Autour des théorèmes de point fixe

1. Le théorème de point fixe « de Picard »

Théorème. *Si* (X, d) *est un espace métrique complet et si* T *est une application de* X *dans* X *telle qu'il existe* $k < 1$ *pour lequel*

$$\forall x_1, x_2 \in \mathrm{X}, \quad d\big(\mathrm{T}(x_1), \mathrm{T}(x_2)\big) \le k\, d(x_1, x_2),$$

alors T *admet un point fixe* $y \in \mathrm{X}$ *unique. Pour tout* $x_0 \in \mathrm{X}$*, la suite* $(x_n) \subset \mathrm{X}$ *définie par* $x_{n+1} = \mathrm{T}(x_n)$ *converge vers le point fixe* y*.*

On dit que T est *k-contractante* quand elle vérifie la condition ci-dessus. On peut estimer la distance de $x \in \mathrm{X}$ au point fixe y, si on sait que x est « presque fixe » : on a $d(x, y) = d(x, \mathrm{T}(y)) \le d(x, \mathrm{T}(x)) + d(\mathrm{T}(x), \mathrm{T}(y)) \le d(x, \mathrm{T}(x)) + k\, d(x, y)$, donc $d(x, y) \le (1-k)^{-1} d(x, \mathrm{T}(x))$. Cette remarque est utile pour la version « à paramètre ».

Corollaire. *Si* (X, d) *est un espace métrique complet et si* T *est une application de* X *dans* X *telle qu'il existe une puissance* T^m *de* T *qui soit k-contractante,* $k < 1$*, alors* T *admet un point fixe unique dans* X*.*

On sait que l'application contractante $\mathrm{S} = \mathrm{T}^m$ admet un point fixe unique $y \in \mathrm{X}$; on remarque alors que $\mathrm{T}(y)$ est aussi point fixe de $\mathrm{S} = \mathrm{T}^m$: en effet,

$$\mathrm{S}(\mathrm{T}y) = \mathrm{T}^m(\mathrm{T}y) = \mathrm{T}(\mathrm{T}^m y) = \mathrm{T}y,$$

donc $\mathrm{T}y = y$ par l'unicité du point fixe de T^m, et y est un point fixe de T ; si x est point fixe de T, alors $\mathrm{T}^m x = \mathrm{S}x = x$ donc $x = y$, toujours par l'unicité du point fixe de la contraction S, et le point fixe de T est donc unique. Pour tout point $z \in \mathrm{X}$, on sait que les images de z par les itérés de la contraction S,

$$\mathrm{S}^k z = (\mathrm{T}^m)^k z = \mathrm{T}^{mk} z, \qquad k \in \mathbb{N},$$

convergent vers le point fixe y de S ; si T est continue (on ne l'a pas supposé jusqu'ici), les itérés $\mathrm{T}^{mk+p} z = \mathrm{T}^p(\mathrm{T}^{mk} z)$ convergent, pour p fixé, vers $\mathrm{T}^p y = y$, donc la suite $(\mathrm{T}^n z)$ des itérés converge vers l'unique point fixe de T.

Si T n'est pas supposée continue, il faut raisonner un peu différemment (et cette preuve s'applique à tous les cas) ; pour chaque $p = 0, \ldots, m-1$, les itérés

$$\mathrm{S}^k(\mathrm{T}^p z) = (\mathrm{T}^m)^k(\mathrm{T}^p z) = \mathrm{T}^{mk+p} z, \qquad k \in \mathbb{N},$$

convergent vers le point fixe y, et il en résulte que la suite des itérés $(\mathrm{T}^n z)_{n \geqslant 0}$ converge vers le point fixe de T, pour tout point initial z donné dans X.

