicité correspond bien sûr au fait que la fonction g n'est pas localement lipschitzienne (elle n'est lipschitzienne dans aucun voisinage de $x = 0$).

La fonction $\beta(t) = 0$ est une barrière supérieure (large) pour l'équation différentielle, puisque $\beta'(t) = 0 \le f(t, \beta(t)) = g(0) = 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, mais c'est une barrière poreuse : on a vu que les graphes des solutions $x_{a,b}$ peuvent traverser cette barrière (géométriquement, la barrière en question est la droite horizontale d'ordonnée 0).

Supposons maintenant que α soit barrière inférieure sur un intervalle I pour une équation (E) où $f(t,x)$ est *localement lipschitzienne* en x : pour tout $(t_0, x_0) \in \mathrm{I} \times \mathbb{R}$, il existe un réel k, un voisinage J de t_0 dans I et $\varepsilon > 0$ tels que

$$|f(t,x_1) - f(t,x_2)| \leq k\,|x_1 - x_2|$$

pour tout $t \in \mathrm{J}$ et tous $x_1, x_2 \in [x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]$. On va montrer que sous cette hypothèse, la barrière n'est pas poreuse :

si $t_0 \in \mathrm{I}$ et si $x(t)$ est une solution de l'équation (E) *telle que $x(t_0) > \alpha(t_0)$, alors on aura $x(t) > \alpha(t)$ pour tout $t > t_0$, $t \in \mathrm{I}$.*

Montrons-le par l'absurde : dans le cas contraire, il existe dans I un $\tau > t_0$ tel que $x(\tau) = \alpha(\tau)$. L'ensemble

$$\mathrm{F} = \{t \in \mathrm{I} : t_0 \leq t \leq \tau,\ x(t) = \alpha(t)\}$$

est un compact non vide de $\mathbb{R}$; il possède alors un plus petit élément t_1, et $t_1 > t_0$. On a donc $x(t) - \alpha(t) > 0$ pour tout t dans $[t_0, t_1[$, et $x(t_1) - \alpha(t_1) = 0$. Posons $x_1 = x(t_1) = \alpha(t_1)$. Par l'hypothèse localement Lipschitz, il existe un voisinage de (t_1, x_1) dans $\mathbb{R}^2$ dans lequel f est k-lipschitzienne en x pour un certain $k > 0$: il existe donc $s \in \mathrm{I}$, $t_0 \leq s < t_1$ et $\varepsilon > 0$ tels que pour tout $t \in [s, t_1[$ on ait

$$|f(t,u_1) - f(t,u_2)| \leq k\,|u_1 - u_2|$$

lorsque $u_1, u_2 \in [x_1 - \varepsilon, x_1 + \varepsilon]$. Si on choisit s assez proche de t_1 on aura par continuité $|x(t) - x_1| < \varepsilon$ et $|\alpha(t) - x_1| < \varepsilon$ pour tout $t \in [s, t_1[$, donc

$$x'(t) = f(t, x(t)) \geq f(t, \alpha(t)) - k\,(x(t) - \alpha(t)) \geq \alpha'(t) - k\,(x(t) - \alpha(t)).$$

La fonction $v(t) = x(t) - \alpha(t)$ vérifie donc sur l'intervalle $[s, t_1[$ l'inégalité

$$v'(t) \geq -k\,v(t)$$

et $v(s) > 0$; il en résulte que $v(t) \geq v(s)\,\mathrm{e}^{-k\,(t-s)}$, inégalité qui contredit $v(t_1) = 0$. En effet, $w(t) = \mathrm{e}^{kt}\,v(t)$ est croissante,

$$w'(t) = \mathrm{e}^{kt}\big(k\,v(t) + v'(t)\big) \geq 0.$$

Ceci termine la preuve. Si on connaît Gronwall, c'est aussi le moment de le citer, au lieu de faire la petite preuve précédente : on vient en effet d'utiliser un cas simple du lemme de Gronwall.

Lemme de Gronwall

Voici une des multiples formes de ce lemme :

si g *et* b *sont continues sur* $[0, \mathrm{T}]$, *avec* $b \geq 0$ *et si*

$$g(t) \leq c + \int_0^t b(s)g(s)\,\mathrm{d}s$$

pour $0 \leq t \leq \mathrm{T}$, *il en résulte que*

$$g(t) \leq c\,\mathrm{e}^{\mathrm{B}(t)}$$

pour $0 \leq t \leq \mathrm{T}$, *où*

$$\mathrm{B}(t) = \int_0^t b(s)\,\mathrm{d}s.$$

Il existe de nombreuses preuves pour ce lemme, on va commencer par l'une des plus courtes (voir par exemple Rouvière, p. XX). Posons

$$\mathrm{F}(t) = \int_0^t b(s)g(s)\,\mathrm{d}s.$$

Cette fonction est de classe C^1, et l'hypothèse est que $g(t) \leq c + \mathrm{F}(t)$. Considérons maintenant

$$\mathrm{G}(t) = \mathrm{e}^{-\mathrm{B}(t)}\,\mathrm{F}(t).$$

On a

$$\mathrm{G}'(t) = \mathrm{e}^{-\mathrm{B}(t)}\big(-b(t)\mathrm{F}(t) + \mathrm{F}'(t)\big) = b(t)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{B}(t)}\big(-\mathrm{F}(t) + g(t)\big).$$

