# Espaces de Hilbert et dualité

**1.** *Dual d'un espace de Hilbert*

Il est très facile de déduire du théorème de projection l'identification du dual d'un espace de Hilbert, mais on va plutôt ici repartir de zéro et suivre un chemin parallèle à la preuve du théorème de projection, qui permettra de trouver aussi le dual des espaces $\mathrm{L}^q$ pour $2 \le q < +\infty$. Désignons par H un espace de Hilbert, réel ou complexe. Si $x, y$ sont deux vecteurs de l'espace H, leur produit scalaire sera noté $\langle x, y\rangle$ ; ce produit scalaire sera supposé linéaire en $x$ et antilinéaire en $y$. On a alors

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + 2\,\mathrm{Re}\,\langle x, y\rangle + \|y\|^2, \quad \|x-y\|^2 = \|x\|^2 - 2\,\mathrm{Re}\,\langle x, y\rangle + \|y\|^2$$

ce qui donne, en additionnant, la *relation du parallélogramme*

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\,\|x\|^2 + 2\,\|y\|^2.$$

Si on pose $u = x+y$ et $v = x-y$, la relation prend la forme ([a])

$$\frac{\|u\|^2 + \|v\|^2}{2} = \Bigl\|\frac{u+v}{2}\Bigr\|^2 + \Bigl\|\frac{u-v}{2}\Bigr\|^2.$$

À chaque vecteur $y \in \mathrm{H}$ on peut associer une forme linéaire $\ell_y$ définie sur H par

$$\forall x \in \mathrm{H}, \quad \ell_y(x) = \langle x, y\rangle\,;$$

cette forme linéaire est continue d'après Cauchy-Schwarz : on a $|\ell_y(x)| \le \|x\|\,\|y\|$, ce qui montre que $\|\ell_y\| \le \|y\|$ ; en fait on voit que $\|\ell_y\| = \|y\|$ en appliquant $\ell_y$ au vecteur $y$ lui-même.

**Théorème.** *Pour toute forme linéaire continue $\ell$ sur* H *il existe un vecteur $y \in \mathrm{H}$ (unique) tel que $\ell = \ell_y$,*

$$\forall x \in \mathrm{H}, \quad \ell(x) = \langle x, y\rangle.$$

On fera d'abord la preuve dans le cas réel. Le principe de la démonstration est très simple. On considère la fonction $\varphi$ définie sur H par

$$\forall x \in \mathrm{H}, \quad \varphi(x) = \frac{1}{2}\,\|x\|^2 - \ell(x).$$

Cette fonction est différentiable en tout point : sa différentielle au point $h \in \mathrm{H}$ est la forme linéaire $d_h\varphi = \ell_h - \ell$. De plus, cette fonction réelle $\varphi$ atteint son minimum sur H en un point $y$, donc sa différentielle $d_y\varphi$ est nulle en ce point $y$, c'est-à-dire que

$$\ell = \ell_y,$$

ce qu'il fallait démontrer.

Passons aux détails de la preuve. La fonction norme $x \to \|x\|$ étant continue, il est clair que $\varphi$ est continue sur H. On remarque ensuite que $\varphi$ est minorée ; en effet, on a $|\ell(x)| \le \|\ell\|\,\|x\|$, donc

$$\varphi(x) = \frac{1}{2}\,\|x\|^2 - \ell(x) \ge \frac{1}{2}\,\|x\|^2 - \|\ell\|\,\|x\| \ge -\frac{1}{2}\,\|\ell\|^2.$$

Posons $m = \inf \varphi(\mathrm{H})$ ; on peut trouver une suite $(x_n) \subset \mathrm{H}$ telle que $\varphi(x_n)$ tende vers $m$ *en décroissant*. On va montrer que la suite $(x_n)$ est de Cauchy ; il en résultera qu'elle converge dans H, qui est complet. Si $y$ désigne la limite de la suite, on obtient par la continuité de $\varphi$

$$\varphi(y) = \lim_n \varphi(x_n) = m$$

ce qui prouve que $\varphi$ atteint son minimum au point $y$. Montrons donc le caractère de Cauchy : si $j, k \ge n$, on aura en utilisant la décroissance de $(\varphi(x_i))$ et la relation du parallélogramme

$$\begin{aligned}\varphi(x_n) \ge \frac{1}{2}\Bigl(\varphi(x_j) + \varphi(x_k)\Bigr) &= \frac{1}{4}\Bigl(\|x_j\|^2 + \|x_k\|^2\Bigr) - \ell\Bigl(\frac{x_j + x_k}{2}\Bigr) \\ &= \frac{1}{2}\Bigl\|\frac{x_j - x_k}{2}\Bigr\|^2 + \frac{1}{2}\Bigl\|\frac{x_j + x_k}{2}\Bigr\|^2 - \ell\Bigl(\frac{x_j + x_k}{2}\Bigr) \\ &= \frac{1}{2}\Bigl\|\frac{x_j - x_k}{2}\Bigr\|^2 + \varphi\Bigl(\frac{x_j + x_k}{2}\Bigr) \ge \frac{1}{2}\Bigl\|\frac{x_j - x_k}{2}\Bigr\|^2 + m\end{aligned}$$

ce qui prouve que $\|x_j - x_k\|^2 \le 8\,\bigl(\varphi(x_n) - m\bigr)$, quantité qui tend vers 0 quand $n$ tend vers l'infini, montrant que la suite $(x_n)$ est de Cauchy dans H. Désignons par $y$ la limite de la suite $(x_n)$ : on a déjà dit que $\varphi$ atteint son minimum sur H au point $y$.

