**Fourier dans $\mathrm{L}^2$**

On suppose connue la définition de la transformée de Fourier des fonctions intégrables : si $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R}^d)$, on pose

$$\forall t \in \mathbb{R}^d, \quad \widehat{f}(t) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,t\cdot x}\,dx$$

où $t \cdot x = \sum_{j=1}^d t_j x_j$ désigne le produit scalaire de $t = (t_1, \ldots, t_d)$ et $x = (x_1, \ldots, x_d)$, deux éléments de $\mathbb{R}^d$. Cette fonction $\widehat{f}$ est continue sur $\mathbb{R}^d$, bornée par $\|f\|_1$ et elle tend vers 0 à l'infini (lemme de Riemann-Lebesgue).

Si $g$ est $\mathrm{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, à support compact, il est clair que $\int_{\mathbb{R}} g'(x)\,dx = 0$ ; si $f$ est $\mathrm{C}^1$ à support compact, cette remarque appliquée à $g(x) = f(x)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,tx}$ donne

$$\int_{\mathbb{R}} \bigl(f'(x)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,tx} - \mathrm{i}\,t f(x)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,tx}\bigr)\,dx = \widehat{f'}(t) - \mathrm{i}\,t\widehat{f}(t) = 0.$$

Si $f$ est $\mathrm{C}^2$ à support compact sur $\mathbb{R}$, la fonction $t \to (1+t^2)\widehat{f}(t)$ est la transformée de Fourier de la fonction intégrable $f - f''$, donc $(1+t^2)\,|\widehat{f}(t)| \le \|f\|_1 + \|f''\|_1$, et ceci montre que $\widehat{f} \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ dans ce cas. Attention : dans $\mathbb{R}^d$ avec $d \ge 2$, cette décroissance en $|t|^{-2}$ n'est plus suffisante pour garantir l'intégrabilité (pour le voir dans $\mathbb{R}^2$, intégrer en polaires la fonction $x \in \mathbb{R}^2 \to (1+|x|^2)^{-1}$).

**1.** *Inversion de Fourier sur* $\mathbb{R}$

On considère une fonction $\varphi$ sur $\mathbb{R}$ vérifiant les propriétés suivantes :

$$(*) \qquad \varphi \text{ est continue bornée, } \varphi(0) = 1,\ \varphi \text{ et } \widehat{\varphi} \text{ sont intégrables sur } \mathbb{R}.$$

Pour avoir une telle fonction $\varphi$, il suffit de considérer n'importe quelle fonction $\varphi$ de classe $\mathrm{C}^2$ à support compact sur $\mathbb{R}$, telle que $\varphi(0) = 1$. On pose

$$c = \int_{\mathbb{R}} \widehat{\varphi}(t)\,dt.$$

On verra un peu plus loin que $c = 2\pi$, quelle que soit la fonction $\varphi$ vérifiant $(*)$.

Soit $f$ une fonction continue, bornée et intégrable sur $\mathbb{R}$ ; on considère un réel $a > 0$ petit ; on a par Fubini, suivi du changement de variable $t = a^{-1}s$, puis $z = a^{-1}(y-x)$

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(t)\,\varphi(at)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,tx}\,dt = \int_{\mathbb{R}^2} f(y)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,yt}\,\varphi(at)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,tx}\,dt\,dy \\
(1) \qquad &= \int_{\mathbb{R}} f(y)\Bigl(\int_{\mathbb{R}} \varphi(at)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,t(y-x)}\,dt\Bigr)\,dy = \int_{\mathbb{R}} f(y)\,\widehat{\varphi}(a^{-1}(y-x))\,a^{-1}dy \\
&= \int_{\mathbb{R}} f(x+az)\,\widehat{\varphi}(z)\,dz
\end{aligned}$$

qui tend vers $c\,f(x)$ par la continuité de $f$ et le théorème de convergence dominée ($f$ est supposée bornée, et $\widehat{\varphi}$ est intégrable) lorsque $a \to 0$. Ainsi,

$$c\,f(x) = \lim_{a \to 0} \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(t)\varphi(at)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}tx}\,dt\,; \tag{2}$$

si on suppose *en plus* que $\widehat{f}$ est intégrable, on obtient par convergence dominée la version préliminaire suivante pour la *formule d'inversion de Fourier*,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad cf(x) = \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(t)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}tx}\,dt. \tag{3}$$

Ceci montre déjà que la constante $c$ ne dépend pas de la fonction $\varphi$ vérifiant $(*)$ : la fonction $\varphi$ a joué un rôle auxiliaire, mais elle a disparu dans l'équation finale (3).