1.1. *Équation différentielle et équation intégrale*

Fixons un nombre réel $\tau > 0$. Si $t \to y(t)$ est une fonction continue de $[0, \tau]$ dans $\mathbb{R}$ (ou de $[0, \tau]$ dans $\mathbb{R}^p$), si F est continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ (ou de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^p$) et si la fonction y vérifie *l'équation intégrale* suivante (valeurs réelles ou vectorielles) :

$$\text{(EI)} \qquad \forall t \in [0, \tau], \quad y(t) = y_0 + \int_0^t \mathrm{F}(y(s))\, ds,$$

alors y est dérivable sur l'intervalle ouvert : en effet, $s \to \mathrm{F}(f(s))$ est continue, donc l'intégrale est dérivable par rapport à sa borne t et

$$y'(t) = \mathrm{F}(y(t)).$$

Ainsi, la fonction y est solution de *l'équation différentielle*

$$\text{(ED)} \qquad y' = \mathrm{F}(y), \quad y(0) = y_0.$$

Inversement, il est clair que (ED) entraîne (EI) puisque $y(t) - y(0) = \int_0^t y'(s)\, ds$.

Il est donc naturel d'étudier l'application T qui à chaque fonction continue y définie sur $[0, \tau]$ associe la fonction $\mathrm{T}y$ définie sur $[0, \tau]$ par

$$(1) \qquad \forall t \in [0, \tau], \quad (\mathrm{T}y)(t) = y_0 + \int_0^t \mathrm{F}(y(s))\, ds.$$

Résoudre l'équation différentielle $y' = \mathrm{F}(y)$, $y(0) = y_0$ revient donc à trouver *un point fixe* pour T : l'équation intégrale (EI) signifie précisément que $\mathrm{T}y = y$.

Remarque. Il suffirait de savoir que y est mesurable bornée et vérifie l'équation intégrale (EI) : il en résulte immédiatement que y est continue, et on est ramené au cas précédent.

1.2. *Bornes sur un intervalle, en fonction de la constante de Lipschitz de* F

On travaille avec l'espace de Banach $\mathrm{X} = \mathrm{X}(\tau)$ des fonctions continues de $[0, \tau]$ dans $\mathbb{R}$, muni de la norme uniforme. On suppose que la fonction F est C-Lipschitz sur $\mathbb{R}$,

$$\forall s, t \in \mathbb{R}, \quad |\mathrm{F}(t) - \mathrm{F}(s)| \le \mathrm{C}\, |t - s|.$$

Alors si $y_1, y_2 \in \mathrm{X}$ on a, pour tout $t \in [0, \tau]$

$$(\mathrm{T}y_1)(t) - (\mathrm{T}y_2)(t) = \int_0^t \big(\mathrm{F}(y_1(s)) - \mathrm{F}(y_2(s))\big)\, ds,$$

qui se majore en valeur absolue par

$$(*) \qquad \mathrm{C} \int_0^t |y_1(s) - y_2(s)|\, ds \le \mathrm{C}\, t\, \|y_1 - y_2\|_{\mathrm{X}}.$$

Il en résulte que $\|\mathrm{T}y_1 - \mathrm{T}y_2\|_{\mathrm{X}} \le \mathrm{C}\, \tau\, \|y_1 - y_2\|_{\mathrm{X}}$. Si on veut aller plus loin avec les itérés de T, on réinjecte $(*)$ dans le calcul :

$$(\mathrm{T}^2 y_1)(t) - (\mathrm{T}^2 y_2)(t) = \int_0^t \big(\mathrm{F}(\mathrm{T}y_1(s)) - \mathrm{F}(\mathrm{T}y_2(s))\big)\, ds$$

se majore par

$$\mathrm{C} \int_0^t |\mathrm{T}y_1(s) - \mathrm{T}y_2(s)|\, ds \le \mathrm{C}^2\, \|y_1 - y_2\|_\mathrm{X} \int_0^t s\, ds \le \mathrm{C}^2\, \|y_1 - y_2\|_\mathrm{X}\, \frac{t^2}{2}$$

et de proche en proche on prouvera que pour tout $m \ge 1$,

$$(\mathrm{E}_m) \qquad \forall t \in [0, \tau], \quad \bigl|(\mathrm{T}^m y_1)(t) - (\mathrm{T}^m y_2)(t)\bigr| \le \mathrm{C}^m\, \|y_1 - y_2\|\, \frac{t^m}{m!}$$

et en particulier

$$\bigl\|\mathrm{T}^m y_1 - \mathrm{T}^m y_2\bigr\|_\mathrm{X} \le \mathrm{C}^m\, \|y_1 - y_2\|_\mathrm{X}\, \frac{\tau^m}{m!}\,.$$