Donnons maintenant l'argument de nullité de la différentielle : considérons un vecteur $h \in \mathrm{H}$ quelconque et la fonction $f_h$ définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f_h(t) = \varphi(y + th) - \varphi(y) = t\,\langle h, y\rangle + \frac{t^2}{2}\,\|h\|^2 - t\,\ell(h)\,;$$

cette fonction $f_h$ est dérivable,

$$f_h'(t) = \langle h, y\rangle + t\,\|h\|^2 - \ell(h)$$

et puisque $\varphi$ atteint son minimum sur H au point $y$, la fonction $f_h$ atteint son minimum sur $\mathbb{R}$ pour $t = 0$, donc $0 = f_h'(0) = \langle h, y\rangle - \ell(h)$ ; finalement

$$\forall h \in \mathrm{H}, \quad \ell(h) = \langle h, y\rangle,$$

ce qui termine la preuve dans le cas réel.

Si l'espace H est complexe, on peut le considérer comme un espace de Hilbert réel en oubliant les scalaires complexes, et en définissant un produit scalaire réel par

$$\forall x, y \in \mathrm{H}, \quad x \cdot y = \mathrm{Re}\,\langle x, y\rangle.$$

On a encore $\|x\|^2 = x \cdot x$. Introduisons aussi la forme $\mathbb{R}$-linéaire continue $x \to \mathrm{Re}\,\ell(x)$. D'après la première partie, il existe un vecteur $y \in \mathrm{H}$ tel que

$$\forall x \in \mathrm{H}, \quad \mathrm{Re}\,\ell(x) = x \cdot y = \mathrm{Re}\,\langle x, y\rangle.$$

Revenons maintenant aux scalaires complexes. Comme $\ell$ était $\mathbb{C}$-linéaire, on sait que $\ell(\mathrm{i}x) = \mathrm{i}\ell(x)$ et on obtient en appliquant au vecteur $\mathrm{i}x$ ce qui précède

$$-\,\mathrm{Im}\langle x, y\rangle = \mathrm{Re}\,\bigl(\mathrm{i}\langle x, y\rangle\bigr) = \mathrm{Re}\,\langle \mathrm{i}x, y\rangle = (\mathrm{i}x)\cdot y = \mathrm{Re}\,\ell(\mathrm{i}x) = \mathrm{Re}\,\bigl(\mathrm{i}\ell(x)\bigr) = -\,\mathrm{Im}\,\ell(x).$$

Finalement, on a bien

$$\forall x \in \mathrm{H}, \quad \ell(x) = \langle x, y\rangle.$$

**Remarque.** Décodons dans le cas de $\mathrm{L}^2_{\mathbb{C}}(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ (l'espace des fonctions mesurables de carré intégrable de $\Omega$ dans $\mathbb{C}$) l'histoire d'oubli des complexes. Écrivons deux fonctions complexes $f, g$ sous la forme $f = f_1 + \mathrm{i} f_2$, $g = g_1 + \mathrm{i} g_2$, avec $f_j, g_j$ réelles ; alors

$$\langle f, g\rangle = \int_\Omega f\,\overline{g} = \int_\Omega \Bigl(f_1 g_1 + f_2 g_2\Bigr) + \mathrm{i} \int_\Omega \Bigl(f_2 g_1 - f_1 g_2\Bigr)$$

de sorte que le produit scalaire *réel* défini ci-dessus vaut ici

$$f \cdot g = \mathrm{Re}\,\langle f, g\rangle = \int_\Omega \Bigl(f_1 g_1 + f_2 g_2\Bigr),$$

ce qui est bien naturel si on pense aux couples $(f_1, f_2)$ et $(g_1, g_2)$ comme à deux fonctions vectorielles $\mathrm{F}, \mathrm{G}$ à valeurs dans l'espace $\mathbb{R}^2$, de dimension réelle 2 ; on peut écrire

$$f \cdot g = \int_\Omega \bigl(\mathrm{F}(\omega) \cdot \mathrm{G}(\omega)\bigr)\, d\mu(\omega)$$

où on a aussi utilisé un point pour la notation du produit scalaire usuel de $\mathbb{R}^2$. En résumé : si on oublie les complexes, l'espace $\mathrm{L}^2_{\mathbb{C}}(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ s'identifie naturellement à l'espace réel des fonctions vectorielles $\mathrm{L}^2(\Omega, \mathcal{A}, \mu, \mathbb{R}^2)$ à valeurs dans $\mathbb{R}^2$.