**2.** *Calcul de la constante c*

On peut ([a]) trouver la valeur de la constante $c$ par la théorie des séries de Fourier, mais on peut se contenter d'un calcul très simple. On définit ([b]) une fonction $\varphi_0$ sur $\mathbb{R}$ en posant $\varphi_0(x) = \mathrm{e}^{-|x|}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. On calcule la transformée de Fourier de $\varphi_0$,

$$\begin{aligned}
\widehat{\varphi}_0(t) &= \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-|x|}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}xt}\,dx = 2\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x}\cos(xt)\,dx \\
&= 2\,\mathrm{Re}\Bigl(\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}xt}\,dx\Bigr) = 2\,\mathrm{Re}\Bigl(\frac{1}{1-\mathrm{i}t}\Bigr) = \frac{2}{1+t^2}\cdot
\end{aligned}$$

La fonction $\widehat{\varphi}_0$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ ; on voit donc que $\varphi_0$ vérifie $(*)$, et il en résulte que

$$c = \int_{\mathbb{R}} \widehat{\varphi}_0(t)\,dt = 4\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} = 2\pi.$$

Ainsi, en appliquant à $\varphi_0$ l'équation (2), on voit que pour toute fonction continue $f$, bornée et intégrable sur $\mathbb{R}$, on a

$$2\pi f(x) = \lim_{a \to 0} \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(t)\,\mathrm{e}^{-a|t|}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}tx}\,dt\,;$$

c'est un analogue ([c]), pour l'intégrale de Fourier, du théorème de Fejér.

On peut maintenant remplacer la version préliminaire de l'inversion de Fourier (3) par une version plus précise :

**Proposition 1.** *Si $f$ est continue, bornée et intégrable sur $\mathbb{R}$, et si $\widehat{f}$ est aussi intégrable sur $\mathbb{R}$, on a la* formule d'inversion de Fourier,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(t)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}tx}\,dt. \tag{4}$$

**Remarque 1.** Si $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$, il est facile de calculer la transformée de Fourier de la translatée $g = \tau_{-y} f$, définie par $(\tau_y f)(x) = f(x+y)$ ; en effet par changement de variable,

$$\int_{\mathbb{R}} f(x+y)\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}tx}\; dx = \int_{\mathbb{R}} f(u)\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t(u-y)}\; du = \mathrm{e}^{\mathrm{i}ty}\, \widehat{f}(t).$$

Ainsi, puisque $f(y) = g(0)$, la formule d'inversion pour $f$ au point $y$ (quand on suppose de plus $f$ continue bornée avec $\widehat{f}$ intégrable) se ramène à la formule apparemment plus simple

$$2\pi\, g(0) = \int_{\mathbb{R}} \widehat{g}(t)\, dt.$$

**Remarque 2.** Supposons seulement $f$ et $\widehat{f}$ intégrables (sans supposer que $f$ soit aussi continue et bornée) ; fixons une suite $(a_n)$ de réels tendant vers 0, disons $a_n = 1/n$ ; les deux premières lignes de la formule (1) montrent que

$$\int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(t)\, \varphi(t/n)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}tx}\; dt = \int_{\mathbb{R}} f(y)\, \widehat{\varphi}(n(y-x))\, n\, dy,$$

c'est-à-dire que la fonction $f_n$ définie par

$$f_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(t)\, \varphi(t/n)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}tx}\; dt$$

est la convolée de $f$ avec $g_n : x \to (2\pi)^{-1} n \widehat{\varphi}(-nx) = n\, g_1(nx)$ ; comme $g_1(x) = (2\pi)^{-1}\widehat{\varphi}(-x)$ est intégrable d'intégrale 1, la suite $(g_n)$ est une approximation de l'unité. Donc, quand $n$ tend vers l'infini, la suite $(f_n)$ tend dans $\mathrm{L}^1$ vers $f$, et d'autre part, la suite $(f_n)$ tend simplement vers la fonction continue bornée

$$x \to \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(t)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}tx}\; dt\,;$$

il en résulte que pour presque tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(t)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}tx}\; dt.$$

*A posteriori*, on voit que la fonction $f$ vérifie les hypothèses qu'on avait enlevées au début de la remarque : plus précisément, la classe de fonctions $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ admet un représentant continu et borné, à savoir celui qui est donné par la partie droite de l'équation précédente. Si on sait à l'avance que $f$ est continue, le presque-partout est inutile, et on voit que $f(x)$ est égal pour tout $x$ à cette partie droite ; il en résulte que $f$ est bornée. Autrement dit, on peut omettre l'hypothèse « bornée » dans la proposition 1 : *si $f$ est continue sur $\mathbb{R}$, si $f$ et $\widehat{f}$ sont intégrables sur $\mathbb{R}$, on obtient pour tout $x$ la formule* (4).