Le cas le plus simple

On suppose que la fonction F est C-Lipschitz sur $\mathbb{R}$ et que $\tau\mathrm{C} < 1$. Alors il résulte de $(*)$ que $\|\mathrm{T}y_1 - \mathrm{T}y_2\|_\mathrm{X} \le \mathrm{C}\,\tau\, \|y_1 - y_2\|_\mathrm{X}$: l'application T est strictement contractante quand $\mathrm{C}\,\tau < 1$, ce qui garantit l'existence d'une solution de l'équation différentielle $y' = \mathrm{F}(y)$ dans l'intervalle $[0, \tau]$. Ensuite on peut prolonger par recollement de solutions, mais ça n'est plus une méthode de point fixe, donc on n'en parlera pas ici (Cauchy-Lipschitz, avec hypothèse localement Lipschitz pour F).

1.3. *Une puissance de* T *est contractante*

Pour m assez grand, $\mathrm{C}^m\, \tau^m/(m!)$ devient < 1, et T^m strictement contractante possède un unique point fixe qui est aussi point fixe de T.

Si F *est* C*-Lipschitz sur* $\mathbb{R}$*, l'équation différentielle* $y' = \mathrm{F}(y)$ *admet des solutions sur tout intervalle* $[0, \tau]$.

Exercice *(cet exercice propose une petite ruse pour résoudre sur* $[0, +\infty)$ *d'un seul coup, au lieu de devoir recoller les solutions obtenues sur les intervalles bornés).*

On suppose que F est une fonction 1-Lipschitz sur $\mathbb{R}$, on considère l'espace de Banach E des fonctions continues bornées sur $\mathbb{R}$ et on pose pour $g \in \mathrm{E}$

$$\forall t \ge 0, \quad (\mathrm{T}g)(t) = \mathrm{e}^{-2t}\Bigl(y_0 + \int_0^t \mathrm{F}(\mathrm{e}^{2s}\, g(s))\, ds\Bigr).$$

Montrer que T est 1/2-contractante sur l'espace de Banach E des fonctions continues bornées sur $\mathbb{R}$. Si $g \in \mathrm{E}$ est le point fixe de T, montrer que la fonction $y : t \to \mathrm{e}^{2t}\, g(t)$ est solution sur $[0, +\infty)$ de l'équation différentielle $y' = \mathrm{F}(y)$.

Remarque. Les solutions sur $[0, +\infty)$ d'une équation $y' = \mathrm{F}(y)$, où F est C-Lipschitz sur $\mathbb{R}$, sont bornées par un multiple de l'exponentielle $t \to \mathrm{e}^{\mathrm{C}\, t}$. Si on part de la fonction constante y_0, puis en posant $y_m = \mathrm{T}(y_{m-1})$ pour tout $m \ge 1$, on a d'abord

$$|y_1(t) - y_0| = \Bigl|\int_0^t \mathrm{F}(y_0)\, ds\Bigr| = |\mathrm{F}(y_0)|\, t$$

et en reprenant la démonstration des relations (E_m) de proche en proche

$$|y_m(t) - y_{m-1}(t)| \le \mathrm{C}^{m-1}\, \frac{t^m}{m!}\, |\mathrm{F}(y_0)|$$

ce qui entraîne en sommant en $m \geq 1$ que

$$\forall t \geq 0, \quad |y(t) - y_0| \leq \frac{|\mathrm{F}(y_0)|}{\mathrm{C}} (\mathrm{e}^{\mathrm{C}\, t} - 1)$$

et puisque $y' = \mathrm{F}(y)$

$$|y'(t) - \mathrm{F}(y_0)| \leq |\mathrm{F}(y_0)| \, (\mathrm{e}^{\mathrm{C}\, t} - 1).$$

Une adaptation simple de la ruse de l'exercice précédent permet de majorer la solution y par un multiple de $\mathrm{e}^{\mathrm{D}\, t}$, pour tout $\mathrm{D} > \mathrm{C}$, mais on ne trouve pas ainsi le résultat optimal qu'on vient d'établir.