**2.** *Le dual de* $\mathrm{L}^q$, $2 \le q < +\infty$

Avant de spécialiser au cas $2 \le q < +\infty$, on va commencer par des considérations générales qui s'appliquent quand $1 \le q \le +\infty$. Les fonctions seront à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Désignons par $p$ l'exposant conjugué de $q$, qui est défini par l'égalité $1/p + 1/q = 1$. À chaque fonction $g \in \mathrm{L}^p$ on peut associer une forme linéaire $\ell_g$ définie sur $\mathrm{L}^q$ par

$$\forall x \in \mathrm{L}^q, \quad \ell_g(x) = \int xg = \int_\Omega x(\omega) g(\omega)\, d\mu(\omega)\,;$$

cette forme linéaire $\ell_g$ est continue d'après Hölder,

$$|\ell_g(x)| \le \|x\|_q\, \|g\|_p.$$

La «réciproque» de l'inégalité de Hölder indique ceci : si $1 < q \le +\infty$, ou bien si $q = 1$ et si la mesure est $\sigma$-finie, la norme de la forme linéaire $\ell_g$ dans le dual (topologique) $(\mathrm{L}^q)' = \mathcal{L}(\mathrm{L}^q, \mathbb{K})$ est égale à la norme de $g$ dans $\mathrm{L}^p$,

$$\|\ell_g\|_{(\mathrm{L}^q)'} = \|g\|_{\mathrm{L}_p}.$$

Ainsi, l'application $g \to \ell_g$ est une application linéaire isométrique de $\mathrm{L}^p$ dans le dual topologique de $\mathrm{L}^q$.

À partir de maintenant on va s'intéresser au cas $2 \le q < +\infty$. On commence par un lemme qui est plus facile à décrire pour une fonction abstraite $\Phi$, et qui sera appliqué quand $\Phi(t) = |t|^q$.

**Lemme.** *Si $\Phi$ est une fonction paire sur $\mathbb{R}$, de classe $\mathrm{C}^2$ telle que $\Phi(0) = 0$ et telle que $\Phi''$ soit croissante sur $[0, +\infty)$, on a*

$$\forall s, t \in \mathbb{R}, \quad \Phi(s+t) + \Phi(s-t) \geq 2\,\Phi(s) + 2\,\Phi(t).$$

Démonstration. À cause des symétries il suffit de traiter le cas $s, t \geq 0$. Étudions

$$s \to \Phi(s+t) + \Phi(s-t) - 2\,\Phi(s) - 2\,\Phi(t)\,;$$

cette fonction est nulle pour $s = 0$, il nous suffit de montrer que sa dérivée

$$s \to \Phi'(s+t) + \Phi'(s-t) - 2\,\Phi'(s)$$

reste $\geq 0$ pour $s \geq 0$. L'expression de la dérivée est nulle pour $t = 0$, et la dérivée en $t$ de cette expression vaut

$$\Phi''(s+t) - \Phi'(s-t) \geq 0$$

pour $s, t \geq 0$.

En appliquant ce lemme à $\Phi(t) = |t|^q$, en intégrant en $\omega$ l'inégalité obtenue pour $s = x(\omega)$ et $t = y(\omega)$, on montre que si $x, y$ sont deux vecteurs de $\mathrm{L}^q$, on a

$$\|x+y\|_q^q + \|x-y\|_q^q \geq 2\,\|x\|_q^q + 2\,\|y\|_q^q.$$

Si on pose $u = x + y$ et $v = x - y$, la relation prend la forme

$$\text{(1)} \qquad \frac{\|u\|_q^q + \|v\|_q^q}{2} \geq \Big\|\frac{u+v}{2}\Big\|_q^q + \Big\|\frac{u-v}{2}\Big\|_q^q.$$

**Théorème.** *Pour toute forme linéaire continue $\ell$ sur $\mathrm{L}^q$ $(2 \leq q < +\infty)$, il existe une fonction $g \in \mathrm{L}^p$ (unique) telle que $\ell = \ell_g$.*

On fait d'abord la preuve dans le cas réel. On considère la fonction $\varphi$ définie sur $\mathrm{L}^q$ par

$$\forall x \in \mathrm{L}^q, \quad \varphi(x) = \frac{1}{q}\,\|x\|_q^q - \ell(x) = \frac{1}{q}\int_\Omega |x(\omega)|^q\,d\mu(\omega) - \ell(x).$$

La fonction norme $x \to \|x\|_q$ étant continue, il est clair que $\varphi$ est continue sur $\mathrm{L}^q$. On remarque ensuite que $\varphi$ est minorée ; en effet, on a $|\ell(x)| \leq \|\ell\|\,\|x\|_q$, donc

$$\varphi(x) = \frac{1}{q}\,\|x\|_q^q - \ell(x) \geq \frac{1}{q}\,\|x\|_q^q - \|\ell\|\,\|x\|_q \geq -\frac{1}{p}\,\|\ell\|^p.$$