**3.** *Fourier dans* $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$

L'espace vectoriel X formé des fonctions $f$ continues et bornées sur $\mathbb{R}$, telles que $f$ et $\widehat{f}$ soient intégrables, contient l'espace ${\mathrm{C}^2}_{\mathrm{comp}}(\mathbb{R})$ des fonctions de classe $\mathrm{C}^2$ à support compact, donc X est dense dans $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$. Pour toute fonction $f \in \mathrm{X}$, on a la formule (4) d'inversion de Fourier. De plus, $f$ est de carré intégrable puisque $f \in \mathrm{L}^1 \cap \mathrm{L}^\infty$, et

$$(5) \qquad \begin{cases} 2\pi \displaystyle\int_{\mathbb{R}} f(x)\overline{f(x)}\, dx = \int_{\mathbb{R}^2} \widehat{f}(t)\overline{f(x)}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}tx}\, dx\, dt \\ \qquad = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(t)\overline{\Big(\int f(x)\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}tx}\, dx\Big)}\, dt = \int_{\mathbb{R}} |\widehat{f}(t)|^2\, dt. \end{cases}$$

L'application linéaire $\mathcal{F}_0$ définie sur X en posant $\mathcal{F}_0 f = \widehat{f}$ est donc continue de X, muni de la norme de $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$, à valeurs dans l'espace complet $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$. Il en résulte qu'il existe un prolongement $\mathcal{F}$ de $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ dans $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$. Par continuité de la fonction norme, on déduit de (5) la relation de Parseval

$$(6) \qquad \forall f \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R}), \quad \int_{\mathbb{R}} |(\mathcal{F}f)(t)|^2\, dt = 2\pi \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2\, dx.$$

La formule d'inversion peut être prolongée à $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ ainsi : désignons par $\sigma$ l'endomorphisme de $\mathrm{L}^2$ défini par $(\sigma g)(x) = g(-x)$, pour toute $g \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ et tout $x \in \mathbb{R}$. On voit par la formule d'inversion que si $f \in \mathrm{X}$, on a

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad (\widehat{\mathcal{F}_0 f})(x) = 2\pi f(-x)\,;$$

ceci montre que $\mathcal{F}_0 f$ a une transformée de Fourier intégrable, à savoir $2\pi\sigma(f)$ ; comme $\mathcal{F}_0 f$ est continue bornée (transformée de Fourier de $f \in \mathrm{L}^1$) et intégrable par définition de X, on voit que $\mathcal{F}_0 f \in \mathrm{X}$, et on peut récrire la formule précédente :

$$\forall f \in \mathrm{X}, \quad \sigma(\mathcal{F}_0(\mathcal{F}_0 f)) = 2\pi f.$$

Cette relation peut alors se prolonger à $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ par continuité,

$$\forall f \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R}), \quad \sigma(\mathcal{F}(\mathcal{F}f)) = 2\pi f\,;$$

en effet, l'endomorphisme continu $\sigma \circ \mathcal{F} \circ \mathcal{F} - 2\pi\,\mathrm{Id}$ de $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ est nul sur le sous-ensemble dense X, donc il est nul. On voit aussi que $\sigma \circ \mathcal{F}_0 = \mathcal{F}_0 \circ \sigma$, donc $\sigma \circ \mathcal{F} = \mathcal{F} \circ \sigma$, et l'inverse de $\mathcal{F}$ peut se décrire comme

$$(7) \qquad \mathcal{F}^{-1} = \frac{1}{2\pi}\, \sigma \circ \mathcal{F} = \frac{1}{2\pi}\, \mathcal{F} \circ \sigma.$$

*Fourier sur* $\mathrm{L}^1 \cap \mathrm{L}^2$

Sur l'espace $\mathrm{L}^1 \cap \mathrm{L}^2$, on a maintenant deux définitions $\widehat{f}$ et $\mathcal{F}f$ pour la transformée de Fourier, et il serait bon de montrer qu'elles coïncident. Cela vient du fait que l'espace X à partir duquel on a prolongé, pour pouvoir définir $\mathcal{F}$ sur $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$, est dense *simultanément* ($^{\mathbf{d}}$) dans $\mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ et dans $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ : *si* $f \in \mathrm{L}^1 \cap \mathrm{L}^2$, *il existe une suite* $(\varphi_n) \subset \mathrm{X}$ *telle que* $\|f - \varphi_n\|_2 \to 0$ **et** $\|f - \varphi_n\|_1 \to 0$.