1.4. *Newton et inversion locale*

La preuve du théorème d'inversion locale peut être vue comme une variante de la méthode de Newton. Supposons donnée une application F de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$, telle que $\mathrm{F}(0) = 0$, de classe C^1 dans une boule $\mathrm{B}(0, r)$ et telle que la différentielle $\mathrm{A} = d_0\mathrm{F}$ de F en 0 soit inversible. Une partie du problème (surjectivité locale) est de trouver $\rho > 0$ tel que tout point $y \in \mathrm{B}(0, \rho)$ soit l'image $y = \mathrm{F}(x)$ par F d'un point $x \in \mathrm{B}(0, r)$, ou encore de résoudre l'équation

$$f(x) = 0$$

pour $f : x \to \mathrm{F}(x) - y$, où y reste fixé. Devant cette question, lorsque la dimension n vaut un, on peut se contenter de chercher à avoir une dérivée < 1, ce qui permet de trouver la solution comme un point fixe obtenu par itération, avec une vitesse de convergence linéaire, mais on peut aussi chercher à améliorer la convergence en passant à la méthode de Newton. Pour l'inversion locale, on peut aussi se contenter de se placer en situation contractante, ou bien tenter d'accélérer comme dans Newton.

Dans le premier cas on cherchera un point fixe de

$$\varphi : x \to x - \mathrm{A}^{-1}(\mathrm{F}(x) - y),$$

dans le deuxième on remplacera A, la différentielle en 0, par la différentielle $\mathrm{A}_n = d_{x_n}\mathrm{F}$ de F au dernier point x_n atteint, et on « visera » le prochain point x_{n+1} en résolvant l'équation approchée donnée par l'application affine g_n tangente à f au point x_n,

$$g_n : x \to f(x_n) + (d_{x_n} f)(x - x_n)$$

c'est-à-dire que x_{n+1} est donné par l'équation $g_n(x_{n+1}) = f(x_n) + \mathrm{A}_n(x_{n+1} - x_n) = 0$,

$$x_{n+1} = x_n - \mathrm{A}_n^{-1} f(x_n),$$

équation de Newton multi-dimensionnelle. Comme pour Newton sur $\mathbb{R}$, il faut travailler un peu pour garantir que x_{n+1} reste sous contrôle, mais dans ce cas la convergence est très rapide (quadratique si tout va bien).

Régler le premier cas est facile : puisque F est C^1, φ est C^1 et sa différentielle est

$$d_x\varphi = \mathrm{Id} - \mathrm{A}^{-1} d_x\mathrm{F},$$

qui est nulle quand $x = 0$. Il existe donc $t > 0$ tel que $\|d_x\varphi\| \leq 1/2$ quand $\|x\| \leq t$, et ceci ne dépend pas de $y \in \mathrm{B}(0, \rho)$; si on choisit $\rho > 0$ tel que $\rho \, \|\mathrm{A}^{-1}\| < t/2$, on aura

$$\|\varphi(0)\| = \|\mathrm{A}^{-1} y\| \leq t/2 \,;$$

par la majoration des accroissements finis, φ est $\frac{1}{2}$-contractante dans le convexe fermé (complet) $\mathrm{C} = \overline{\mathrm{B}(0,t)}$, et

$$\|\varphi(x)\| \le \|\varphi(0)\| + \|\varphi(x) - \varphi(0)\| \le \|\varphi(0)\| + \frac{1}{2}\,\|x\| \le t,$$

donc φ est une application strictement contractante de C dans C, qui admet un point fixe x, et $\varphi(x) = x$ entraîne $\mathrm{F}(x) - y = 0$.