Posons $m = \inf \varphi(\mathrm{L}^q)$ ; on peut trouver une suite $(x_n) \subset \mathrm{L}^q$ telle que $\varphi(x_n)$ tende vers $m$ *en décroissant*. On va montrer que la suite $(x_n)$ est de Cauchy. Il en résultera qu'elle converge dans $\mathrm{L}^q$, qui est complet. Si $y$ désigne la limite de la suite, on obtient par la continuité de $\varphi$

$$\varphi(y) = \lim_n \varphi(x_n) = m$$

ce qui prouve que $\varphi$ atteint son minimum au point $y$. Montrons donc le caractère de Cauchy : si $j, k \geq n$, on aura en utilisant la décroissance de $(\varphi(x_i))$ et la relation (1)

$$\begin{aligned}\varphi(x_n) \geq \frac{1}{2}\Bigl(\varphi(x_j) + \varphi(x_k)\Bigr) &= \frac{1}{2q}\Bigl(\|x_j\|_q^q + \|x_k\|_q^q\Bigr) - \ell\Bigl(\frac{x_j + x_k}{2}\Bigr) \\ &\geq \frac{1}{q}\Bigl\|\frac{x_j - x_k}{2}\Bigr\|_q^q + \frac{1}{q}\Bigl\|\frac{x_j + x_k}{2}\Bigr\|_q^q - \ell\Bigl(\frac{x_j + x_k}{2}\Bigr) \\ &= \frac{1}{q}\Bigl\|\frac{x_j - x_k}{2}\Bigr\|_q^q + \varphi\Bigl(\frac{x_j + x_k}{2}\Bigr) \geq \frac{1}{q}\Bigl\|\frac{x_j - x_k}{2}\Bigr\|_q^q + m\end{aligned}$$

ce qui prouve que $\|x_j - x_k\|_q^q \leq q\, 2^q\, \bigl(\varphi(x_n) - m\bigr)$, quantité qui tend vers 0 quand $n$ tend vers l'infini, montrant que la suite $(x_n)$ est de Cauchy dans $\mathrm{L}^q$ ; elle converge vers un point $y \in \mathrm{L}^q$ où $\varphi$ atteint son minimum. Considérons maintenant un vecteur $h \in \mathrm{L}^q$ quelconque et la fonction $f_h$ définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f_h(t) = \varphi(y + th) = \frac{1}{q}\int_\Omega |y + th|^q \, d\mu - \ell(y + th)\,;$$

cette fonction $f_h$ est dérivable (dériver([b]) sous l'intégrale),

$$f_h'(t) = \int_\Omega \bigl(y(\omega) + th(\omega)\bigr)^{(q-1)} h(\omega)\, d\mu(\omega) - \ell(h)$$

où on a noté $u^{(\alpha)} = \mathrm{sign}(u)\,|u|^\alpha$, pour $u$ réel et $\alpha > 0$ : on voit que la fonction réelle $u \to |u|^q$ admet pour dérivée la fonction $u \to q\, u^{(q-1)}$. Puisque $\varphi$ atteint son minimum sur $\mathrm{L}^q$ au point $y$, la fonction $f_h$ atteint son minimum sur $\mathbb{R}$ pour $t = 0$, donc

$$0 = f_h'(0) = \int_\Omega y(\omega)^{(q-1)} h(\omega)\, d\mu(\omega) - \ell(h)\,;$$

finalement

$$\forall h \in \mathrm{H}, \quad \ell(h) = \int_\Omega y(\omega)^{(q-1)} h(\omega)\, d\mu(\omega)$$

ce qui termine la preuve dans le cas réel. En effet, la fonction $g$ définie par $g = y^{(q-1)}$ est dans $\mathrm{L}^p$, car $p(q-1) = qp(1 - 1/q) = q$ et

$$\int_\Omega |g|^p \, d\mu = \int_\Omega \bigl|y^{(q-1)}\bigr|^p \, d\mu = \int_\Omega |y|^{p(q-1)} \, d\mu = \int_\Omega |y|^q \, d\mu < +\infty.$$

Si l'espace $\mathrm{L}^q$ est complexe, il contient comme sous-ensemble le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathrm{X} = \mathrm{L}^q_{\mathbb{R}}$ formé des fonctions à valeurs réelles ; les applications $x \in \mathrm{X} \to \mathrm{Re}\, \ell(x)$ et $x \in \mathrm{X} \to \mathrm{Im}\, \ell(x)$ sont des $\mathbb{R}$-formes linéaires continues sur l'espace réel X, qui est un $\mathrm{L}^q$ réel. D'après la première partie, il existe deux fonctions réelles $g_1, g_2 \in \mathrm{L}^p$ telles que

$$\forall x \in \mathrm{X}, \quad \mathrm{Re}\, \ell(x) = \int_\Omega x(\omega) g_1(\omega)\, d\mu(\omega)\,; \quad \mathrm{Im}\, \ell(x) = \int_\Omega x(\omega) g_2(\omega)\, d\mu(\omega).$$

En posant $g = g_1 + \mathrm{i} g_2$,

$$\forall x \in \mathrm{X}, \quad \ell(x) = \int_\Omega x(\omega) g(\omega)\, d\mu(\omega).$$

Comme $\ell$ était $\mathbb{C}$-linéaire, on a si $x = a + \mathrm{i}b$, $a, b$ fonctions réelles dans X

$$\ell(x) = \ell(a) + \mathrm{i}\ell(b) = \int_\Omega a(\omega)g(\omega)\,d\mu(\omega) + \mathrm{i}\int_\Omega b(\omega)g(\omega)\,d\mu(\omega) = \int_\Omega x(\omega)g(\omega)\,d\mu(\omega).$$

Finalement, on a bien

$$\forall x \in \mathrm{L}^q, \quad \ell(x) = \int_\Omega x(\omega)g(\omega)\,d\mu(\omega)$$

avec $g \in \mathrm{L}^p$. Pour vérifier que $g$ est unique, on peut raisonner ainsi : si $g'$ représente la même forme linéaire $\ell$, alors $\ell_{g-g'} = \ell_g - \ell_{g'} = 0$ ; mais d'après la « réciproque de Hölder », on a $\|g - g'\|_p = \|\ell_{g-g'}\|_{\mathcal{L}(\mathrm{L}^q,\mathbb{K})} = 0$, donc $g' = g$.