Sachant cela, et comme $\mathcal{F}\varphi_n = \widehat{\varphi}_n$ par construction, on saura que $\widehat{\varphi}_n$ converge vers $\mathcal{F}f$ en norme $\mathrm{L}^2$ et vers $\widehat{f}$ en norme uniforme ; il en résulte que $\mathcal{F}f$ est la classe dans $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ de la fonction continue $\widehat{f}$.

Il reste à justifier l'existence de la suite $(\varphi_n)$ ; la suite $f_n = \mathbf{1}_{[-n,n]} f$ tend vers $f$ à la fois en norme $\mathrm{L}^1$ et $\mathrm{L}^2$, par Lebesgue dominé par exemple ; pour chaque $n \ge 1$, on peut trouver une fonction $\varphi_n$ de classe $\mathrm{C}^2$ sur $\mathbb{R}$, à support dans $[-n, n]$ et telle que $\|f_n - \varphi_n\|_2 < 2^{-n}$ ; il en résulte par Cauchy-Schwarz que

$$\|f_n - \varphi_n\|_1 = \int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{[-n,n]} \, |f_n - \varphi_n| \le \sqrt{2n} \, \|f_n - \varphi_n\|_2 < \sqrt{2n} \, 2^{-n},$$

qui tend vers 0 quand $n \to \infty$.

**4.** *Fourier dans* $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d)$

Il y a plusieurs pistes possibles. On peut introduire la fonction $\psi$ définie ainsi sur $\mathbb{R}^d$ :

$$\text{si } x = (x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d, \quad \psi(x) = \varphi(x_1) \ldots \varphi(x_d),$$

où $\varphi$ est la fonction du premier paragraphe. On voit facilement avec Fubini que

$$\text{si } t = (t_1, \ldots, t_d) \in \mathbb{R}^d, \quad \widehat{\psi}(t) = \widehat{\varphi}(t_1) \ldots \widehat{\varphi}(t_d).$$

Ainsi, la fonction $\psi$ est continue, bornée et intégrable sur $\mathbb{R}^d$, sa transformée de Fourier $\widehat{\psi}$ est aussi intégrable ; de plus $\psi(0) = 1$ et on voit que

$$\int_{\mathbb{R}^d} \widehat{\psi}(t) \, dt = \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{\varphi}(t_1) \ldots \widehat{\varphi}(t_d) \, dt = \Bigl( \int_{\mathbb{R}} \widehat{\varphi}(t_1) \, dt_1 \Bigr) \ldots \Bigl( \int_{\mathbb{R}} \widehat{\varphi}(t_d) \, dt_d \Bigr) = (2\pi)^d.$$

À partir de là, on continue comme au premier paragraphe, en adaptant simplement ce qui doit l'être. On introduit l'espace vectoriel $\mathrm{X}_d$ formé des fonctions $f$ continues et bornées sur $\mathbb{R}^d$, telles que $f$ et $\widehat{f}$ soient intégrables sur $\mathbb{R}^d$. Pour toute fonction $f \in \mathrm{X}_d$, on a la formule d'inversion de Fourier :

$$\forall x \in \mathbb{R}^d, \quad f(x) = \Bigl( \frac{1}{2\pi} \Bigr)^d \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{f}(t) \, \mathrm{e}^{\mathrm{i} t \cdot x} \, dt. \tag{8}$$

On continue ensuite avec la théorie $\mathrm{L}^2$ comme en dimension 1. Une petite nuance : il faut que $f$ soit $\mathrm{C}^k$ à support compact avec $k > d$ pour qu'on puisse en déduire que sa transformée de Fourier est intégrable sur $\mathbb{R}^d$. Si $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$, on aura bien $f \in \mathrm{X}_d$, ce qui implique que $\mathrm{X}_d$ est dense dans $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d)$.