1.5. *Fractalité : fonction de Cantor, ensemble triadique*

On désigne par X l'ensemble des fonctions continues f sur $[0,1]$ telles que $f(0) = 0$, $f(1) = 1$ et on définit sur X l'application T qui associe à $f \in \mathrm{X}$ la fonction $\mathrm{T}f$ définie par

$$(\mathrm{T}f)(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} f(3x) & \text{quand } 0 \le x \le 1/3, \\ \frac{1}{2} & \text{quand } 1/3 \le x \le 2/3, \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2} f(3x-2) & \text{quand } 2/3 \le x \le 1. \end{cases}$$

On voit facilement que T est 1/2-contractante, donc admet un point fixe $f \in \mathrm{X}$: c'est la *fonction de Cantor*, qui est constante sur tous les intervalles extérieurs à l'ensemble triadique.

L'espace des fermés muni de la distance de Hausdorff est complet, on peut y jouer au point fixe : à chaque fermé $\mathrm{F} \subset [0,1]$ contenant 0 et 1, associons le fermé T(F) qui est la réunion de l'homothétique $\mathrm{H} = \frac{1}{3}\,\mathrm{F}$ et du translaté par 2/3 de cet homothétique, soit $2/3 + \mathrm{H}$,

$$\mathrm{TF} = \mathrm{H} \cup (2/3 + \mathrm{H}).$$

L'ensemble triadique de Cantor est le point fixe de cette transformation. On peut facilement accéder à des généralisation multi-dimensionnelles plus jolies à dessiner, comme le *tapis de Sierpinski*, le *joint de culasse de Sierpinski* (Sierpinski's gasket) ; pour ce dernier, prendre dans $\mathbb{R}^2$ les fermés bornés F contenant les trois points $(0,0)$, $(1,0)$ et $(1/2, \sqrt{3}/2)$; définir T(F) comme la réunion de l'homothétique 1/3 de F et de ses deux translatés de vecteurs $(2/3, 0)$ et $(1/3, \sqrt{3}/3)$. Les variations sur ce thème sont innombrables...

2. Théorème de Brouwer

Théorème. *Si* C *est un convexe compact d'un espace vectoriel de dimension finie et si* T *est une application continue de* C *dans* C, *alors* T *admet un point fixe.*

Si $\mathrm{Y} \subset \mathrm{X}$, une *rétraction* de X sur Y est une application r de X dans Y telle que $r(y) = y$ pour tout $y \in \mathrm{Y}$. Si r est une rétraction continue de la boule unité B de $\mathbb{R}^n$ sur la sphère unité S, alors $x \in \mathrm{B} \to -r(x) \in \mathrm{B}$ est une application continue de B sans point fixe, ce qui est impossible par Brouwer.

Corollaire. *Il n'existe pas de rétraction continue de la boule unité* B *de* $\mathbb{R}^n$ *sur son bord* $\mathrm{S} = \partial\mathrm{B}$ *(la sphère unité).*

Il n'est pas très difficile de retrouver Brouwer à partir du corollaire : si T opérait de la boule dans elle-même sans point fixe, on définirait $r(x)$ ainsi : on trace la demi-droite issue de $\mathrm{T}x$ et passant par x ; elle coupe la sphère en $r(x)$. Ce serait une rétraction continue, ce qui est impossible.

Le théorème du *champ rentrant* est un autre corollaire assez parlant du théorème de Brouwer : *si* $x \to \mathrm{V}(x)$ *est un champ de vecteurs continu sur la boule unité* B *de* $\mathbb{R}^n$ *tel que* $\mathrm{V}(x) \cdot x < 0$ *pour tout* x *de la sphère unité, il existe un point* x *de la boule unité* B *tel que* $\mathrm{V}(x) = 0$.