**Remarque.** La méthode employée ci-dessus pour identifier le dual de H ou celui de $\mathrm{L}^q$ est analogue à celle qui permet de résoudre l'exercice classique où on doit montrer que si $\varphi$ est convexe sur $\mathbb{R}^d$, de classe $\mathrm{C}^1$ et si $\varphi(x)$ tend vers l'infini plus vite que $\|x\|$, alors l'application gradient $x \in \mathbb{R}^d \to \nabla_x\varphi$ (ou la différentielle $x \in \mathbb{R}^d \to d_x\varphi$) est surjective de $\mathbb{R}^d$ sur (son dual) $\mathbb{R}^d$.

**Remarque :** dual de $\mathrm{L}^q \cap \mathrm{L}^r$, quand $2 \le q, r$. Soit $\ell$ une forme linéaire continue sur $\mathrm{L}^q \cap \mathrm{L}^r$ ; si $f$ est à la fois dans $\mathrm{L}^q$ et $\mathrm{L}^r$, on peut considérer

$$\varphi(f) = \frac{1}{q}\int_\Omega |f(\omega)|^q\,d\mu(\omega) + \frac{1}{r}\int_\Omega |f(\omega)|^r\,d\mu(\omega) - \ell(f).$$

En minimisant cette fonction $\varphi$ on montrera que $\ell$ est donnée par la somme d'une fonction de $\mathrm{L}^p$ et d'une fonction de $\mathrm{L}^s$, $1/r + 1/s = 1$. Ainsi le dual de $\mathrm{L}^q \cap \mathrm{L}^r$ s'identifie naturellement à $\mathrm{L}^p + \mathrm{L}^s$.

**3.** *Le dual de* $\mathrm{L}^p$, $1 \le p \le 2$

Dans le cas $1 < p \le 2$, on peut montrer un analogue de la propriété (1) ; il est plus embêtant à prouver et plus délicat à manier, mais on peut le faire (voir Brézis) ; quand la mesure est finie, il existe une autre méthode : on se ramène facilement à $\mathrm{L}^2$, car $\mathrm{L}^2 \subset \mathrm{L}^p$ dans le cas des mesures finies. Cette méthode est la bonne méthode lorsque $p = 1$. On désignera par $q$ l'exposant conjugué de $p$.

**Théorème.** *Pour toute forme linéaire continue $\ell$ sur $\mathrm{L}^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ($1 < p \le 2$), il existe une fonction $g \in \mathrm{L}^q(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ (unique) telle que $\ell = \ell_g$. Dans le cas $p = 1$, le résultat n'est pas vrai en général, mais il reste vrai si la mesure $\mu$ est $\sigma$-finie : supposons $\mu$ $\sigma$-finie ; pour toute forme linéaire continue $\ell$ sur $\mathrm{L}^1(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ il existe une fonction $g \in \mathrm{L}^\infty(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ (unique) telle que $\ell = \ell_g$.*

Soit $\ell$ une forme linéaire continue sur $\mathrm{L}^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ; considérons un ensemble A de mesure finie ; pour toute fonction $f \in \mathrm{L}^2(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, le produit $\mathbf{1}_\mathrm{A} f$ est dans $\mathrm{L}^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, ce qui permet de définir la forme linéaire $\ell_\mathrm{A}$ sur $\mathrm{L}^2$ par

$$\forall f \in \mathrm{L}^2(\Omega, \mathcal{A}, \mu), \quad \ell_\mathrm{A}(f) = \ell(\mathbf{1}_\mathrm{A} f).$$

Cette forme linéaire est continue sur $\mathrm{L}^2$, car

$$|\ell_\mathrm{A}(f)| = |\ell(\mathbf{1}_\mathrm{A} f)| \le \|\ell\|\,\|\mathbf{1}_\mathrm{A} f\|_p \le \|\ell\|\,\|\mathbf{1}_\mathrm{A}\|_s\,\|f\|_2 = \|\ell\|\,\mu(\mathrm{A})^{1/s}\,\|f\|_2$$

où $s$ est choisi de façon que $1/p = 1/2 + 1/s$ et où $\|\ell\|$ désigne la norme de $\ell$ dans le dual de $\mathrm{L}^p$. Il existe donc une fonction $g_{\mathrm{A}}$ dans $\mathrm{L}^2$ qui représente la forme linéaire $\ell_{\mathrm{A}}$. On va vérifier que $g_{\mathrm{A}} \in \mathrm{L}^q(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, où $q$ est l'exposant conjugué de $p$. Traitons à part le cas $p = 1$ ; soient $\varepsilon > 0$, $\mathrm{B} = \mathrm{A} \cap \{|g_{\mathrm{A}}| > \|\ell\| + \varepsilon\}$ et $f = \mathbf{1}_{\mathrm{B}}\, |g_{\mathrm{A}}|/g_{\mathrm{A}}$ ; alors $f = \mathbf{1}_{\mathrm{A}} f \in \mathrm{L}^2$ et