Une autre piste consiste à intégrer successivement dans les différentes variables, en utilisant (6) dans chaque variable. Expliquons dans le cas $d = 2$, pour une fonction $f$ de deux variables, continue à support compact. Posons

$$g(x_1, t_2) = \int_{\mathbb{R}} f(x_1, x_2)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,t_2 x_2}\,dx_2,$$

la transformée de Fourier de $x_2 \to f(x_1, x_2)$. Pour $x_1$ fixé, le cas de dimension 1 donne

$$\int_{\mathbb{R}} |g(x_1, t_2)|^2\,dt_2 = 2\pi \int_{\mathbb{R}} |f(x_1, x_2)|^2\,dx_2.$$

On voit que $x_1 \to g(x_1, t_2)$ est continue, nulle quand $x_1$ est hors d'un borné. Par Fubini, la transformée de Fourier de $x_1 \to g(x_1, t_2)$ est égale à $t_1 \to \widehat{f}(t_1, t_2)$. Ainsi, pour chaque $t_2$ fixé,

$$\int_{\mathbb{R}} |\widehat{f}(t_1, t_2)|^2\,dt_1 = 2\pi \int_{\mathbb{R}} |g(x_1, t_2)|^2\,dx_1.$$

Par Fubini,

$$\int_{\mathbb{R}^2} |\widehat{f}(t_1, t_2)|^2\,dt_1\,dt_2 = 2\pi \int_{\mathbb{R}^2} |g(x_1, t_2)|^2\,dx_1\,dt_2 = (2\pi)^2 \int_{\mathbb{R}^2} |f(x_1, x_2)|^2\,dx_1\,dx_2.$$

**5.** *Compléments sur les rapports Fourier-convolution*

On sait que la transformée de Fourier de $f * g$, lorsque $f, g \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R}^d)$, est le produit $\widehat{f}\,\widehat{g}$ ; on peut étendre cette formule très largement, mais dans le cadre du programme de l'agrégation, on ne cherchera pas à voir ce qui se passe pour $f * g$ quand $f, g \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d)$ : la convolée $f * g$ est bien une fonction, mais *a priori* c'est une fonction de $\mathrm{L}^\infty(\mathbb{R}^d)$ pour laquelle nous n'avons pas de notion de transformée de Fourier (on en aurait une avec la transformée de Fourier des distributions tempérées, un sujet hors programme). On a cependant le résultat qui suit.

**Proposition.** *Si $f \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d)$ et $g \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R}^d)$, la transformée de Fourier de la convolution $f * g$ (qui est dans $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d)$) est donnée par*

$$\mathcal{F}(f * g) = (\mathcal{F}f)\,\widehat{g}.$$

La preuve utilise trois applications linéaires continues de $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d)$ dans lui-même : la convolution $\mathrm{C} : f \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d) \to f * g$ par une fonction $g \in \mathrm{L}^1$ fixée, qui est continue puisque $\|f * g\|_2 \le \|f\|_2\,\|g\|_1$ ; la multiplication $\mathrm{M} : f \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d) \to f\,\widehat{g}$ par la fonction bornée $\widehat{g}$, et enfin la transformée de Fourier $\mathcal{F}$. Lorsque $f \in \mathrm{L}^1 \cap \mathrm{L}^2$, on a $f * g \in \mathrm{L}^1$ et

$$\mathcal{F}(f * g) = \widehat{f * g} = \widehat{f}\,\widehat{g} = (\mathcal{F}f)\,\widehat{g},$$

ce qui montre que l'application $\mathcal{F} \circ \mathrm{C} - \mathrm{M} \circ \mathcal{F}$, définie et continue sur $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d)$, est nulle sur le sous-espace dense $\mathrm{L}^1 \cap \mathrm{L}^2$ ; elle est donc nulle sur $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d)$, ce qu'il fallait démontrer.

On peut se demander si le résultat inverse est vrai : peut-on transformer au moyen de Fourier les produits ordinaires en produits de convolution ? Encore une fois, la réponse est largement positive, mais on va se contenter de donner des cas particuliers, en commençant par celui d'un produit $f\,\mathrm{G}$ où $f$ est dans $\mathrm{L}^1$ et $\mathrm{G}$ est la transformée de Fourier d'une fonction de $\mathrm{L}^1$.

**Proposition 2.** *Soient $f, g \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R}^d)$, désignons par $\mathrm{G}$ la transformée de Fourier de la fonction $x \to g(-x)$ ; alors $f\,\mathrm{G} \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R}^d)$ et*

$$\widehat{f\,\mathrm{G}} = \widehat{f} * g.$$

La preuve est essentiellement donnée par le calcul (1) du premier paragraphe. On a

$$\mathrm{G}(x) = \int_{\mathbb{R}^d} g(-u)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,x\cdot u}\,du = \int_{\mathbb{R}^d} g(v)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,x\cdot v}\,dv,$$

donc par Fubini

$$(\widehat{f\mathrm{G}})(t) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)\mathrm{G}(x)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,x\cdot t}\,dx = \int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} f(x)g(v)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,x\cdot(t-v)}\,dv\,dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}^d}\Bigl(\int_{\mathbb{R}^d} f(x)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,x\cdot(t-v)}\,dx\Bigr)g(v)\,dv = \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{f}(t-v)g(v)\,dv = (\widehat{f} * g)(t).$$

Si $h$ est une fonction continue, bornée, intégrable et si $g = \widehat{h}$ est intégrable, on voit par inversion de Fourier que $\mathrm{G} = (2\pi)^d\,h$, et par conséquent

$$(2\pi)^d\,\widehat{f\,h} = \widehat{f} * \widehat{h}.$$

On va étendre cette formule à $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d)$.