On peut démontrer le corollaire avec la formule de Stokes, ou bien montrer Brouwer avec des triangulations et le lemme de Sperner (fondamentalement c'est la même chose : la formule de Stokes peut se montrer en constatant des annulations sur une triangulation). En dimension deux, on peut remplacer Stokes par une utilisation de l'intégrale de Cauchy.

Il existe depuis une trentaine d'années des algorithmes pour trouver des points fixes donnés par le théorème de Brouwer. On en reparlera une autre fois...

Des versions multi-applications sont commodes dans certaines situations : on associe à chaque $x \in \mathrm{C}$ un convexe fermé non vide $\mathrm{T}(x) \subset \mathrm{C}$, de façon que : si (x_n) tend vers x, si $y_n \in \mathrm{T}(x_n)$ tend vers y, alors $y \in \mathrm{T}(x)$. Il existe alors un point fixe pour T, c'est-à-dire un point $x \in \mathrm{C}$ tel que $x \in \mathrm{T}(x)$.

2.1. *Applications : Perron-Frobenius, point selle*

Considérons une matrice carrée A telle que $a_{i,j} > 0$ pour tous i, j. On lui associe une application T qui transforme tout vecteur x de $\mathbb{R}^n$ à coordonnées positives, vu comme matrice-colonne $\mathbf{x}$, en la matrice-colonne image

$$\mathrm{T}\mathbf{x} = \Big(\sum_{i,j} a_{i,j}\, x_j\Big)^{-1} \mathrm{A}\mathbf{x}.$$

Cette application T est continue du convexe compact

$$\mathrm{C} = \{x : x_i \geq 0,\ \sum_i x_i = 1\}$$

dans lui-même ; elle a donc un point fixe, qui est vecteur propre de A, avec valeur propre > 0 (ce résultat, antérieur à Brouwer, peut se démontrer autrement).

Autre application : considérons le convexe compact $\Sigma \subset \mathbb{R}^n$ des vecteurs x à coordonnées ≥ 0 tels que $\sum_{i=1}^n x_i = 1$. Définissons une fonction φ sur $\Sigma \times \Sigma$ par

$$\varphi(x, y) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{i,j}\, x_i\, y_j.$$

On peut montrer avec Brouwer (mais aussi sans !) que cette fonction admet un *point selle* $(\widehat{x}, \widehat{y}) \in \Sigma \times \Sigma$, c'est-à-dire un point tel que

$$\varphi(\widehat{x}, y) \leq \varphi(\widehat{x}, \widehat{y}) \leq \varphi(x, \widehat{y})$$

pour tous $x, y \in \Sigma$. Ce résultat est lié à la notion de *stratégie mixte* pour les jeux de somme nulle.

2.2. *Schauder, Peano*

Le théorème de Brouwer est faux pour la boule unité d'un espace de Banach de dimension infinie (voir l'exercice plus loin), mais on a toutefois le *théorème de Schauder* suivant.

Théorème. *Si* C *est un convexe compact d'un espace de Banach* E *et si* T *est une application continue de* C *dans* C, *alors* T *admet un point fixe.*

En très très gros : c'est la compacité de C qui permet de « l'approcher » par un ensemble fini, qui engendre un sous-espace de dimension finie de E et permet de se ramener au théorème de Brouwer.

Reprenons la transformation T de l'équation (1), dont les points fixes y sont solutions de l'équation différentielle $y' = \mathrm{F}(y)$. Supposons $|\mathrm{F}| \le 1$ dans $\mathbb{R}$, posons

$$\mathrm{X} = \{y : y \text{ 1-Lipschitz sur } [0, \tau],\ y(0) = y_0\},$$

muni de la distance induite par la norme uniforme. Cet ensemble est compact d'après Ascoli. On a pour toute fonction continue y, et $t, u \in [0, \tau]$

$$\Bigl|(\mathrm{T}y)(t) - (\mathrm{T}y)(u)\Bigr| = \Bigl|\int_u^t \mathrm{F}(y(s))\, ds\Bigr| \le |t - u|,$$