$$|\ell_{\mathrm{A}}(f)| = |\ell(f)| \le \|\ell\|\, \|f\|_1 = \|\ell\|\, \mu(\mathrm{B}),$$

mais

$$|\ell_{\mathrm{A}}(f)| = \Bigl| \int f g_{\mathrm{A}}\, d\mu \Bigr| = \int_{\mathrm{B}} |g_{\mathrm{A}}|\, d\mu \ge (\|\ell\| + \varepsilon)\, \mu(\mathrm{B}),$$

et la conjonction de ces inégalités n'est possible que si $\mu(\mathrm{B}) = 0$ ; ainsi, la fonction $g_{\mathrm{A}}$ est presque-partout plus petite en valeur absolue que $\|\ell\| + \varepsilon$, et comme $\varepsilon$ est arbitraire, on déduit que $\|g_{\mathrm{A}}\|_\infty \le \|\ell\|$.

Dans le cas $1 < p \le 2$, on pose $\mathrm{B}_n = \mathrm{A} \cap \{0 < |g_{\mathrm{A}}| < n\}$ et $f_n = \mathbf{1}_{\mathrm{B}_n}\, |g_{\mathrm{A}}|^q / g_{\mathrm{A}}$ ; alors

$$\int_{\mathrm{B}_n} |g_{\mathrm{A}}|^q\, d\mu = \Bigl| \int f_n g_{\mathrm{A}}\, d\mu \Bigr| = |\ell_{\mathrm{A}}(f_n)| \le \|\ell\|\, \|f_n\|_p = \|\ell\| \Bigl( \int_{\mathrm{B}_n} |g_{\mathrm{A}}|^q\, d\mu \Bigr)^{1/p}.$$

Il en résulte que $\Bigl( \int_{\mathrm{B}_n} |g_{\mathrm{A}}|^q\, d\mu \Bigr)^{1/q} \le \|\ell\|$ pour tout $n$ et finalement $\|g_{\mathrm{A}}\|_q \le \|\ell\|$.

Comme on l'a dit précédemment, la fonction $g_{\mathrm{A}} \in \mathrm{L}^q$ est unique d'après la réciproque de Hölder. Si la mesure $\mu$ est finie, on peut poser $\mathrm{A} = \Omega$, et alors $\ell = \ell_{\mathrm{A}}$ est représentée par la fonction $g = g_\Omega \in \mathrm{L}^q$, ce qu'il fallait démontrer. Si la mesure $\mu$ est $\sigma$-finie, on peut trouver une suite croissante $(\mathrm{A}_n)$ d'ensembles de mesure finie qui recouvre $\Omega$ ; à chaque $n$ correspond une fonction $g_{\mathrm{A}_n}$ qui représente $\ell_{\mathrm{A}_n}$ ; l'unicité entraîne que la restriction de $g_{\mathrm{A}_n}$ à $\mathrm{A}_m$, $n > m$, est égale à la fonction $g_{\mathrm{A}_m}$, et plus précisément, on a $g_{\mathrm{A}_m} = \mathbf{1}_{\mathrm{A}_m} g_{\mathrm{A}_n}$ ; la suite $g_{\mathrm{A}_n}$ tend simplement vers une fonction $g$ définie sur $\Omega$. Quand $p > 1$, on peut dire que la suite $|g_{\mathrm{A}_n}|^q$ tend en croissant vers $|g|^q$, avec $\int |g_{\mathrm{A}_n}|^q\, d\mu \le \|\ell\|^q$ pour tout $n$, donc $g \in \mathrm{L}^q$ et $\|g\|_q \le \|\ell\|$ ; quand $p = 1$, chaque fonction $g_{\mathrm{A}_n}$ est presque sûrement bornée par $\|\ell\|$, donc la limite $g$ l'est aussi. Si $f \in \mathrm{L}^p$, $f$ est limite dans $\mathrm{L}^p$ de la suite $\mathbf{1}_{\mathrm{A}_n} f$, donc

$$\ell(f) = \lim_n \ell(\mathbf{1}_{\mathrm{A}_n} f) = \lim_n \int \mathbf{1}_{\mathrm{A}_n} f g_{\mathrm{A}_n}\, d\mu = \lim_n \int \mathbf{1}_{\mathrm{A}_n} f g\, d\mu = \int f g\, d\mu.$$