**Proposition.** *Soient $f, h \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d)$ ; alors $f\,h \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R}^d)$ et*

$$(2\pi)^d\,\widehat{f\,h} = (\mathcal{F}f) * (\mathcal{F}h).$$

La preuve utilisera la proposition précédente et la densité de $\mathrm{L}^1 \cap \mathrm{L}^2$ dans $\mathrm{L}^2$ ; comme $\mathcal{F}$ est un isomorphisme de $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d)$ sur $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d)$, on peut poser $h = \mathcal{F}^{-1}g$ pour une certaine fonction $g \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d)$, et le résultat à démontrer est

$$\widehat{f\,\mathrm{G}} = (\mathcal{F}f) * g,$$

où on a posé $\mathrm{G} = (2\pi)^d\,(\mathcal{F}^{-1}g)$. Les deux applications bilinéaires $(f,g) \to \widehat{f\,\mathrm{G}}$ et $(f,g) \to (\mathcal{F}f) * g$ sont continues du produit $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d) \times \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d)$ dans $\mathrm{L}^\infty(\mathbb{R}^d)$ : la première, comme composition de $\mathcal{F}^{-1}$, continue de $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d)$ dans lui-même, de $(u,v) \to u\,v$, continue de $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d) \times \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d)$ dans $\mathrm{L}^1(\mathbb{R}^d)$, et de l'application $f \to \widehat{f}$, continue de $\mathrm{L}^1(\mathbb{R}^d)$ dans $\mathrm{L}^\infty(\mathbb{R}^d)$ ; la seconde, comme composition de $\mathcal{F}$, continue de $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d)$ dans lui-même, et de $(u,v) \to u * v$, continue de $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d) \times \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d)$ dans $\mathrm{L}^\infty(\mathbb{R}^d)$. Par ailleurs, la proposition précédente et l'identification de $\mathcal{F}^{-1}$ donnée par la formule (7) disent que ces deux applications continues sont égales sur le sous-espace dense $(\mathrm{L}^1 \cap \mathrm{L}^2) \times (\mathrm{L}^1 \cap \mathrm{L}^2)$, donc elles sont égales sur $\mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d) \times \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d)$.

**Remarque.** On démontrerait de la même façon l'extension suivante de la proposition 2 : *soient* $f \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d)$, $g \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R}^d)$ *et désignons par* G *la transformée de Fourier de la fonction* $x \to g(-x)$ *; alors* $f\,\mathrm{G} \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d)$ *et*

$$\mathcal{F}(f\,\mathrm{G}) = (\mathcal{F}f) * g.$$

**Remarque.** On dispose de deux versions de la transformée de Fourier : l'application $\mathcal{F}_1 : f \to \widehat{f}$ définie sur $\mathrm{L}^1$ et $\mathcal{F}_2$ définie sur $\mathrm{L}^2$, et ces deux applications coïncident sur l'intersection $\mathrm{L}^1 \cap \mathrm{L}^2$. Ceci permet d'envisager la transformation de Fourier sur l'espace $\mathrm{L}^1 + \mathrm{L}^2$, espace vectoriel de toutes les fonctions $f$ qui peuvent s'écrire sous la forme $f = f_1 + f_2$ avec $f_1 \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R}^d)$ et $f_2 \in \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d)$ ; si $f = f_1 + f_2$ avec $f_1 \in \mathrm{L}^1$ et $f_2 \in \mathrm{L}^2$, on voit que la fonction $\mathcal{F}_1 f_1 + \mathcal{F}_2 f_2$ ne dépend pas de la représentation particulière de la fonction $f$ : si $f_1 + f_2 = g_1 + g_2$, alors $f_1 - g_1 = g_2 - f_2$ est dans $\mathrm{L}^1 \cap \mathrm{L}^2$, donc $\mathcal{F}_1 f_1 - \mathcal{F}_1 g_1 = \mathcal{F}_2 g_2 - \mathcal{F}_2 f_2$ et $\mathcal{F}_1 f_1 + \mathcal{F}_2 f_2 = \mathcal{F}_1 g_1 + \mathcal{F}_2 g_2$ ; ceci permet d'étendre un peu la transformée de Fourier à cet espace $\mathrm{L}^1 + \mathrm{L}^2$ en posant $\mathcal{F}f = \mathcal{F}_1 f_1 + \mathcal{F}_2 f_2$.