Puisque $b(t) \geq 0$ on a $\mathrm{G}'(t) \leq c\,b(t)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{B}(t)}$ donc

$$\mathrm{G}(t) = \mathrm{G}(t) - \mathrm{G}(0) \leq c\,(\mathrm{e}^{-\mathrm{B}(0)} - \mathrm{e}^{-\mathrm{B}(t)}) = c\,(1 - \mathrm{e}^{-\mathrm{B}(t)})$$

d'où $\mathrm{F}(t) \leq c\,(\mathrm{e}^{\mathrm{B}(t)} - 1)$ et

$$g(t) \leq c + \mathrm{F}(t) \leq c\,\mathrm{e}^{\mathrm{B}(t)}\,.$$

Voici une deuxième preuve plus intuitive. Elle consiste à se ramener au cas $c = 0$, puis à montrer que dans ce cas, l'inégalité hypothèse empêche la fonction de passer au dessus de 0. On introduit $h(t) = c\,\mathrm{e}^{\mathrm{B}(t)}$ qui vérifie l'égalité

$$h(t) = c + \int_0^t b(s)h(s)\,\mathrm{d}s\,;$$

la différence $\mathrm{D}(t) = g(t) - h(t)$ vérifie alors

$$\mathrm{D}(t) \leq \int_0^t b(s)\mathrm{D}(s)\,\mathrm{d}s\,;$$

considérons $\tau_1 > 0$ tel que $\beta := \int_0^{\tau_1} b(s)\,\mathrm{d}s < 1$. Si M désigne le maximum de D sur $[0, \tau_1]$, on a pour $0 \leq t \leq \tau_1$

$$\mathrm{D}(t) \leq \mathrm{M} \int_0^t b(s)\,\mathrm{d}s \leq \mathrm{M}\,\beta\,;$$

il en résulte que $\mathrm{M} \leq \beta\,\mathrm{M}$, donc $\mathrm{M} \leq 0$: la fonction D reste négative sur l'intervalle $[0, \tau_1]$. On peut ensuite introduire $\tau_2 > \tau_1$ tel que $\int_{\tau_1}^{\tau_2} b(s)\,\mathrm{d}s = \beta < 1$, et montrer (presque) comme avant que D reste ≤ 0 sur $[\tau_1, \tau_2]$. En continuant ainsi, on montre que D est ≤ 0 sur tout son intervalle de définition, ce qu'il fallait démontrer (on peut bien sûr rendre cet argument plus synthétique avec une bonne borne supérieure ou inférieure bien choisie).

Pour finir, on va donner la preuve la plus immédiate au niveau des principes : elle consiste à attaquer le problème bille en tête, en reportant l'inégalité sur $g(t)$ à l'intérieur de l'intégrale et en répétant cette opération. Bien sûr, cette possibilité est fondée sur le fait que $b(t) \geq 0$. Après une première application de la stratégie,

$$g(t) \leq c + \int_0^t b(s_1)\Big(c + \int_0^{s_1} b(s_2)g(s_2)\,\mathrm{d}s_2\Big)\,\mathrm{d}s_1 =$$

$$= c\,\Big(1 + \int_0^t b(s_1)\,\mathrm{d}s_1\Big) + \int_{\Delta_2(t)} b(s_1)b(s_2)g(s_2)\,\mathrm{d}s_1\,\mathrm{d}s_2,$$

où on a posé

$$\Delta_2(t) = \{(s_1, s_2) : 0 \leq s_2 \leq s_1 \leq t\}.$$

Si on reporte n fois, on arrive à

$$g(t) \leq c\,\Big(1 + \int_0^t b(s_1)\,\mathrm{d}s_1 + \int_{\Delta_2(t)} b(s_1)b(s_2)\,\mathrm{d}s_1\,\mathrm{d}s_2 + \cdots \tag{2}$$

$$+ \int_{\Delta_n(t)} b(s_1)b(s_2)\ldots b(s_n)\,\mathrm{d}s_1\ldots\mathrm{d}s_n\Big) +$$

$$+ \int_{\Delta_{n+1}(t)} b(s_1)b(s_2)\ldots b(s_{n+1})g(s_{n+1})\,\mathrm{d}s_1\ldots\mathrm{d}s_{n+1}.$$

Par un argument de symétrie, on voit que

$$\int_{\Delta_n(t)} b(s_1)b(s_2)\ldots b(s_n)\,\mathrm{d}s_1\ldots\mathrm{d}s_n =$$

$$= \frac{1}{n!}\int_{[0,t]^n} b(s_1)b(s_2)\ldots b(s_n)\,\mathrm{d}s_1\ldots\mathrm{d}s_n = \frac{1}{n!}\,\mathrm{B}(t)^n.$$

On retrouve le résultat, mais avec cette méthode on peut se contenter de supposer que b est intégrable sur $[0, \mathrm{T}]$, et g mesurable bornée sur $[0, \mathrm{T}]$. Si g est bornée par M, l'inégalité (2) ci-dessus donne

$$g(t) \leq c\,\mathrm{e}^{\mathrm{B}(t)} + \mathrm{M}\,\frac{1}{(n+1)!}\,\mathrm{B}(t)^{n+1}$$

et un passage à la limite quand $n \to +\infty$ donne le résultat. On voit que cette dernière méthode est une adaptation de la recherche de solutions de l'équation différentielle linéaire $y'(t) = b(t)y(t)$, ou plutôt de solutions de l'équation intégrale

$$y(t) = c + \int_0^t b(s)y(s)\,\mathrm{d}s$$

par la méthode d'itérations successives.