Dans le cas $1 < p \le 2$ on pourra encore conclure, sans aucune hypothèse sur la mesure $\mu$, en montrant que le diamètre dans $\mathrm{L}^q$ de l'ensemble des fonctions $g_{\mathrm{A}}$ correspondant à $\mathrm{A} \supset \mathrm{B}$ est petit quand l'ensemble B est assez grand ; plus précisément, fixons $\varepsilon > 0$ et choisissons une fonction $f \in \mathrm{L}^p$ telle que $\|f\|_p \le 1$ et $\ell(f) > \|\ell\| - \varepsilon/2$. On peut trouver un ensemble B de mesure finie tel que $\|\ell\|\, \|\mathbf{1}_{\mathrm{B}} f - f\|_p < \varepsilon/2$ ; alors $\ell(\mathbf{1}_{\mathrm{B}} f) > \|\ell\| - \varepsilon$, et en particulier $\|\ell_{\mathrm{B}}\| > \|\ell\| - \varepsilon$. Il correspond à B une fonction $g_{\mathrm{B}} \in \mathrm{L}^q$, et pour tout ensemble $\mathrm{A} \supset \mathrm{B}$, on a une fonction $g_{\mathrm{A}}$. On sait que $g_{\mathrm{B}} = \mathbf{1}_{\mathrm{B}}\, g_{\mathrm{A}}$, et

$$\|\ell\|^q \ge \|g_{\mathrm{A}}\|_q^q = \|g_{\mathrm{B}}\|_q^q + \|g_{\mathrm{A}} - g_{\mathrm{B}}\|_q^q \ge \bigl( \|\ell\| - \varepsilon \bigr)^q + \|g_{\mathrm{A}} - g_{\mathrm{B}}\|_q^q$$

ce qui montre que l'ensemble des fonctions $(g_{\mathrm{A}})$ pour les $\mathrm{A} \supset \mathrm{B}$ a un petit diamètre. Si on introduit une suite croissante $(\mathrm{B}_n)$ telle que $\|\ell_{\mathrm{B}_n}\|$ tende vers $\|\ell\|$, on déduira que $(g_{\mathrm{B}_n})$ est de Cauchy dans $\mathrm{L}^q$, convergente vers une fonction $g \in \mathrm{L}^q$, et on pourra montrer que $g$ représente la forme linéaire $\ell$.

**Remarque.** Pour tout espace normé E et tout vecteur $x \in \mathrm{E}$, on peut définir une forme linéaire continue $\ell_x$ sur le dual topologique $\mathrm{E}'$ de E en posant

$$\forall x' \in \mathrm{E}', \quad \ell_x(x') = x'(x).$$

On dit que l'espace E est *réflexif* quand toute forme linéaire continue $\ell$ sur le dual $\mathrm{E}'$ est de la forme $\ell_x$, pour un certain $x \in \mathrm{E}$. Si on fait attention aux identifications précédentes concernant le dual de $\mathrm{L}^q$, $2 \le q < +\infty$ et celui de $\mathrm{L}^p$, $1 < p \le 2$, on pourra se convaincre que $\mathrm{L}^p$ est réflexif quand $1 < p < +\infty$.

*Radon-Nikodym*

**Lemme.** *Soient $\mu, \nu$ deux mesures sur $(\Omega, \mathcal{A})$ ; on suppose que $\nu$ est $\sigma$-finie et que $\mu \le \nu$, c'est-à-dire*

$$\forall \mathrm{A} \in \mathcal{A}, \quad \mu(\mathrm{A}) \le \nu(\mathrm{A}).$$

*Il existe une fonction mesurable bornée $f$ telle que $d\mu = f\,d\nu$,*

$$\forall \mathrm{A} \in \mathcal{A}, \quad \mu(\mathrm{A}) = \int_{\mathrm{A}} f\,d\nu.$$

On dit que $f$ est la *densité de Radon-Nikodym* de $\mu$ par rapport à $\nu$ ; on note en général cette densité par $f = \dfrac{d\mu}{d\nu}$.

Preuve. Si $\varphi = \sum_{i=1}^n a_i \mathbf{1}_{\mathrm{A}_i}$ est une fonction étagée $\ge 0$, avec des $\mathrm{A}_i \in \mathcal{A}$ deux à deux disjoints, on a

$$\int \varphi\,d\mu = \sum_{i=1}^n a_i \mu(\mathrm{A}_i) \le \sum_{i=1}^n a_i \nu(\mathrm{A}_i) = \int \varphi\,d\nu\,;$$

on peut passer ensuite aux fonctions mesurables positives par limite croissante : si $g$ est $\mathcal{A}$-mesurable $\ge 0$, on a $\int g\,d\mu \le \int g\,d\nu$. Il en résulte que $\|g\|_{\mathrm{L}^1(\mu)} \le \|g\|_{\mathrm{L}^1(\nu)}$ pour toute fonction $g \in \mathrm{L}^1(\nu)$. On peut alors définir une forme linéaire continue $\ell$ sur $\mathrm{L}^1(\nu)$ par

$$\forall g \in \mathrm{L}^1(\nu), \quad \ell(g) = \int g\,d\mu.$$

Puisque $\nu$ est $\sigma$-finie, on sait que cette forme linéaire peut être représentée par une fonction $f \in \mathrm{L}^\infty(\nu)$. Pour tout ensemble de $\nu$-mesure finie A, on a $\mathbf{1}_{\mathrm{A}} \in \mathrm{L}^1(\nu)$ et

$$(2) \qquad \mu(\mathrm{A}) = \ell(\mathbf{1}_{\mathrm{A}}) = \int_{\mathrm{A}} f\,d\nu.$$