ce qui montre que T envoie dans X ; la continuité uniforme de F permet de voir que T est continue de X dans X, et Schauder nous donne un point fixe. On a ainsi montré l'existence de solution pour une équation différentielle $y' = \mathrm{F}(y)$, où F est seulement supposée continue : c'est un cas du *théorème de Peano*. Ce théorème est antérieur au théorème de Brouwer et possède une démonstration « à la main ». Quand on applique le théorème de Peano, on perd l'unicité de la solution. Par exemple, toutes les fonctions

$$y_a(t) = (t - a)^2 \text{ si } t \ge a, \quad y_a(t) = 0 \text{ sinon},$$

sont solutions de l'équation $y' = 2\sqrt{|y|}$, $y(0) = 0$ quand $a \ge 0$. La fonction $\mathrm{F}(t) = 2\sqrt{|t|}$ est continue, mais n'est pas localement lipschitzienne au voisinage de 0.

Si on ne suppose pas brutalement que $|\mathrm{F}| \le 1$ il faut ruser beaucoup plus. Si F n'est pas bornée sur $\mathbb{R}$, la solution peut exploser en temps fini (même dans le cadre localement lipschitzien : considérer l'équation différentielle $y' = y^2$, $y(0) = 1$ dont la solution est $y(t) = 1/(1 - t)$, qui tend vers $+\infty$ lorsque $t \to 1-$). On ne peut donc pas imposer *a priori* et sans condition la longueur τ de l'intervalle $[0, \tau]$ sur lequel la solution peut exister.

Supposons que $|\mathrm{F}| \le \mathrm{M}$ dans $[y_0 - b, y_0 + b]$, posons $\tau = b/\mathrm{M}$ et

$$\mathrm{X} = \{y : y \text{ M-Lipschitz sur } [0, \tau],\ y(0) = y_0\}$$

Si $y \in \mathrm{X}$, on a $|y(t) - y_0| = |y(t) - y(0)| \le \mathrm{M}\, t \le b$ quand $t \in [0, \tau]$, donc y prend ses valeurs dans $[y_0 - b, y_0 + b]$ et

$$\bigl|(\mathrm{T}y)(t) - (\mathrm{T}y)(u)\bigr| = \Bigl|\int_u^t \mathrm{F}(y(s))\, ds\Bigr| \le \mathrm{M}\, |t - u|,$$

ce qui montre que T opère de X dans lui-même. On obtient donc par Schauder une solution dans $[0, \tau]$, telle que $y(0) = y_0$, quand on peut trouver b tel que $|\mathrm{F}| \le \mathrm{M}$ dans $[y_0 - b, y_0 + b]$ et $b \ge \tau\, \mathrm{M}$.

Exemple. Pour l'équation différentielle $y' = y^2$ avec $y_0 = 1$, on peut dire que $\mathrm{F}(y) = y^2$ est bornée par $\mathrm{M} = (1+b)^2$ dans $[y_0 - b, y_0 + b]$, et le raisonnement précédent donne $\tau = b/(1+b)^2$ qu'on peut optimiser en prenant $b = 1$; on obtient l'assurance d'une solution sur $[0, 1/4]$, alors que la solution existe pour tout $\tau < 1$. C'est pas si mal.

Exercice. On définit une application T de la boule unité (fermée) B de $\ell^2(\mathbb{N})$ dans elle-même, en définissant pour tout $x \in \mathrm{B}$ la suite image $\mathrm{T}x = (\mathrm{T}x)_{n \ge 0} \in \ell^2(\mathbb{N})$ par

$$\forall n \ge 0, \quad (\mathrm{T}x)_n = (1 - \|x\|_2^2)\, e_0 + \sum_{n=1}^{\infty} x_{n-1}\, e_n,$$

où $(e_n)_{n \ge 0}$ désigne la base hilbertienne usuelle de l'espace $\ell^2(\mathbb{N})$,

$$e_n = (e_{n,i})_{i \ge 0}, \quad e_{n,i} = \delta_{n,i}.$$

Montrer que T est continue et n'a pas de point fixe. En déduire une rétraction continue de la boule unité sur la sphère.