Formule sommatoire d'Euler-MacLaurin

On introduit une suite de fonctions polynomiales sur $[0,1]$ de la façon suivante : $\mathrm{A}_0(x)=1$ et pour tout $n \geq 0$, on désigne par A_{n+1} la primitive de la fonction A_n dont l'intégrale sur $[0,1]$ est nulle,

$$\mathrm{A}'_{n+1}(x)=\mathrm{A}_n(x), \quad \int_0^1 \mathrm{A}_{n+1}(t)\,dt=0.$$

a. Déterminer A_1, A_2, A_3. Montrer que $\mathrm{A}_n(1)=\mathrm{A}_n(0)$ pour $n \geq 2$. Montrer par récurrence que $\mathrm{A}_n(x)-(-1)^n\mathrm{A}_n(1-x)$ est constante, et que cette constante est nulle ; en déduire que $\int_0^{1/2} \mathrm{A}_{2p}(t)\,dt=0$ et $\mathrm{A}_{2p+1}(0)=0$ pour $p \geq 1$ (ce résultat n'est pas utilisé dans la suite).

Dans la suite on pose $a_n=\mathrm{A}_n(0)$.

b. Soit f une fonction de classe C^{n+1} sur $[0,1]$; montrer par récurrence sur n que

$$f(1)-f(0)=\frac{1}{2}\big(f'(0)+f'(1)\big)-a_2\left(f''(1)-f''(0)\right)+a_3\left(f'''(1)-f'''(0)\right)+\cdots$$

$$\cdots+(-1)^{n-1}a_n\left(f^{(n)}(1)-f^{(n)}(0)\right)+(-1)^n\int_0^1 \mathrm{A}_n(t)f^{(n+1)}(t)\,dt. \qquad (*)$$

En fait, $a_3=a_5=\cdots=a_{2m+1}=0$ d'après la dernière partie de la question *a*.

c. On désigne par A_n^* la fonction périodique sur $\mathbb{R}$, de période 1, qui est égale à A_n sur $[0,1[$. Montrer que pour tous entiers $p<q$ et f de classe C^{n+1} sur $[p,q]$, on a

$$f(q)-f(p)=\frac{1}{2}\big(f'(p)+f'(q)\big)+\sum_{p<k<q} f'(k)-a_2\left(f''(q)-f''(p)\right)+\cdots$$

$$+(-1)^{n-1}a_n\left(f^{(n)}(q)-f^{(n)}(p)\right)+(-1)^n\int_p^q \mathrm{A}_n^*(t)f^{(n+1)}(t)\,dt.$$

d. Appliquer la formule à $f(x)=\ln x$ sur $[1,q]$. En déduire que

$$\sum_{k=1}^{q}\frac{1}{k}=\ln q+\gamma+\frac{1}{2q}+\frac{b}{q^2}+\frac{c}{q^3}+\mathrm{O}(q^{-4}),$$

avec des coefficients b,c qu'on déterminera.
Indication : on introduira la constante $\int_1^{+\infty}\mathrm{A}_3^*(t)\,t^{-4}\,dt$, et par ailleurs on majorera l'intégrale $\int_q^{+\infty}\mathrm{A}_3^*(t)\,t^{-4}\,dt$.

e. Montrer par récurrence que $|\mathrm{A}_n(t)| \leq 1$ pour $t\in[0,1]$ (on majorera d'abord la valeur absolue de $\widetilde{\mathrm{A}}_{n+1}(x)=\int_{1/2}^{x}\mathrm{A}_n(t)\,dt$ par $1/2$). En déduire que l'application de la formule $(*)$ sur $[0,1]$ à la fonction $x\to \mathrm{e}^{-\lambda x}$, $|\lambda|<1$ donne l'égalité

$$\sum_{n=0}^{+\infty}a_n\lambda^n=\frac{\lambda}{\mathrm{e}^{\lambda}-1}.$$

Les coefficients $a_n=\mathrm{A}_n(0)$ sont liés aux *nombres de Bernoulli* (b_n) : on a $b_n=(n!)\,a_n$; les *polynômes de Bernoulli* sont les polynômes unitaires $\mathrm{B}_n=(n!)\,\mathrm{A}_n$.

Exercice 1.

a. Soit f une fonction de classe C^1 sur $[0,1]$; montrer que

$$\left|f(0)-\int_0^1 f(t)\,dt\right| \le \int_0^1 |f'(t)|\,dt.$$

b. Soit f une fonction de classe C^1 sur $[1,+\infty[$, telle que $\int_1^{+\infty} |f'(t)|\,dt < +\infty$; montrer que $\left(\sum_{k=1}^n f(k)\right) - \int_1^n f(t)\,dt$ tend vers une limite quand $n \to +\infty$; montrer que la série $\sum_{n=1}^{+\infty} f(n)$ converge si et seulement si l'intégrale $\int_1^{+\infty} f(t)\,dt$ converge (pour établir l'une des deux directions, on aura besoin de montrer que $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ existe).

c. Montrer que la série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(\sqrt{n}\,\pi)}{n^\alpha}$$

converge quand $\alpha > 1/2$. Que peut-on dire si $\alpha \le 1/2$?

Exercice 2.

a. Soit $(x_n)_{n\ge1}$ une suite de nombres réels > 0 ; on suppose qu'il existe un nombre réel $c > 0$ tel que

$$\mathrm{e}^{-c/n^2} \le \frac{x_{n+1}}{x_n} \le \mathrm{e}^{c/n^2}$$

pour tout $n \ge 1$. Montrer que la suite (x_n) tend vers une limite réelle.

b. Montrer que la suite $(x_n)_{n\ge1}$ définie par

$$x_n = \frac{n!\,\mathrm{e}^n}{n^{n+1/2}}$$

tend vers une limite.

Exercice 3.

On rappelle (voir exercice 1, question *b*, avec $f(x) = 1/x$) que

$$\left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k}\right) - \ln(n)$$

tend vers une limite, qui est notée γ (la *constante d'Euler*) ; comparer la somme

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{2n-1}$$

avec $\ln n$. En déduire la valeur de la somme de la série harmonique alternée

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k},$$

puis celle de

$$1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{4n-2} - \frac{1}{4n} + \cdots$$

Calculer plus généralement la somme de la série obtenue en prenant successivement p termes positifs suivis de q termes négatifs de la série harmonique alternée (les cas étudiés ci-dessus sont $p = q = 1$, puis $p = 1$ et $q = 2$).