La fonction $f$ est $\ge 0$ $\nu$-presque partout : soit $\varepsilon > 0$ et posons $\mathrm{B}_\varepsilon = \{f < -\varepsilon\}$. Comme $\nu$ est $\sigma$-finie, il existe si $\nu(\mathrm{B}_\varepsilon) > 0$ un ensemble $\mathrm{C} \subset \mathrm{B}_\varepsilon$ tel que $0 < \nu(\mathrm{C}) < +\infty$. On a $0 \le \mu(\mathrm{C}) = \int_{\mathrm{C}} f\,d\nu \le -\varepsilon\nu(\mathrm{C})$, donc $\nu(\mathrm{C}) = 0$, et on déduit que $\nu(\mathrm{B}_\varepsilon) = 0$. Ceci étant vrai pour tout $\varepsilon > 0$, il en résulte que $f \ge 0$ $\nu$-presque-partout. Puisque $f \ge 0$ et $\nu$ $\sigma$-finie, la propriété (2) passe des ensembles tels que $\nu(\mathrm{A}) < +\infty$ à tous les ensembles $\mathrm{A} \in \mathcal{A}$, par le théorème de convergence monotone.

**Théorème** de Radon-Nikodym. *Soient $\mu, \nu$ deux mesures sur $(\Omega, \mathcal{A})$ ; on suppose que $\mu$ et $\nu$ sont $\sigma$-finies et que $\mu$ est* absolument continue *par rapport à $\nu$, c'est-à-dire*

$$\forall \mathrm{A} \in \mathcal{A}, \quad \bigl(\nu(\mathrm{A}) = 0\bigr) \Rightarrow \bigl(\mu(\mathrm{A}) = 0\bigr).$$

*Il existe alors une fonction mesurable bornée $f$ telle que $d\mu = f\, d\nu$,*

$$\forall \mathrm{A} \in \mathcal{A}, \quad \mu(\mathrm{A}) = \int_{\mathrm{A}} f\, d\nu.$$

On peut faire la démonstration en introduisant la mesure $\sigma$-finie $\xi = \mu + \nu$ ; on a $\mu \le \xi$, et on arrive à déduire la densité $g$ de $\mu$ par rapport à $\nu$ de la densité $h$ de $\mu$ par rapport à $\xi$. Sans surprise, on trouve que

$$g = \frac{d\mu}{d\nu} = \frac{d\mu + d\nu}{d\nu} - 1 = \frac{d\xi}{d\nu} - 1 = h - 1.$$

Il y a quand même du boulot pour justifier tout ça.

**Notes.**

(**a**) On peut aussi donner pour la relation du parallélogramme la forme

$$\|u\|^2 + \|v\|^2 = \Bigl\| \frac{u+v}{\sqrt{2}} \Bigr\|^2 + \Bigl\| \frac{u-v}{\sqrt{2}} \Bigr\|^2$$

qui indique que la «rotation d'angle $\pi/4$»

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \mathrm{Id}_\mathrm{H} & \frac{1}{\sqrt{2}} \mathrm{Id}_\mathrm{H} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \mathrm{Id}_\mathrm{H} & \frac{1}{\sqrt{2}} \mathrm{Id}_\mathrm{H} \end{pmatrix}$$

définit une isométrie dans l'espace de Hilbert $\mathrm{H} \times \mathrm{H}$. Plus généralement toute matrice orthogonale $\mathrm{A} \in \mathrm{O}(n)$ donne une isométrie de $\mathrm{H}^n$, qu'on munit de la norme hilbertienne

$$\|\mathbf{x}\| = \Bigl( \sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^2 \Bigr)^{1/2}.$$

(**b**) Il faut montrer que pour tout $a > 0$, la dérivée par rapport à $t$ est majorée quand $t \in [-a, a]$ par une fonction intégrale indépendante de $t \in [-a, a]$. La fonction réelle $s \to |s|^q$ admet pour dérivée la fonction $s \to q\, s^{(q-1)}$. Le module de la dérivée de la fonction $t \to \frac{1}{q}\, |y(\omega) + th(\omega)|^q$ est

$$\bigl| y(\omega) + th(\omega) \bigr|^{q-1} |h(\omega)|$$

qu'on peut majorer quand $|t| \le a$ par

$$\mathrm{F}(\omega) = \mathrm{C}_q \Bigl( |y(\omega)|^{q-1} + a^{q-1}\, |h(\omega)|^{q-1} \Bigr) |h(\omega)|\,;$$

cette fonction F est intégrable d'après Hölder : $|y|^{q-1}$ et $|h|^{q-1}$ sont dans $\mathrm{L}^p$, et $h$ est dans $\mathrm{L}^q$.

Si $r > 1$ et si $r'$ est son exposant conjugué, on a pour $u, v$ réels

$$|u| + |v| = |u| \,.\, 1 + |v| \,.\, 1 \le \bigl( |u|^r + |v|^r \bigr)^{1/r} \bigl( 1 + 1 \bigr)^{1/r'}.$$

On a utilisé cette inégalité avec $r = q - 1$, ce qui donne $\mathrm{C}_q = 2^{(q-1)/r'} = 2^{q-2}$, et $(|u| + |v|)^{q-1} \le 2^{q-2} \bigl( |u|^{q-1} + |v|^{q-1} \bigr)$.