Pour tout $p \in [1, 2]$, l'espace $\mathrm{L}^p(\mathbb{R}^d)$ est contenu[e] dans $\mathrm{L}^1(\mathbb{R}^d) + \mathrm{L}^2(\mathbb{R}^d)$ ; le *théorème de Hausdorff-Young* affirme que la restriction $\mathcal{F}_p$ de $\mathcal{F}$ à $\mathrm{L}^p$ est continue de $\mathrm{L}^p$ dans $\mathrm{L}^q$, si $1 \le p \le 2$ et $1/q + 1/p = 1$.

À partir de Hausdorff-Young, on démontre comme on a montré la proposition 3 : *soient* $p \in [1, 2]$, $f \in \mathrm{L}^p(\mathbb{R}^d)$, $g \in \mathrm{L}^p(\mathbb{R}^d)$, *désignons par* G *la transformée de Fourier de la fonction* $x \to g(-x)$ *; alors* $f\,\mathrm{G} \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R}^d)$ *et*

$$\widehat{f\,\mathrm{G}} = \widehat{f} * g.$$

Si on connaît aussi l'inégalité de convolution[f] de Young, on peut montrer une dernière extension, qui contient tous les résultats précédents : *soient* $p, r$ *tels que* $1 \le r \le p \le 2$, $f \in \mathrm{L}^p(\mathbb{R}^d)$, $g \in \mathrm{L}^r(\mathbb{R}^d)$, *désignons par* G *la transformée de Fourier de la fonction* $x \to g(-x)$ *; alors* $f\,\mathrm{G} \in \mathrm{L}^s(\mathbb{R}^d)$ *où* $s \in [1, 2]$ *vérifie* $1/s = 1/p + 1 - 1/r$ *et*

$$\mathcal{F}(f\,\mathrm{G}) = (\mathcal{F}f) * g.$$

## Notes

([a]) Si $\varphi$ est de classe $\mathrm{C}^2$ sur $\mathbb{R}$, avec un support compact contenu dans l'ouvert $]-\pi, \pi[$, il en est de même pour tout entier $\mathrm{N} \ge 1$ de la fonction $\varphi_{\mathrm{N}}$ définie par $\varphi_{\mathrm{N}}(x) = \varphi(\mathrm{N}x)$. On sait que les coefficients de Fourier de la fonction $\varphi_{\mathrm{N}}$ sont absolument sommables, donc $\varphi_{\mathrm{N}}$ est égale en tout point à la somme de sa série de Fourier, et

$$\varphi(0) = \varphi_{\mathrm{N}}(0) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k(\varphi_{\mathrm{N}}) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(\mathrm{N}x)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx}\,\frac{dx}{2\pi}$$

$$= \frac{1}{2\pi\mathrm{N}} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \int_{\mathbb{R}} \varphi(u)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}ku/\mathrm{N}}\,du = \frac{1}{2\pi\mathrm{N}} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \widehat{\varphi}(k/\mathrm{N})\,;$$

on peut montrer assez facilement que cette somme de Riemann généralisée tend vers $(2\pi)^{-1} \int_{\mathbb{R}} \widehat{\varphi}(t)\, dt$ quand N tend vers l'infini. On a donc bien

$$\int_{\mathbb{R}} \widehat{\varphi}(t)\, dt = 2\pi\, \varphi(0),$$

comme attendu. En fait, d'après la remarque 1, montrer cette formule pour une classe de fonctions stable par translation revient à montrer la formule d'inversion de Fourier pour cette classe. Si on passe par les séries de Fourier comme on vient de le faire, autant montrer tout de suite l'inversion de Fourier pour la classe des fonctions $\mathrm{C}^2$ à support compact sur $\mathbb{R}$.

(b) Ce qui nous intéresse dans cette fonction $\varphi_0$ particulière, c'est que : sa transformée de Fourier $\widehat{\varphi}_0$ se calcule explicitement facilement, cette transformée de Fourier est intégrable sur $\mathbb{R}$, et son intégrale $\int_{\mathbb{R}} \widehat{\varphi}_0(t)\, dt$ se calcule aussi. Toute autre fonction avec ces propriétés ferait l'affaire. On peut utiliser les noyaux gaussiens, mais les calculs sont un peu plus difficiles ; d'un autre côté, on est un peu obligé de connaître ces résultats gaussiens !

(c) Posons $\theta(x) = 1 - |x|$ si $|x| \le 1$ et $\theta(x) = 0$ sinon. On calcule la transformée de Fourier de $\theta$,

$$\widehat{\theta}(t) = \int_{-1}^{1} (1 - |x|)\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}xt}\, dx = 2 \int_0^1 (1 - x) \cos(xt)\, dx$$

$$= \Bigl[(1 - x) \sin(xt)/t\Bigr]_{x=0}^{x=1} + 2 \int_0^1 (\sin(xt)/t)\, dx = 0 + 2\, \frac{1 - \cos(t)}{t^2}.$$

Puisque $\theta$ est continue bornée, intégrable et que sa transformée de Fourier est intégrable, on obtient l'inversion de Fourier (4) pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$2\pi\, \theta(x) = 2 \int_{\mathbb{R}} \frac{1 - \cos(t)}{t^2}\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}tx}\, dt.$$

En particulier, quand $x = 0$,

$$\pi = \int_{\mathbb{R}} \frac{1 - \cos(t)}{t^2}\, dt.$$

Rappelons que

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\, dt = \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(t)}{t^2}\, dt,$$

dont la valeur est donc $\pi/2$. À partir de là, comme on l'a indiqué, on peut faire avec $\theta$ ce qui avait été fait avec $\varphi$. En particulier, si $f$ est une fonction continue, bornée et intégrable sur $\mathbb{R}$, on a

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad 2\pi f(x) = \lim_{\mathrm{A} \to +\infty} \int_{-\mathrm{A}}^{\mathrm{A}} \widehat{f}(t)(1 - |t|/\mathrm{A})\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}tx}\, dt\,;$$

c'est, dans une certaine mesure, le théorème de Fejér pour l'intégrale de Fourier.

($\mathbf{d}$) On peut montrer cette approximation simultanée par convolution et approximation de l'unité. Tout d'abord, si $f \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$ et $\varphi \in \mathrm{X}$, on voit que $f * \varphi \in \mathrm{X}$ : la convolée est continue bornée (convolution $\mathrm{L}^1 * \mathrm{L}^\infty$), intégrable (convolution $\mathrm{L}^1 * \mathrm{L}^1$), et la transformée de Fourier $\widehat{f}\,\widehat{\varphi}$ est intégrable par définition de X ($\widehat{\varphi} \in \mathrm{L}^1(\mathbb{R})$) et parce que $\widehat{f}$ est bornée. Si on choisit un élément $\psi_1 \in \mathrm{X}$ tel que $\int_{\mathbb{R}} \psi_1 = 1$, la suite $(\psi_n)$ définie par $\psi_n(x) = n\psi(nx)$ est une approximation de l'unité ; si $f \in \mathrm{L}^1 \cap \mathrm{L}^2$, la suite des fonctions $\varphi_n = f * \psi_n$ est une suite d'éléments de X qui tend vers $f$ pour la norme de $\mathrm{L}^1$ et pour celle de $\mathrm{L}^2$, en vertu des propriétés générales des approximations de l'unité.

($\mathbf{e}$) Si $f \in \mathrm{L}^p$, avec $1 \le p \le 2$, considérer

$$f_1 = \mathbf{1}_{\{|f|>1\}}\, f \in \mathrm{L}^1, \quad f_2 = \mathbf{1}_{\{|f|\le 1\}}\, f \in \mathrm{L}^2.$$

Quand $|f(x)| > 1$, on a $|f(x)| = |f(x)|\,.\,1 \le |f(x)|\,|f(x)|^{p-1} = |f(x)|^p$ ; quand $|f(x)| \le 1$, on a $|f(x)|^2 = |f(x)|^p\,.\,|f(x)|^{2-p} \le |f(x)|^p\,.\,1 = |f(x)|^p$.

($\mathbf{f}$) L'inégalité de convolution de Young affirme que

$$\|f * g\|_r \le \|f\|_p\,\|g\|_q$$

lorsque $f \in \mathrm{L}^p(\mathbb{R}^d)$, $g \in \mathrm{L}^q(\mathbb{R}^d)$ et $1/p + 1/q = 1 + 1/r$ ; les cas $\mathrm{L}^1 * \mathrm{L}^q \subset \mathrm{L}^q$, $\mathrm{L}^p * \mathrm{L}^{p'} \subset \mathrm{L}^\infty$ lorsque $1/p + 1/p' = 1$, sont deux cas (très) particuliers de l'inégalité de Young.